

STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK HAMBURG
CARL VON OSSIEZKY Von-Melle-Park 3 · D-20146 Hamburg



Titel: Physikalische Zeitschrift -- 19.1918

Autor:

Purl: https://resolver.sub.uni-hamburg.de/kitodo/PPN891110208_0019

Rechtehinweis und Informationen

Der Inhalt ist gemeinfrei. Das Digitalisat darf frei genutzt werden.



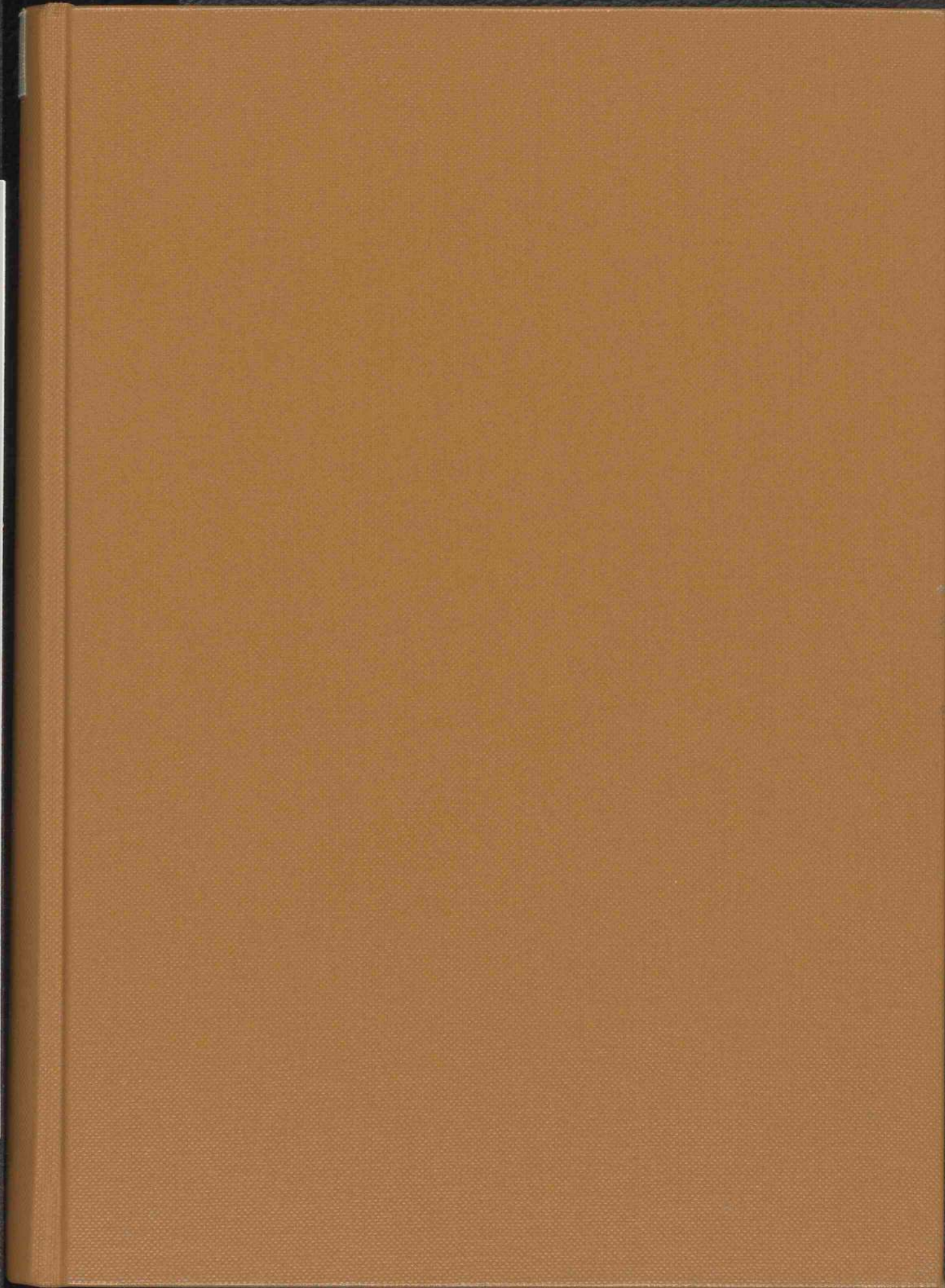
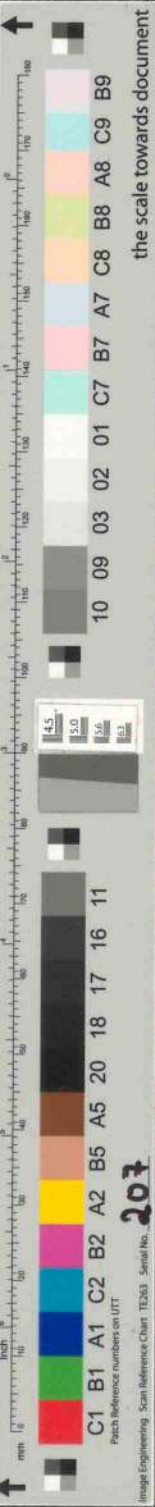
Zum Zwecke der Referenzierbarkeit und einem erleichterten Zugang zum Original bitten wir um folgenden Hinweis bei der Nachnutzung:

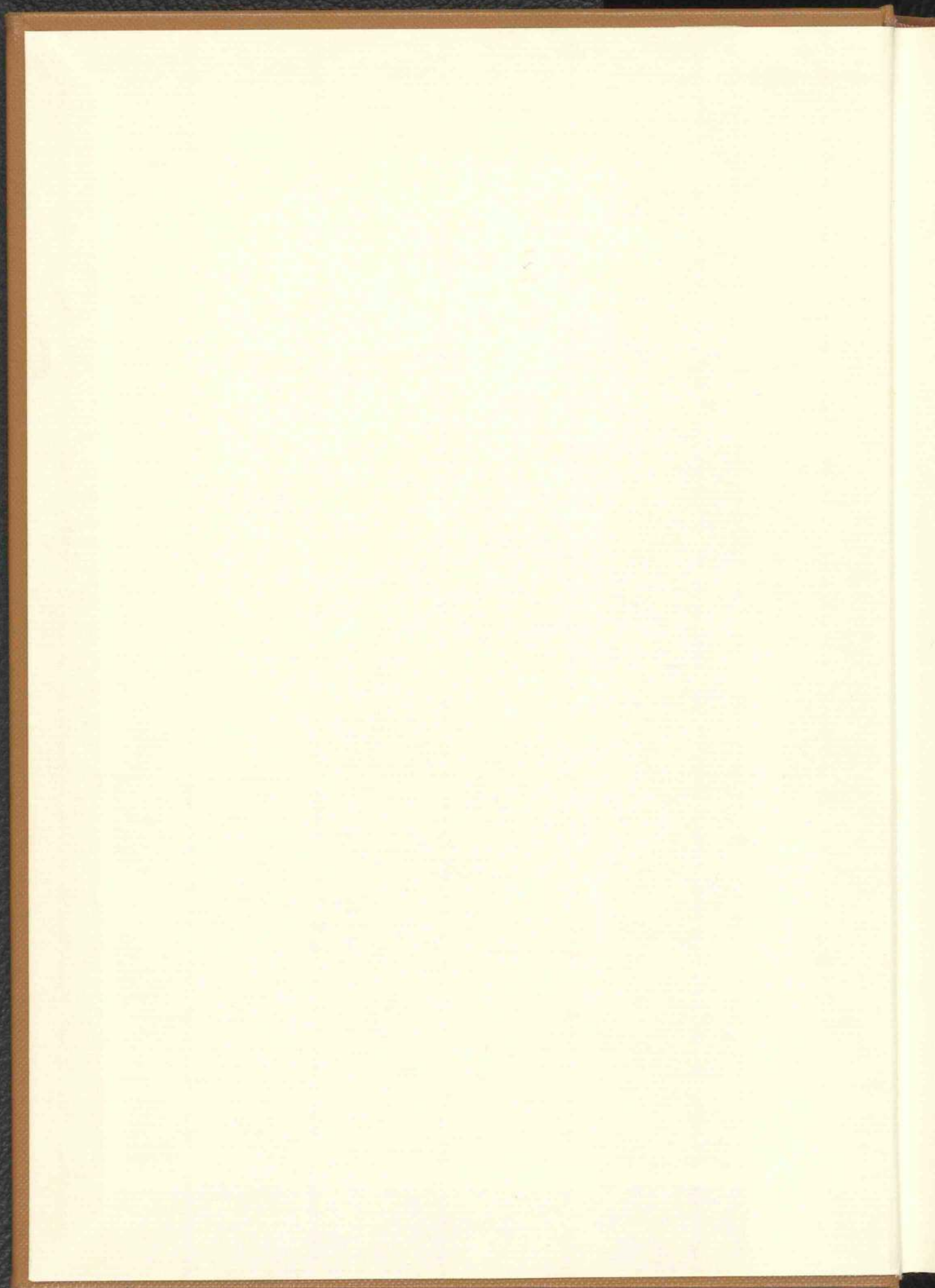
Original und digitale Bereitstellung:
Staats- und Universitätsbibliothek Hamburg Carl von Ossietzky
+ Signatur + Link zum Digitalisat

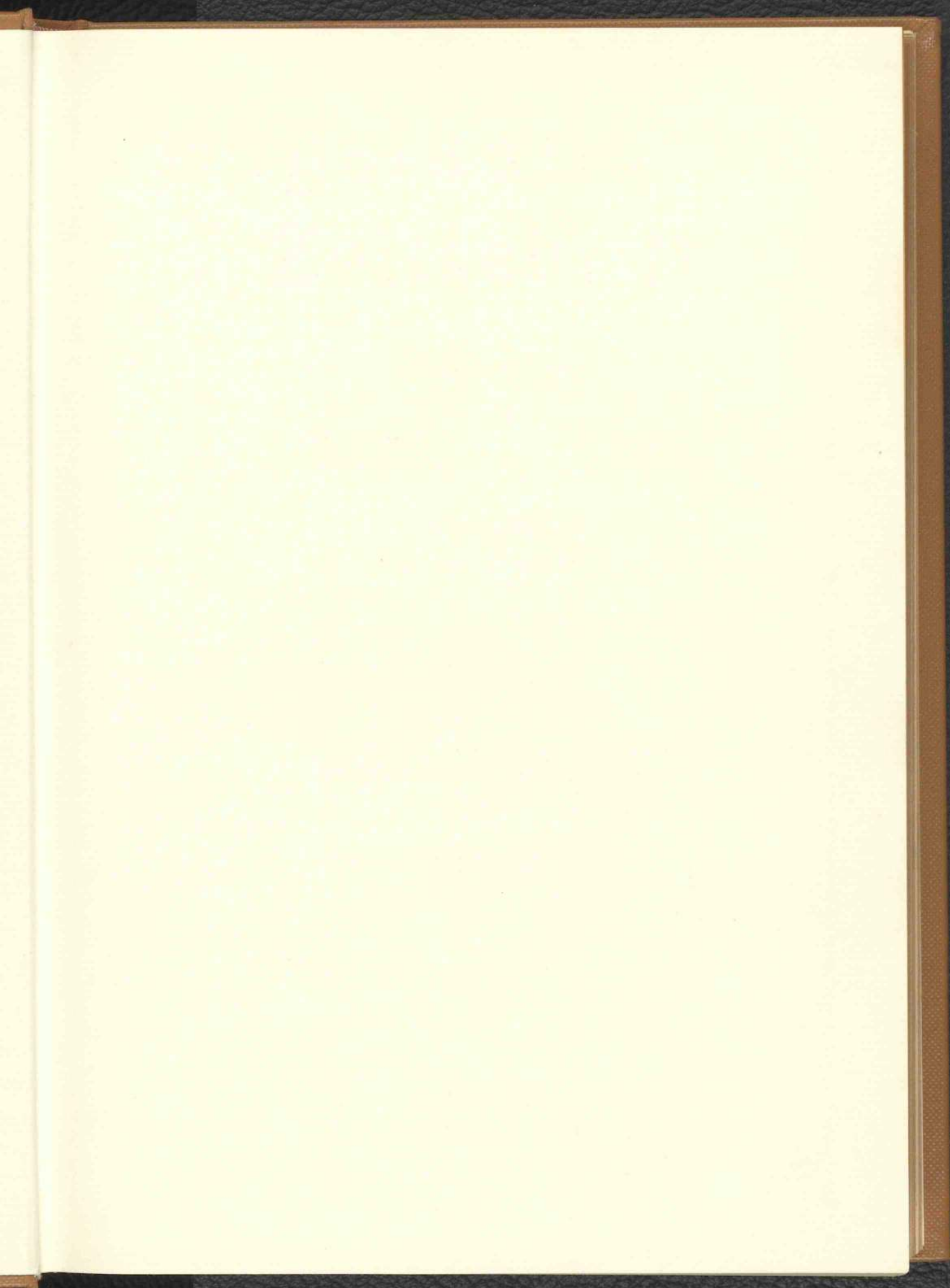
Qualitativ höherwertige Reproduktionen können in verschiedenen Formaten und Auflösungen kostenpflichtig erworben werden. Gebühren werden entsprechend der Gebührenordnung für wissenschaftliche Bibliotheken der Freien und Hansestadt Hamburg erhoben.

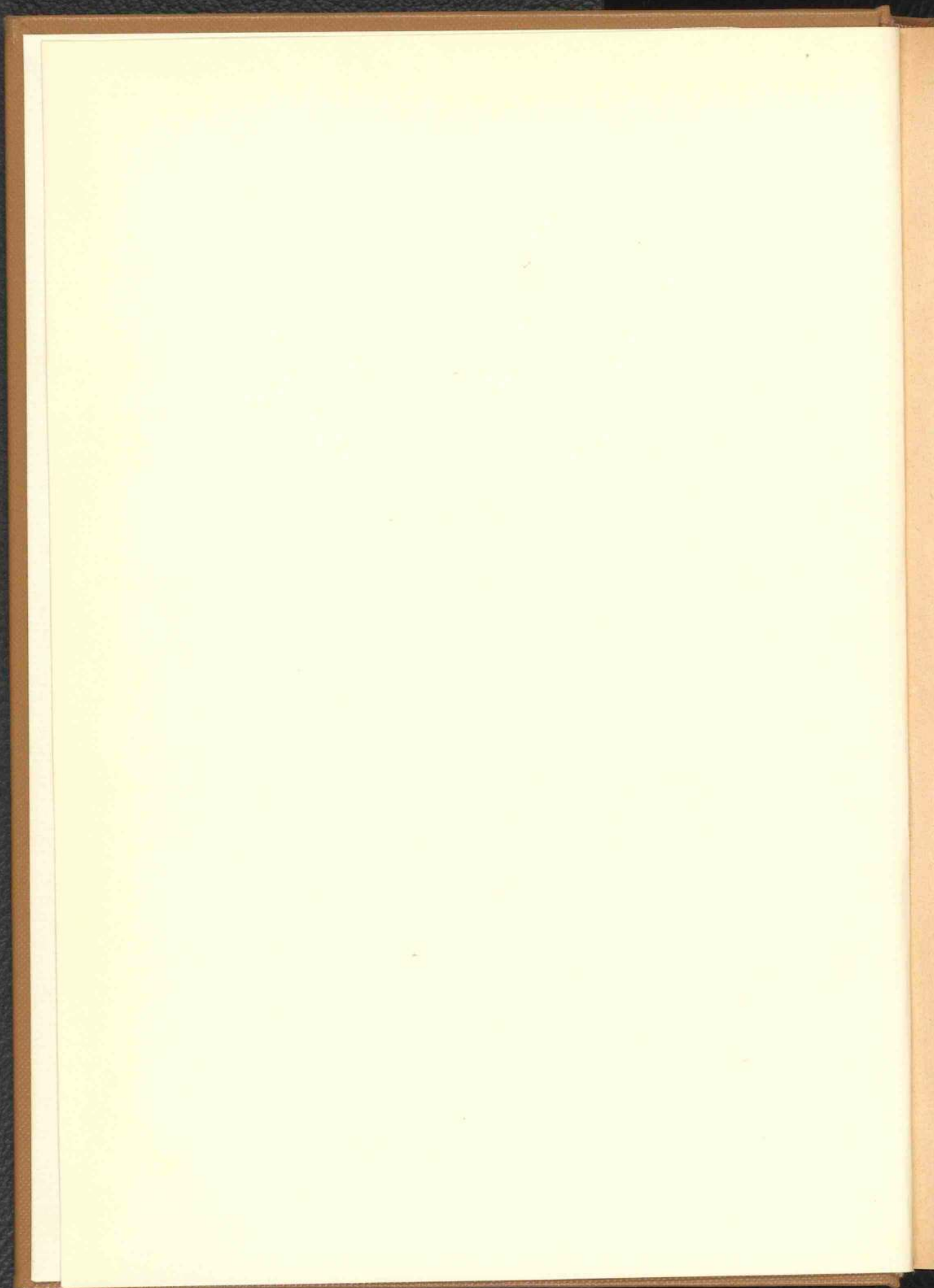
Sollten Sie das Objekt in Ihrer eigenen Veröffentlichung verwenden, würden wir uns freuen, wenn Sie uns darüber informieren und uns die bibliographischen Angaben Ihrer Publikation mitteilen. Wir freuen uns natürlich sehr, wenn Sie uns zur Information sogar ein Belegexemplar der Publikation zukommen lassen können.

Kontakt für Nachfragen:
Staats- und Universitätsbibliothek Hamburg - Carl von Ossietzky -
Von-Melle-Park 3
20146 Hamburg
auskunft@sub.uni-hamburg.de
<https://www.sub.uni-hamburg.de>









Y : 18
684

Physikalische Zeitschrift

Herausgegeben von

Dr. H. TH. SIMON und Dr. P. DEBYE
o. ö. Professor an der Universität Göttingen. o. ö. Professor an der Universität Göttingen.

Schriftleitung:

H. TH. SIMON

NEUNZEHNTER JAHRGANG

1918

Mit zehn Tafeln

Leipzig
Verlag von S. Hirzel
1918

1918
112



Autoren- und Sachregister.

Abkürzungen: (B.) = Besprechung, (R.) = Referat, (T.) = Tagesereignisse, (Z. B.) = Zusammenfassende Bearbeitung.

A.	Seite	B.	Seite
Absorptionsgesetze für Röntgenstrahlen, v. R. Glocker	66	Auerbach, F., Die Grundbegriffe der modernen	
Actinium: Die Muttersubstanz des —, ein neues radioaktives Element von langer Lebensdauer, v. O. Hahn u. L. Meitner	208, 438	Naturlehre. Einführung in die Physik. (B.)	128
Adiabatenhypothese und Boltzmannsches Prinzip, v. A. Smekal	137	— Ernst Abbe. (B.)	534
— — Berichtigung	200	Azetylsilber: Über —, v. J. Eggert. (R.)	432
Adsorptionstherapie: Grundfragen der —, v. H. Bechhold. (R.)	431		
Akkumulatoren: Die — und galvanischen Elemente, v. L. Lucas. (B.)	320	B.	
Aluminium: Das Raumgitter des —, v. P. Scherrer	23	Ballistik, v. H. Lorenz. (B.)	28
Ambronn, R., Über die elektrische Leitfähigkeit von Natron-Kalk-Silikat-Gläsern	401	— Lehrbuch der —, v. C. Cranz. I. (B.)	101
Antikathodenmetall: Untersuchungen über das kontinuierliche Röntgenspektrum. (Die Unabhängigkeit vom —), v. J. E. Lilienfeld	263	Bandenspektren: Über die Störungen in den Linienserien der —, v. T. Heurlinger	316
— — Ergänzende Mitteilung	514	Bär, R., Bemerkung zu der Arbeit von Irene Parankiewicz: „Größen und elektrische Ladungen von kleinen Schwefel-, Selen- und Quecksilberkugeln, bestimmt aus deren Fallgeschwindigkeit und Farbe“	373
Antimonlegierungen: Über die spezifischen Wärmen von Blei—, v. R. Durrer	86	Bauer, Hans, Über die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes	163
Äquivalenzgesetz: Zur Anwendung des Einsteinschen photochemischen —, v. W. Nernst. (R.)	430	Bauer, Heinz, Physik der Röntgenologie. (B.)	272
Astronomische Refraktion: Untersuchungen über die —, v. E. Großmann. (B.)	534	Bechhold, H., Grundfragen der Adsorptionstherapie. (R.)	430
Asymmetrischer Kreisell: Zur Quantelung des —, v. F. Reiche	394	Bender, J., Über die kritische Temperatur des Quecksilbers	410
Asymmetrische Moleküle: Über Koppelung von Elektronenringen und das optische Drehungsvermögen —, v. A. Landé	500	Benedict, E. u. H. Senfleben, Eine Methode zur Temperaturbestimmung leuchtender Flammen	180
Atmosphäre: Über die Verteilung radioaktiver Gase in der freien —, v. V. F. Hess u. W. Schmidt	109	Bewegte Medien: Mathematische Analogie zwischen einem Problem aus der Optik — und einer Aufgabe aus dem Gebiete der Flugzeugbewegung, v. Ph. Frank	2
— Über die Ursache der Zunahme der Ionisation der — mit der Höhe, v. A. Gockel	144	Biedermann, R., Die Sprengstoffe, Ihre Chemie und Technologie. (B.)	464
Atom: Der innere Aufbau des chemischen — und seine Erforschung durch Röntgenstrahlen, v. A. Sommerfeld. (B.)	463	Blei-Antimonlegierungen: Über die spezifischen Wärmen von —, v. R. Durrer	86
Atome: Der erste und zweite Elektronenring der —, v. J. Kroo	307	Bleiarten: Beitrag zur Kenntnis und Auffassung isotoper —, v. K. Fajans. (R.)	437
Atombau: — und Röntgenspektren, v. A. Sommerfeld. I.	297	Blitze: Über die Ermittlung der zeitlichen Aufeinanderfolge zusammengehöriger — sowie über ein bemerkenswertes Beispiel dieser Art von Entladungen, v. B. Walter	273
— v. P. Debye u. P. Scherrer	474	Bock, H., Die Uhr. Grundlagen und Technik der Zeitmessung. (B.)	463
Atomgewicht: Über die Berechnung des Ortes der chemischen Elemente im periodischen System aus dem — und der Dichte, v. K. Fehrle	532	Bodenstein, M., Die Geschwindigkeit der Vereinigung von Stickoxyd mit Sauerstoff. (R.)	438
Atomgewichte: Über den Zusammenhang zwischen den — der chemischen Elemente, dem spezifischen Gewicht und der Wärmetönung, v. K. Fehrle	281	Bohrsches Atommodell: Über das —, v. A. Szarvassi	505
— Über die „Ganzzahligkeit“ der — und verwandte Fragen, v. R. v. Mises	490	— — Berichtigung	556
Atommodell: Über das Bohrsche —, v. A. Szarvassi	505	Bohrsche Frequenzbedingung und Erhaltung des Impulsmomentes, v. A. Rubinowicz	441, 465
— — Berichtigung	556	Boltzmannsches Prinzip: Über die zum Beweise des — verwendete „wahrscheinlichste“ Verteilung, v. A. Smekal	7
		— Adiabatenhypothese und —, v. A. Smekal	137
		— — Berichtigung	200

	Seite
Born, M., Über die ultraroten Eigenschwingungen zweiatomiger Kristalle.	539
Börner, H., Lehrbuch der Physik. (B.)	533
— Physikalische Aufgabensammlung hierzu v. G. Mohrmann. (B.)	533
Braun, Ferdinand f. (H. Rohmann)	537
Brechungsindex: Über den Einfluß ultraroter Eigenfrequenzen auf den — im sichtbaren Spektralgebiet, v. J. Wimmer	483
— Berichtigung	530
Bucherer: Zur Theorie der Versuche von Kaufmann und — über β -Strahlen, v. R. Malmström	43
Budde, E., Über Schwebungen. (Antwort an Herrn Waetzmann.)	60
— Bemerkung hierzu, v. E. Waetzmann	177
— Über die Bildung von Kombinationstönen und Obertönen	321
Bunsengesellschaft: Hauptversammlung der Deutschen — für angewandte physikalische Chemie vom 8.—10. April 1918 in Berlin, v. A. Coehn	429

C.

Cederberg, J. W., Die thermodynamische Berechnung chemischer Affinitäten von homogenen und heterogenen Gasreaktionen. (B.)	368
Chemie: Lehrbuch der physikalischen —, v. K. Jellinek. II. (B.)	367
Chemische Affinitäten: Die thermodynamische Berechnung — von homogenen und heterogenen Gasreaktionen, v. J. W. Cederberg. (B.)	368
Chemisches Atom: Der innere Aufbau des — und seine Erforschung durch Röntgenstrahlen, v. A. Sommerfeld. (B.)	463
Chemische Elemente: Über den Zusammenhang zwischen den Atomgewichten der —, dem spezifischen Gewicht und der Wärmetönung, v. K. Fehrle	281
— Über die Berechnung des Ortes der — im periodischen System aus dem Atomgewicht und der Dichte, v. K. Fehrle	532
Coehn, A., Hauptversammlung der Deutschen Bunsengesellschaft für angewandte physikalische Chemie vom 8.—10. April 1918 in Berlin	429
Cranz, C., Lehrbuch der Ballistik. I. (B.)	101
Cunninghamsche Korrektur des Stokesschen Widerstandsgesetzes: Ein neuerlicher Beweis für die Gültigkeit der —, v. I. Parankiewicz	280

D.

Debye, P. u. P. Scherrer, Atombau	474
Debye-Scherrersche Röntgen-Spektrogramme: Über die mathematische Auswertung der —, v. A. Johnsen u. O. Toeplitz	47
Des Coudres, Th., Wilhelm Feddersen f.	393
Deutsch, W., Metallphysik. (B.)	128
Deutschland, G., Über die Anordnung der Fixsterne im Raum. (Z. B.)	286
Dichte: Über die Berechnung des Ortes der chemischen Elemente im periodischen System aus dem Atomgewicht und der —, v. K. Fehrle	532
Dichteschwankungen: Nachtrag zu meiner Veröffentlichung über Temperatur- und —, v. M. v. Laue	23
— Die linearen Dimensionen der —, v. L. S. Ornstein u. F. Zernike.	134
Dieterici: Beobachtung der Horizontalintensität des Erdmagnetismus mit dem Spulenmagnetometer von C. —, v. M. Reinhold	22
Diffusion und Statistik, v. A. Podjed	39
— Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der —, v. Ph. Frank	516
Durrer, R., Über die spezifischen Wärmen von Blei-Antimonlegierungen	86
Dynamische Meteorologie, v. F. M. Exner. (B.)	272

E.

Eder, J. M., Johann Heinrich Schulze. (B.)	318
Eggert, J., Über Azetylsilber. (R.)	432
Eigenfrequenzen: Über den Einfluß ultraroter — auf den Brechungsindex im sichtbaren Spektralgebiet, v. J. Wimmer	483
— Berichtigung	530
Eigenschwingungen: Über die ultraroten — zweiatomiger Kristalle, v. M. Born	539
Einatomige Metalle: Widerstandsänderung — mit der Temperatur, v. E. Grüneisen	382
Einstein, A., Notiz zu E. Schrödingers Arbeit: „Die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes“	115
— Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie. (B.)	152
— Bemerkung zu Herrn Schrödingers Notiz „Über ein Lösungssystem der allgemein kovarianten Gravitationsgleichungen“	165
Einsteinsche Gravitationsgleichungen: Über die formale Analogie zwischen den elektromagnetischen Grundgleichungen und den — erster Näherung, v. H. Thirring	204
Einsteinsche Gravitationstheorie: Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der —, v. H. Thirring	33
— Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der —, v. J. Lense u. H. Thirring	156
Einsteinsches photochemisches Äquivalentgesetz: Zur Anwendung des —, v. W. Nernst. (R.)	430
Eisenlegierungen: Über die Abhängigkeit der magnetischen Eigenschaften, des spezifischen Widerstandes und der Dichte der — von der chemischen Zusammensetzung und thermischen Behandlung, v. E. Gumlich. (R.)	434
Elektrisches Feld: Das — in Systemen von regelmäßig angeordneten Punktladungen, v. E. Madelung	524
Elektrische Ladungen: Bemerkung zu der Arbeit von Irene Parankiewicz: „Größen und — von kleinen Schwefel-, Selen- und Quecksilberkugeln, bestimmt aus deren Fallgeschwindigkeit und Farbe“, v. R. Bär	373
Elektrische Leitfähigkeit: Über die — von Natrium-Kalk-Silikat-Gläsern, v. R. Ambronn	401
Elektrizitätslehre: Angewandte —, v. P. Eversheim. (B.)	28
Elektrizitätstheorie: Über eine Beziehung der Gravitationskonstante zu den Grundgrößen der —, v. A. Haas	330
Elektrodynamik: Berichtigung zu dem Aufsatz: „Zur Theorie der —“, v. R. Malmström	388
Elektromagnetisches Feld: Mechanische Theorien des —, v. A. Korn. VI. VII. VIII. IX. X. 10, 201, 234, 327, 426	
Elektromagnetische Grundgleichungen: Über die formale Analogie zwischen den — und den Einsteinschen Gravitationsgleichungen erster Näherung, v. H. Thirring	204
Elektronenring: Der erste und zweite — der Atome, v. J. Kroo	307
Elektronenringe: Über Koppelung von — und das optische Drehungsvermögen asymmetrischer Moleküle, v. A. Landé	500
Elektrotechnik: Physikalische Grundlagen der —, v. F. F. Martens. (B.)	30
— Jahrbuch der —, v. K. Strecker. II. III. IV. (B.)	103
Elemente: Periodische Systeme der —, v. St. Meyer	178
— Über den Zusammenhang zwischen den Atomgewichten der chemischen —, dem spezifischen Gewicht und der Wärmetönung, v. K. Fehrle	281
— Über die Berechnung des Ortes der chemischen	

— im periodischen System aus dem Atomgewicht und der Dichte, v. K. Fehrle	Seite 532
Energieabsorption in Schallantennen erster Ordnung, v. H. Lichte	17
Energiekomponenten: Die — des Gravitationsfeldes, v. E. Schrödinger	4
— — Notiz hierzu, v. A. Einstein	115
— — Bemerkung v. H. Bauer	163
Erde: Die Bewegung der Drehachse der elastischen — im Erdkörper, v. W. Schweydar. (B.)	415
Erdachse: Unveränderlichkeit oder Veränderlichkeit der Lage der —? v. E. Hinselmann. (B.)	487
Erdmagnetische Schwankung: Besitzt die tägliche — in der Erdoberfläche ein Potential? v. A. Schmidt	349
Erdmagnetismus: Beobachtung der Horizontalintensität des — mit dem Spulenmagnetometer von C. Dieterici, v. M. Reinhold.	22
Erfindungsinstitut: Ein deutsches —. (T.)	80
Estorff, W., Beiträge zur Kenntnis der Kugelfunktenstrecke. (B.)	390
Eversheim, P., Angewandte Elektrizitätslehre (B.)	28
Exner, F. M., Dynamische Meteorologie. (B.)	272

F.

Fajans, K., Beitrag zur Kenntnis und Auffassung isotoper Bleiarten. (R.)	437
Fallgeschwindigkeit: Bemerkung zu der Arbeit von Irene Parankiewicz: „Größen und elektrische Entladungen von kleinen Schwefel-, Selen- und Quecksilberkugeln, bestimmt aus deren — und Farbe“, v. R. Bär	373
Farbenlehre: Goethes — im Urteile der Zeit, v. A. Sommerfeld. (B.)	151
Feddersen, Wilhelm f. (Th. Des Coudres.)	393
Federhofer, K., Berichtigung zu „Über das Prinzip der kleinsten Formänderungsarbeit“	80
Fehrle, K., Über den Zusammenhang zwischen den Atomgewichten der chemischen Elemente, dem spezifischen Gewicht und der Wärmetönung — Über die Berechnung des Ortes der chemischen Elemente im periodischen System aus dem Atomgewicht und der Dichte	532
Feld: Mechanische Theorien des elektromagnetischen —, v. A. Korn. VI. VII. VIII. IX. X. 10, 201, 234, 327, 426	
— Das elektrische — in Systemen von regelmäßig angeordneten Punktladungen, v. E. Madelung	524
Fernsprecher: 40 Jahre —, Stephan-Siemens-Rathenau, v. O. Große. (B.)	416
Fernsprechwesen: Das —, v. W. Winkelmann. (B.)	29
Fixsterne: Über das System der —, v. K. Schwarzschild. (B.)	152
— Über die Anordnung der — im Raum, v. G. Deutschland. (Z. B.)	286
Fixsternsystem: Über die Anwendbarkeit der kinetischen Gastheorie auf das —, v. J. Lense	182
Flächen: Spiegelung an — mit negativer Krümmung, v. P. Selényi.	105, 386
Flamm, L., Zum gegenwärtigen Stand der Quantentheorie. (Z. B.)	116
— Bemerkungen zu den statistischen Grundlagen der Quantentheorie	166
Flammen: Eine Methode zur Temperaturbestimmung leuchtender —, v. H. Senftleben u. E. Benedict.	180
Flug: Die hydrodynamischen Grundlagen des —, v. R. Grammel. (B.)	319
Flugzeugbewegung: Mathematische Analogie zwischen einem Problem aus der Optik bewegter Medien und einer Aufgabe aus dem Gebiete der —, v. Ph. Frank	2

Flüssige Kristalle: Die Hauptsätze der Lehre von den —, v. O. Lehmann. (Z. B.)	Seite 73, 88
Flüssige Luft: Über Erfahrungen in der Anwendung von — als Sprengstoff, v. R. Lepsius. (R.)	431
Formatreform: Die Theorie der —, v. W. Porstmann	311
Formatsystem: Das metrische —, v. W. Porstmann	417
Frank, Ph., Mathematische Analogie zwischen einem Problem aus der Optik bewegter Medien und einer Aufgabe aus dem Gebiete der Flugzeugbewegung	2
— Josef Popper-Lynkeus. Zu seinem achtzigsten Geburtstag	57
— Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Diffusion	516
Frequenzbedingung: Bohrsche — und Erhaltung des Impulsmomentes, v. A. Rubinowicz	441, 465
Fürth, R., Statistik und Wahrscheinlichkeitsnachwirkung.	421

G.

Galvanische Elemente: Die Akkumulatoren und —, v. L. Lucas. (B.)	Seite 320
Galvanischer Unterbrecher, v. W. Kasperowicz	187
Ganzzahligkeit: Über die — der Atomgewichte und verwandte Fragen, v. R. v. Mises	490
Gase: Über die Verteilung radioaktiver — in der freien Atmosphäre, v. V. F. Hess u. W. Schmidt — Aus der Ionenlehre der —, v. H. Greinacher	109, 188
Gashäute: Eine Zusammenstellung und Kritik der Literatur über — an der Oberfläche fester Körper. Preisausschreiben. (T.)	416
Gasreaktionen: Die thermodynamische Berechnung chemischer Affinitäten von homogenen und heterogenen —, v. J. W. Cederberg. (B.)	368
Gastheorie: Über die Anwendbarkeit der kinetischen — auf das Fixsternsystem, v. J. Lense	182
Gauß, C. Fr., Werke. Bd. X. Abt. I. (B.)	271
Geometrische Strukturtheorien: Die Resultate der — und die Ergebnisse der Analyse durch Röntgenstrahlen, v. W. Voigt. (Z. B.)	237, 331, 357, 446
Geschwindigkeits-Verteilungs-Satz: Eintache und exakte Ableitung des Maxwell'schen —, v. R. v. Mises	81
Glatzel, B., Elektrische Methoden der Momentphotographie. (B.)	29
— Methoden zur Erzeugung von Hochfrequenzenergie. (B.)	30
Gleichstrom: Neonbogenlampe für —, v. F. Schröter. (R.)	431
Gleichstrommaschine: Die Geometrie der —, v. O. Grotian. (B.)	29
Glimmstrom: Zur Theorie des —, v. R. Holm. VII.	548
Glocker, R., Absorptionsgesetze für Röntgenstrahlen — Über die Berechnung der sekundären Röntgenstrahlung einer Platte	66, 249
Gockel, A., Über die Ursache der Zunahme der Ionisation der Atmosphäre mit der Höhe. . . .	114
Goethes Farbenlehre im Urteile der Zeit, v. A. Sommerfeld. (B.)	151
Grammel, R., Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges. (B.)	319
Graphisches Rechnen: Leitfadens zum —, v. R. Mehmke. (B.)	390
Graetz, L., Die Physik. (B.)	102
Gravitationsfeld: Die Energiekomponenten des —, v. E. Schrödinger	4
— — Notiz hierzu, v. A. Einstein.	115
— — Bemerkung v. H. Bauer	163
Gravitationsgleichungen: Über ein Lösungssystem der allgemein kovarianten —, v. E. Schrödinger — — Bemerkung hierzu, v. A. Einstein	20, 165
— Über die formale Analogie zwischen den elektro-	

	Seite		Seite
magnetischen Grundgleichungen und den Einsteinschen — erster Näherung, v. H. Thirring	204	Interpolation und genäherte Quadratur: Vier grundlegende Abhandlungen über — von Newton, Cotes, Gauß, Jacobi, v. A. Kowalewski. (B.)	488
Gravitationskonstante: Über eine Beziehung der — zu den Grundgrößen der Elektrizitätstheorie, v. A. Haas	330	Ionenlehre: Aus der — der Gase, v. H. Greinacher	188
Gravitationstheorie: Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen —, v. H. Thirring	33	Ionisation: Über die Ursache der Zunahme der — der Atmosphäre mit der Höhe, v. A. Gockel	114
— Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen —, v. J. Lense u. H. Thirring	156	Iridium: Photographische Aufnahme des $P\alpha$ - und $-K$ -Spektrums, v. J. E. Lilienfeld u. H. Seemann	269
Greinacher, H., Aus der Ionenlehre der Gase.	188	Isotope Bleiarten: Beitrag zur Kenntnis und Auffassung —, v. K. Fajans. (R.)	437
Gripenberg, W. S., Einwirkung mechanischer Bearbeitung auf die Oberflächenschichten metallischen Selen	429		
Große, O., 40 Jahre Fernsprecher. Stephan-Siemens-Rathenau. (B.)	416	J.	
Großmann, E., Untersuchungen über die astronomische Refraktion. (B.)	534	Jablonowskische Gesellschaft: Preisaufgaben der Fürstlich — (T.)	296
Grottrian, O., Die Geometrie der Gleichstrommaschine. (B.)	29	Jaeger, F. M., Lectures on the principle of symmetry and its applications in all natural sciences. (B.)	391
— Eine Zahlenbeziehung zwischen drei Ordinaten der Hysteresisschleife	408	Jahrbuch der Elektrotechnik, v. K. Strecker. II. III. IV. (B.)	103
Grube, G., Über das elektromotorische Verhalten des Sauerstoffs und seine anodische Entwicklung unterhalb des reversiblen Sauerstoffpotentials. (R.)	439	Jellinek, K., Lehrbuch der physikalischen Chemie. II. (B.)	367
Grüneisen, E., Widerstandsänderung einatomiger Metalle mit der Temperatur	382	Johnsen, A. u. O. Toopitz, Über die mathematische Auswertung der Debye-Scherrerschen Röntgen-Spektrogramme.	47
Gumlich, E., Über die Abhängigkeit der magnetischen Eigenschaften, des spezifischen Widerstandes und der Dichte der Eisenlegierungen von der chemischen Zusammensetzung und thermischen Behandlung. (R.)	434	Jung, F., Zur Ableitung der Schwerefeldgleichungen	61
		K.	
H.		Kaiser-Wilhelm-Institut für physikalische Forschung. (T.)	16
Haas, A. E., Die Grundgleichungen der Mechanik. (B.)	16	Kalk-Silikat-Gläser: Über die elektrische Leitfähigkeit von Natron —, v. R. Ambronn	401
— Über eine Beziehung der Gravitationskonstante zu den Grundgrößen der Elektrizitätstheorie	330	Kanalstrahlen: Weitere Versuche über eine durchdringende Sekundärstrahlung der —, v. M. Wolfke	205
Hahn, O. u. L. Meitner, Die Muttersubstanz des Actiniums, ein neues radioaktives Element von langer Lebensdauer	208	Karbide: Über —, v. O. Ruff. (R.)	433
— (R.)	438	Kasperowicz, W., Galvanischer Unterbrecher.	187
Handbuch der allgemeinen Chemie, herausgegeben von W. Ostwald und C. Drucker. II. (B.)	535	Kathodenmetall: Untersuchungen über das kontinuierliche Röntgenspektrum. Die Unabhängigkeit vom Anti —, v. J. E. Lilienfeld	263
Hartmann, J., Tabellen für das Rowlandsche und das internationale Wellenlängensystem. (B.)	104	— — Ergänzende Mitteilung	514
Hess, V. F. u. W. Schmidt, Über die Verteilung radioaktiver Gase in der freien Atmosphäre	109	Kaufmann: Zur Theorie der Versuche von — und Bucherer über β -Strahlen, v. R. Malmström	43
Heurlinger, T., Über die Störungen in den Linienserien der Bandenspektren	316	Kinetische Gastheorie: Über die Anwendbarkeit der — auf das Fixsternsystem, v. J. Lense	182
Hinselmann, E., Unveränderlichkeit oder Veränderlichkeit der Lage der Erdoberfläche? (B.)	487	Kohlenstab: Das Erweichen und Biegen eines — bei sehr hohen Temperaturen, v. J. Plotnikow	520
Hochfrequenzenergie: Methoden zur Erzeugung von —, v. B. Glatzel. (B.)	30	Kohlrausch, K. W. F., Über die Wellenlänge der harten γ -Strahlung von Radium	345
Holm, R., Zur Theorie des Glimmstroms. VII.	548	Kohlschütter, V., Die Erscheinungsformen der Materie. Vorlesungen über Kolloidchemie. (B.)	128
Holonomie Koordinaten: Eine einfache Herleitung der verallgemeinerten Lagrangeschen Gleichungen für nicht —, v. Cl. Schaefer. I. II.	129, 406	Kolloidchemie: Die Erscheinungsformen der Materie. Vorlesungen über —, v. V. Kohlschütter. (B.)	128
Hönigschmid, O., Über das Thoriumblei. (R.)	436	Kombinationstöne: Über die Bildung von — und Obertönen, v. E. Budde	321
Horizontalintensität: Beobachtung der — des Erdmagnetismus mit dem Spulenmagnetometer von C. Dieterici, v. M. Reinhold.	22	Koordinaten: Eine einfache Herleitung der verallgemeinerten Lagrangeschen Gleichungen für nicht-holonomie —, v. Cl. Schaefer. I. II.	129, 406
Hydrodynamische Grundlagen des Fluges: Die —, v. R. Grammel. (B.)	319	Korn, A., Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes. VI. VII. VIII. IX. X.	10, 201, 234, 327, 426
Hysteresisschleife: Eine Zahlenbeziehung zwischen drei Ordinaten der —, v. O. Grottrian	408	Körperliche Leiter: Über den Widerstand gewisser zusammengesetzter —, v. K. Lichtenecker	374
		Kovariante Gravitationsgleichungen: Über ein Lösungssystem der allgemeinen —, v. E. Schrödinger	20
I.		— — Bemerkung hierzu, v. A. Einstein	165
Impulsmoment: Bohrsche Frequenzbedingung und Erhaltung des —, v. A. Rubinowicz	441, 465	Kowalewski, A., Newton, Cotes, Gauß, Jacobi. Vier grundlegende Abhandlungen über Interpolation und genäherte Quadratur. (B.)	488
		Krauß, F., Die Grundgesetze der Wärmeleitung und ihre Anwendung auf plattenförmige Körper. (B.)	534

	Seite
— J., Grundzüge der maritimen Meteorologie und Ozeanographie. (B.)	415
Kreisel: Der — als Richtungsweiser, v. H. Usener. (B.)	343
— Bemerkungen hierzu, v. A. Sommerfeld u. H. Usener	487
— Zur Quantelung des asymmetrischen —, v. F. Reiche	394
Kristalle: Die Hauptsätze der Lehre von den flüssigen —, v. O. Lehmann. (Z. B.)	73, 88
— Über die ultraroten Eigenschwingungen zweiatomiger —, v. M. Born	539
Kristallonomie: Franz Neumanns Beiträge zur — aus den Jahren 1823 und 1826, v. C. Neumann. (B.)	104
Kristallstruktur: Die Bestimmung der — komplizierter Verbindungen, v. P. Niggli	225
Kroo, J., Der erste und zweite Elektronenring der Atome	307
Kugelfunktestrecke: Beiträge zur Kenntnis der —, v. W. Estorff. (B.)	390
Kühnen, F., Das Mittelwasser der Ostsee bei Travemünde, Marienleuchte, Wismar, Warnemünde, Arkona, Swinemünde, Pillau, Memel und das Mittelwasser der Nordsee bei Bremerhaven in den Jahren 1898 bis 1910. (B.)	296

L.

Lagrangesche Gleichungen: Eine einfache Herleitung der verallgemeinerten — für nichtholonome Koordinaten, v. Cl. Schaefer. I. II.	129, 406
Landé, A., Über Koppelung von Elektronenringen und das optische Drehungsvermögen asymmetrischer Moleküle.	500
Laqueur, E. u. H. Witte, Über den Schraum	142
Laski, G., Anwendung der Grundempfindungstheorie zur Größenbestimmung submikroskopischer Partikel.	369
Laue, M. v., Nachtrag zu meiner Veröffentlichung über Temperatur- und Dichteschwankungen	23
Lecher, E., Lehrbuch der Physik. (B.)	486
Lehmann, O., Die Hauptsätze der Lehre von den flüssigen Kristallen. (Z. B.)	73, 88
Leitfähigkeit: Über die elektrische — von Natron-Kalk-Silikat-Gläsern, v. R. Ambronn.	401
Lense, J., Über die Anwendbarkeit der kinetischen Gastheorie auf das Fixsternsystem	182
— u. H. Thirring, Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie	156
Lepsius, R., Über Erfahrungen in der Anwendung von flüssiger Luft als Sprengstoff. (R.)	431
Leuchtende Flammen: Eine Methode zur Temperaturbestimmung —, v. H. Senftleben u. E. Benedict.	180
Lichte, H., Energieabsorption in Schallantennen erster Ordnung	17
Lichtenecker, K., Über den Widerstand gewisser zusammengesetzter körperlicher Leiter	374
Lilienfeld, J. E., Untersuchungen über das kontinuierliche Röntgenspektrum. (Die Unabhängigkeit vom Antikathodenmetall.)	263
— Ergänzungen hierzu	514
— u. H. Seemann, Photographische Aufnahme des <i>Pr.</i> - und <i>Ir.-K.</i> -Spektrums	269
Linienreihen: Über die Störungen in den — der Bandenspektren, v. T. Heurlinger.	316
Lorenz, H., Ballistik. Die mechanischen Grundlagen der Lehre vom Schuß. (B.)	28
— Lehrbuch der technischen Physik. IV. (B.)	389
Lucas, L., Die Akkumulatoren und galvanischen Elemente. (B.)	320

M.

	Seite
Madelung, E., Das elektrische Feld in Systemen von regelmäßig angeordneten Punktladungen.	524
Magnetische Eigenschaften: Über die Abhängigkeit der —, des spezifischen Widerstandes und der Dichte der Eisenlegierungen von der chemischen Zusammensetzung und thermischen Behandlung, v. E. Gumlich. (R.)	434
Magnetische Mittelwerte des Jahres 1917, v. A. Schmidt	195
Malmström, R., Zur Theorie der Versuche von Kaufmann und Bucherer über β -Strahlen	43
— Versuch zur Erweiterung des Riemannschen Elementargesetzes	153
— Berichtigung zu dem Aufsatz: „Zur Theorie der Elektrodynamik“.	388
Martens, F. F., Physikalische Grundlagen der Elektrotechnik. (B.)	30
Materie: Die Erscheinungsformen der —, Vorlesungen über Kolloidchemie, v. V. Kohlschütter. (B.)	128
Maxwellscher Geschwindigkeits-Verteilungs-Satz: Einfache und exakte Ableitung des —, v. R. v. Mises	81
Mayer: Robert — zur Jahrhundertfeier seiner Geburt, v. J. I. Weyrauch. (B.)	104
Mechanik: Die Grundgleichungen der —, v. A. E. Haas. (B.)	16
Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes, v. A. Korn. VI. VII. VIII. IX. X. 10, 201, 234, 327, 426	
Mehmke, R., Leitfaden zum graphischen Rechnen. (B.)	390
Meißner, O., Die Jahresperiode der mikroseismischen Bewegung.	1
— Vergleichung der mikroseismischen Bewegung in de Bilt, Potsdam und Pulkowa	355
— Die Wärmedämmung	387
— Temperatur- und Regenveränderlichkeit in Berlin	521
Meitner, L., Die Lebensdauer von Radiothor, Mesothor und Thorium	257
— u. O. Hahn, Die Muttersubstanz des Actiniums, ein neues radioaktives Element von langer Lebensdauer	208, 438
Mesothor: Die Lebensdauer von Radiothor, — und Thorium, v. L. Meitner	257
Meßwandler: Wirkungsweise der Motorzähler und —, v. J. A. Möllinger. (B.)	152
Metalle: Widerstandsänderung einatomiger — mit der Temperatur, v. E. Grüneisen	382
Metallisches Selen: Einwirkung mechanischer Bearbeitung auf die Oberflächenschichten —, v. W. S. Gripenberg.	429
Metallphysik, v. W. Deutsch. (B.)	128
Meteor: Das detonierende — vom 3. April 1916 in Kurhessen, v. A. Wegener. (B.)	462
Meteorologie: Dynamische —, v. F. M. Exner. (B.)	272
— Grundzüge der maritimen — und Ozeanographie, v. J. Krauß. (B.)	415
Metrisches Formatsystem: Das —, v. W. Porstmann	417
Meyer, St., Periodische Systeme der Elemente.	178
— u. E. v. Schweidler, Die Nomenklatur der Radioelemente. (Briefk.)	30
Mikroseismische Bewegung: Die Jahresperiode der —, v. O. Meißner	1
— Vergleichung der — in de Bilt, Potsdam und Pulkowa, v. O. Meißner	355
Mises, R. v., Einfache und exakte Ableitung des Maxwellschen Geschwindigkeits-Verteilungs-Satzes	81
— Über die „Ganzzahligkeit“ der Atomgewichte und verwandte Fragen	490
Mittelwasser: Das — der Ostsee und der Nordsee, v. F. Kühnen. (B.)	296

Mohrmann, G., Physikalische Aufgabensammlung zu Börners Lehrbuch der Physik. (B.)	533
Moleküle: Über Koppelung von Elektronenringen und das optische Drehungsvermögen asymmetrischer δ —, v. A. Landé	500
Möllinger, J. A., Wirkungsweise der Motorzähler und Meßwandler. (B.)	152
Momentphotographie: Elektrische Methoden der —, v. B. Glatzel. (B.)	29
Monde: Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und — nach der Einsteinschen Gravitationstheorie, v. J. Lense u. H. Thirring.	156
Motorzähler: Wirkungsweise der — und Meßwandler, v. J. A. Möllinger. (B.)	152
Müller, A., Untersuchungen am kontinuierlichen Röntgenspektrum	489
Musikwissenschaft: Die Grundlage der — und das duale Reininstrument, v. A. v. Oettingen. (B.)	366

N.

Narbutt, J., Eine empirische Formel zur Berechnung der spezifischen Wärme des Wassers	513
Natron-Kalk-Silikat-Gläser: Über die elektrische Leitfähigkeit von —, v. R. Ambronn	401
Naturlehre: Die Grundbegriffe der modernen —, v. F. Auerbach. (B.)	128
Neonbogenlampe für Gleichstrom, v. F. Schröter	431
Nernst, W., Zur Anwendung des Einsteinschen photochemischen Äquivalentgesetzes. (R.)	430
Neumann, C., Franz Neumanns Beiträge zur Kristallonomie aus den Jahren 1823 und 1826. (B.)	104
Nickel: Zur Kenntnis des —Spektrums, v. J. E. Paulson	13
Niggli, P., Die Bestimmung der Kristallstruktur komplizierter Verbindungen.	225
Nomenklatur der Radioelemente: Die —. (Briefk.)	30
Normenlehre, v. W. Porstmann. (B.)	55

O.

Obertöne: Über die Bildung von Kombinationstönen und —, v. E. Budde	321
Optisches Drehungsvermögen: Über Koppelung von Elektronenringen und das — asymmetrischer Moleküle, v. A. Landé	500
Ornstein, L. S. u. F. Zernike, Die linearen Dimensionen der Dichteschwankungen	134
Oettingen, A. v., Die Grundlage der Musikwissenschaft und das duale Reininstrument. (B.)	366

P.

Paneth, F., Zur Frage des Wismutwasserstoffs. (R.)	433
Parankiewicz, I., Ein neuerlicher Beweis für die Gültigkeit der Cunninghamschen Korrektur des Stokesschen Widerstandsgesetzes	280
Parankiewicz: Bemerkung zu der Arbeit von Irene —: „Größen und elektrische Ladungen von kleinen Schwefel-, Selen- und Quecksilberkugeln, bestimmt aus deren Fallgeschwindigkeit und Farbe“, v. R. Bär	373
Paul, Th., Der Säuregrad des Brotes. (R.)	430
Paulson, J. E., Zur Kenntnis des Ni -Spektrums	13
Periodisches System: Über die Berechnung des Ortes der chemischen Elemente im — aus dem Atomgewicht und der Dichte, v. K. Fehrle	532
Periodische Systeme der Elemente, v. St. Meyer	178
Photochemisches Äquivalentgesetz: Zur Anwendung des Einsteinschen —, v. W. Nernst. (R.)	430
Photographie: Elektrische Methoden der Moment—, v. B. Glatzel. (B.)	29

Phototropie: Zur Kenntnis der —, v. F. Weigert. (R.)	438
Physik: Grundriß der —, v. L. Zehnder. (B.)	100
— Die —, v. L. Graetz. (B.)	102
— Die Grundbegriffe der modernen Naturlehre. Einführung in die —, v. F. Auerbach. (B.)	128
— Lehrbuch der —, v. E. Lecher. (B.)	486
— —, v. H. Börner. (B.)	533
Physikalische Aufgabensammlung, v. G. Mohrmann. (B.)	533
Physikalische Chemie: Lehrbuch der —, v. K. Jelinek. II. (B.)	367
Physikalisch-chemische Übungen, v. W. A. Roth. (B.)	248
Physikalisch-Technische Reichsanstalt. Neue Prüfungsgebühren. (T.)	248
Physiker: Große —, v. F. A. Schulze. (B.)	464
Planck, M., Vorträge über Quantentheorie. (T.)	176
Planeten: Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der — und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie, v. J. Lense u. H. Thirring.	156
Platin: Photographische Aufnahme des — und $Ir-K$ -Spektrums, v. J. E. Lilienfeld u. H. Seemann	269
Platte: Über die Berechnung der sekundären Röntgenstrahlung einer —, v. R. Glocker.	249
Plotnikow, J., Das Erweichen und Biegen eines Kohlenstabes bei sehr hohen Temperaturen	520
Podjed, A., Diffusion und Statistik.	39
Popper-Lynkeus, Josef. Zu seinem achtzigsten Geburtstag. (Ph. Frank.)	57
Porstmann, W., Normenlehre. (B.)	55
— Die Theorie der Formatreform.	311
— Das metrische Formatsystem	417
Potential: Besitzt die tägliche erdmagnetische Schwankung in der Erdoberfläche ein —? v. A. Schmidt	349
Protactinium: (—), die Muttersubstanz des Actiniums, ein neues radioaktives Element von langer Lebensdauer, v. O. Hahn u. L. Meitner.	208, 438
Punktladungen: Das elektrische Feld in Systemen von regelmäßig angeordneten —, v. E. Madelung.	524

Q.

Quadratur: Vier grundlegende Abhandlungen von Newton, Cotes, Gauß, Jacobi, über Interpolation und genäherte —, v. A. Kowalewski. (B.)	488
Quantelung: Zur — des asymmetrischen Kreisels, v. F. Reiche	394
Quantentheorie: Zum gegenwärtigen Stand der —, v. L. Flamm. (Z. B.)	116
— Bemerkungen zu den statistischen Grundlagen der —, v. L. Flamm	166
— Vorträge über —, v. M. Planck. (T.)	176
Quecksilber: Über die kritische Temperatur des —, v. J. Bender	410

R.

Radioaktives Element: Die Muttersubstanz des Actiniums, ein neues — von langer Lebensdauer, v. O. Hahn u. L. Meitner	208, 438
Radioaktive Gase: Über die Verteilung — in der freien Atmosphäre, v. V. F. Hess u. W. Schmidt	109
Radioelemente: Die Nomenklatur der —. (Briefk.)	30
Radiothor: Die Lebensdauer von —, Mesothor und Thorium, v. L. Meitner	257
Radium: Über die Wellenlänge der harten γ -Strahlung von —, v. K. W. F. Kohlrausch.	345
Ramsay, W. u. G. Rudolf, Die Edelgase. (B.)	535
Raum: — und Zeit in der gegenwärtigen Physik, v. M. Schlick. (B.)	56

	Seite
Raum: Über die Anordnung der Fixsterne im —, v. G. Deutschland. (Z. B.)	286
Raumgitter: Das — des Aluminiums, v. P. Scherrer	23
Refraktion: Untersuchungen über die astronomische —, v. E. Großmann. (B.)	534
Regenveränderlichkeit: Temperatur- und — in Berlin, v. O. Meißner	521
Reiche, F., Zur Quantelung des asymmetrischen Kreisels	394
Reinhold, M., Beobachtungen der Horizontalintensität des Erdmagnetismus mit dem Spulenmagnetometer von C. Dieterici	22
Relativitätstheorie: Über die spezielle und die allgemeine —, v. A. Einstein. (B.)	152
Riemannsches Elementargesetz: Versuch zur Erweiterung des —, v. R. Malmström	153
Rohmann, H., Ferdinand Braun †	237
Röntgenaufnahmen: Stereoskopische Raummessung an —, v. W. Trendelenburg. (B.)	247
Röntgenologie: Physik der —, v. H. Bauer. (B.)	272
Röntgenspektren: Atombau und —, v. A. Sommerfeld. I.	297
Röntgen-Spektrogramme: Über die mathematische Auswertung der Debye-Scherrerschen —, v. A. Johnsen u. O. Toeplitz	47
Röntgenspektrum: Untersuchungen über das kontinuierliche —, v. J. E. Lilienfeld	263
— — — — — Ergänzungen hierzu	514
— — — — — v. A. Müller	489
Röntgenstrahlen: Absorptionsgesetze für —, v. R. Glocker	66
— Die Resultate der geometrischen Strukturtheorien und die Ergebnisse der Analyse durch —, v. W. Voigt	237, 331, 357, 446
Röntgenstrahlung: Über die Berechnung der sekundären — einer Platte, v. R. Glocker	249
Roth, W. A., Physikalisch-chemische Übungen. (B.)	248
Rowlandsches Wellenlängensystem: Tabellen für das — und das internationale Wellenlängensystem, v. J. Hartmann. (B.)	104
Rubinowicz, A., Bohrsche Frequenzbedingung und Erhaltung des Impulsmomentes	441, 465
Rudolf, G. u. W. Ramsay, Die Edelgase (B.)	535
Ruff, O., Über Karbide. (R.)	433

S.

Sauerstoff: Die Geschwindigkeit der Vereinigung von Stickoxyd mit —, v. M. Bodenstein. (R.)	438
— Über das elektromotorische Verhalten des — und seine anodische Entwicklung unterhalb des reversiblen Sauerstoffpotentials. (R.)	439
Säuregrad: Der — des Brotes, v. Th. Paul. (R.)	430
Schaefer, Cl., Eine einfache Herleitung der verallgemeinerten Lagrangeschen Gleichungen für nicht-holonome Koordinaten. I. II.	129, 406
Schallantennen: Energieabsorption in — erster Ordnung, v. H. Lichte	17
Scherrer, P., Das Raumgitter des Aluminiums	23
— u. P. Debye, Atombau	474
Scherrersche Röntgen-Spektrogramme: Über die mathematische Auswertung der Debye—, v. A. Johnsen u. O. Toeplitz	47
Schlick, M., Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik. (B.)	56
Schmidt, A., Magnetische Mittelwerte des Jahres 1917	195
— Besitzt die tägliche erdmagnetische Schwankung in der Erdoberfläche ein Potential?	349
Schmidt, H., Zur Theorie der Tribolumineszenz	399
Schmidt, W. u. V. F. Hess, Über die Verteilung radioaktiver Gase in der freien Atmosphäre	109

Schrödinger, E., Die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes	4
— — — — — Notiz hierzu, v. A. Einstein	115
— — — — — Bemerkung hierzu, v. H. Bauer	163
— Über ein Lösungssystem der allgemein kovarianten Gravitationsgleichungen	20
— — — — — Bemerkung hierzu, v. A. Einstein	165
— Notiz über die Ordnung in Zufallsreihen	218
Schröter, F., Neonbogenlampe für Gleichstrom. (R.)	431
Schüle, W., Technische Thermodynamik. I. (B.)	415
Schulze, F. A., Große Physiker. (B.)	464
Schulze: Johann Heinrich —, v. J. M. Eder. (B.)	318
Schuß: Ballistik. Die mechanischen Grundlagen der Lehre vom —, v. H. Lorenz. (B.)	28
Schwarzschild, K., Über das System der Fixsterne. (B.)	152
Schwebungen: Über —. Antwort an Herrn Waetzmann, v. E. Budde	60
— — — — — Bemerkung hierzu, v. E. Waetzmann	177
Schwefel-, Selen- und Quecksilberkugeln: Bemerkung zu der Arbeit von Irene Parankiewicz: „Größen und elektrische Entladungen von kleinen —, bestimmt aus deren Fallgeschwindigkeit und Farbe“, v. R. Bär	373
Schweidler, E. v. u. St. Meyer, Die Nomenklatur der Radioelemente. (Briefk.)	30
Schwerfeldgleichungen: Zur Ableitung der —, v. F. Jung	61
Schweydar, W., Die Bewegung der Drehachse der elastischen Erde im Erdkörper. (B.)	415
Seemann, H. u. J. E. Lilienfeld, Photographische Aufnahme des P_{α} - und $Ir-K$ -Spektrums	269
Sehraum: Über den —, v. H. Witte	142
Sekundäre Röntgenstrahlung: Über die Berechnung der — einer Platte, v. R. Glocker	249
Sekundärstrahlung: Weitere Versuche über eine durchdringende — der Kanalstrahlen, v. M. Wolfke	205
Selen: Einwirkung mechanischer Bearbeitung auf die Oberflächenschichten metallischen —, v. W. S. Gripenberg	429
Selényi, P., Spiegelung an Flächen mit negativer Krümmung	105
— Über spiegelnde Flächen negativer Krümmung. (Nachtrag.)	386
Senffleben, H. u. E. Benedict, Eine Methode zur Temperaturbestimmung leuchtender Flammen	180
Silikat-Gläser: Über die elektrische Leitfähigkeit von Natron-Kalk—, v. R. Ambronn	401
Smekal, A., Über die zum Beweise des Boltzmannschen Prinzips verwendete „wahrscheinlichste“ Verteilung	7
— — — — — Adiabatenhypothese und Boltzmannsches Prinzip	137
— — — — — Berichtigung	200
Sommerfeld, A., Goethes Farbenlehre im Urteile der Zeit. (B.)	151
— Atombau und Röntgenspektren. I.	297
— Der innere Aufbau des chemischen Atoms und seine Erforschung durch Röntgenstrahlen. (B.)	463
Spektralgebiet: Über den Einfluß ultraroter Eigenfrequenzen auf den Brechungsexponenten im sichtbaren —, v. J. Wimmer	483
— — — — — Berichtigung	536
Spektrogramme: Über die mathematische Auswertung der Debye-Scherrerschen Röntgen—, v. A. Johnsen u. O. Toeplitz	47
Spektrum: Zur Kenntnis des Ni —, v. J. E. Paulson	13
— Untersuchungen über das kontinuierliche Röntgen—, v. J. E. Lilienfeld	263
— — — — — Ergänzungen hierzu	514
— — — — — v. A. Müller	489
— Photographische Aufnahme des P_{α} - und $Ir-K$ —, v. J. E. Lilienfeld u. H. Seemann	269

Seite		Seite
	Spezifisches Gewicht: Über den Zusammenhang zwischen den Atomgewichten der chemischen Elemente, dem — und der Wärmetönung, v. K. Fehrle	281
	Spezifische Wärme: Eine empirische Formel zur Berechnung der — des Wassers, v. J. Narbutt	513
	Spezifische Wärmen: Über die — von Blei-Antimonlegierungen, v. R. Durrer	86
	Spezifischer Widerstand: Über die Abhängigkeit der magnetischen Eigenschaften, des — und der Dichte der Eisenlegierungen von der chemischen Zusammensetzung und thermischen Behandlung, v. E. Gumlich. (R.)	434
	Spiegelnde Flächen: Über — negativer Krümmung, v. P. Selényi	386
	Spiegelung an Flächen mit negativer Krümmung, v. P. Selényi	105
	Sprengstoffe: Die —, ihre Chemie und Technologie, v. R. Biedermann. (B.)	464
	Spulenmagnetometer: Beobachtung der Horizontalintensität des Erdmagnetismus mit dem — von C. Dieterici, v. M. Reinhold	22
	Statistik: Diffusion und —, v. A. Podjed	39
	— und Wahrscheinlichkeitsnachwirkung, v. R. Fürth	421
	Stereoskopische Raummessung an Röntgenaufnahmen, v. W. Trendelenburg. (B.)	247
	Stickoxyd: Die Geschwindigkeit der Vereinigung von — mit Sauerstoff, v. M. Bodenstein. (R.)	438
	Stokesches Widerstandsgesetz: Ein neuerlicher Beweis für die Gültigkeit der Cunninghamschen Korrektur des —, v. I. Parankiewicz	280
	β -Strahlen: Zur Theorie der Versuche von Kaufmann und Bucherer über —, v. R. Malmström	43
	γ -Strahlung: Über die Wellenlänge der harten — von Radium, v. K. W. F. Kohlrausch	345
	Stracker, K., Jahrbuch der Elektrotechnik. II. III. IV. (B.)	103
	Submikroskopische Partikel: Anwendung der Grundlempfindungstheorie zur Größenbestimmung —, v. G. Laski	369
	Symmetrie: Lectures on the principle of — and its applications in all natural sciences, v. F. M. Jaeger. (B.)	391
	Szarvassi, A., Über das Bohrsche Atommodell	505
	— — Berichtigung	550
	T.	
	Technische Physik: Lehrbuch der —, v. H. Lorenz. IV. (B.)	389
	Temperatur: Widerstandsänderung einatomiger Metalle mit der —, v. E. Grüneisen	382
	— Über die kritische — des Quecksilbers, v. J. Bender	410
	Temperaturen: Das Erweichen und Biegen eines Kohlenstabes bei sehr hohen —, v. J. Plotnikow	520
	Temperatur- und Regenveränderlichkeit in Berlin, v. O. Meißner	521
	Temperaturbestimmung: Eine Methode zur — leuchtender Flammen, v. H. Senftleben u. E. Benedict	180
	Temperaturschwankungen: Nachtrag zu meiner Veröffentlichung über — und Dichteschwankungen, v. M. v. Laue	23
	Thermodynamik: Technische —, v. W. Schüle. I. (B.)	415
	Thirring, H., Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie — Über die formale Analogie zwischen den elektromagnetischen Grundgleichungen und den Einsteinschen Gravitationsgleichungen erster Näherung	33
	— u. J. Lense, Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie	156
	Thorium: Die Lebensdauer von Radiothor, Mesothor und —, v. L. Meitner	257
	Thoriumblei: Über das —, v. O. Hönlischmidt. (R.)	436
	Töne: Über die Bildung von Kombinations— und Ober—, v. E. Budde	321
	Toeplitz, O. u. A. Johnsen, Über die mathematische Auswertung der Debye-Scherrerschen Röntgen-Spektrogramme	47
	Trendelenburg, W., Stereoskopische Raummessung an Röntgenaufnahmen. (B.)	247
	Tribolumineszenz: Zur Theorie der —, v. H. Schmidt	399
	U.	
	Uhr: Die —, v. H. Bock. (B.)	463
	Ultrarote Eigenfrequenzen: Über den Einfluß — auf den Brechungsexponenten im sichtbaren Spektralgebiet, v. J. Wimmer	483
	— — Berichtigung	536
	Ultrarote Eigenschwingungen: Über die — zweiatomiger Kristalle, v. M. Born	539
	Unterbrecher: Galvanischer —, v. W. Kasperowicz	187
	Usener, H., Der Kreisel als Richtungsweiser. (B.)	343
	— — Bemerkungen hierzu, v. A. Sommerfeld u. H. Usener	487
	V.	
	Voigt, W., Die Resultate der geometrischen Strukturtheorien und die Ergebnisse der Analyse durch Röntgenstrahlen. (Z. B.)	237, 331, 357, 440
	Vorlesungsverzeichnis für das Sommersemester 1918.	168, 196, 220, 248
	— für das Wintersemester 1918/19	508
	W.	
	Wahrscheinlichkeitsnachwirkung: Statistik und —, v. R. Fürth	421
	Wahrscheinlichste Verteilung: Über die zum Beweise des Boltzmannschen Prinzips verwendete —, v. A. Smekal	7
	Walter, B., Über die Ermittlung der zeitlichen Aufeinanderfolge zusammengehöriger Blitze sowie über ein bemerkenswertes Beispiel dieser Art von Entladungen	273
	Wärme: Eine empirische Formel zur Berechnung der spezifischen — des Wassers, v. J. Narbutt	513
	Wärmen: Über die spezifischen — von Blei-Antimonlegierungen, v. R. Durrer	86
	Wärmedämmung: Die —, v. O. Meißner	387
	Wärmeleitung: Die Grundgesetze der — und ihre Anwendung auf plattenförmige Körper, v. F. Krauß. (B.)	534
	Wärmetönung: Über den Zusammenhang zwischen den Atomgewichten der chemischen Elemente, dem spezifischen Gewicht und der —, v. K. Fehrle	281
	Wasser: Eine empirische Formel zur Berechnung der spezifischen Wärme der —, v. J. Narbutt	513
	Wasserhosen: Wind- und — in Europa, v. A. Wegener. (B.)	392
	Waetzmann, E., Über Schwebungen	177
	— — Bemerkungen v. E. Budde	60
	Wegener, A., Wind- und Wasserhosen in Europa. (B.)	392
	— Das detonierende Meteor vom 3. April 1916 in Kurhessen. (B.)	462
	Weigert, F., Zur Kenntnis der Phototropie. (R.)	433

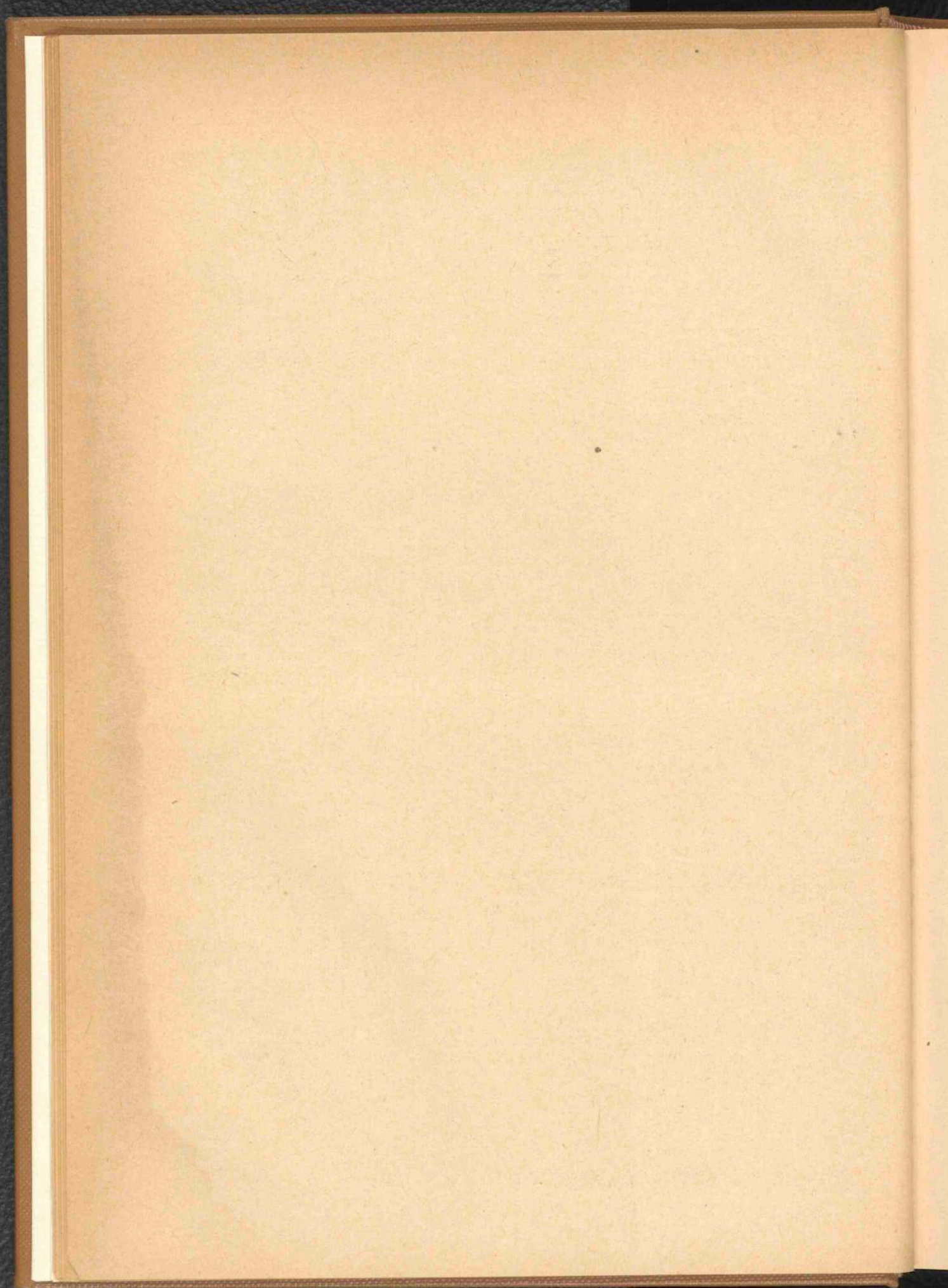
	Seite		Seite
Wellenlänge: Über die — der harten γ -Strahlung von Radium, v. K. W. F. Kohlrausch	345	Winkelmann, W., Das Fernsprechwesen, (B.)	29
Wellenlängensystem: Tabellen für das Rowlandsche und das internationale —, v. J. Hartmann, (B.)	104	Wismutwasserstoff: Zur Frage des —, v. F. Paneth, (R.)	433
Weyrauch, J. I., Robert Mayer zur Jahrhundertfeier seiner Geburt, (B.)	104	Witte, H., Über den Schraum	142
Widerstand: Über den — gewisser zusammengesetzter körperlicher Leiter, v. K. Lichtenecker	374	Wolfke, M., Weitere Versuche über eine durchdringende Sekundärstrahlung der Kanalstrahlen	205
Widerstandsänderung einatomiger Metalle mit der Temperatur, v. E. Grüneisen	382		
Widerstandsgesetz: Ein neuerlicher Beweis für die Gültigkeit der Cunninghamschen Korrektur des Stokesschen —, v. I. Parankiewicz	280		
Wimmer, J., Über den Einfluß ultraroter Eigenfrequenzen auf den Brechungsexponenten im sichtbaren Spektralgebiet	483		
— — Berichtigung	536		
Wind- und Wasserhosen in Europa, v. A. Wegener, (B.)	392		

Z.

Zehnder, L., Grundriß der Physik, (B.)	100
Zeit: Raum und — in der gegenwärtigen Physik, v. M. Schlick, (B.)	56
Zernike, F. u. L. S. Ornstein, Die linearen Dimensionen der Dichteschwankungen	134
Zufallsreihen: Notiz über die Ordnung in —, v. E. Schrödinger	218
Zweiatomige Kristalle: Über die ultraroten Eigenschwingungen —, v. M. Born	539

Namensverzeichnis der „Personalien“.

Agthe 320.	Formanek 296.	Jäger 392.	Müller, P. 416. 440.	Stelzner 176.
Amberg 344.	Förster 128.	Jentzsch f. 176.	Negeuß 488.	Stephanos f. 296.
Assmann f. 272.	Fries 344.	Joester 440.	Neovius f. 512.	Stern 128.
Barkhausen 176.	Galle 32.	Juckenack 56.	Niethammer 344.	Steubing 512.
Barkla 536.	Geilen 104.	Just 488.	Noether, F. 368.	Stürtz 80.
Bartel 16.	Gillmeister 80.	Kappen 320.	Noether, M. 128.	Süring 176.
Berend f. 344.	Glimm 464.	Karrer 152.	Opolski f. 512.	Sylov f. 464.
Birck 176.	Graf f. 320.	Keesom 152.	Pedler f. 368.	Szarvassi 32. 104.
Blarez f. 176.	Graefe 344. 512.	Keller, J. f. 488.	Petersen 320.	Széki 80.
Blaserna f. 128.	Grillier 80.	Keller, O. 512.	v. d. Pfordten f. 128.	Tafel f. 440.
Blochmann 176.	Groß 296. 512 f.	Kohn 80.	Philip f. 440.	Tangl f. 80.
Bödtker 344.	Grube 416.	König, A. 440.	Planck 176.	Tank 416.
Bohr 464.	Grüttner f. 320.	König, E. 464.	Prager 176.	Terres 176.
du Bois. 392. 536 f.	Guareschi f. 536.	v. Kraft f. 80.	Prandtl 512.	Thiele f. 200.
Bolland 80.	Haber 416.	Kruis f. 128.	Pschorr 176.	Thomson 104.
Bonnesen 512.	Hagen 488.	Kühl 320.	Puluj f. 152.	Tiede 128.
v. d. Borne f. 536.	Hamel 320.	Kühnen 32.	Ramberg 440.	Timpe 536.
Börnstein 344.	Hamsik 296.	Lampe f. 440.	Reichel f. 80.	Tollens f. 80.
Brandenberger 344.	Harrer 296.	v. Lang 344.	Reitzenstein 176.	Treadwell f. 320.
Brandt 56.	Hartwig 80.	Leon 512.	Rimbach 176.	Venske 320.
Braun f. 224.	v. Hauer 272.	v. Lerch 464.	Ringer 440.	Veronese f. 296.
v. Braun 535.	Häußermann f. 344.	Letts f. 200.	Rissom 80.	Vojtěch 556.
v. Brill 272.	Hecke 56.	Liebethal 32.	Rose 272.	Vollmer f. 296.
Brunck 272.	Heegaard 296.	v. Linde 176.	Rosenmund 128.	Vondráček 80.
Bunte 56.	Heffler 32.	Lische 200.	Rothmund 512.	Vorländer 176.
Cantor f. 56.	Henker 296.	Long 512.	Ruzicka 128.	Voss 56.
Cerny 296.	Henze 320.	Lühns 416.	v. Sanden 296. 344.	Wallenberg 368.
Cohn 368.	Hertz, G. 16.	Lutz 56.	Satelli 440.	Wandhoff 416.
Courant 80.	Hertz, P. 152.	Madelung 344.	Scheen f. 488.	Waetzmann 80.
Danckwort 464.	Hess 392.	Marc f. 248.	Scheller 464.	Weigel 16.
Daniels f. 556.	Hessenberg 488.	Margosches 272.	Schmidt 176.	Weinland 104.
Dieffenbach 104.	Hjelt 176.	Matthes 200.	Schrader f. 416.	Weinstein f. 176.
Dilthey 556.	Hjortdahl 368.	Matthies 296.	Schreiner 368.	Weitzenböck 368.
Dimroth 56.	Hofmann 535.	Mauthner f. 32.	Schultheiß f. 488.	Westphal 368.
Dolch 320.	Holde 56.	Meisel 344.	Seeliger 416.	Weyl 56.
Eckert 200.	Hönigschmid 80.	Meisenheimer 176.	Senier f. 392.	Wiechert 176. 272.
Einstein 176.	Hopfgartner 488.	Meißner, K. W. 416.	Siedentopf 344.	Wieland 344.
Ewald 80.	Iklé f. 272.	Meißner, R. 320.	Simon f. 56.	Wolff f. 344.
Fanta 200.	Istrati f. 128.	Meyer 392.	Simons f. 536.	Zaloziecki f. 488.
Faßbender 536. 556.	Jackson 200.	Mitscherlich f. 272.	Sjökvis 224.	Zopke f. 416.
Feddersen f. 320.	Jacob 464.	Mohr f. 488.	Sjollema 200.	
Feußner 488.	Jacobson 176.	Müller, C. 32.	Skraup 512.	
Finsterwalder 536.	Jacobsthal 464.	Müller, E. 80.	Spies 488.	



PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 1.

1. Januar 1918.
Redaktionsschluß für No. 3 am 2. Januar 1918.

19. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

- O. Meißner, Die Jahresperiode der mikroseismischen Bewegung. S. 1.
Ph. Frank, Mathematische Analogie zwischen einem Problem aus der Optik bewegter Medien und einer Aufgabe aus dem Gebiete der Flugzeugbewegung. S. 2.
E. Schrödinger, Die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes. S. 4.
A. Smekal, Über die zum Beweise des Boltzmannschen Prinzips verwendete wahrscheinlichste Verteilung. S. 7.
A. Korn, Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes. VI. S. 10.

J. E. Paulson, Zur Kenntnis des Ni -Spektrums. S. 13.

Besprechungen:

A. E. Haas, Die Grundgleichungen der Mechanik, dargestellt auf Grund der geschichtlichen Entwicklung. S. 16.

Tagesereignisse. S. 16.

Personalien. S. 16.

Angebote. S. 16.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Die Jahresperiode der mikroseismischen Bewegung.

Von Otto Meißner.

Bereits in einer früheren Veröffentlichung in dieser Zeitschrift¹⁾ hatte ich die harmonischen Konstanten für die Jahresperiode der kurzperiodischen mikroseismischen Bewegung verschiedener Stationen in Nord- und Mitteleuropa gegeben. In einer demnächst in den „Annalen der Hydrographie“ erscheinenden Abhandlung habe ich das gleiche für die russischen Stationen Pulkowa bei Petersburg, Taschkent und Irkutsk getan sowie eine Vergleichung mit dem Seegang in Norwegen angestellt; die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit sollen nachfolgend kurz dargestellt werden.

Für die russischen Stationen liegen zwar nur etwa zwei Jahre Beobachtungen vor, da sie erst Anfang 1912 mit modernen Erdbebeninstrumenten Galitzinschen Modells (aperiodisch gedämpfte Horizontalpendel mit galvanometrischer Registrierung) ausgerüstet wurden und seit Kriegsausbruch begreiflicherweise keine Veröffentlichungen mehr an uns gelangt sind; indes reicht dieser Zeitraum doch aus, um mit den anderen Stationen in Mitteleuropa vergleichbare Ergebnisse zu erzielen.

In der folgenden Tabelle gebe ich nun für die untersuchten Orte den Mittelwert a_0 , die Amplitude a_1 und Phase φ des jährlichen Gliedes sowie das Verhältnis $a_1 : a_0$, also die relative Intensität der Jahresperiode. Für Göttingen und Pulkowa habe ich den Gang für alle drei Komponenten (E , N und V) berechnet, hier aber mich auf die Wiedergabe der Ergebnisse für die Nordkomponente beschränkt, da an beiden Stationen die anderen Komponenten bis auf

$1/2$ Grad die gleiche Phase und ein ganz ähnliches Amplitudenverhältnis ergaben.

Die beiden letzten Zeilen der Tabelle enthalten für den Seegang in Skudesnes die entsprechenden Werte, und zwar für den nach der üblichen Skala geschätzten Seegang S selbst wie für das Quadrat S^2 . Über die Berechtigung, Schätzungen nach einer doch immerhin bis zu einem gewissen Grade willkürlichen, jedenfalls nicht exakt definierten und vielleicht nicht einmal streng definierbaren Skala zu Mittelwerten zu vereinigen, habe ich in der eingangs erwähnten Arbeit ausführlicher gehandelt. Daß die Jahresperiode auch für S^2 berechnet wurde, geschah aus dem Grunde, weil es sich beim Seegang ja um Bewegungsenergie handelt. Freilich ist die Sache ziemlich verwickelt, denn einerseits nimmt die Geschwindigkeit der Wellen bei steigendem Seegang in bisher nicht genauer untersuchtem Maße zu, andererseits wird die von den Erschütterungen durch die bewegten Wassermassen direkt betroffene Festlandsfläche gleichfalls größer. Es muß daher einstweilen zweifelhaft bleiben, welche Potenz von S bei derartigen Vergleichungen am zweckmäßigsten bzw. am korrektesten zugrunde zu legen ist.

Station	Zeitraum	a_0	a_1	φ_1	$\frac{a_1}{a_0}$
Graz	1907—1915	0,20 μ	0,30 μ	17°	1,50
Göttingen N. .	(1904—1907)	0,37	0,45	16	1,22
Potsdam N. .	1913—1916	0,45	0,32	7	0,71
Hamburg . .	1909—1911	2,89	2,80	9	0,97
Upsala . . .	1907—1912	0,34	0,33	9	0,97
Pulkowa N. .	1912—1914	0,59	0,43	4	0,73
Taschkent . .	1912—1914	0,30	0,19	358	0,63
Irkutsk . . .	1912—1914	0,15	0,10	340	0,67
Seegang in Skudesnes S . .	1912—1913	2,88	0,88	347	0,31
„ „ S^2 . .	1912—1913	8,74	5,22	347	0,60

1) Diese Zeitschr. 18, 73—75, 1917.

Was nun zunächst die absolute Größe der mikroseismischen Unruhe betrifft, so nimmt sie nach unserer Tabelle nach dem Festlandsinnern hin ab; in dem küstennahen Hamburg hat sie die größten Werte, und bei dieser Station wird man eine direkte Beeinflussung durch den Seegang wohl nicht in Abrede stellen können.

Daß es sich aber bei Küsten- wie bei Festlandsstationen um eine und dieselbe Erscheinung handelt, beweisen aufs deutlichste die Phasen, die selbst im äußersten Falle nur um 30° , also einen Monat, abweichen, was bei dem Zusammenhange der mikroseismischen Bewegung mit den von Jahr zu Jahr stark veränderlichen meteorologischen Faktoren keineswegs besonders viel ist, besonders wenn man berücksichtigt, daß die der Rechnung zugrunde gelegten Zeiträume bei den einzelnen Stationen sehr verschieden sind, und daß die Phase gegen kleine Schwankungen sehr empfindlich ist.

Von großer Bedeutung für die Entscheidung der Frage nach dem Kausalzusammenhange zwischen Seegang und mikroseismischer Bewegung ist die letzte Spalte der Tabelle. Aus ihr geht hervor, daß die verhältnismäßige Größe der jährlichen Schwankung nach dem Festlandsinnern nur wenig abnimmt und selbst in Irkutsk noch größer ist als beim Seegang in Skudesnes, und sogar als bei S^2 .

Die Intensität der Wirkung kann aber doch nicht größer sein als die der Ursache! Die absolute Größe der Bewegung kann nicht von entscheidender Bedeutung sein, da sie zu sehr vom Untergrunde der Station abhängt. Aber auf jeden Fall wird man es als ausgeschlossen betrachten dürfen, daß der Seegang im südlichen Norwegen seine Wirkungen bis nach Irkutsk tief im Innern von Sibirien hin erstrecken kann.

Da ich bereits in einer früheren Arbeit¹⁾ gezeigt habe, daß in Potsdam zur Zeit starker mikroseismischer Unruhe große Luftdruckgegensätze zwischen Nord- und Südeuropa bestehen, die bei fehlender mikroseismischer Bewegung sehr viel geringer sind, an dem einheitlichen Charakter der Erscheinung in mindestens ganz Mittel- und Nordeuropa und Nordasien aber nach der vorstehenden Tabelle nicht zu zweifeln ist, lautet das Ergebnis meiner Untersuchungen folgendermaßen:

Die jährliche Periode der mikroseismischen Bewegung von etwa 7 Sekunden Wellenperiode ist einheitlich bedingt durch die Luftdruckgegensätze zwischen Nordwesteuropa und Asien. Genaue festzustellen, in welcher Weise die Luftdruckänderungen den Erdboden auf so enorm

weite Gebiete hin in regelmäßige Schwingungen zu setzen vermögen, muß späteren Untersuchungen vorbehalten bleiben.

Potsdam, 8. November 1917.

(Eingegangen 10. November 1917.)

Mathematische Analogie zwischen einem Problem aus der Optik bewegter Medien und einer Aufgabe aus dem Gebiete der Flugzeugbewegung.

Von Philipp Frank.

Wenn die Aufgabe gestellt ist, ein Flugzeug in möglichst kurzer Zeit von einem Punkt A zu einem Punkt B des Raumes zu steuern, so ist klar, daß bei willkürlich vorgegebener Windverteilung diese günstigste Bahn im allgemeinen keine Gerade sein wird. Im folgenden soll nun untersucht werden, wie stark diese günstigste Bahn gekrümmt sein muß. Wenn auch diese Aufgabe praktisch von nicht sehr großer Bedeutung ist, da auf den durchfahrenen Strecken der Wind meist als räumlich konstant angesehen werden kann, so ist sie doch für den Physiker dadurch von einem gewissen Interesse, daß ihre Lösung ganz wie die eines bekannten Problems aus der Optik bewegter Medien erfolgt.

Es sei c die Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges, d. h. seine durch die Kraft des Motors bei Vollgas und ruhender Luft hervorgerufene Geschwindigkeit. Wir sehen sie als konstant an, was in Wirklichkeit nur beim Flug unter konstantem Winkel mit der Vertikalen, wie etwa beim Horizontalflug, der Fall ist. Die Windverteilung sei als Funktion des Ortes, also der Koordinaten, durch das Vektorfeld w nach Richtung und Stärke gegeben. Die tatsächliche Geschwindigkeit, die durch das Zusammenwirken von Eigengeschwindigkeit und Windgeschwindigkeit zustande kommt, bezeichnen wir mit v , ihren absoluten Betrag mit v . Wenn wir das Linienelement einer Flugbahn mit ds bezeichnen, so ist die Zeit, die das Flugzeug zum Durchlaufen eines Stückes derselben braucht, durch

$$J = \int \frac{ds}{v} \quad (1)$$

gegeben. Es ist nun die Kurve zu suchen, die J zu einem Minimum macht. Dabei muß zunächst die unbekannte Größe v durch das bekannte Vektorfeld w und die bekannte Konstante c ausgedrückt werden.

Die Richtung der tatsächlichen Bewegung sei durch den Einheitsvektor $\hat{s}$, die der Eigen-

¹⁾ Beiträge zur Geophysik 13, 204–209.

geschwindigkeit durch den Einheitsvektor t gegeben. Dann ist offenbar

$$v\bar{s} = ct + w. \quad (2)$$

Wenn wir diese Gleichung skalar mit sich selbst multiplizieren, wird daraus

$$v^2 = c^2 + 2c(wt) + (ww).$$

Wenn wir annehmen, daß die Windstärke gegenüber der Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges so gering ist, daß die höheren Potenzen von $\frac{|w|}{c}$ vernachlässigt werden können, folgt daraus

$$\frac{v}{c} = 1 + \left(\frac{w}{c}t\right). \quad (3)$$

Wenn wir den reziproken Wert nehmen und außerdem t durch $\bar{s}$ ersetzen, was wegen Gleichung (2) mit derselben Genauigkeit wie Gleichung (3) zulässig ist, lautet der Ausdruck Gleichung (1) für die Zeit, die das Flugzeug zum Durchlaufen einer beliebigen Bahn braucht,

$$J = \frac{1}{c} \int \left(1 - \left(\frac{w}{c}\bar{s}\right)\right) d\bar{s}. \quad (4)$$

Die Extremalen dieses Integrals liefern also die günstigsten Flugbahnen.

Dasselbe Variationsproblem spielt aber bekanntlich in der Optik bewegter Medien eine Rolle. Wenn sich nämlich die Erde durch den Äther bewegt, entsteht ein „Ätherwind“ relativ zur Erde, dessen Geschwindigkeit durch ein Vektorfeld w gegeben sei. Die Lichtgeschwindigkeit im ruhenden Äther sei c ; dann bedeutet J in Gleichung (4) offenbar die Zeit, die das Licht braucht, um eine relativ zur Erde ruhende starre Kurve zu durchlaufen. Die Extremalen bedeuten die Kurven kürzester Lichtzeit, also die tatsächlichen Lichtstrahlen relativ zur Erde, wie sie durch die Bewegung erzeugt werden. Deren Krümmung hat aber eigentlich schon Stokes¹⁾ und ganz explizit H. A. Lorentz²⁾ berechnet, so daß wir dessen Formel hier nur anwenden müssen. Es ist nämlich der Krümmungsvektor $\bar{k}$, dessen absoluter Betrag die durch den Ätherwind hervorgerufene Krümmung der Lichtstrahlen darstellt, durch

$$\bar{k} = \frac{1}{c} [\text{rot } w, \bar{s}] \quad (5)$$

gegeben. Dieses Gesetz gilt natürlich auch für unser Problem. Es zeigt sich also, daß die günstigste Flugbahn eine Krümmung besitzt, die im wesentlichen durch den Wirbel der Windverteilung bestimmt ist und die man für jede Stelle der Bahn aus der ursprünglichen Rich-

tung der Bahn $\bar{s}$ und dem genannten Wirbel nach Gleichung (5) berechnen kann. Insbesondere folgt, daß die geraden Bahnen immer dann die günstigsten sind, wenn die Windverteilung eine wirbelfreie ist.

Dabei ist natürlich immer vorausgesetzt, daß der Wind so schwach gegenüber der Flugzeuggeschwindigkeit ist, daß die Vernachlässigung der höheren Potenzen von $\frac{|w|}{c}$ zulässig ist. Um

einen gewissen Anhaltspunkt dafür zu bieten, inwiefern das in praktisch vorkommenden Verhältnissen zutrifft, sollen einige Zahlenangaben dienen. Ein schnelles Flugzeug erreicht heute schon häufig eine Eigengeschwindigkeit von 50 m/sec. Damit wollen wir etwa die Windgeschwindigkeiten der verschiedenen Windstärken nach der Beaufortschen Windskala vergleichen. In dieser Skala, die in 12 Stufen vom leisesten Luftzug bis zum stärksten Orkan führt, entspricht z. B. einem „schwachen“ Wind (Nr. 3) eine Windgeschwindigkeit von 4,8 m/sec, einem „starken“ Wind (Nr. 6) von 10,7 m/sec. Wenn wir für die Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges den genannten Wert von 50 m/sec zugrunde legen, ergibt sich für die beiden erwähnten Windstärken für den fraglichen Quotienten der Wert 0,1 bzw. 0,21. Bei einer noch größeren Windstärke hat man selten gutes Flugwetter.

Schließlich will ich hier noch eine kurze und durchsichtige Ableitung für die Formel (5) angeben. Man kann das Integral in Gleichung (4), wenn wir mit τ einen Parameter auf der Bahnkurve bezeichnen, in die Form

$$J = \frac{1}{c} \int F(x, y, z, x', y', z') d\tau \quad (6)$$

bringen, wobei

$$x' = \frac{dx}{d\tau} \text{ usw.}$$

bedeutet. Dabei ist, wenn wir Gleichung (4) und (6) vergleichen,

$$F(x, \dots, z') = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} - \frac{1}{c} (x'w_x + y'w_y + z'w_z) \quad (7)$$

wobei w_x usw. die Komponenten von w bedeuten. Die Extremalen genügen den Lagrange'schen Gleichungen

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{\partial F}{\partial x}$$

usw. Setzen wir hierin für F seinen Wert (7) ein und fassen die drei Gleichungen in eine Vektorgleichung zusammen, so erhalten wir für den tangentialen Einheitsvektor $\bar{s}$ der Extremalen die Differentialgleichung

1) G. G. Stokes, Phil. Mag. 27, 1845; Math. and phys. Papers, Bd. I, S. 134f.

2) H. A. Lorentz, Abhandlgn. über theor. Physik, I, S. 401.

$$\frac{d}{ds} \left(\bar{s} - \frac{w}{c} \right) = -\frac{1}{c} \text{grad}(w\bar{s}), \quad (8)$$

wobei die Operation grad sich nur auf w , nicht aber auf $\bar{s}$ bezieht. Nun ist bekanntlich nach der Definition des Krümmungsvektors

$$\mathfrak{f} = \frac{d\bar{s}}{ds}$$

also ist nach Gleichung (8)

$$\mathfrak{f} = \frac{1}{c} \frac{dw}{ds} - \frac{1}{c} \text{grad}(w\bar{s}). \quad (9)$$

Nun gilt für zwei beliebige Vektorfelder $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Identität¹⁾

$$\text{grad}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} + (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} + [\mathfrak{A} \text{rot} \mathfrak{B}] + [\mathfrak{B} \text{rot} \mathfrak{A}].$$

Setzen wir hierin $\mathfrak{A} = w$, $\mathfrak{B} = \bar{s}$ und beachten, daß $\bar{s}$ nicht als Funktion der Koordinaten zu betrachten ist, also durch die Operationen rot und ∇ zu Null gemacht wird, so ergibt sich

$$\text{grad}(w\bar{s}) = (\bar{s}\nabla)w + [\bar{s} \text{rot} w] \quad (10)$$

Da nun nach der Bedeutung von ∇ bekanntlich

$$\frac{dw}{ds} = (\bar{s}\nabla)w,$$

erhalten wir aus Gleichung (9) und (10) die zu beweisende Gleichung (5).

¹⁾ Siehe z. B. W. v. Ignatowsky, Die Vektoranalysis, Bd. I, Gl. 68.

Prag, 7. November 1917.

(Eingegangen 10. November 1917.)

Die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes.

Von Erwin Schrödinger.

(Aus dem II. physikalischen Institut der k. k. Universität Wien.)

1. In der Gravitationstheorie der allgemeinen Relativität spielen — insbesondere für die Art der Einführung des Energietensors der Materie in die Feldgleichungen — eine ausschlaggebende Rolle die 16 Größen t_{α}^{α} , welche Einstein als Energiekomponenten des Gravitationsfeldes bezeichnet¹⁾. Bedient man sich eines Koordinatensystems, für welches

$$\sqrt{-g} = 1, \quad (1)$$

so erhält man für die t_{α}^{α} die verhältnismäßig einfachen Ausdrücke

$$\kappa t_{\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{2} \delta_{\alpha}^{\mu} g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\beta}^{\lambda} \Gamma_{\nu\lambda}^{\beta} - g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\sigma}^{\beta}, \quad (2)$$

¹⁾ A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie (J. A. Barth 1916), S. 45 ff.

wobei — wie im folgenden stets, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt — über zweimal auftretende allgemeine Indizes von 1 bis 4 zu summieren ist. — Zeichenerklärung:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = -g^{\lambda\beta} \left[\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}} \right]; \quad (3)$$

die $g_{\mu\nu}$ sind in gewohnter Weise durch den Ausdruck für das Quadrat des (vierdimensionalen) Linienelements definiert:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu}; \quad g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}, \quad g = \text{Det. der } g_{\mu\nu}. \quad (4)$$

Die $g^{\mu\nu}$ sind die adjungierten, normierten Unterdeterminanten 1. Ordnung im Schema der $g_{\mu\nu}$. Endlich ist

$$\delta_{\sigma}^{\alpha} = g_{\mu\sigma} g^{\mu\alpha} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \text{ für } \begin{cases} \sigma \neq \alpha \\ \sigma = \alpha \end{cases} \quad (5)$$

und κ (im wesentlichen) die Gravitationskonstante.

Den Gegenstand dieser Mitteilung bildet die explizite Berechnung der Größen t_{α}^{α} in der Umgebung einer ruhenden Kugel aus inkompressibler, gravitierender Flüssigkeit. Die Rechnung wird auf Grund der von Schwarzschild¹⁾ ermittelten Werte der $g_{\mu\nu}$ exakt durchgeführt für ein räumliches Koordinatensystem, das sich von einem rechtwinkligen kartesischen nur äußerst wenig unterscheidet, ja vielleicht geradezu als ein solches bezeichnet werden könnte. — Man muß bei jeder Berechnung der t_{α}^{α} die Angabe des Koordinatensystems hinzufügen, denn diese Größen bilden keinen Tensor; sie verschwinden beispielsweise nicht in allen Systemen, wenn sie es bei bestimmter Koordinatenwahl tun. Das Ergebnis, zu dem man in diesem speziellen Fall gelangt — exaktes, identisches Verschwinden aller t_{α}^{α} in dem gewählten Bezugssystem — scheint mir gleichwohl so befremdend, daß ich glaube, es zur allgemeinen Diskussion stellen zu sollen.

2. Schwarzschild findet l. c. für das Quadrat des Linienelements

$$ds^2 = (1 - \alpha/R) dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \alpha/R} - R^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \quad (6)$$

mit der Abkürzung

$$R = (r^3 + \varrho)^{1/2}. \quad (7)$$

r, ϑ, φ, t sind gewöhnliche Polarkoordinaten und Zeit, α und ϱ sind Integrationskonstanten, welche von der Dichte und dem Radius der gravitierenden Kugel abhängen und in Wirklichkeit immer außerordentlich klein sind gegen alle in Betracht kommenden Werte von r bzw. r^3

¹⁾ Schwarzschild, Berl. Ber. 1916, S. 424.

In (6) führen wir neue Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 ein durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= R \sin \vartheta \cos \varphi \\ x_2 &= R \sin \vartheta \sin \varphi \\ x_3 &= R \cos \vartheta \\ x_4 &= t. \end{aligned} \quad (8)$$

Hieraus ergibt sich in bekannter Weise:

$$R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad (9)$$

ferner

$$dt = dx_4$$

$$dR^2 = \frac{x_\mu x_\nu}{R^2} dx_\mu dx_\nu$$

$$\begin{aligned} R^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dR^2 \\ &= \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{x_\mu x_\nu}{R^2} \right) dx_\mu dx_\nu \end{aligned} \quad (10)$$

$$\left[\mu, \nu = 1, 2, 3; \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu \neq \nu \\ 1 & \text{für } \mu = \nu \end{cases} \right].$$

(Hier verwenden wir unsere Summationssymbolik vorübergehend etwas inkonsequent für Summen, die nur von 1–3 laufen!)

Indem man (10) in (6) einsetzt, erhält man das Linienelement in den neuen Koordinaten

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1 - \alpha/R) dx_4^2 - \\ &- \left[\delta_{\mu\nu} + \frac{\alpha x_\mu x_\nu}{R^3(1 - \alpha/R)} \right] dx_\mu dx_\nu, \end{aligned} \quad (11)$$

woraus man nach (4) abliest:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= - \left[\delta_{\mu\nu} + \frac{\alpha x_\mu x_\nu}{R^3(1 - \alpha/R)} \right] \text{ für } \mu, \nu = 1, 2, 3. \\ g_{14} &= g_{24} = g_{34} = 0 \quad g_{44} = 1 - \alpha/R. \end{aligned} \quad (12)$$

Der Buchstabe R hat hier und weiterhin als Abkürzung zu gelten für

$$R = + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \quad (13)$$

Um zur Berechnung der t_σ^α die Gleichungen (2) und (3) anwenden zu dürfen, müssen wir vor allem zeigen, daß das gewählte Bezugssystem der Bedingung (1) genügt. Zunächst erhält man auf einer Koordinatenachse, etwa auf der x_1 -Achse ($x_2 = x_3 = 0$), für den Fundamentaltensor (12) das einfache Schema:

$$|g_{\mu\nu}| = \begin{vmatrix} -\frac{R}{R-\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{R-\alpha}{R} \end{vmatrix} \quad (14)$$

Für den späteren Gebrauch notieren wir sogleich auch das Schema des kontravarianten Fundamentaltensors in einem Punkt der x_1 -Achse

$$|g^{\mu\nu}| = \begin{vmatrix} -\frac{R-\alpha}{R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R-\alpha \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Aus (14) folgt in Anbetracht der Kugelsymmetrie des Feldes, daß Gleichung (1) überall erfüllt ist; denn jeder beliebige Punkt läßt sich in die x_1 -Achse verlegen durch eine Transformation von der Determinante $+1$ (räumliche Drehung). (2) und (3) sind also anwendbar.

Die eben genannte Transformation ist bekanntlich eine lineare. Gegenüber linearen Transformationen besitzen aber die Größen t_σ^α Tensorkovarianz (was leicht zu zeigen ist) — jedenfalls also linear homogene Transformationsformeln. Deshalb wird es genügen, auch diese Größen nur in einem beliebigen Punkt der x_1 -Achse zu berechnen, (wodurch sich die Rechnung ungeheuer vereinfacht). Denn da sich zeigen wird, daß sie in einem solchen Punkt sämtlich verschwinden, werden wir schließen dürfen, daß sie überall identisch verschwinden.

Aus (12) erkennt man leicht, daß für einen Punkt der x_1 -Achse von den 40 Größen $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$ nur einige wenige von 0 verschieden sind. Für diese gibt eine leichte Rechnung:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} &= \frac{\alpha}{(R-\alpha)^2} \\ \frac{\partial g_{12}}{\partial x_2} &= \frac{\partial g_{13}}{\partial x_3} = -\frac{\alpha}{R(R-\alpha)} \\ \frac{\partial g_{44}}{\partial x_1} &= \frac{\alpha}{R^2} \end{aligned} \right\}. \quad (17)$$

Alle anderen = 0.

Für die $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ ergibt sich zunächst aus (3) und (15)

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= - (g^{\lambda\lambda}) \left[\frac{\mu\nu}{\lambda} \right] = \\ &= - \frac{1}{2} (g^{\lambda\lambda}) \left[\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

(Daß über den Index λ nicht zu summieren ist, mag durch die runde Klammer angedeutet sein!) Wir haben also die 40 Größen $\left[\frac{\mu\nu}{\lambda} \right]$ daraufhin zu durchmustern, welche von ihnen auf Grund von (17) nicht verschwinden.

A. μ, ν, λ „räumlich“ (d. i. = 1, 2, 3).

1. $\mu \neq \nu$.

a) $\mu \neq \lambda \neq \nu$. (3 Größen). Verschwinden,

da unter (17) keine Größe mit drei verschiedenen Indizes auftritt.

b) $\lambda = \mu$. (6 Größen).

$$\left[\begin{smallmatrix} \mu \nu \\ \mu \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x_\nu} \right).$$

Verschwinden, da sich unter (17) keine Größen dieser Art mit nur räumlichen Indizes vorfinden.

2. $\mu = \nu$.

a) $\lambda \neq \mu$. (6 Größen).

$$\left(\left[\begin{smallmatrix} \mu \mu \\ \lambda \end{smallmatrix} \right] \right) = \left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\mu} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x_\lambda} \right).$$

Von 0 verschieden, wenn $\lambda = 1, \mu = 2, 3$, und zwar:

$$\left[\begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} 33 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = -\frac{\alpha}{R(R-\alpha)}.$$

b) $\lambda = \mu$. (3 Größen).

$$\left(\left[\begin{smallmatrix} \mu \mu \\ \mu \end{smallmatrix} \right] \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x_\mu} \right).$$

Von 0 verschieden für $\mu = 1$, und zwar:

$$\left[\begin{smallmatrix} 11 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{(R-\alpha)^2}.$$

B. Ein Index gleich 4. (6 + 9 = 15 Größen).

In jedem Term wird entweder nach x_4 , oder es wird eine der Größen g_{14}, g_{24}, g_{34} differenziert. Daher verschwinden diese 15 Größen.

C. Zwei Indizes gleich 4. (3 + 3 = 6 Größen).

Von 0 verschieden sind offenbar nur

$$\left[\begin{smallmatrix} 41 \\ 4 \end{smallmatrix} \right] = -\left[\begin{smallmatrix} 44 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{R^2}.$$

D. Alle drei Indizes gleich 4. (1 Größe).

Verschwindet. —

Auf Grund dieser Durchmusterung findet man aus (18) mit Rücksicht auf (15):

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= \Gamma_{33}^1 = -\frac{\alpha}{R^2} \\ \Gamma_{11}^1 &= -\Gamma_{41}^1 = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{R(R-\alpha)} \\ \Gamma_{44}^1 &= -\frac{1}{2} \frac{\alpha(R-\alpha)}{R^3} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Alle anderen = 0. —

Die Ausdrücke (2), die wir jetzt zu bilden haben, lassen sich mit der Abkürzung

$$A_\sigma^\alpha = g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\sigma}^\beta \quad (20)$$

folgendermaßen schreiben:

$$x_\sigma^\alpha t_\sigma^\alpha = \frac{1}{2} \delta_\sigma^\alpha A_\sigma^\alpha - A_\sigma^\alpha. \quad (21)$$

Wir berechnen A_σ^α . Wegen (15) verschwinden in (20) alle Terme mit $\mu \neq \nu$. Schreiben wir etwas ausführlicher:

$$A_\sigma^\alpha = g^{11} \Gamma_{1\beta}^\alpha \Gamma_{1\sigma}^\beta + g^{22} \Gamma_{2\beta}^\alpha \Gamma_{2\sigma}^\beta + g^{33} \Gamma_{3\beta}^\alpha \Gamma_{3\sigma}^\beta + g^{44} \Gamma_{4\beta}^\alpha \Gamma_{4\sigma}^\beta, \quad (22)$$

so erkennt man, daß auch die im 2. und 3. Term zusammengefaßten Glieder wegen (19) einzeln verschwinden, und zwar wenn $\beta = 2$ bzw. = 3 wegen des dritten, sonst wegen des zweiten Faktors. Bleibt

$$A_\sigma^\alpha = g^{11} \Gamma_{1\beta}^\alpha \Gamma_{1\sigma}^\beta + g^{44} \Gamma_{4\beta}^\alpha \Gamma_{4\sigma}^\beta. \quad (23)$$

Hieraus erkennt man sofort, daß alle jene A_σ^α verschwinden, welche den Index 2 oder 3 enthalten. Es bleiben also nur noch zu untersuchen:

$$A_1^4, A_4^1, A_1^1, A_4^4. \quad (24)$$

In den betreffenden Ausdrücken fallen noch alle jene Glieder fort, in denen $\beta = 2, 3$, ferner jene, in denen eine Γ -Größe den Index 4 einmal oder dreimal enthält. Daraus folgt einmal

$$A_1^4 = A_4^1 = 0. \quad (25)$$

Endlich berechnet man explizite aus (23), (19) und (15):

$$\begin{aligned} A_1^1 &= g^{11} (\Gamma_{11}^1)^2 + g^{44} \Gamma_{41}^1 \Gamma_{41}^1 \\ A_4^4 &= g^{11} (\Gamma_{14}^1)^2 + g^{44} \Gamma_{44}^1 \Gamma_{44}^1 \end{aligned} = -\frac{R-\alpha}{R} \cdot \frac{1}{4} \frac{\alpha^2}{R^2(R-\alpha)^2} + \frac{R}{R-\alpha} \cdot \frac{1}{4} \frac{\alpha^2}{R^4} = 0. \quad (26)$$

Auf der x_1 -Achse verschwinden also alle Größen A_σ^α identisch in $R (= x_1)$. Wegen (21) gilt dasselbe von den t_σ^α . Wie oben vorausgreifend bemerkt, folgt daraus, wegen der Kovarianz dieser Größen bei linearen Transformationen und wegen der Kugelsymmetrie des Feldes, daß die t_σ^α für das gewählte Bezugssystem überall (außerhalb der gravitierenden Kugel) identisch in allen Koordinaten verschwinden. W. z. b. w.

3. Dieses Ergebnis scheint mir unter allen Umständen von ziemlicher Bedeutung für unsere Auffassung von der physikalischen Natur des Gravitationsfeldes. Denn entweder müssen wir darauf verzichten, in den durch die Gleichungen (2) definierten t_σ^α die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes zu erblicken; damit würde aber zunächst auch die Bedeutung der „Erhaltungssätze“ (s. A. Einstein l. c.) fallen und die Aufgabe erwachsen, diesen integrierenden Bestandteil der Fundamente neuerdings sicher zu stellen. — Halten wir jedoch an den Ausdrücken

(2) fest, dann lehrt unsere Rechnung, daß es wirkliche Gravitationsfelder (d. i. Felder, die sich nicht „wegtransformieren“ lassen) gibt, mit durchaus verschwindenden oder richtiger gesagt „wegtransformierbaren“ Energiekomponenten; Felder, in denen nicht nur Bewegungsgröße und Energiestrom, sondern auch die Energiedichte und die Analoga der Maxwell'schen Spannungen durch geeignete Wahl des Koordinatensystems für endliche Bezirke zum Verschwinden gebracht werden können.

(Eingegangen 22. November 1917.)

Über die zum Beweise des Boltzmannschen Prinzips verwendete „wahrscheinlichste“ Verteilung.

Von Adolf Smekal.

Die neuere statistische Thermodynamik hat den Nutzen der Boltzmannschen Entropie-Wahrscheinlichkeits-Relation

$$S = \kappa \log W \quad (1)$$

anerkennt, diese Gleichung vielfach als „Boltzmannsches Prinzip“ an die Spitze ihrer Überlegungen gestellt, ohne eigens danach zu fragen, ob sie auch auf Grund der bei den betreffenden Fällen gemachten Voraussetzungen bewiesen werden kann. Da außerdem auch die Grundlagen des Boltzmannschen Beweises von (1) durch den Nachweis der Unzulässigkeit der Ergodenhypothese erschüttert sind, so hat sich P. Ehrenfest¹⁾ die Frage vorgelegt, unter welchen allgemeinen Voraussetzungen die Gleichung (1) gültig ist. Mit Heranziehung einer von demselben Autor eingeführten Terminologie²⁾ läßt sich diese Frage auch so formulieren: Unter welchen Umständen ist die Wahrscheinlichkeit W eine adiabatistische Invariante?

Die von Ehrenfest ausgeführte Verallgemeinerung besteht darin, daß er nicht wie Boltzmann jedem Punkte des μ -Raumes (Phasenraum für das Teilsystem, bzw. Molekül) „gleiches Gewicht“

$$G(q_i, p_i) = \text{const} \quad (2)$$

zuschreibt, sondern die allgemeinere Gewichtswahl

$$G(q_i, p_i, a) \quad (3)$$

eingührt. Darin repräsentiert a eine beliebige Anzahl von willkürlichen, voneinander unabhängigen Parametern; q_i und p_i sind die generalisierten Koordinaten und Impulse des mechanischen Systems.

Um die gesuchte Verteilung der Teilsysteme im μ -Raume als „wahrscheinlichste Verteilung“

charakterisieren zu können, bedient sich Ehrenfest desselben Weges, den P. Debye¹⁾ zur Ableitung der kanonischen Verteilung (der Name bezieht sich eigentlich auf die formal übereinstimmende Verteilung im γ -Raum) auf Grund der Boltzmannschen Annahme (2) benutzt hat. Die Verteilung die er erhält, kann auch formal in den γ -Raum übertragen gedacht werden und ist in diesem Sinne als Verallgemeinerung der kanonischen Verteilung zu bezeichnen, in die sie für

$$G = 1$$

in der Tat übergeht.

Allein es bleibt noch ein Punkt zu erwähnen übrig, der von wesentlicher Bedeutung zu sein scheint und der trotzdem mit der Boltzmannschen Gewichtswahl in Widerspruch steht. Wenn nach Ehrenfest

$$G dq_1 \dots dq_r dp_1 \dots dp_r = G d\tau$$

die „Wahrscheinlichkeit a priori“ dafür ist, daß die Phase eines individuellen Teilsystems im Volumelement des μ -Raumes liegt, so müßte man die Forderung erheben

$$\int G d\tau = 1, \quad (4)$$

wobei das Integral über den ganzen unendlichen μ -Raum zu erstrecken ist. Für die Boltzmannsche Gewichtswahl und ebenso für die übrigen in der Literatur behandelten Verallgemeinerungen divergiert aber dieses Integral²⁾. Dieser Widerspruch dürfte seine Erklärung darin finden, daß die bei der Ableitung verwendeten Grenzübergänge mit (4) nicht verträglich sind, verteilt man doch zunächst eine endliche, wenn auch sehr große Anzahl N von Teilsystemen über ∞^{2n} zunächst als endlich angenommene Elementargebiete $d\tau^3$, ersetzt aber dann nachträglich die Summen durch Integrale über den ganzen unendlichen μ -Raum, von denen man natürlich verlangt, daß sie existieren sollen! Man wird also, im Gegensatz zu Ehrenfest, die Bedingung (4) nicht als bindend ansehen können, um so mehr als sich weiter unten noch ein anderer, mehr physikalischer Grund dagegen wird namhaft machen lassen.

Die von Ehrenfest erhaltene Verteilungsfunktion ist in seiner Bezeichnungsweise (l. c.).

$$f = N \frac{e^{-\mu \epsilon} G}{\int d\tau e^{-\mu \epsilon} G} \quad (5)$$

Setzt man

$$Z(E, a) = \int d\tau e^{-\mu \epsilon} G = e^{-\mu \psi},$$

$$\mu = \frac{1}{\theta}$$

1) P. Debye, Ann. d. Phys. 33, 441, 1910, § 1.

2) P. Ehrenfest, l. c. § 6.

3) Indem man sich die Teilsysteme „kontinuierlich in der Phase verteilt denkt“ (Gibbs).

1) P. Ehrenfest, diese Zeitschr. 15, 657, 1914.

2) P. Ehrenfest, Ann. d. Phys. 51, 327, 1916.

und integriert über den unendlichen μ -Raum, so folgt

$$\int G e^{\frac{\psi - \varepsilon}{\Theta}} d\tau = 1. \quad (6)$$

Aus dieser Form der Ehrenfest'schen Verteilung ist der früher erwähnte formale Zusammenhang mit der kanonischen Verteilung des γ -Raumes direkt ersichtlich. Damit eine derart verteilte Gesamtheit sich in statistischem Gleichgewichte befindet, muß G eine Funktion der zeitfreien Integrale des Teilsystems sein.

Indem man die Gibbssche¹⁾ Betrachtungsweise auf die Verteilung (6) anwendet²⁾, gelangt man ähnlich wie Ehrenfest zur „ δG -Bedingung“. Denkt man sich nämlich die Werte der Gesamtenergie E und der Parameter a geändert und die Gesamtheit, ihren neuen Werten entsprechend, gemäß (6) verteilt, so erhält man durch Differentiation der Gleichung

$$e^{-\frac{\psi}{\Theta}} = \int G e^{-\frac{\varepsilon}{\Theta}} d\tau$$

die folgende

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\psi}{\Theta}} \left(-\frac{1}{\Theta} d\psi + \frac{\psi}{\Theta^2} d\Theta \right) \\ = \frac{1}{\Theta^2} d\Theta \int G e^{-\frac{\varepsilon}{\Theta}} d\tau \\ - \frac{1}{\Theta} da \int G \frac{\partial \varepsilon}{\partial a} e^{-\frac{\varepsilon}{\Theta}} d\tau \\ + da \int \frac{\partial G}{\partial a} e^{-\frac{\varepsilon}{\Theta}} d\tau. \end{aligned}$$

Nun ist die Mittelwertsdefinition in der Ehrenfest'schen Verteilung für irgendeine Phasenfunktion u

$$\bar{u} = \int G u e^{\frac{\psi - \varepsilon}{\Theta}} d\tau. \quad (7)$$

Wenn die kinetische Energie von den a unabhängig ist, wie auch Gibbs und Ehrenfest voraussetzen, so ist

$$A = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial a}$$

die Kraft, welche das Teilsystem in der Richtung von a ausübt. Multipliziert man die früher

erhaltene Gleichung mit $\Theta e^{\frac{\psi}{\Theta}}$ und berücksichtigt (7), so erhält man

1) J. W. Gibbs, Elementary principles in statistical mechanics, New-York 1902, deutsch von E. Zermelo, Leipzig 1905, IV. Kapitel, S. 42/43.

2) Dadurch übernimmt der μ -Raum die Rolle eines γ -Raumes und das Teilsystem die Rolle eines Total-systems. Die Energiebedingung wird aber wegen $E = N\bar{\varepsilon}$ nicht verletzt und auch die übrigen Mittelwerte des wirklichen Totalsystems sind gleich den N -fachen Mittelwerten eines Teilsystems bei der obigen Betrachtungsweise (vgl. (5), wo N als Faktor auftritt).

$$d\psi = \frac{\psi}{\Theta} d\Theta - \frac{\varepsilon}{\Theta} d\Theta - \bar{A} da - \Theta \frac{\partial \log G}{\partial a} da.$$

Diese Gleichung läßt sich, wenn man die Bezeichnung

$$\eta = \frac{\varepsilon - \psi}{\Theta}$$

einführt, auf die Form bringen

$$d\eta = \frac{d\varepsilon + \bar{A} da}{\Theta} + \frac{\partial \log G}{\partial a} da. \quad (8)$$

Um diese Gleichung, abgesehen von den Durchschnittszeichen, mit der thermodynamischen Entropiegleichung identisch zu machen, muß man

$$\frac{\partial \log G}{\partial a} = 0$$

oder

$$\int \delta G e^{\frac{\psi - \varepsilon}{\Theta}} d\tau = 0 \quad (9)$$

setzen, was, wie bei Ehrenfest, unmittelbar auf die „ δG -Bedingung“ führt.

Man kann also das Ehrenfest'sche Resultat in folgender Weise aussprechen: Die δG -Bedingung ist notwendig und hinreichend dafür, daß die erste Gibbssche Entropiedefinition in der „verallgemeinerten kanonischen Gesamtheit“ (6) (für das Teilsystem) existiert und bis auf einen konstanten Faktor ($\propto N$) mit der Boltzmann'schen Entropiedefinition (1) zusammenfällt. Dann ist also Θ integrierender Nenner von δQ , hingegen wird dem Mittelwerte der kinetischen Energie diese Eigenschaft jetzt im allgemeinen nicht mehr zukommen.

Wie steht es nun mit den anderen beiden Gibbsschen Entropiedefinitionen¹⁾, sofern sie sich überhaupt auf die Ehrenfest'sche Verteilung (6) erweitern lassen? Man kann zeigen, daß dies möglich ist, wenn G eine Funktion von ε (und den a) allein ist; dieser Fall spielt auch bei Ehrenfest eine ausgezeichnete Rolle. Doch wird man nicht verkennen, daß diese Voraussetzung eine sehr beträchtliche Einschränkung der Allgemeinheit zur Folge hat; denn sie bedeutet, daß G längs der „Energieflächen“ konstant ist, daß sich also eine derartig spezialisierte Verteilung (6) gleich der kanonischen Verteilung aus mikrokanonischen Verteilungen zusammensetzen läßt. Eine weitere wesentliche Voraussetzung, die aber im Charakter der zweiten und dritten Gibbsschen Entropiedefinition

1) Bezüglich der kanonischen Verteilung ist die Stellung der Gibbsschen Entropiedefinitionen zum Boltzmann'schen Prinzip eingehend von M. Planck, Boltzmann-Festschrift, Leipzig 1904, S. 113 besprochen worden.

begründet ist, besteht darin, daß das Teilsystem sehr viele Freiheitsgrade haben muß¹⁾.

Setzt man

$$\Gamma = \log G(\varepsilon, a)$$

$$V = \int_{V=0}^{\varepsilon} d\tau^2$$

$$\Phi = \log \frac{\partial V}{\partial \varepsilon}$$

so ist

$$d\tau = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \quad (10)$$

und die Definitionsgleichung der Verteilung (6) lautet nun

$$\int_{V=0}^{\varepsilon=\infty} e^{\frac{\psi-\varepsilon}{\Theta} + \Gamma + \Phi} d\varepsilon = 1. \quad (11)$$

Ersetzt man hierin noch $\Gamma + \Phi$ durch Φ' , so hat man der Form nach genau jene Gleichung erhalten, von der Gibbs ausgeht³⁾, um die kanonischen Mittelwerte der reinen Energiefunktionen zu berechnen, die jetzt durch

$$\bar{u} = \int_{V=0}^{\varepsilon=\infty} e^{\frac{\psi-\varepsilon}{\Theta} + \Phi'} u(\varepsilon) d\varepsilon \quad (12)$$

definiert sind.

Nun ist identisch, ähnlich wie bei Gibbs,

$$\frac{d\bar{u}}{d\varepsilon} - \frac{\bar{u}}{\Theta} + u \frac{d\Phi'}{d\varepsilon} = \left[u e^{\frac{\psi-\varepsilon}{\Theta} + \Phi'} \right]_{V=0}^{\varepsilon=\infty} \quad (13)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung verschwindet für

$$u = 1$$

und

$$u = e^{-\Phi'} \int e^{\Phi'} d\varepsilon,$$

also ergeben sich die beiden Mittelwerte

$$\frac{d\Phi'}{d\varepsilon} = \frac{1}{\Theta} \quad (14)$$

und

$$e^{-\Phi'} \int e^{\Phi'} d\varepsilon = \Theta. \quad (15)$$

Für $\Gamma = 0$, also $\Phi' = \Phi$, gehen (14) und (15) in jene beiden kanonischen Mittelwertgleichungen über, aus denen Gibbs seine zweite und dritte Entropiedefinition für das „häufige“ System deduziert. Für sehr viele Freiheitsgrade werden diese Entropiedefinitionen bekanntlich

äquivalent. Indem man ähnliche Überlegungen wie Gibbs anstellt, erhält man aus (14) und (15) für die Entropie des „häufigsten“ Teilsystems im μ -Raum,

$$S_2 = \Phi' = \log \left(G \frac{\partial V}{\partial \varepsilon^*} \right) \quad (16)$$

und

$$S_3 = \log \int e^{\Phi'} d\varepsilon = \log \int_{V=0}^{\varepsilon=\varepsilon^*} G \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} d\varepsilon. \quad (17)$$

ε^* ist die Energie des „häufigsten“ Teilsystems. Auch diese Formeln gehen, wie es ja nicht anders sein kann, für $G=1$ in die entsprechenden kanonischen über. Sie gelten, wie dies übrigens auch von der Boltzmannschen und der ersten Gibbschen Entropiedefinition gilt, nur mit einer gewissen Annäherung.

Man überzeugt sich nun leicht, welche unmittelbare thermodynamische Bedeutung der „ δG -Bedingung“ zukommt. Infolge (10) kann man S_3 auch die Form geben

$$S_3 = \log \int_{V=0}^{\varepsilon=\varepsilon^*} G d\tau.$$

Die „ δG -Bedingung“ verlangt, daß das Integral

$$\int \delta G d\tau,$$

zwischen zwei beliebigen Energiegrenzen integriert, verschwindet. Indem man als untere Grenze die dem Werte $V=0$ entsprechende Energie und als obere Grenze ε^* nimmt, findet man also: Die „ δG -Bedingung“ besagt, daß sich die auf Grund der gemachten Annahmen erweiterte dritte Gibbsche Entropiedefinition gegen jede Veränderung der Parameter a in G invariant verhält. Sie reicht aber nicht dazu aus, um S_3 zu einer adiabatischen Invariante zu machen, vielmehr würde das eine weitere Bedingung für die Funktion G bedeuten.

Hingegen scheint die „ δG -Bedingung“ in keinerlei Beziehung zu S_2 zu stehen, so daß S_3 in diesem Sinne als gegen S_2 ausgezeichnet angesehen werden kann. Eine gewisse Bevorzugung von S_3 gesteht auch Gibbs in der Theorie der kanonischen, bzw. mikrokanonischen Gesamtheit zu, ebenso würde darauf der direkte Nachweis Ornsteins hindeuten¹⁾, daß für die Boltzmannsche Gewichtswahl die Größe $\log W$ für den häufigsten Zustand und sehr viele Freiheitsgrade, abgesehen von einer Konstanten mit $\log V$ übereinstimmt.

Aus (18) entnimmt man jetzt auch die Bedeutung der von Ehrenfest geforderten Bedingung (4). Das in (4) auftretende Integral ist über den ganzen unendlichen μ -Raum zu

1) Für Moleküle trifft diese Voraussetzung natürlich nicht zu und damit kommt auch das Weitere für die Quantentheorie kaum in Betracht. Aber sie beeinflusst nicht die Anwendbarkeit des Boltzmannschen Prinzips und ermöglicht wenigstens in begrifflich einwandfreier Weise die Unzulässigkeit von (4) nachzuweisen. Im γ -Raum, wo die Betrachtung mit formal ganz übereinstimmenden Formeln erfolgt, wird sie natürlich immer gemacht.

2) Ehrenfest bezeichnet diese Größe im μ -Raum mit i .

3) J. W. Gibbs, l. c. IX. Kapitel, Gl. (318).

1) L. S. Ornstein, Proc. Amsterdam 14, 840, 1912.

erstrecken, also unter den jetzigen Voraussetzungen bis $\varepsilon^* = \infty$. Die Bedingung (4) würde also nach (18) bedeuten: Für $\varepsilon = \infty$ hat die Entropie der Teilsysteme und damit auch die des Gesamtsystems einen universellen Wert, nämlich Null. Divergiert hingegen das Integral

$$\int_{V=0}^{\varepsilon=\infty} G d\tau,$$

so werden Energie und Entropie zugleich unendlich. Man sieht, welche Stellung diese Überlegungen zum Nernstschen Wärmetheorem einnehmen würden. Die Gleichung (4) kann also nicht als bindend angesehen werden.

Herrn Professor Ehrenfest bin ich für einige kritische Bemerkungen, die die Darstellung beeinflusst haben, zu großem Danke verpflichtet.

Berlin, Oktober 1917.

(Eingegangen 3. November 1917.)

Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes.

Von A. Korn.

VI.

Elektromotorische Kräfte in langsam veränderlichen Feldern. Stellungnahme zu der Ampèreschen Theorie des Magnetismus.

Die ponderomotorischen Kräfte, welche wir bisher betrachtet haben, sind zwar auch Kräfte, welche zunächst lediglich auf die elektrischen Teilchen ausgeübt werden und sich erst dadurch auf die ponderablen Teilchen übertragen, daß wir in jedem Körper außer den elektrischen Teilchen ponderable Teilchen annehmen, deren sichtbare Geschwindigkeiten mit den Mittelwerten der sichtbaren Geschwindigkeiten der elektrischen Teilchen übereinstimmen sollen; es können sich nun aber auch Kräfte auf elektrische Teilchen in Leitern von solcher Art ergeben, daß dieselben für positive und negative Teilchen nicht gleich sind; nur die Mittelwerte dieser Kräfte sind als ponderomotorische Kräfte zu bezeichnen, und die negativen Teilchen werden in einem solchen Falle in Leitern sich in anderer Weise bewegen wie die positiven, d. h. in einem solchen Falle wird eine elektrische Strömung eintreten, und wir werden aus diesem Grunde dann von dem Auftreten elektromotorischer Kräfte sprechen.

Wie in allen anderen bisherigen Theorien wird natürlich bei der Berechnung der elektrischen Strömungen in Leitern, welche infolge solcher elektromotorischen Kräfte entstehen, die zu Wärmeerscheinungen Anlaß gebende Reibung zu berücksichtigen sein, die wir aber nicht, wie frühere Theorien, als einfache Erfahrungstatsachen hinnehmen dürfen, sondern erst gleichfalls mechanisch zu erklären haben werden. Ich werde für diese Erklärung die Theorie der „universellen Schwingungen“ zu Hilfe nehmen, welche erst in der folgenden Abhandlung besprochen werden soll; darum werden wir uns in dieser Abhandlung darauf zu beschränken haben, lediglich die infolge des Feldes auftretenden elektromotorischen Kräfte, und zwar zunächst bei langsam veränderlichen Feldern, zu berechnen, und erst nach Grundlegung der Reibungstheorie in einer späteren Abhandlung aus den elektromotorischen Kräften die elektrischen Strömungen in Leitern wirklich bestimmen.

Wir beschäftigen uns zunächst mit langsam veränderlichen Feldern in dem Sinne, daß wir zwar jetzt nicht mehr im allgemeinen die Mittelwerte der u_0, v_0, w_0 als verschwindend klein und alle Mittelwerte von der Zeit t unabhängig annehmen, daß wir aber die absoluten Werte der u_0, v_0, w_0 und der Differentialquotienten der das Feld bestimmenden Funktionen innerhalb gewisser oberer Grenzen voraussetzen, so daß wir nach der Methode der sukzessiven Annäherungen in Reihenentwicklungen nach diesen Größen für zweite Annäherungen nur die ersten Potenzen dieser Größen zu berücksichtigen brauchen.

Für die ponderomotorischen Kräfte, welche wir in den beiden vorangehenden Abhandlungen betrachtet haben, gibt die Berücksichtigung sichtbarer Geschwindigkeiten u_0, v_0, w_0 wenn dieselben etwa von der Größenordnung gewöhnlicher irdischer Translationsgeschwindigkeiten sind, wenn wir mit ε eine Dichte von der Größenordnung der gewöhnlichen ponderablen Dichten bezeichnen und dann bedenken, daß in solchen Fällen die Größen

$$\varepsilon(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2), \mu(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2), \\ \mu(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)$$

etwa von derselben Größenordnung sein werden, nur Korrekturglieder, welche gegen die ponderomotorischen Kräfte im stationären Falle von der Ordnung $\frac{\mu}{\varepsilon}$ klein sind. Also nur, wenn die sichtbaren Geschwindigkeiten außerordentlich große Werte erreichen, und ebenfalls, wenn die Differentialquotienten der das Feld bestimmenden Funktionen nach der Zeit große Werte

haben, wird eine Korrektur der ersten, für den stationären Fall bestimmten Annäherungen notwendig sein.

Anders liegt es bei der Bestimmung der elektromotorischen Kräfte; solche treten im stationären Falle überhaupt nicht auf, die ersten Annäherungen sind also null, und wir müssen für eine zweite Annäherung die u_0, v_0, w_0 und die zeitlichen Veränderungen der das Feld bestimmenden Funktionen berücksichtigen. Allerdings ergibt sich, wie bereits bemerkt, daß in den Formeln für die infolge des Feldes auf einen Körper τ wirkenden Kräfte¹⁾:

$$X_0 = \frac{1}{2} \mu_0 \int_{\tau} \left\{ u_1 \theta_1 - \left[v_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) - w_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \right] \right\} d\tau \quad (1)$$

$$- \frac{1}{2} \mu_0 \int_{\tau} \left\{ v_2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) - w_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \right\} d\tau, \dots$$

die Berücksichtigung der sichtbaren Bewegungen und der zeitlichen Veränderungen der das Feld bestimmenden Funktionen Korrekturglieder nicht hinzugefügt werden brauchen, weil diese von der

Ordnung $\frac{\mu}{\epsilon}$ klein sein würden, wohl muß man aber jetzt bei der Bestimmung der Funktionen

$$u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2$$

selbst, aus den Gleichungen des elektromagnetischen Feldes²⁾:

$$u_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{c} \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial x} U + \frac{\partial v_0}{\partial x} V + \frac{\partial w_0}{\partial x} W \right\}, \dots$$

$$u_2 = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \dots, \quad (2)$$

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\theta_1,$$

$$\Delta U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{1}{c} u_0 \theta_1 \quad (3)$$

$$+ \frac{1}{c^2} \left\{ \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \frac{\partial V}{\partial t} - \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \frac{\partial W}{\partial t} \right\}, \dots$$

die ersten Potenzen der u_0, v_0, w_0 , ihrer Ableitungen und der zeitlichen Differentialquotienten

$$\frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial W}{\partial t}$$

berücksichtigen. Für ψ, U, V, W bleiben auch in zweiter Annäherung die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \psi &= -\theta_1, \\ \Delta U &= -\frac{1}{c} u_0 \theta_1, \dots, \\ u_2 &= \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

maßgebend, dagegen haben wir in u_1, v_1, w_1 nicht mehr, wie in erster Annäherung, die Ableitungen des elektrostatischen Potentials ψ zu erblicken, sondern wir haben die vollen Formeln:

$$u_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{c} \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial x} U + \frac{\partial v_0}{\partial x} V + \frac{\partial w_0}{\partial x} W \right\}, \dots \quad (5)$$

anzusetzen.

Da aus den Formeln (1) hervorgeht, daß die Ausdrücke rechts in (1) für positive und negative Elektronen dieselben sind, mit Ausnahme der Ausdrücke

$$\frac{1}{2} \mu_0 \int_{\tau} u_1 \theta_1 d\tau, \dots,$$

die für positive bzw. negative Elektronen von entgegengesetztem Vorzeichen sind, ergeben sich die elektromotorischen Kräfte, welche auf ein den Raum $\bar{d}\tau$ einnehmendes elektrisches Teilchen in einem neutral elektrischen Leiter ausgeübt werden:

$$\bar{\mathcal{E}} = -\frac{1}{2} \mu_0 \theta_1 \bar{d}\tau \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{c} \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial x} U + \frac{\partial v_0}{\partial x} V + \frac{\partial w_0}{\partial x} W \right\} \right], \dots \quad (6)$$

Die von dem elektrostatischen Potentiale ψ herührenden elektromotorischen Kräfte werden in langsam veränderlichen Feldern in den meisten Fällen deshalb weniger Interesse beanspruchen, weil in neutral elektrischen Leitern, wie sich bei einer späteren Gelegenheit herausstellen wird, die von diesen elektromotorischen Kräften hervorgerufenen Strömungen rasch zu einem stationären Zustande führen, in welchem die Strömungen verschwinden; das wesentliche Interesse in neutral elektrischen Körpern beanspruchen die elektromotorischen Kräfte

$$-\frac{1}{2c} \mu_0 \theta_1 \bar{d}\tau \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial x} U + \frac{\partial v_0}{\partial x} V + \frac{\partial w_0}{\partial x} W \right\}, \dots$$

welche entstehen, wenn elektrische Ströme ihre

1) Vgl. Abh. IV u. V, diese Zeitschr. 18, 542 u. 581, 1917.
2) Vgl. Abh. III, diese Zeitschr. 18, 506, 1917.

Intensitäten zeitlich ändern bzw. die Körper, in denen elektrische Strömungen stattfinden, sich bewegen.

Denken wir uns, um sogleich den prinzipiellen Fall herauszugreifen, auf den die übrigen Fälle zurückzuführen sind, einen elektrischen Stromring (J, σ) , der im allgemeinen in einer sichtbaren Bewegung begriffen sein möge, so daß jedes Element $d\sigma$ desselben mit den Richtungskosinussen

$$\cos(\sigma x), \cos(\sigma y), \cos(\sigma z)$$

an der Stelle (ξ, η, ζ) gewisse sichtbare Geschwindigkeitskomponenten besitzt, und wir wollen die elektromotorischen Kräfte berechnen, welche das von diesem Stromringe herrührende elektromagnetische Feld auf ein den Raum $\bar{d}\tau$ erfüllendes elektrisches Teilchen in einem elektrisch neutralen Leiter ausübt, wobei wir die Koordinaten irgendeines Punktes des elektrischen Teilchens mit (x, y, z) , seine sichtbaren Geschwindigkeiten mit u_0, v_0, w_0 bezeichnen wollen.

Wir haben zu bedenken, daß sich U, V, W additiv aus den Größen zusammensetzen, welche den einzelnen Strömen entsprechen, und wenn wir nur die Wirkungen des Stromringes (J, σ) berechnen wollen, nur die von diesen herrührenden¹⁾

$$U = \frac{1}{4\pi c} \int \frac{u_x}{r} d\tau = \frac{J}{4\pi c} \sqrt{\frac{2}{\mu_0}} \int \frac{\cos(\sigma x)}{r} d\sigma, \dots \quad (I)$$

zu betrachten haben; in einem scheinbar starren Leiter ist überdies:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\partial v_0}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0,$$

und

$$\frac{\partial w_0}{\partial y} = -\frac{\partial v_0}{\partial z} = \pi',$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial z} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} = \chi',$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial x} = -\frac{\partial u_0}{\partial y} = \rho'$$

sind bestimmte Konstanten. Die gesuchten elektromotorischen Kräfte sind somit:

$$\Xi = -\frac{1}{2} \mu_0 \theta_1 \bar{d}\tau \cdot \frac{1}{4\pi c^2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\mu_0}} \left\{ \frac{\bar{d}}{dt} \int \frac{\cos(\sigma x)}{r} d\sigma + \int \frac{\rho' \cos(\sigma y) - \chi' \cos(\sigma z)}{r} d\sigma \right\}, \dots$$

und wenn wir noch für θ_1 die elektrische Masse

$$e = \sqrt{\frac{\mu_0}{2}} \theta_1 \bar{d}\tau$$

eingeführen¹⁾, welche sich in $\bar{d}\tau$ vorfindet, so ergibt sich, daß die von dem Stromringe (J, σ) auf die elektrische Masse e in einem neutral elektrischen, scheinbar starren Körper ausgeübten elektromotorischen Kräfte die Werte haben:

$$\Xi = -\frac{e}{4\pi c^2} \left\{ \frac{\bar{d}}{dt} \int \frac{\cos(\sigma x)}{r} d\sigma + \int \frac{\rho' \cos(\sigma y) - \chi' \cos(\sigma z)}{r} d\sigma \right\}, \dots \quad (II)$$

Dies ist das Hauptresultat dieser Abhandlung; dasselbe wird später dazu dienen, die Grundgesetze der Induktion in langsam veränderlichen Feldern abzuleiten, sobald wir, unter Berücksichtigung der Erscheinungen der Reibung auf mechanischer Grundlage, imstande sind, zu untersuchen, in welcher Weise die elektrischen Strömungen den hier berechneten elektromotorischen Kräften folgen. Wie in der Lorentz'schen Theorie werden infolge der Reibung in erster Annäherung die Stromkomponenten den elektromotorischen Kräften proportional werden, doch sei dieses Resultat, das wir erst mechanisch begründen müssen, an dieser Stelle nur angedeutet, damit die gewonnenen Formeln bereits auf die zu erwartenden Induktionsgesetze hinweisen können.

So wird nunmehr, da wir zur mechanischen Begründung der Reibungserscheinungen der Theorie der universellen Schwingungen bedürfen werden, eine kurze Auseinandersetzung dieser Theorie notwendig sein; wir werden diese Theorie, zu der wir in der nächsten Abhandlung übergehen werden, auch noch zu einer zweiten wichtigen Anwendung in den mechanischen Theorien des elektromagnetischen Feldes gebrauchen, nämlich zu einer mechanischen Interpretation der Magnete.

Bezüglich der Natur der Magnete stelle ich mich vollständig auf den Ampèreschen Standpunkt, indem ich magnetische Teilchen als kleine Stromringe auffasse; rein formal unterscheiden sich die Wirkungen solcher kleiner Stromringe nach außen nicht von den Wirkungen oszillierender Teilchen, d. h. starrer Teilchen, deren Zentren in einer Geraden Schwingungen um eine Mittellage mit der Schwingungsdauer T ausführen, wenn die Phase der Geschwindigkeit mit der Phase der von elektrischen Strömen aus-

1) Vgl. Abh. V, diese Zeitschr. 18, 581, 1917.

1) Vgl. Abh. IV, diese Zeitschr. 18, 542, 1917.

gehenden Geschwindigkeiten übereinstimmt und die Oszillationsrichtung in die Normale der Ebene der Führungskurve des Stromringes fällt.

Die Annahme der Ampèreschen Auffassung setzt uns ohne weiteres in den Stand, alle Grundgesetze über die ponderomotorischen Wechselwirkungen zwischen elektrischen Strömen und magnetischen Teilchen, sowie über die elektromotorischen Kräfte, welche durch bewegte magnetische Teilchen ausgeübt werden, abzuleiten, man kann auch hier bereits den Weg vorgezeichnet erkennen, auf dem die Theorie des induzierten Magnetismus ohne Schwierigkeit möglich ist; wir wollen indessen in dieser Abhandlung noch nicht auf die quantitativen Verhältnisse eingehen, wir wollen hier vielmehr einer prinzipiellen, die mechanische Natur der Magnete betreffenden Frage näher treten: Während im allgemeinen elektrische Strömungen mit Reibungserscheinungen verbunden sind, so daß elektrische Strömungen, wenn sie nicht durch fortdauernde Zuführung von Energie erhalten werden, rasch sich selbst verzehren, ist dies für elektrische Ströme, welche die magnetischen Teilchen bilden, nicht der Fall; jedenfalls kennen wir sogenannte permanente Magnete, welche — wenn überhaupt — ihre Energie sehr langsam abgeben. Meine Auffassung ist nun die, daß die Schwingungen, welche den permanenten magnetischen Teilchen inhärent sind, ihre Entstehung den Pulsationen der allgemeinen Gravitation verdanken. Auf diese Pulsationen der allgemeinen Gravitation können wir auch erst später bei Gelegenheit der Theorie der universellen Schwingungen eingehen, doch hier schon vorausnehmen, daß die Pulsationsgeschwindigkeiten der ponderablen Teilchen, welche die allgemeine Gravitation zur Folge haben, die Schwingungsdauer und Phase der

$$u_2 \sin \frac{t}{T} 2\pi, \quad v_2 \sin \frac{t}{T} 2\pi, \quad w_2 \sin \frac{t}{T} 2\pi$$

besitzen sollen. Wenn solche Teilchen außer diesen Pulsationen noch rasche Rotationen ausführen, so werden z. B. die Elemente ihrer Oberfläche außer konstanten noch schwingende Umlaufgeschwindigkeiten haben, mit der Phase der

$$u_1 \cos \frac{t}{T} 2\pi, \quad v_1 \cos \frac{t}{T} 2\pi, \quad w_1 \cos \frac{t}{T} 2\pi;$$

jedes Elektron, welches mit einem ponderablen Teilchen verbunden ist — die mechanische Natur dieser Bindung soll noch nicht Gegenstand dieser Betrachtungen sein, — erhält somit elektromotorische Kräfte, welche das Elektron in Umlauf um die Rotationsachse des

ponderablen Teilchens setzen, positive Elektronen in der einen, negative in der anderen Umlaufsrichtung, d. h. die Rotationen der ponderablen Teilchen machen die mit ihnen verbundenen Elektronen zu magnetischen Teilchen.

Sowohl für die Grundlegung der Theorie der permanenten magnetischen Teilchen, als auch für die Theorie der Reibung brauchen wir, wie wir sehen, die Theorie der universellen Schwingungen, welche wir von der nächsten Abhandlung an in den Bereich unserer Untersuchungen ziehen werden.

(Eingegangen 2. November 1917.)

Zur Kenntnis des Ni-Spektrums.

Von J. E. Paulson.

In meiner Dissertation habe ich schon die Ergebnisse einer vorläufigen Untersuchung des Ni-Spektrums mitgeteilt. Unter 51 untersuchten starken Linien erwiesen sich 14 als gesetzmäßig gelagert. Ich habe jetzt eine noch eingehendere Untersuchung aller Linien des Spektrums vorgenommen. Wie zu erwarten war, kommt auch hier eine sich mehrmals wiederholende Gruppe von Linien vor, die — wie bekannt — dadurch gekennzeichnet wird, daß zwischen den Wellenzahlen der Linien stets dieselben konstanten Differenzen auftreten. Das von mir entdeckte Wellenzahlensystem enthält acht Linien in jeder Gruppe, von welcher 33 Wiederholungen gefunden worden sind. Da eine vollständige Durchrechnung eines so linienreichen Spektrums kaum ausführbar ist, scheint es wohl möglich, daß das System größeren Umfang besitzt. Alle Paare mit den im System vorkommenden Differenzen habe ich weggelassen und von Triplettten sind nur zwei aufgenommen, deren starke Intensitäten ihre Zusammengehörigkeit sichern.

Aus den folgenden Tabellen geht sofort hervor, daß wie immer die gesetzmäßig gelagerten Linien am zahlreichsten im kurzwelligen Bereich des Spektrums vorkommen. Es muß bemerkt werden, daß die meisten starken Linien des Spektrums im System einbezogen sind. Von 4715 an (wo die Messung von Exner und Haschek beginnt) gibt es nur eine Linie mit der Intensität 20, zwei mit der Intensität 15, drei mit der Intensität 10 und fünf mit der Intensität 5, die man nicht in den Tabellen wiederfindet, welche doch 57 Linien mit Intensitäten gleich oder größer als 5 aufnehmen.

Meine Untersuchung hat nur die im Bogen-

spektrum auftretenden Linien umfaßt, deren Wellenlängen den Tabellen in Kayser's Handbuch entnommen sind. Genaue Messungen verschiedener Bereiche des Spektrums liegen von Rowland (in Sonne), Stütting, Eder und Valenta, Hasselberg und Exner und Haschek vor. Leider stimmen die Angaben verschiedener Beobachter in vielen Fällen schlecht überein. Wo die Messungsergebnisse sehr weit differieren, habe ich das Mittel genommen; wo mindestens zwei Beobachter nahezu denselben Wert gefunden haben, wurde der am genauesten erscheinende von diesen benutzt. Stütting

mißt den roten Teil des Spektrums in internationalen Einheiten. Seine Zahlen habe ich in Rowlandschen Einheiten umgerechnet mit Hilfe der von Kayser berechneten Korrektionsgrößen. Die Intensitätsangaben rühren teils von Stütting (6643—6007), teils von Hasselberg (5847—4786) und teils von Exner und Haschek (4520—3253) her.

In Tabelle I bedeutet λ die Wellenlänge, J die Intensität und γ die Wellenzahl. A, B, C usw. mit den Indizes 1—33 gibt den Platz jeder Linie im System an. Tabelle II zeigt wie dieses System gebaut ist.

Tabelle I.

λ	J	γ		λ	J	γ		λ	J	γ		λ	J	γ	
6643,88	10M	15051,45	A_1	3576,08	1	27963,58	D_8	3320,41	8	30116,76	E_{14}	2992,71	6	33414,53	G_{22}
6327,83	6	15803,20	A_4	3572,02	10	27995,36	E_4	3315,81	10	30158,54	F_{14}	2984,28	4	33508,92	H_{20}
6256,60	10M	15983,12	A_7	3566,51	20	28038,61	B_{15}	3312,49	3	30188,77	B_{21}	2981,80	8	33536,79	F_{25}
6191,39	10	16151,47	A_8	3551,71	3	28155,45	E_5	3320,35	2	30208,28	$B_{20,1}$	2944,06	6	33966,70	G_{28}
6129,18	6	16315,39	A_9	3548,32	6	28182,35	D_{10}	3293,83	1	30359,79	E_{16}	2914,12	2	34315,67	E_{25}
6108,35	8M	16371,03	A_{10}	3528,13	4	28343,03	E_8	3287,08	4	30422,14	G_{12}	2907,58	3	34392,87	C_{26}
6007,73	5	16645,78	A_{11}	3524,68	50	28371,30	G_1	3282,83	3	30461,52	E_{17}	2865,61	2	34896,59	D_{26}
5847,26	2	17102,03	A_{12}	3523,61	3	28379,99	G_2	3271,25	4	30569,35	F_{15}	2834,66	2	35277,61	E_{26}
5709,80	7	17513,75	A_{14}	3523,23	1	28383,05	B_{17}	3269,08	1	30589,64	E_{18}	2821,42	4	35443,15	G_{25}
5578,97	5	17924,46	A_{15}	3519,90	4	28409,90	G_{12}	3250,90	5	30760,71	B_{23}	2805,20	2	35648,08	H_{25}
5504,50	3	18166,95	A_{16}	3515,21	30	28447,80	F_4	3248,57	4	30782,77	G_{13}	2798,78	3	35729,86	F_{26}
5436,07	5	18395,05	A_{18}	3514,13	5	28456,55	D_{11}	3245,47	1	30812,17	F_{16}	2746,85	3	36495,33	G_{26}
5103,13	4	19595,82	A_{19}	3507,85	4	28507,49	E_9	3243,20	8	30833,74	G_{14}	2547,51	1	39254,02	B_{27}
5003,92	2	19984,33	A_{20}	3501,02	6	28563,11	E_{10}	3235,86	1	30903,68	C_{19}	2540,14	1	39367,91	B_{28}
4976,53	2	20094,32	A_{22}	3499,37	1	28576,57	H_1	3234,76	5	30914,19	F_{17}	2528,14	1	39554,78	B_{29}
4843,27	2	20647,21	A_{23}	3494,84	1	28613,61	F_6	3227,12	4	30987,38	H_{13}	2484,16	1	40255,06	B_{30}
4786,45	2	20892,31	A_{24}	3493,11	30	28627,79	F_7	3225,18	6	31006,02	B_{24}	2472,32	1	40447,84	C_{27}
4520,16	1	22123,11	A_{25}	3472,71	10	28795,96	F_8	3221,80	5	31038,55	H_{14}	2465,40	1	40561,37	C_{28}
4331,83	3	23084,93	A_{26}	3467,77	2	28836,98	C_{11}	3221,43	3	31042,30	F_{18}	2454,11	1	40747,97	C_{29}
3973,71	4	25165,40	B_1	3461,80	20	28886,71	G_3	3200,58	3	31244,34	G_{15}	2450,57	1	40806,84	B_{31}
3858,51	20	25916,74	B_4	3785,60	20	28913,43	D_{12}	3195,70	3	31292,05	C_{20}	2441,90	1	40951,72	D_{27}
3834,00	1	26082,42	B_6	3453,04	10	28959,98	F_9	3184,50	1	31402,10	C_{22}	2434,53	1	41075,69	B_{32}
3831,87	5	26096,92	B_7	3446,40	30	29015,78	F_{10}	3165,64	1	31589,19	G_{17}	2424,16	1	41251,40	D_{29}
3807,30	8	26265,33	B_8	3437,45	8	29091,33	H_3	3145,83	3	31788,12	E_{19}	2412,80	1	41445,62	E_{28}
3793,75	3	26359,14	C_1	3433,72	15	29122,93	G_4	3145,23	1	31794,18	H_{17}	2401,95	1	41632,84	E_{29}
3792,48	2	26367,97	C_2	3420,88	2	29232,24	O_{15}	3134,22	30	31905,87	D_{22}	2393,20	1	41785,06	F_{27}
3783,67	8	26429,37	B_9	3414,91	30R	29283,34	G_5	3132,68	1	31921,55	H_{18}	2386,70	1	41898,86	F_{28}
3775,75	8	26484,81	B_{10}	3414,08	4	29290,47	F_{11}	3129,42	3	31954,81	C_{23}	2380,94	1	42000,22	C_{31}
3736,96	4	26759,72	B_{11}	3413,61	5	29294,50	E_{12}	3107,83	2	32176,79	E_{20}	2376,12	1	42085,42	F_{29}
3722,64	5	26862,66	D_1	3409,70	5	29328,09	H_4	3105,60	5	32199,90	C_{24}	2365,78	1	42269,36	C_{32}
3688,59	3	27110,63	C_4	3393,10	20R	29471,57	G_8	3102,00	10R	32237,27	B_{25}	2362,19	1	42313,60	E_{30}
3674,30	6	27216,07	B_{12}	3391,20	10	29488,09	H_5	3101,68	10R	32240,59	F_{19}	2360,75	1	42359,42	C_{33}
3670,60	4	27243,50	E_1	3381,01	3	29576,96	C_{17}	3099,22	4	32266,18	E_{21}	2355,15	1	42400,14	G_{27}
3669,40	3	27252,41	E_2	3374,36	4	29635,25	G_9	3097,27	5	32286,50	E_{22}	2348,83	1	42574,39	G_{28}
3666,16	1	27276,50	C_6	3372,14	6	29654,76	E_{13}	3080,91	5	32457,94	D_{23}	2338,6	1	42760,63	G_{29}
3664,27	4	27290,57	C_7	3369,71	15R	29676,14	H_8	3064,75	6	32629,09	F_{20}	2337,95	1	42772,51	D_{32}
3641,78	1	27459,10	C_8	3368,03	3	29690,95	G_{10}	3057,76	15R	32707,68	D_{24}	2337,20	1	42786,24	F_{30}
3619,52	50R	27627,98	B_{14}	3366,32	5	29706,03	E_{14}	3056,33	1	32718,98	F_{21}	2331,83	1	42884,77	E_{31}
3612,96	6	27678,60	C_{10}	3365,91	5	29709,65	B_{19}	3054,42	10	32739,44	E_{22}	2312,50	3R	43243,24	E_{33}
3610,61	10	27696,15	F_1	3362,97	2	29735,62	D_{15}	3045,15	4	32830,10	E_{23}	2307,45	1	43337,88	F_{31}
3609,48	5	27704,82	F_2	3361,73	6	29746,58	F_{12}	3038,04	15R	32915,96	G_{19}	2300,90	1	43461,25	G_{30}
3602,41	5	27759,19	E_3	3337,15	1	29965,69	G_{11}	3012,14	15R	33198,99	B_{26}	2293,25	1	43606,24	F_{32}
3599,66	1	27780,40	D_6	3335,72	1	29978,54	D_{16}	3003,76	10R	33291,60	F_{24}	2290,12	1	43665,84	H_{30}
3597,86	10	27794,30	D_7	3322,46	8	30098,17	B_{20}	3002,58	15R	33304,69	G_{20}	2288,54	1	43695,98	F_{33}
3577,36	1	27953,57	C_{11}	3321,36	1	30108,14	F_{13}	2994,58	8	33393,66	G_{21}	2253,75	1	44370,49	G_{33}

Tabelle II.

γ	A	$A_1 =$ 10113,92	γ	B	$A_2 =$ 1193,77	γ	C	$A_3 =$ 503,55	γ	$A_4 =$ 380,93	γ	E	$A_5 =$ 452,65	γ	F	$A_6 =$ 675,17	γ	G	$A_7 =$ 204,77	γ	H	
1	15951,45	10113,95	4	25165,40	1193,74	3	26359,14	503,52	5	26862,66	4	27243,50	452,65	10	27606,15	675,21	50	28371,36	205,21	1	28576,57	
2						2	26367,97				3	27252,41	452,41	5	27704,82	675,17	3	28379,99		8	29091,33	
3											10	27759,19				1127,52	20	28886,71	204,62	5	29328,09	
4	15803,20	10113,54	20	25916,74	1193,89	3	27110,63		3	28155,45	10	27905,36	452,44	30	28447,80	675,13	15	29122,93	205,16	10	29488,09	
5											3	28155,45				1127,89	30R	29283,34	204,75			
6													833,21	1	28613,61							
7	15983,12	10113,88	5	26082,42	1194,08	1	27276,50	503,00	1	27780,40	4	28343,63	452,33	10R	28795,96	675,61	20R	29471,57	204,57	15R	29676,14	
8	16151,47	10113,86	8	26265,33	1193,65	4	27290,57	503,73	10	27794,30	4	28343,63	452,33	10R	28795,96	675,27	4	29635,25				
9	16515,39	10113,98	8	26429,37		6	27678,60	503,75	6	28182,35	278,12	4	28507,49	452,49	10	28959,98	675,17	3	29690,95			
10	16371,03	10113,78	8	26484,81	1193,79	6	27678,60	502,98	2	28836,98	380,76	6	28593,11	452,67	30	29015,78	675,22	1	29965,69			
11	16645,78	10113,94	4	26759,72	1193,85	1	27933,57	502,98	5	28456,55	380,43	2	28836,98	453,49	4	29290,47	675,22	1	29965,69			
12	17102,03	10114,04	6	27216,07	1193,83	4	28409,90	503,53	2	28913,43	381,07	6	29294,50	452,68	6	29746,58	675,56	4	30422,14			
13											5	29754,76	453,38	1	30108,14	674,63	4	30782,77	204,61	4	30987,38	
14	17513,75	10114,23	50R	27627,98		2	29232,24	503,38	2	29735,62	2078,05	5	29706,03	452,51	10	30158,54	675,20	8	30833,74	204,81	5	31038,55
15	17924,46	10114,15	20	28038,61	1193,63			11812,59	1	29978,54	381,14	8	30116,76	452,59	4	30569,35	674,99	3	31244,34			
16	18166,95										3	30461,52	452,67	5	30914,19							
17											3	30461,52	452,66	3	31042,30							
18	18395,64							11812,64	2	30208,28	381,36	3	30589,64	452,47	10R	32240,59	675,37	15R	32015,96	879,25	1	31794,18
19	19595,82	10113,83	5	29709,65	1194,03	1	30903,68		3	31788,12	884,41	3	31788,12	452,47	6	32629,09	675,60	15R	33304,69	204,99	1	31921,55
20	19984,33	10113,84	3	30093,17	1193,88	3	31292,05		2	32176,79	884,74	4	32176,79	452,30	1	32718,98	674,68	8	33393,66	204,23	4	33508,92
21											2077,41	4	32286,18	452,80	10	32739,14	675,09	6	33414,53			
22	20094,32	10113,96	2	30208,28	1193,82	1	31402,10	503,77	30	31905,87	380,63	5	32286,50	452,94	10R	32739,14	675,10	6	33506,70			
23	20647,21	10113,50	5	30760,71	1194,10	3	31954,81	503,13	5	32457,94	381,16	4	32839,40	452,50	8	33556,79						
24	20992,31	10113,91	5	31006,02	1193,88	5	32199,90	503,78	15	32703,68	2078,40	2	34315,67	833,11								
25	22123,11	10114,16	10R	32237,27																		
26	23084,93	10114,06	15R	33198,99	1193,90	3	34392,87	503,72	2	34896,59	381,02	2	35277,61	452,25	3	35729,86	675,47	4	35443,15	204,93	2	35648,08
27																						
28																						
29																						
30																						
31																						
32																						
33																						

Uddevalla (Schweden), 3. November 1917.

(Eingegangen 6. November 1917.)

BESPRECHUNGEN.

A. E. Haas, Die Grundgleichungen der Mechanik, dargestellt auf Grund der geschichtlichen Entwicklung. gr. 8^o. VI u. 216 S. mit 45 Abbildungen. Leipzig, Veit & Comp. 1914. Geh. M. 7.50, geb. M. 9.—.

Das Buch gibt, wie auch schon in der Einteilung in zwanzig ziemlich gleich große Abschnitte zum Ausdruck kommt, Vorlesungen wieder, die der Verfasser an der Universität Leipzig gehalten hat. Es ist als Einführung in die theoretische Mechanik für den Anfänger gedacht und darum in seinen Voraussetzungen sorgfältig beschränkt. Neben den elementarmathematischen Kenntnissen werden eigentlich nur die einfachsten Regeln der Differential- und Integralrechnung als bekannt angenommen. Das Ziel des Buches ist, die Schwierigkeiten, die sich jedem ersten Eindringen in das Lehrgebäude der Prinzipien der Mechanik entgegenstellen, dadurch zu beheben, daß es den Leser von den primitivsten Anfängen der Mechanik auf dem historischen Wege Schritt für Schritt bis zu den komplizierteren Teilen führt, ohne dabei eigentlich Geschichte treiben zu wollen, lediglich aus pädagogischen Gründen. Man muß diesen Gedanken als außerordentlich glücklich bezeichnen, und er ist mit einer muster-gültigen Sorgfalt durchgeführt, die die Lektüre des Buches auch dem zu einem hohen Genuß macht, der es nicht als Lernender liest.

Die ersten Abschnitte sind ganz elementar gehalten und behandeln die Hebelgesetze, das Kräfteparallelogramm, das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, sowie die Galilei-Newton'sche Begründung der Dynamik. Dann folgen, indem mehr und mehr analytische Methoden zu Hilfe genommen werden, die Differentialgleichungen der Bewegung des materiellen Punktes, der Zusammenhang der Planetenbewegung mit dem Gravitationsgesetz und die drei Integrationsprinzipien: der Schwerpunkt-, Flächen- und Energiesatz; weiterhin der Begriff des Potentials, ferner das d'Alembertsche Prinzip mit den Lagrangeschen Multiplikatoren, sowie die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art, die in ebenso durchsichtiger Weise entwickelt werden, wie schließlich das Prinzip der kleinsten Aktion und die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen.

Daß der Umfang der Vorlesungen das Einstreuen weiterer Beispiele offenbar verbot, möchte man namentlich bei den letzten, für den Anfänger nicht ganz leichten Abschnitten etwas bedauern. Ein biographisches Namenverzeichnis bildet den Schluß des schönen, klaren und ansprechend geschriebenen Buches, das man ganz besonders jedem Physiker ohne Einschränkung empfehlen darf: er findet darin die Grundlagen entwickelt für zahlreiche Gebiete der theoretischen Physik, z. B. der kinetischen Theorie der Materie, überhaupt aller Probleme, in denen das Hamiltonsche Prinzip von Bedeutung ist. R. Grammel.

Tagesereignisse.

Am 1. Oktober 1917 ist das

Kaiser-Wilhelm-Institut für physikal. Forschung

ins Leben getreten. Seine Aufgabe soll darin bestehen, die planmäßige Bearbeitung wichtiger und dringlicher physikalischer Probleme durch Gewinnung und materielle Unterstützung be-

sonders geeigneter Forscher zu veranlassen und zu fördern.

Die Auswahl der Probleme, der Methoden sowie des Arbeitsplatzes liegt in der Hand des unterzeichneten Direktoriums. Doch sollen auch von anderen Physikern an das Direktorium gelangende Anregungen von diesem erwogen und die vorgeschlagenen Untersuchungen im Falle der Bewilligung gefördert werden.

Wenn das Institut auch naturgemäß erst nach Beendigung des Krieges seine volle Wirksamkeit entfalten können, so soll doch womöglich schon jetzt mit der Arbeit begonnen werden. Anfragen über nähere Einzelheiten sind an den mitunterzeichneten Vorsitzenden des Direktoriums, Professor Einstein (Haberlandstr. 5, Berlin-Schöneberg) zu richten.

Das Direktorium.

Einstein. Haber. Nernst. Rubens. Warburg.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Berlin Dr. Gustav Hertz für Physik.

Ernannt: Die a. o. Professoren an der Technischen Hochschule Lemberg Dr. Kaspar Weigel (Meßkunst) und Dr. Kasimir Bartel (Darstellende Geometrie) zu ord. Professoren an der Technischen Hochschule.

Angebote.**Physiker.**

Wir suchen für unser Laboratorium mehrere **Physiker**. Herren mit Erfahrung auf dem Gebiet der Gasentladungen oder des Hochvakuum bevorzugt. Angaben über Lebenslauf, Militärverhältnis, Eintrittstermin, Gehaltsansprüche unter Beifügung von Zeugnisabschriften an

Allgemeine Elektrizitäts-Gesellschaft, Glühlampenfabrik, Berlin NW. 37, Sickingenstr. 71.

Für das **Physikalische Institut der Technischen Hochschule Berlin** wird als **Assistent** ein

Physiker

mit abgeschlossener Hochschulbildung gesucht. Einsendung von Gesuchen nebst Lebenslauf und Zeugnisabschriften erbeten an

Geh. Regierungsrat Prof. Dr. **L. Grunmach, Charlottenburg, Berlinerstraße 171.**

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 2.

15. Januar 1918.

Redaktionsschluß für No. 4 am 23. Januar 1918.

19. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

H. Lichte, Energieabsorption in Schallantennen erster Ordnung. S. 17.

E. Schrödinger, Über ein Lösungssystem der allgemein kovarianten Gravitationsgleichungen. S. 20.

M. Reinhold, Beobachtung der Horizontalintensität des Erdmagnetismus mit dem Spulenmagnetometer von C. Dieterici. S. 22.

M. v. Laue, Nachtrag zu: Tempe-

ratur- und Dichteschwankungen. S. 23.

P. Scherrer, Das Raumgitter des Aluminiums. S. 23.

Besprechungen:

P. Eversheim, Angewandte Elektrizitätslehre. S. 28.

H. Lorenz, Ballistik. Die mechanischen Grundlagen der Lehre vom Schuß. S. 28.

O. Grottrian, Die Geometrie der Gleichstrommaschine. S. 29.

B. Glatzel, Elektrische Methoden der Momentphotographie. S. 29.

W. Winkelmann, Das Fernsprechwesen. I. II. S. 29.

F. F. Martens, Physikalische Grundlagen der Elektrotechnik. I. II. S. 30.

B. Glatzel, Methoden zur Erzeugung von Hochfrequenzenergie. S. 30.

Briefkasten:

St. Meyer u. E. v. Schweidler, Die Nomenklatur der Radioelemente. S. 30.

Personalien. S. 32.

Angebote. S. 32.

Gesuche. S. 32.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Energieabsorption in Schallantennen erster Ordnung.

Von H. Lichte.

Das Geschwindigkeitspotential der von einer mit beliebiger Normalgeschwindigkeit schwingenden Kugeloberfläche herrührenden Störung wird allgemein durch eine Reihe von Laplace'schen Funktionen verschiedener Ordnungen ausgedrückt¹⁾. Der wichtigste Fall ist der, wo die Kugel symmetrisch um den Mittelpunkt schwingt, d. i. so, daß je zwei diametral gegenüberliegende Punkte sich in einem bestimmten Momente mit gleicher Geschwindigkeit nach entgegengesetzten Richtungen bewegen. Das Geschwindigkeitspotential wird in diesem Falle durch eine Kugelfunktion der Ordnung Null dargestellt, die dem Potentiale einer einfachen Schallquelle, die im Mittelpunkt der Kugel liegt, entspricht. Für eine in dieser Weise schwingende, pulsierende Kugel ist die Bezeichnung „Strahler nullter Ordnung“ vorgeschlagen worden²⁾.

Weiter interessiert der Fall, wo eine starre Kugel um eine Gleichgewichtslage hin- und herschwingt. Hier wird die Bewegung durch ein Glied der Ordnung 1 dargestellt, das dem Potentiale einer Doppelquelle entspricht, die im Mittelpunkt der Kugel gelegen ist und aus zwei gleich großen, aber entgegengesetzten, auf der Bewegungsachse liegenden Quellen zusammengesetzt ist, deren Abstand voneinander sehr klein und deren Ergiebigkeiten so groß sind, daß das Produkt aus Ergiebigkeit und Abstand der Quellen (das Moment der Doppelquelle) von endlicher Größe ist³⁾. Eine in dieser Weise

oszillierende Kugel werde kurz „Strahler erster Ordnung“ genannt¹⁾.

Man kann sich den Vorgang auch so vorstellen, daß die Kugeloberfläche durch eine Knotenlinie in zwei gleich große Teile geteilt wird, von denen in einem bestimmten Momente der eine positiv, d. i. nach außen, der andere negativ, d. i. nach innen schwingt; in der nächsten Halbperiode dreht sich der Vorgang um. Während also von einem Teil eine Verdichtungswelle ausgeht, geht vom anderen Teil eine Verdünnungswelle aus.

Die Zerlegung der Oberfläche in abwechselnd positiv und negativ schwingende Teile kann man sich nun beliebig fortgesetzt denken. Die Bewegung der Kugel wird dann durch Kugelfunktionen entsprechender Ordnung dargestellt. Doch haben die Strahler höherer als erster Ordnung zunächst geringere praktische Bedeutung.

Die Kugelform des Strahlers, von der hier zunächst gesprochen worden ist, ist für den Vorgang der Schallausbreitung unwesentlich. Die Behandlung aller praktisch vorkommenden Fälle von Strahlern läßt sich mittels der für die kugelförmigen Strahler geltenden Beziehungen bewerkstelligen. Solche Rechnungen sind beispielsweise für die „Kolbenmembran“ (eine starre kreisförmige Platte, die in einer gleich großen kreisförmigen, aus einer unendlich großen starren ebenen Platte ausgeschnittenen Öffnung schwingt) und für am Rande fest eingespannte kreisförmige Membranen durchgeführt worden³⁾. Die Schwingung jedes Strahlers läßt sich beschreiben durch eine Gleichung von der Form

$$M\ddot{\xi} + w_{\Sigma} \cdot \dot{\xi} + \mu\xi = K. \quad (1)$$

1) Rayleigh, II, 267 ff.

2) Hahnemann u. Hecht, diese Zeitschr. 17, 601 bis 609, 1916.

3) Rayleigh, I, c.

1) Hahnemann u. Hecht, diese Zeitschr. 18, 261 bis 270, 1917.

2) Hahnemann u. Hecht, I, c.

Hier bedeuten:

- ξ die Amplitude des Strahlers,
 $\dot{\xi}, \ddot{\xi}$ die zeitlichen Ableitungen von ξ ,
 $\mu \xi$ die rücktreibende Kraft,
 K die äußere auf den Strahler wirkende Kraft.

M ist die gesamte schwingende Masse, die sich zusammensetzt aus der Masse des Strahlers und der mitschwingenden Mediummasse. Das Glied $w_{\Sigma} \xi$, das herrührt von der Reaktion des Mediums, in dem der Strahler schwingt¹⁾, hat eine allmähliche Abnahme der Schwingung infolge Energiestrahlung zur Folge. Wegen der Analogie elektrischer Erscheinungen werde w_{Σ} der akustische Strahlungswiderstand genannt.

Handelt es sich um einen schallaufnehmenden Empfänger (Schallantenne), so tritt zu dem Gliede $w_{\Sigma} \xi$ noch ein Glied $w_v \xi$ hinzu, das der in der Schallantenne abgebremsten Energie Rechnung trägt (w_v = akustischer Bremswiderstand).

Die mitschwingende Mediummasse und der akustische Strahlungswiderstand sind von Rayleigh für Strahler nullter und erster Ordnung berechnet worden²⁾, womit die vollständigen Schwingungsgleichungen der Schallantennen nullter und erster Ordnung gegeben sind, die uns gestatten, die von einer in einem Schallfeld befindlichen Schallantenne aufgenommene Energie und ihre Rückwirkung auf das primäre Feld zu berechnen. Diese Rechnung ist für eine Schallantenne nullter Ordnung, die Kolbenmembran, bereits durchgeführt worden³⁾. Im folgenden sollen die Verhältnisse für eine Schallantenne erster Ordnung von der Kugelform mitgeteilt werden.

Nach Rayleigh²⁾ ist die beim Strahler erster Ordnung mitschwingende Mediummasse

$$m_1 = \frac{2 + \left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^2}{4 + \left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^4} \cdot \frac{4\pi R^3 \sigma}{3}, \quad (2)$$

wo R der Kugelradius,
 λ die Wellenlänge,
 σ die Dichte des Mediums bedeuten.

Ist der Kugelradius klein gegen die Wellenlänge — dieser Fall soll hier betrachtet werden — so ist

1) Rayleigh, l. c.

2) Rayleigh, l. c.

3) Lichte, diese Zeitschr. 18, 393—395, 1917.

Es sei hier ein Fehler berichtigt: Gleichung (32) muß heißen: $B = 2\pi n \cdot 2F \xi$. Berücksichtigt man dies, so ergibt sich für das Amplitudenverhältnis von sekundärer zu

primärer Welle (31) $\alpha = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{r}$ und für den Störungsradius

(39) $r_s = 32\lambda$.

$$m_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi R^3 \sigma}{3}. \quad (2a)$$

Ferner werde von Rayleigh¹⁾ der Wert für die Strahlungsdämpfung entnommen

$$w_{\Sigma} = \frac{\left(\frac{2\pi R^3}{\lambda}\right)}{4 + \left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^4} \cdot \frac{2\pi \alpha}{\lambda} \cdot \frac{4\pi R^3 \sigma}{3}, \quad (3)$$

der für einen gegen die Wellenlänge kleinen Radius übergeht in

$$w_{\Sigma} = \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^3 \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \alpha \cdot \frac{4\pi R^3 \sigma}{3}. \quad (3a)$$

Endlich ist noch die die Kugel bewegende äußere Kraft zu berechnen. Es treffe auf die Kugel ein Zug ebener Schallwellen von einfach harmonischem Typ. Das Potential der ungeschnittenen ebenen Wellen sei (in komplexer Form geschrieben)

$$\varphi = A \cdot e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (at+x)}, \quad (4)$$

dem die Druckwelle

$$p = -i \frac{2\pi}{\lambda} a \sigma A e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (at+x)} = P_0 e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (at+x)} \quad (5)$$

entspricht. Die die Kugel bewegende Kraft ist die Differenz der Schalldrücke auf die beiden Kugelhälften, die auf der der Richtung, aus der die Schallwellen kommen, zugewandten und der ihr abgewandten Seite liegen. Nun ist für einen beliebigen Punkt der Kugeloberfläche — der Mittelpunkt der Kugel sei als Anfangspunkt von Polarkoordinaten gedacht — das Potential

$$\varphi = A e^{i \frac{2\pi}{\lambda} at} e^{i \frac{2\pi R}{\lambda} \cos \vartheta},$$

wo ϑ der Winkel ist, den der dem betrachteten Punkt zugehörige Kugelradius mit der Richtung, aus der die Wellen kommen, bildet. Der entsprechende Druck ist:

$$p = P_0 e^{i \frac{2\pi}{\lambda} at} e^{i \frac{2\pi R}{\lambda} \cos \vartheta}$$

die die Kugel bewegende Kraft, wenn man $\cos \vartheta = \gamma$ setzt, also

$$\begin{aligned} K &= -2\pi R^2 \cdot P_0 e^{i \frac{2\pi}{\lambda} at} \int_{-1}^{+1} e^{i \frac{2\pi R}{\lambda} \gamma} \gamma d\gamma \\ &= -4\pi R^2 \cdot P_0 \left[\frac{i \cdot \lambda}{2\pi R} \cos \frac{2\pi R}{\lambda} - \right. \\ &\quad \left. - i \left(\frac{\lambda}{2\pi R}\right)^2 \sin \frac{2\pi R}{\lambda} \right] \cdot e^{i \frac{2\pi}{\lambda} at}, \end{aligned}$$

oder in reeller Form geschrieben

1) Rayleigh, l. c.

$$K = 4\pi R^2 P_0 \left[\frac{\lambda}{2\pi R} \cos \frac{2\pi R}{\lambda} - \left(\frac{\lambda}{2\pi R} \right)^2 \sin \frac{2\pi R}{\lambda} \right] \sin \omega t, \quad (6)$$

wo $\frac{2\pi}{\lambda}a = \omega$ gesetzt ist.

Für Kugeln, deren Radius klein ist zur Wellenlänge, geht dieser Ausdruck über in

$$K = -\frac{1}{3} \cdot 4\pi R^2 \cdot P_0 \left(\frac{2\pi R}{\lambda} \right) \sin \omega t. \quad (6a)$$

Man ist somit in der Lage, die vollständige Schwingungsgleichung für die Schallantenne erster Ordnung, die sich in einem Feld ungedämpfter ebener Schallwellen befindet, hinzuschreiben. Falls die Dimensionen der Schallantennen klein sind zur Wellenlänge, lautet sie:

$$\left(m + \frac{1}{2} \frac{4\pi R^3 \sigma}{3} \right) \ddot{\xi} + \left(w_v + \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi R}{\lambda} \right)^3 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \frac{4\pi R^3 \sigma}{3} \right) \dot{\xi} + \mu \xi = -\frac{1}{3} 4\pi R^2 \cdot P_0 \left(\frac{2\pi R}{\lambda} \right) \sin \omega t. \quad (7)$$

Im stationären Zustand ist also

$$\xi = \frac{-\frac{1}{3} 4\pi R^2 \cdot P_0 \left(\frac{2\pi R}{\lambda} \right)}{\left(m + \frac{1}{2} \frac{4\pi R^3 \sigma}{3} \right) \cdot \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \times \sin(\omega t - \Theta), \quad (8)$$

wo

$$\omega_0^2 = \frac{\mu}{m + \frac{1}{2} \frac{4\pi R^3 \sigma}{3}},$$

$$2\delta = \frac{w_v + \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi R}{\lambda} \right)^3 \frac{2\pi}{\lambda} a \cdot \frac{4\pi R^3 \sigma}{3}}{m + \frac{1}{2} \frac{4\pi R^3 \sigma}{3}}$$

und

$$\Theta = \arctg \left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

gesetzt ist.

Die Abhängigkeit der Amplitude von der Frequenz der aufgeprägten Schwingung ist, wie zu erwarten war, bei der Antenne erster Ordnung dieselbe, wie bei der Antenne nullter Ordnung. Sie erreicht ein Maximum, wenn die Frequenz der aufgeprägten Kraft übereinstimmt mit der Eigenschwingung der Antenne. Auch hier interessiert in erster Linie die nutzbar absorbierte Energie, die man unter Zuhilfenahme der elektrischen Analogie zu

$$L_n = \frac{1}{2} w_v \cdot \dot{\xi}^2$$

findet. Im Resonanzfall erreicht sie, wie ohne weiteres ersichtlich, den Wert

$$L_n = \frac{1}{2} w_v \cdot \left(\frac{\frac{1}{3} 4\pi R^2 \cdot P_0 \cdot \frac{2\pi R}{\lambda}}{w_v + w_\Sigma} \right)^2, \quad (9)$$

der noch abhängig ist vom Verhältnis der Strahlungsdämpfung zur Nutzdämpfung. Die Energie, die maximal absorbiert werden kann, erhält man für den aus der Beziehung

$$\frac{\partial L_n}{\partial w_v} = 0$$

berechneten Wert $w_v = w_\Sigma$ zu

$$L_{n\max} = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{3} 4\pi R^2 \cdot P_0 \cdot \frac{2\pi R}{\lambda}}{2w_\Sigma} \right)^2 \cdot \frac{1}{4w_\Sigma} \quad (10)$$

oder, wenn man den Wert für w_Σ aus Gleichung (3a) einführt, zu

$$L_{n\max} = \frac{P_0^2}{2a\sigma} \cdot \frac{\lambda^2}{3\pi}. \quad (11)$$

Die im Resonanzfall bei gleicher Strahlungs- und Nutzdämpfung absorbierte Energie ist also um so größer, je größer die Wellenlänge der primären Schallwellen ist, aber unabhängig von der Größe der Schallantenne. Dies Ergebnis stimmt also qualitativ überein mit dem für die Schallantenne nullter Ordnung¹⁾ gefundenen und dem von Rüdenberg²⁾ für die Antenne der drahtlosen Telegraphie berechneten Ergebnis.

Bedenkt man, daß $\frac{P_0^2}{2a\sigma}$ gleich der Intensität der über die Antenne hinziehenden Schallwellen ist, so liefert Gleichung (11) ohne weiteres auch das Verhältnis der von der Antenne nutzbar absorbierten Energie zu der Energiedichte im primären Strahlungsfeld zu

$$Q = \frac{\lambda^2}{3\pi}. \quad (12)$$

Die Antenne absorbiert also so viel Energie, wie im ungestörten Felde durch die Fläche $\frac{\lambda^2}{3\pi}$ senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung hindurchwandert. Der größte Radius der kreisförmigen Absorptionsfläche ist gleich

$$r_a = \frac{\lambda}{\pi\sqrt{3}} = 0,183\lambda. \quad (13)$$

Um die Größe des Störungsradius zu bestimmen, ist die Kenntnis der Rückwirkung der Schallantenne auf das primäre Feld erforderlich. Das Geschwindigkeitspotential der von einem Strahler erster Ordnung ausgehenden Wellen ist in großem Abstände vom Strahler nach Rayleigh³⁾

1) Lichte, l. c.

2) Rüdenberg, Ann. d. Phys. (4) 25, 446—466, 1908.

3) Rayleigh, l. c.

$$\psi = -\frac{R^2}{r} e^{i \frac{2\pi}{\lambda}(at-r)} \frac{U_1}{i \cdot \frac{2\pi R}{\lambda} + 2 - 2i \cdot \frac{\lambda}{2\pi R}},$$

wo $U_1 = \xi \cos \vartheta$

$$= -\frac{2P_0}{a\sigma} \cdot \left(\frac{\lambda}{2\pi R}\right)^3 \cos \vartheta,$$

die Geschwindigkeit der Kugeloberfläche ist. Da der Kugelradius klein gegen die Wellenlänge sein soll, nimmt der Wert für ψ die Form an

$$\psi = -\frac{P_0}{a\sigma} \cdot \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{r} \cos \vartheta \sin \frac{2\pi}{\lambda}(at-r). \quad (14)$$

Den Maximalwert erreicht es für $\vartheta=0$. Die Amplitude des Potentials der primären Welle ist

$$\varphi = \frac{P_0}{\omega\sigma}. \quad (15)$$

Also ist das Verhältnis der Amplitude der sekundären zur primären Welle maximal

$$\alpha = \frac{\lambda}{2\pi r}, \quad (16)$$

und das Verhältnis der Intensitäten bei stärkster Energieabsorption in der Richtung $\vartheta=0$

$$\alpha_i = \left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^2.$$

Rechnet man den Störungsbereich so weit, daß an seiner Grenze das Verhältnis der Amplituden noch $1/100$ beträgt, so ergibt sich der Störungsradius

$$r_s = \frac{100}{2\pi} \lambda = 16\lambda. \quad (17)$$

Zusammenfassung.

1. Es wird die von einer Schallantenne erster Ordnung aus einem Schallfelde absorbierte Energie bestimmt. Sie ist wie beim Strahler nullter Ordnung proportional dem Quadrat der Wellenlänge, aber unabhängig von der Größe der Antenne.

2. Die Größe der Absorptionsfläche wird zu $\frac{\lambda^2}{3\pi}$ bestimmt.

3. Die Rückwirkung der Antenne auf das primäre Feld ist proportional zu λ/r .

Kiel, den 25. November 1917.

(Eingegangen 6. Dezember 1917.)

Über ein Lösungssystem der allgemein kovarianten Gravitationsgleichungen.

Von Erwin Schrödinger.

(Aus dem II. physikalischen Institut der k. k. Universität Wien.)

Vor einiger Zeit hat Herr Einstein¹⁾ ein System von Energiekomponenten der Materie $T^{\mu\nu}$ und von Schwerepotentialen $g_{\mu\nu}$ angegeben, welches die allgemein kovarianten Feldgleichungen exakt integriert und von welchem er vermutet, daß es eine Annäherung an die tatsächliche Struktur der Materie und des Raumes im großen darstellt. Es handelt sich, kurz gesagt, um ruhende inkohärente Materie, welche ein dreidimensionales, in sich geschlossenes Raumkontinuum von endlichem Gehalt und den metrischen Eigenschaften einer Hypersphäre in gleichmäßiger Dichte erfüllt²⁾.

Für die Feldgleichungen wird aber dabei eine gegen die ursprüngliche³⁾ etwas abgeänderte Gestalt vorausgesetzt.

Die Konzeption des in sich geschlossenen Gesamtraums scheint mir für die allgemeine Relativitätstheorie von ganz außerordentlicher Bedeutung, und zwar nicht nur — und nicht hauptsächlich — wegen des „Verödungseinwandes“, von welchem Herr Einstein ausgegangen war; den Hauptwert lege ich vielmehr darauf, daß die allgemeine Relativitätstheorie durch Weiterführung dieses Gedankens das zu werden verspricht, was ihr Name besagt und was sie — nach meiner Ansicht — bisher nur formal, nur sozusagen auf dem Papier gewesen ist⁴⁾.

Unter diesen Verhältnissen ist es wohl nicht ohne Interesse, zu bemerken, daß das völlig analoge System von Lösungen auch schon für die Feldgleichungen in ihrer ursprünglichen Gestalt — ohne die von Herrn Einstein l. c. hinzugefügten Glieder — existiert. Der Unterschied ist äußerlich ganz geringfügig: Die Potentiale bleiben ungeändert, nur der Energietensor der Materie erhält eine andere Gestalt. Das System der $g_{\mu\nu}$ lautet also [vgl. Einstein l. c. Gleichungen (7), (8) und (12)]:

$$g_{44} = 1 \quad g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0, \quad (1)$$

$$g_{\mu\nu} = -\left(\delta_{\mu\nu} + \frac{x_\mu x_\nu}{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}\right);$$

$\mu, \nu = 1, 2, 3.$

1) A. Einstein, Berl. Ber. 1917, S. 142. In der Folge mit l. c. zitiert!

2) Richtiger wäre es vielleicht zu sagen: „bildet“ (statt „erfüllt“).

3) A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Leipzig, J. A. Barth, 1916.

4) Man vergleiche besonders De Sitter, Amst. Proc. 19, 527, 1917, dann Einstein l. c. S. 147.

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \text{ wenn } \nu \left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\} \mu.$$

Nimmt man nun für den gemischten Energietensor der Materie zunächst nur an, daß die Komponenten mit ungleichen Indizes verschwinden¹⁾:

$$|T_{\mu}^{\nu}| = \begin{vmatrix} T_1^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_3^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_4^4 \end{vmatrix}, \quad (2)$$

so sind die Feldgleichungen:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \mu\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \nu\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} + \frac{\partial^2 \lg \sqrt{-g}}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu}} - \\ - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \frac{\partial \lg \sqrt{-g}}{\partial x_{\alpha}} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \end{aligned} \quad (3)$$

erfüllt, wofern nur

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = \frac{1}{3} T_4^4 = \frac{1}{\kappa R^2} = \text{const.} \quad (4)$$

Die Rechnung bietet nicht die geringsten Schwierigkeiten, sie verläuft genau wie bei Einstein l. c. Höchstens wäre in logischer Beziehung zu bemerken:

κ und R müssen natürlich schon von Haus aus, d. h. schon beim Anschreiben der Feldgleichungen (3) bzw. der Potentiale (1) als universelle Konstante vorausgesetzt werden. Da sich aber die Rechnung bequem nur für Punkte von der Eigenschaft $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ durchführen läßt, so resultieren die Forderungen (4) zunächst nur für solche Punkte, identisch nur in x_4 ! Zur identischen Erfüllung der Feldgleichungen ist es notwendig, ist es erlaubt, und ist es hinreichend, die identische Gültigkeit von (4) auch in den räumlichen Koordinaten zu fordern. Denn dadurch werden diese Beziehungen invariant gegen beliebige Transformationen der räumlichen Koordinaten x_1, x_2, x_3 unter sich und der Zeit x_4 in sich; und durch eine einfache Transformation dieser Art kann man jeden beliebigen Punkt in eine der beiden „ x_4 -Achsen“ verlegen. —

Es ist wünschenswert, mit dem angegebenen Lösungssystem eine halbwegs anschauliche physikalische Vorstellung zu verbinden. Das ist — bis zu einem gewissen Grade — möglich, wenn man den Einsteinschen Ansatz für den Energietensor einer zusammenhängenden, kompressiblen Flüssigkeit akzeptiert. In diesem Falle gilt²⁾

$$T_{\mu}^{\nu} = -\delta_{\mu}^{\nu} p + g_{\mu\alpha} \frac{dx_{\alpha}}{ds} \frac{dx_{\nu}}{ds} \rho$$

$$\delta_{\mu}^{\nu} = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \text{ wenn } \nu \left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\} \mu, \quad (5)$$

wobei p und ρ Skalare sind, der „Druck“ und die „Dichte“ der Flüssigkeit. Setzt man hier identisch

$$\frac{dx_1}{ds} = \frac{dx_2}{ds} = \frac{dx_3}{ds} = 0, \quad \frac{dx_4}{ds} = 1, \quad (6)$$

was wegen (1) mit der Grundgleichung

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu} \quad (7)$$

und mit den Bewegungsgleichungen (Gleichungen der geodätischen Linie)

$$\frac{d^2 x_{\alpha}}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \frac{dx_{\mu}}{ds} \frac{dx_{\nu}}{ds} = 0 \quad (8)$$

verträglich ist, so kommt, wegen (1):

$$|T_{\mu}^{\nu}| = \begin{vmatrix} -p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho - p \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Dieses Schema unterscheidet sich (unter geeigneten Annahmen über ρ und p) nur äußerlich von unseren obigen Ansätzen [(2) und (4)] für den Energietensor.

Jene Ansätze kommen also darauf hinaus, die Materie im großen unter dem Bild einer kompressiblen, ruhenden Flüssigkeit von konstanter Dichte und konstantem, räumlich isotropem inneren Zug vorzustellen, welcher letzterer nach (4) einem Drittel der Ruhdichte der Energie gleich sein muß¹⁾.

Vom Standpunkte der alten Theorie, welche ja bei Einstein bekanntlich die Rolle der ersten Näherung spielt, befremdet es keineswegs, daß ein Spannungszustand dieses Vorzeichens in einer Materie vorhanden gedacht werden muß, welche über ungeheure Räume gleichmäßig ausgebreitet ist und auf sich selbst nach dem Newtonschen Kraftgesetz einwirkt.

Dagegen frappiert bei näherer Betrachtung folgende Tatsache.

Die Befriedigung der 10. Feldgleichung (Gleichung [3], $\mu = \nu = 4$) ist dem Umstand zu danken, daß nach (4) der Ausdruck

$$T_4^4 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3 \quad (10)$$

verschwindet. Dieser Ausdruck spielt nun in der ersten Näherung, für welche bekanntlich überhaupt nur die 10. Feldgleichung wesentlich in Betracht kommt, die Rolle der Newtonschen gravitierenden Massendichte. Das Verschwinden des „Massenausdrucks“ (10) schien

1) Macht man diese Annahme nicht, so erscheint sie später als Forderung neben (4).

2) A. Einstein, Die Grundlage der usw., S. 52.

1) Beiläufig sei daran erinnert, daß dies auch der Absolutbetrag des Lichtdruckes ist; das Vorzeichen ist aber entgegengesetzt!

mir anfangs die Brauchbarkeit des angegebenen Lösungssystems als Bild der Materie im großen stark in Frage zu stellen.

Nunmehr halte ich aber gerade dieses Ergebnis sogar für recht befriedigend¹⁾.

Erstens einmal muß man von einer Theorie, in welcher auch der Begriff der Masse relativ, d. h. nur durch die Wechselbeziehungen der Körper bestimmt sein soll, geradezu erwarten, wenn nicht fordern, daß sie jedenfalls die Gesamtmasse der Welt zum Verschwinden bringt.

Daß der Massenausdruck in unserem Falle nicht nur in Summa, sondern in jedem einzelnen Punkt verschwindet, ist offenbar nur eine Folge der Fiktion, daß die Materie exakt ruhend und völlig gleichmäßig über den Raum verteilt sei. Es scheint mir ganz im Geiste der Massenrelativitätsforderung gelegen, sich zu denken, daß die Wechselwirkungsfunktion, die wir als träge oder schwere Masse bezeichnen, erst durch Abweichungen von jener gleichförmigen, zeitlich konstanten Verteilung zustande kommt bzw. in Erscheinung tritt; und es schadet gar nichts, daß für die gleichförmige ruhende Verteilung, in welcher die Masse sich ohnedies weder als träge noch als schwere „betätigen“ könnte oder würde, der Massenausdruck verschwindet.

Natürlich erwächst nunmehr die Aufgabe, die wirklichen, empirischen Vorgänge für einzelne konkrete Fälle sozusagen durch Variation dieses höchst einförmigen, „inerten“ Integral-systems zu gewinnen. Dann — und erst dann — würde, nach meinem Gefühl, die allgemeine Relativitätstheorie jene Forderungen wirklich erfüllen, welche zu ihrer Entstehung die logische Veranlassung waren²⁾.

Zusatz bei der Korrektur am 20. Dez. 1917:

Nach den Gleichungen (4) hätte die Größe

$\frac{1}{z}$ folgende „physikalischen Bedeutungen“:

$$a) \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{6\pi^2} \cdot \frac{2\pi^2 R^3 T_4^4}{R} = \frac{1}{6\pi^2} \cdot \frac{E}{R};$$

$$b) \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{4\pi} \cdot 4\pi R^2 T_1^1 = \frac{1}{4\pi} \cdot P.$$

Hier ist E die Gesamtenergie der Welt, R (wie oben) ihr Radius, P der gesamte einseitige Zug auf eine Äquatorkugel. Für letzteren ergibt sich zahlenmäßig [mit $z = \frac{8\pi k^2}{c^2} g^{-1} \text{cm}$, $k^2 = 6,68 \cdot 10^{-8} g^{-1} \text{cm}^3 \text{sec}^{-2}$, $c = 3 \cdot 10^{10} \text{cm sec}^{-1}$]:

1) Die Klärung der Gedanken in diesem Punkt verdanke ich hauptsächlich wiederholten mündlichen Besprechungen mit Herrn L. Flamm.

2) Man vgl. A. Einstein, Die Grundlage der usw. § 2.

$$P = \frac{4\pi}{z} = \frac{c^2}{2k^2} g \text{ cm}^{-1} \text{ (d. h. } g \text{ cm Lichtsek.}^{-2}\text{)}$$

$$= \frac{c^4}{2k^2} g \text{ cm sec}^{-2} = 6,06 \cdot 10^{48} \text{ dyn. —}$$

Erwähnt sei noch, daß die Größen c , E , R , oder auch die Größen c , P , R unabhängige physikalische Dimensionen und daher die prinzipielle Eignung zu Einheitsetalons für ein „absolutes“ Maßsystem besitzen. —

(Eingegangen 30. November 1917.)

Beobachtung der Horizontalintensität des Erdmagnetismus mit dem Spulenmagnetometer von C. Dieterici.

Von M. Reinhold.

Vor kurzem hat Herr Dieterici in dieser Zeitschrift¹⁾ eine Methode veröffentlicht, durch welche die Horizontalintensität des Erdmagnetismus schnell und sicher beobachtet werden kann. Die Beobachtungen ergaben, daß man in dem vor erdmagnetischen Störungen nicht gesicherten Physikalischen Institut in Kiel wohl ohne weiteres die Genauigkeit $\pm 0,001$ für die Horizontalintensität erreichen kann, die Kohlrausch²⁾ als im allgemeinen befriedigend angibt; aber andererseits mußte nach den Überlegungen, die Herr Dieterici über den erreichbaren Genauigkeitsgrad der Beobachtungen mit dem Spulenmagnetometer anstellte, sich eine erheblich höhere Genauigkeit erreichen lassen, wenn man, wie Herr Dieterici vermutete, die erdmagnetischen Störungen der Stadt ausschließt.

Um diese Vermutung zu prüfen, nahm ich die aus Spulenmagnetometer, Milliampere-meter, Widerstand und Wippe bestehende Apparatur nach meinem Wohnort Plön und stellte dort, wo kein Straßenbahnbetrieb die Beobachtungen störte, neue, in den folgenden Tabellen wiedergegebene Beobachtungen an. Die Tabellen sind ebenso angeordnet, wie in der Veröffentlichung des Herrn Dieterici: Am Kopf steht die beobachtete Schwingungsdauer des Magneten im Erdfeld t_0 ; die erste Spalte gibt die am Milliampere-meter abgelesene Stromstärke des Spulenstroms; dann folgen die durch die gleichsinnige oder entgegengesetzte Superposition des Spulenfeldes über das Erdfeld bewirkten veränderten Schwingungsdauern t_1 und t_2 ; darauf folgt das aus den beiden Feldrichtungen sich ergebende Verhältnis des Spulenfeldes zum Erdfeld, woraus

1) Dieterici, diese Zeitschr. 18, 402—404, 1917.

2) Kohlrausch, Prakt. Physik, 12. Aufl., S. 387.

sich dann mit der von Herrn Dieterici angegebenen Konstante der Spule

8,8766 Gauß pro Ampere die Horizontalintensität H ergibt.

Die sicherste Prüfung der Genauigkeit ergibt sich durch die Frage, bis zu welchem Grade der Genauigkeit die unter $H_s:H$ angegebenen zwei Zahlen einander gleich sind; ein Blick auf diese Ziffern ergibt in der Tat eine Gleichheit auf weniger als 0,1 Proz. Das ist die Grenzgenauigkeit, die durch die reine Zeitbeobachtung bedingt ist. Die Beobachtungen, die Herr Dieterici in Kiel teils selbst ausführte, teils ausführen ließ, ergaben Ungleichheiten derselben Zahlen, die bis zu fast 5 Proz. anstiegen. Hiernach ist durch meine Beobachtungen als festgestellt zu betrachten, daß in der Tat nur die momentanen Schwankungen der Horizontalintensität, die durch die städtischen elektrischen Betriebe herbeigeführt sind, die Beobachtungsunsicherheit bedingen. Die Genauigkeit des Verhältnisses $H_s:H$ ist nur durch den Fehler der Zeitbeobachtung bestimmt; bei der Berechnung von H tritt natürlich noch der kleine Ablesungsfehler des Milliamperemeters hinzu, der die Genauigkeit von H mitbestimmt. Das benutzte Milliamperemeter war mit einem guten Kompensationsapparat geeicht und bis auf den zulässigen Ablesungsfehler von 0,00002 Ampere als richtig befunden.

Tabelle I.
 $t_0 = 7,160$ sec

i	t_1	t_2	$H_s:H$	H
0,01372 Amp.	5,633 sec	11,542 sec	0,6156 0,6152 0,6154	0,1979 Gauß
0,01618 "	5,448 "	19,726 "	0,7273 0,7279 0,7276	0,1974 "
0,00740 "	6,212 "	8,738 "	0,3283 0,3285 0,3284	0,1970 "

Tabelle II.
 $t_0 = 7,154$ sec

i	t_1	t_2	$H_s:H$	H
0,00812 Amp.	6,123 sec	8,979 sec	0,3652 0,3652 0,3652	0,1974 Gauß
0,01276 "	5,703 "	10,954 "	0,5737 0,5735 0,5730	0,1975 "

Bemerkt sei schließlich, daß der von mir in Plön beobachtete Wert von H nur als Lokal-

wert aufzufassen ist; denn ich konnte die Beobachtungen nicht in einem eisenfreien Gebäude ausführen.

Plön, November 1917.

(Eingegangen 28. November 1917.)

Nachtrag zu meiner Veröffentlichung über Temperatur- und Dichteschwankungen.

Von M. v. Laue.

Wie ich nachträglich bemerkt habe, findet sich der Inhalt der im Titel genannten Veröffentlichung¹⁾ schon in Note V der Schrift von H. A. Lorentz: Les theories statistiques en thermodynamique. Leipzig und Berlin 1916.

1) Diese Zeitschr. 18, 542, 1917.

(Eingegangen 17. Dezember 1917.)

Das Raumgitter des Aluminiums.

Von P. Scherrer.

Mit Tafel I.

Die von P. Debye und mir¹⁾ angegebene Methode zur Bestimmung der Atomanordnung in Kristallen hat den Vorzug, keiner ausgebildeten größeren Kristalle zu bedürfen. Es genügt, wenn die kristalline Substanz in Form eines sehr feinen Pulvers oder als mikrokristallines Aggregat vorliegt. Eine Substanz, von der niemals größere Kristallindividuen beobachtet wurden, liegt im Aluminium vor, und es ist daher unsere Methode in diesem Falle die gegebene.

Über das Kristallsystem von Al liegen nur sehr spärliche Angaben vor. In der chemischen Kristallographie von P. Groth²⁾ findet sich folgende Bemerkung: „Gegossenes Al zeigt ein Gefüge, welches auf kubische Kristallisation hindeutet bzw. Skelettformen, die den oktaëdrisch gestrickten Formen des Fe ähnlich sind (Rinne); Deville gibt an, daß er auf elektrolytischem Wege reguläre Oktaëder erhalten habe. Die in Al -Fabriken zuweilen erhaltenen Kristalle bestehen aus Al -Verbindungen, besonders mit Fe .“ Tatsächlich zeigt sich, wie im folgenden genauer dargelegt werden soll, daß Al kubisch kristallisiert. Die Al -Atome sind in einem ein-

1) P. Debye u. P. Scherrer, diese Zeitschr. 17, 227, 1916.

2) Leipzig 1906, Bd. I, S. 10.

fachen flächenzentrierten Gitter angeordnet. Für die Kantenlänge des Elementarkubus ergibt sich der Wert

$$a = 4,07 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

Zur Aufnahme wurde feinst pulverisiertes reines Al benutzt. Die einzelnen, unter dem Mikroskop unregelmäßig gezackt erscheinenden Partikelchen waren in der Längsausdehnung kleiner als ein hundertstel Millimeter. Die Substanz wurde zu einem Stäbchen von ca. 1 mm Durchmesser gepreßt und in der bekannten Weise durchstrahlt. Die Ausmessung des Films ergab für den Winkel ϑ , den das „reflektierte“ mit dem primären Strahlenbündel bildet, die folgenden Werte in Grad:

$\vartheta =$	34,7	38,8	40,2	44,8	58,3	65,4	69,5
	s	st	ss	m	ss	m-st	s
	72,9	78,3	82,5	96,8	99,4	112,1	116,7
	ss	st	m-st	ss	m	st	st
	126,3	137,2	152,3	161,8	[163,9]		
	s	st	ss	st	s		

Die Meßgenauigkeit beträgt etwa $\frac{1}{2}$ Proz. für die kleineren Werte von ϑ ; etwa $\frac{1}{4}$ Proz. für die größeren Werte. Diese Genauigkeit stimmt ungefähr überein mit der von Bragg bei seiner Ionisationsmethode erreichten. Es steht an sich nichts im Wege, die Genauigkeit unserer photographischen Methode noch wesentlich zu steigern. Man hätte nur dünneres Stäbchen und weniger geöffnetes Primärstrahlenbündel zu verwenden. Unter den Ziffern sind durch die Bezeichnungen st = stark, m = mittel, s = schwach, ss = sehr schwach, die geschätzten Intensitäten der Linien angegeben. Die benutzte Strahlung war die K-Strahlung des Cu mit den Wellenlängen $\lambda_\alpha = 1,549 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ und $\lambda_\beta = 1,402 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$.

Es handelt sich nun darum, aus den angegebenen Werten von ϑ das Kristallsystem und die genauere Struktur des Raumgitters zu bestimmen.

§ 1. Bestimmung des Kristallsystems.

Die Bestimmung des Kristallsystems und damit des Elementarbereichs des Gitters läuft hinaus auf die Auffindung einer quadratischen Form von drei ganzen Zahlen h_1, h_2, h_3 . Wie in unserer früheren Notiz¹⁾ ausführlich dargelegt, besteht im allgemeinsten Falle zwischen den Indizes der reflektierenden Netzebene und dem Winkel ϑ eine Beziehung von der Form²⁾:

$$4 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = \lambda^2 (h_1 \mathfrak{A} + h_2 \mathfrak{B} + h_3 \mathfrak{C})^2. \quad (1)$$

Dabei bedeuten λ die benutzte Wellenlänge, $h_1,$

h_2, h_3 die Indizes der reflektierten Netzebene. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ sind drei Vektoren, welche mit den Vektoren a, b, c , die das Elementarparallelepiped unseres Kristalls bestimmen, in engem Zusammenhange stehen; es sind die Grundvektoren des zum $a-b-c$ -Gitter reziproken Gitters:

$$\mathfrak{A} = \frac{[bc]}{a[bc]}, \quad \mathfrak{B} = \frac{[ca]}{b[ca]}, \quad \mathfrak{C} = \frac{[ab]}{c[ab]}. \quad (2)$$

Im Falle eines regulären Kristalls wird

$$|a| = |b| = |c| = a \text{ und } (ab) = (bc) = (ca) = 0.$$

Damit vereinfacht sich die quadratische Form zu

$$4 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = \frac{\lambda^2}{a^2} (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2), \quad (3)$$

d. h. die Werte von $\sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ verhalten sich wie ganze Zahlen, wie die Indizesquadratsummen. Während man im allgemeinsten Falle 6 Größen, nämlich $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ nach Größe und gegenseitiger Orientierung zu bestimmen hat, tritt im Falle eines kubischen Gitters nur eine Unbekannte, nämlich a auf. Wenn man ein reguläres Gitter vermutet, hat man nur nachzuprüfen, ob die beobachteten Werte von $\sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ innerhalb der

Grenze der Beobachtungsfehler sich wie ganze Zahlen verhalten. Es ist dann leicht, den einzelnen Linien eindeutig die richtigen Indizes zuzuordnen. Trifft die Vermutung eines kubischen Gitters nicht zu, so hat man die Bestimmung der quadratischen Form (1) vorzunehmen. Diese Bestimmung kann nach einer von C. Runge kürzlich angegebenen Methode¹⁾ geschehen, welche aus den vorliegenden Werten von $\sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ das reziproke Gitter sukzessive aufzubauen gestattet. Wenn die drei Grundvektoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ des reziproken Gitters bekannt sind, findet man sofort die Vektoren a, b, c des wirklichen Gitters. Wie man sich leicht überlegt, führt dieselbe Operation, die vom wirklichen zum reziproken Gitter führte, vom reziproken zum ursprünglichen Gitter zurück; in Formeln:

$$a = \frac{[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]}{(\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]}, \quad b = \frac{[\mathfrak{C}\mathfrak{A}]}{(\mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}]}, \quad c = \frac{[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]}{(\mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}])}.$$

Die Rungesche Methode bewältigt die zunächst sehr schwierig erscheinende Aufgabe in sehr eleganter Weise. Sie führt immer zum Ziel, sobald nur die Genauigkeit der Werte von $\sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ genügend groß ist. Während bei der Laueschen und Bragg'schen Methode zur röntgenometrischen Raumgitterbestimmung die Kenntnis des Kristallsystems nötig war, kann man auf Grund eines einzigen Photogramms

¹⁾ P. Debye u. P. Scherrer, diese Zeitschr. 18, 291, 1917.

²⁾ Die Ableitung der Formeln findet man z. B. bei M. v. Laue, Enzykl. d. math. Wiss. V, 3, S. 457 ff.

¹⁾ C. Runge, diese Zeitschr. 18, 509, 1917. Über eine weitere Methode werden Herr Johnsen und Herr Töplitz demnächst an dieser Stelle berichten.

von einer Substanz, über deren Struktur von vornherein gar nichts bekannt ist,

1. das Kristallsystem
2. die Achsenverhältnisse bzw. Form und Größe des Elementarbereichs

bestimmen. Die Methode leistet also (schon ohne die Intensitäten der Linien zu berücksichtigen) dasselbe, wie die kristallographischen Methoden, soweit sie auf Winkelmessung beruhen. Die genauere Art des Raumgitters, die Besetzung des Elementarbereichs mit Atomen, läßt sich nur auf Grund von Intensitätsmessungen (wozu eine Photometrierung des Films nötig ist) feststellen. Durch das Rungesche Verfahren hat unsere Methode also die letzte nötige Vervollständigung erfahren.

Weil wir im Al nach den Angaben Groths einen kubischen Kristall vermuten dürfen, versuchen wir den Werten von $\sin^2 \vartheta/2$ ganze Zahlen zuzuordnen, entsprechend der Formel (3)

$$4 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = \frac{\lambda^2}{a^2} (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2).$$

Dabei haben wir zunächst zu berücksichtigen, daß entsprechend den zwei stärksten Wellenlängen der K -Serie der Cu -Strahlung jede Netzebene zu zwei Reflexionen Anlaß gibt, deren $\sin \frac{\vartheta}{2}$ sich wie die entsprechenden Wellenlängen verhalten

$$\frac{(\sin \frac{\vartheta}{2})_\alpha}{(\sin \frac{\vartheta}{2})_\beta} = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta} = \frac{1,549}{1,402} \quad (4)$$

Die von der β -Linie herrührenden Interferenzen lassen sich leicht aussondern dadurch, daß man in der Tabelle der $\sin \vartheta/2$ nach Verhältnissen

vom Wert $\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta} = 1,103$ sucht. Von den oben

angegebenen 18 Werten von ϑ bleiben nach der Aussonderung nur die zehn fettgedruckten Werte, als von der α -Linie hervorgerufen, übrig.

Die $\sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ dieser Reflexionen verhalten sich wie

3 : 4 : 8 : 11 : 12 : 16 : 19 : 20 : 24 : 27. Die Genauigkeit, mit der die Ganzzahligkeit eintritt, ist sehr gut, so daß wir zweifellos einen dem regulären System angehörenden Kristall vor uns haben. Dabei bleibt, wie wir ausdrücklich hervorheben wollen, die letzte Linie bei $\vartheta = 163,9^\circ$ zunächst unerklärt. Wir wollen den Ursprung dieser Interferenz weiter unten (§ 3) diskutieren.

§ 2. Atomanordnung im Elementarbereich.

Die Bestimmung der Atomanordnung

und der Größe des Elementarbereichs gestaltet sich in unserem Falle sehr einfach. Die oben gefundenen Zahlen 3 27 müssen proportional zu den Indizes-Quadratsummen der entsprechenden reflektierenden Ebenen sein. Wir haben also zu untersuchen, ob sich jede dieser ganzen Zahlen als Summe der Quadrate von drei anderen ganzen Zahlen darstellen läßt. Um dies festzustellen, benutzt man zweckmäßig eine Tabelle, in der der Reihe nach alle ganzen Zahlen, soweit dies möglich ist, als Summe von drei Quadraten anderer ganzer Zahlen dargestellt sind. Die Tabelle

$$Q = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$$

lautet so:

Tabelle I.

Q	$h_1 h_2 h_3$	Q	$h_1 h_2 h_3$	Q	$h_1 h_2 h_3$
1	001	10	013	19	133
2	011	11	113	20	024
3	111	12	222	21	124
4	002	13	023	22	233
5	012	14	123	23	—
6	112	15	—	24	224
7	—	16	004	25	005
8	022	17	014	26	034
9	003	18	223	27	015
	122		033		134
			114		115
					233

Ein Vergleich mit der Tabelle zeigt, daß alle der oben gefundenen Zahlen von 3 bis 27 sich als Summe von 3 Quadraten darstellen lassen. Es hindert uns also nichts, diese Zahlen direkt als Σh^2 anzusprechen, d. h. die erste, der Zahl 3 entsprechende Linie als Reflexion an (111) usw., die durch 27 charakterisierte Linie als Reflexion an (115) und (333) aufzufassen. Durch diese Zuordnung der Reflexionswinkel zu bestimmten Quadratsummen haben wir über die Größe des Elementarbereichs verfügt. In der Tat wird durch Formel (3) die Kantenlänge a des Elementarwürfels bestimmt. Wir finden für a :

$$a = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}{\sin \vartheta/2}.$$

Dies gibt, wenn wir z. B. den $h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 27$ entsprechenden Wert von ϑ benutzen:

$$a = \frac{1,549 \cdot 10^{-8}}{2} \cdot \frac{\sqrt{27}}{0,988} = 4,07 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

Auch über die Anzahl der im Elementarkubus liegenden Atome können wir eine Aussage machen. Der Quotient aus der im Elementarbereich liegenden Masse und dem Volumen des ersteren gibt uns die Dichte der Substanz. Liegen z -Atome vom Atomgewicht A im Ele-

mentarwürfel, ist ferner m_H die Masse des Wasserstoffatoms, so besteht die Gleichung

$$\rho_{al} = \frac{z \cdot A \cdot m_H}{a^3} \quad (5)$$

Für ρ_{al} werden Werte zwischen 2,6 und 2,7 angegeben. Wir rechnen mit $\rho = 2,65 \text{ g/cm}^3$. Das Atomgewicht beträgt $A = 26,91$, die Masse des H -Atoms $m_H = 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ g}$. Wir finden so für z

$$z = \frac{2,65 \cdot 67,4 \cdot 10^{-24}}{26,91 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24}} = 4,00 \text{ Atome/Elem.-Ber.}$$

Unsere Annahmen über die den beobachteten Reflexionen zuzuordnenden Netzebenen zwingen uns dazu, den Elementarbereich mit 4 Atomen zu besetzen.

Wir haben uns nun zu fragen, wie diese 4 Atome im Elementarbereich anzuordnen sind. Im allgemeinen ist zur Lösung dieser letzten Frage eine genaue Diskussion der Intensitäten der auftretenden Linien nötig. Das Aluminiumgitter ist als kubisches nur mit einer Atomart besetztes Gitter auch in dieser Hinsicht sehr einfach. Betrachten wir nochmals unsere Indizes-Quadratsummen, so zeigt ein Blick auf Tabelle I, daß zu allen beobachteten Werten Q ungemischte Indizes $h_1 h_2 h_3$ gehören, d. h. $h_1 h_2 h_3$ sind entweder zugleich gerade oder zugleich ungerade. Gemischte Indizes kommen nicht vor. Auch fehlt unter unseren Werten für Σh^2 kein ungemischter Q -Wert, die ungemischten Indizes, die überhaupt möglich sind, sind vollständig vertreten. Das ausschließliche Auftreten von ungemischten Indizes ist charakteristisch für ein flächenzentriertes Gitter. Bei einem solchen heben sich die Reflexionen an Ebenen mit gemischten Indizes durch Interferenz auf. Zu einem flächenzentrierten Elementarkubus gehören aber gerade 4 Atome, und zwar hat der Strukturfaktor¹⁾ entsprechend den Koordinaten

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & 0 & 0 & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ & & & 2 & 2 & & 2 & 2 & 2 & & 2 \end{matrix}$$

der Gitterpunkte den Wert:

$$S = 1 + e^{i2\pi(h_1+h_2)} + e^{i2\pi(h_2+h_3)} + e^{i2\pi(h_1+h_3)} \quad (6)$$

Dieser Strukturfaktor, der neben anderen Faktoren die Intensität der Linien reguliert²⁾, hat den Wert 0 für gemischte Indizes, den Wert 4 für ungemischte Indizes. Gemischte Indizes liefern keine Interferenzlinie. Wir werden also dazu geführt, für Al ein einfaches flächenzentriertes Gitter anzunehmen.

1) P. Debye u. P. Scherrer, l. c. S. 279.

2) Die Intensität einer Reflexion an $(h_1 h_2 h_3)$ ist proportional $|S|^2$.

Eine weitere Bestätigung unserer Resultate erhalten wir, wenn wir die geschätzten Intensitäten der vorhandenen Linien vergleichen mit den durch Berechnung erhaltenen Zahlen. Bei der Berechnung der Intensitäten berücksichtigen wir 4 Faktoren¹⁾, nämlich den Strukturfaktor S , den Lorentzischen Faktor $\frac{1}{\Sigma h^2}$, den durch die Transversalität des einfallenden Lichtes bedingten Faktor $\frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2}$, und die Zahl n , die die Häufigkeit des Auftretens einer bestimmten Netzebene im Gitter angibt. Wir setzen (bis auf einen Proportionalitätsfaktor) die Intensität der Linie $(h_1 h_2 h_3)$ gleich

$$J = |S|^2 \cdot \frac{1}{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2} \cdot \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} n$$

Die Übereinstimmung der berechneten und der beobachteten Intensitäten ist sehr gut, insofern man jede Linie nur mit den beiden nächststehenden vergleicht. Der Vergleich weit auseinander liegender Linien ist deshalb nicht statthaft, weil der Einfluß der Temperaturbewegung und der Elektroneninterferenz im Atom²⁾ unberücksichtigt blieb. Auch die Konstanz des Verhältnisses

$$\frac{\sin \vartheta/2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}} = \frac{\lambda}{2a},$$

die für einen regulären Kristall charakteristisch ist, läßt nichts zu wünschen übrig.

Tabelle II.

ϑ	$\sin \vartheta/2$	$h_1 h_2 h_3$	$\frac{\sin \vartheta/2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}$	n	$\mathcal{F}_{\text{beob.}}$	$\mathcal{F}_{\text{ber.}}$
34,7	.208	111	.172	—	s	—
38,6	.330	111	.190 ₅	8	st	2,15
40,2	.344	002	.172	—	ss	—
44,8	.381	002	.190 ₅	6	m-st	1,13
58,3	.487	022	.172	—	ss	—
65,4	.540	022	.190 ₈	12	m	0,88
69,5	.570	113	.172	—	s	—
72,9	.594	222	.172	—	ss	—
78,3	.632	113	.190 ₆	24	st	1,14
82,5	.659	222	.190 ₄	8	s-m	0,34
96,8	.748	133	.172	—	ss	—
99,4	.763	004	.190 ₇	6	s-m	0,38
112,1	.830	133	.190 ₅	24	m	0,73
116,7	.851	024	.190 ₃	24	m	0,72
126,3	.892	115	.172	—	s	—
137,2	.931	333	.190 ₂	24	m-st	0,77
152,3	.971	044	.172	—	ss	—
181,8	.988	115	.190 ₀	8	st	1,13
		333		24		

1) Siehe P. Debye u. P. Scherrer, l. c. S. 297.

2) P. Debye, Ann. d. Phys. 43, 809, 1915.

§ 3. Allgemeine Bemerkungen.

Unsere Aufgabe ist damit bis auf die Erklärung der Interferenz bei $\vartheta = 163,9^\circ$ erledigt. Daß diese Linie sich bei der eben durchgeführten Rechnung nicht in unser Schema einordnete, rührt daher, daß wir die benutzte Kupfer- K -Strahlung als aus zwei einfachen Linien bestehend angenommen haben. In Wirklichkeit sind die zwei betrachteten Linien (α - und β -Linie) aber nicht einfach, es sind zwei enge Dubletts. Wir hätten also genau genommen mit einem α -Dublett, bestehend aus einer α - und einer α' -Linie, rechnen müssen, ebenso mit einem β -Dublett. Wenn der Winkel ϑ , unter dem eine Interferenz beobachtet wird, nicht in der Nähe von 180° liegt, so sind diese Dubletts wegen der großen Breite der Interferenzen, die durch die Stäbchendicke bedingt ist, nicht aufgelöst. In der Nähe von $\vartheta = 180^\circ$ aber ändert sich die Sachlage völlig. In dieser Gegend des Films, wo sich $\sin \frac{\vartheta}{2}$ mit ϑ kaum mehr ändert, wird die Aufspaltung des Dubletts sehr groß. Aus (3) folgt nämlich

$$\frac{\delta\vartheta}{\vartheta} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}}{\frac{\vartheta}{2}} \cdot \frac{\delta\lambda}{\lambda}. \quad (6)$$

Diese Formel zeigt, daß bei $\vartheta \sim 180^\circ$ kleinen Wellenlängendifferenzen recht beträchtliche Änderungen der Reflexionswinkel entsprechen.

Man muß also erwarten, das α -Dublett bei großen Werten ϑ getrennt zu finden. Die nicht eingeordnete Linie bei $\vartheta = 163,9^\circ$ entspricht in der Tat der Reflexion der α' -Wellenlänge an (115) und (333), während $\vartheta = 161,8^\circ$ als Reflexion der intensiveren α -Wellenlänge an denselben Kristallebenen angesprochen werden muß. Wir finden hier das α -Dublett aufgelöst in zwei Linien, deren Abstand auf unserem Film über 1 mm beträgt. Dieser großen Aufspaltung entsprechend läßt sich die Wellenlängendifferenz $\delta\lambda$ mit ziemlich großer Genauigkeit bestimmen.

Für $\frac{\delta\lambda}{\lambda}$ ergibt sich aus (6)

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{2,1 \pm 0,2}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \cotg 81,4^\circ = 28 \pm 2,7 \cdot 10^{-4},$$

Für die Wellenlängendifferenz der Komponenten selbst finden wir somit

$$\delta\lambda = 0,0043 \pm 0,0004 \cdot 10^{-8} \text{ cm},$$

während der Siegbahnsche Wert $0,004 \pm 0,001 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ beträgt.

Die genaue Kenntnis dieses Wertes ist für

die Theorie der Röntgenspektren von allergrößter Wichtigkeit. Sie gestattet einerseits eine genaue Prüfung der Sommerfeldschen Theorie¹⁾, andererseits eine Entscheidung zwischen dieser und der Debyeschen Vorstellung²⁾ (gesprengter Dreiring) von der Entstehung der K_α -Linie. Der Debyesche Mechanismus verlangt ein etwas weiteres Dublett als die Sommerfeldsche Theorie.

Von den bisher röntgenometrisch untersuchten Metallen zeigen $\text{Cu}^3)$ $\text{Ag}^4)$ $\text{Au}^5)$ $\text{Pb}^5)$ und nach den obigen Ausführungen auch Al einfache kubische flächenzentrierte Gitter. Für die Gitterparameter, die Kantenlängen der Elementarwürfel, findet man folgende Werte

Al :	$a = 4,07 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$
Cu :	$= 3,61 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$
Ag :	$= 4,06 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$
Au :	$= 4,07 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$
Pb :	$= 4,91 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$

Diese 5 Elemente sind also (im gewöhnlichen Sinne des Wortes) isomorph. Alle diese Metalle vermögen auch innerhalb gewisser Grenzen des Mischungsverhältnisses zusammen zu kristallisieren, sogenannte Mischkristalle zu bilden. Lückenlose Mischkristallreihen bilden Au und Cu , Au und Ag , während Cu und Ag eine Mischungslücke, die von 4,5–95 Proz. Ag reicht, aufweisen⁶⁾. Interessant ist, daß auch Al und Au trotz der außerordentlich nahen Übereinstimmung der Gitterkonstanten und der Atomvolumina keine lückenlose Mischkristallreihe aufweisen. Es zeigt sich an diesem Beispiel deutlich, daß die nahe Übereinstimmung der Gitterkonstanten nicht allein maßgebend für die Mischbarkeit in jedem Verhältnisse ist. Vielmehr spielt die chemische Affinität der zu mischenden Elemente für diese Frage eine große Rolle. Sobald die Affinität der Komponenten groß ist, treten trotz genauer Übereinstimmung der Gitterkonstanten Mischungslücken auf. Oft hängt das Auftreten von Lücken mit der Existenz chemischer Verbindungen zusammen. Nach der Tabelle der Metallverbindungen in G. Tammanns Lehrbuch der Metallographie⁷⁾ sind in der Tat die Verbindungen Au_4Al , Au_5Al_2 , Au_2Al , AuAl und Au_4Al_2 wahrscheinlich gemacht.

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 51, 125, 1916.

2) P. Debye, diese Zeitschr. 18, 276, 1917.

3) W. H. Bragg, Phil. Mag. 28, 355, 1914.

4) L. Vegard, Phil. Mag. 31, 83, 1916.

5) L. Vegard, Phil. Mag. 32, 65, 1916.

6) Siehe G. Tammann, Nachr. d. königl. Ges. d. Wiss., Göttingen. Sitzung v. 9. Juni 1917.

7) Leipzig 1914.

(Eingegangen 22. November 1917.)

BESPRECHUNGEN.

P. Eversheim, Angewandte Elektrizitätslehre. Ein Leitfaden für das elektrische und elektrotechnische Praktikum. 8°. VII und 214 S. mit 215 Textfiguren. Berlin, J. Springer. 1916. Preis geh. M. 8.—, geb. M. 9.—.

Das vorliegende Werk ist veranlaßt durch Übungen, welche der Verf. an der Universität Bonn abgehalten hat. Es ist ein „Praktikumsbuch“, das die bemerkenswerte Eigenschaft hat in einer Form abgefaßt zu sein, in der es vom Studierenden mühelos von Beginn seiner Praktikantentätigkeit durchgelesen werden kann, was im allgemeinen bei ähnlichen Büchern kaum der Fall zu sein pflegt, auch wohl meist nicht erwartet wird. Eversheim legt Wert darauf, den Übergang von der Darstellung der Prinzipien zum praktischen Versuch zu erleichtern. Demgemäß ist das Buch reichlich mit modernen Abbildungen und Beschreibungen der nachher wirklich benutzten Apparate ausgestattet. Es ist weniger Gewicht auf Vollständigkeit als auf ausführliche Darstellung der für den Anfang wichtigsten Laboratoriumsarbeiten gelegt. Der Inhalt ist gegliedert in: I. Gleichstrom, II. Wechselstrom, III. Magnetismus, Akkumulatoren, Photometrie. Das Buch dürfte nicht nur im Interesse des Praktikanten, sondern auch in dem des Praktikumsleiters, dem es manche zeitraubende Auseinandersetzung sparen wird, bestens zu empfehlen sein. —

H. Hörig.

H. Lorenz, Ballistik. Die mechanischen Grundlagen der Lehre vom Schuß. gr. 8°. V. u. 87 S. mit 53 Textabbildungen. München u. Berlin, R. Oldenbourg. 1917. M. 3.50.

Zu den vielen durch den Krieg veranlaßten Veröffentlichungen technischer Art muß auch das vorliegende Buch gerechnet werden, das als Ausgestaltung einer Reihe von Aufsätzen (aus der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure) sich nun in geschlossener Form vorstellt. Aber die Anlage des Werkes reicht zweifellos weiter zurück und ist den reichen Erfahrungen des Verfassers auf den verschiedenen Gebieten der Mechanik zu verdanken, die sich hier nur in einer durch die Zeitverhältnisse bedingten besonderen Richtung betätigt haben. In der Tat finden wir in diesem Buche so manche Anklänge wieder an frühere bekannte Veröffentlichungen des Verfassers, so an die Entwicklungen über die Festigkeit dickwandiger Rohre, an seine Theorie des Luftwiderstandes und an die Art der Behandlung der mechanischen Gesetze, wie sie der technischen Welt durch Lorenz' Mechanikwerke vertraut sind. Solche Erinnerungen sind aber ein Zeugnis dafür, wie anpassungsfähig die Lorenzschen Darstellungsmethoden an technische Probleme der verschiedensten Art sind, und sie vereinigen damit zugleich die nicht zu unterschätzende Eigenschaft, klar und leicht verständlich zu sein. Der Leser empfindet dies dankbar von der ersten bis zur letzten Seite des Buches, und das ist gewiß nicht zum geringsten Teil Ursache für den Anklang, den das Werk bei Offizieren sowie auch in Kreisen, die wissenschaftlichen Problemen solcher Art ferner stehen, gefunden hat.

Der Inhalt gliedert sich naturgemäß in die beiden Kapitel der inneren und äußeren Ballistik. Vom Pulverdruck ausgehend, wird der Schußvorgang im Innern des Geschützrohres besprochen, wobei dem Rezensenten ein etwas weiteres Eingehen auf die thermo-

chemischen und thermodynamischen Vorgänge vielleicht wünschenswert erschienen wäre. Schon zu Anfang wird wie mehrfach in diesem Buche auf bemerkenswerte Vergleiche mit anderen physikalischen Vorgängen hingewiesen (hier z. B. Pulver-Gasstauung und Wassersprung), was für eine großzügige Betrachtung des Gegenstandes gewiß förderlich ist.

Eine wahre Fundgrube für Aufgaben aus der technischen Mechanik bilden die folgenden Paragraphen über die Rückwirkung des Schusses auf starre Schußvorrichtungen, über den Rohrrücklauf bei Rahmen-Verschwindlafetten und Wiegelafetten. Hervorzuheben ist dabei die jedesmal mit vollständig durchgerechneten Zahlenbeispielen sehr anschaulich gemachte Darstellung. Diese Beispiele enthalten überdies sehr interessantes Material und ermöglichen bemerkenswerte Vergleiche der einzelnen Geschütz- und Geschößarten zu geben. Lorenz konnte da die neuesten vor dem Kriege noch bekannt gewordenen Daten verwenden. In einem weiteren Paragraphen wird der Rücklauf im Zusammenhang mit der Geschößbewegung genauer untersucht auf Grund der Cranzschen Versuchsmethode und ihrer Ergebnisse, welche selbst dabei eine knappe aber allgemein verständliche Darstellung finden. Der Schlußparagraph dieses Kapitels behandelt die Festigkeit der Rohre, die besonders durch die Untersuchung der eigenartigen Verhältnisse bei den Stahldrahtrohren der Engländer weiten Kreisen Neues bieten dürfte.

Das Kapitel „Äußere Ballistik“ enthält außer den allgemein bekannten Wurfparabelformeln (ohne Luftwiderstand) in zwei Paragraphen eine Darstellung der Wurfbewegung mit Luftwiderstand. Es lag natürlich außerhalb des Rahmens einer kurzen Monographie die vielfachen praktischen Rechnungsverfahren und Tabellen zu bringen, die in der speziellen Fachliteratur (z. B. Cranz) einen breiten Raum einnehmen und deren Kenntnis in der Tat für den praktischen Schußtechniker unentbehrlich ist. Das Lorenzsche Buch vermittelt aber eine recht gute Einführung in das Wesen aller dieser Methoden und gibt zugleich weiterstehenden Kreisen eine Übersicht über die Ergebnisse der Forschung auf diesem Gebiete. Im besonderen trifft dies zu für die Untersuchungen über die Form des Luftwiderstandsgesetzes. Hier hatte der Verfasser schon vor Jahren im Anschluß an die Berechnung des Schiffswiderstandes neue Gesichtspunkte aufgestellt, die zu einer mit den praktischen Schußbeobachtungen recht befriedigend übereinstimmenden Luftwiderstandskurve führten. Ganz kürzlich hat nun Lorenz diese theoretischen Untersuchungen noch weiter geführt und in wesentlichen Punkten verbessert und ergänzt. (Diese Zeitschrift 18, 209, 1917). An der genannten Stelle ist auch eine eingehende Ableitung dieser wichtigen Luftwiderstandsformeln und eine Übersicht über die zugehörige Literatur gegeben, die zur Ergänzung der Ausführungen des Buches wertvoll ist. — Es folgt ein Paragraph über die Kreiselwirkung der Geschosse (einschließlich der den Ballistikern bekannten Magnus- und Poisson-Phänomene) und über die Stabilität der Langgeschosse. Vielleicht gestatten die kürzlich von Güldner (Z. V. d. I. 1917, S. 666) mitgeteilten interessanten Beobachtungen an den langsamen Wurfminen weitere Erörterungen dieser wichtigen Fragen, bei denen jedenfalls noch manche ungeklärte Erscheinung zu bearbeiten ist. Den Abschluß des Lorenzschen Buches bildet ein Paragraph über die Wirkung des Geschosses am Ziel, wobei wiederum ein reiches Beobachtungsmaterial (größtenteils von Cranz) herange-

zogen wurde und Tagesfragen, wie die Wirkung der Dum Dum-Geschosse und dergl. angeschnitten werden. Etwas zu summarisch ist dagegen die Art der Sprengwirkung der verschiedenen Artilleriegeschosse behandelt. Hier wäre vielleicht noch mehr über die Wirkung am Ziele (Granattrichter) und dergl. zu sagen gewesen. —

Aus dieser kurzen Inhaltsangabe ist zu ersehen, daß das Buch in dem knappen Raum von 87 Oktavseiten ein sehr reichliches wissenschaftliches Material bietet.

Es ist das Verdienst des Verfassers, ein aus dem Bedürfnis des Krieges hervorgegangenes Werk geschaffen zu haben, das zweifellos auch in der kommenden Friedenszeit einen dauernden Wert behalten wird.

A. Pröll.

O. Grottrian, Die Geometrie der Gleichstrommaschine. gr. 8°. VI u. 130 S. mit 102 Textfiguren. Berlin, Jul. Springer. 1917. Geh. M. 6.—, geb. M. 7.40.

Das Buch scheint aus Vorlesungen des Verf. hervorgegangen zu sein und ist in erster Linie für Studierende bestimmt; aber auch der fertige Ingenieur wird unter den zahlreichen Kurven, die das Werkchen bringt, manche finden, die ihm für verschiedene für die elektrische Maschine charakteristische Größen den Zusammenhang und dessen geometrische Ableitung zeigt, den er bisher nur aus Gleichungen zu entnehmen gewohnt war. In zwei Hauptabschnitten werden die charakteristischen Kurven des Generators und des Motors abgeleitet mit je vier Unterabteilungen, die nacheinander die konstant magnetische Maschine, die Hauptstrom-, die Nebenschlußmaschine und beim Generator die Hauptnebenschlußmaschine behandeln, während beim Motor im 4. Abschnitt die verschiedenen Drehmomente und der stationäre Zustand des Motors untersucht werden. Ein kleineres einleitendes Kapitel führt den Leser in die geometrische Durchführung der Multiplikation und Division ein, während ein 4. Kapitel einige Bewicklungsprobleme kurz behandelt. — Alle nur erdenklichen, für die elektrische Maschine charakteristischen Größen, wie Ankerstrom, äußerer Strom, Erregerstrom, EK, Klemmspannung, äußerer Widerstand, innere und äußere Leistung, elektrischer Wirkungsgrad, Drehzahl, Drehmoment, werden mit einander kombiniert und ihre gegenseitige Abhängigkeit für die einzelnen Maschinenarten unter alleiniger Verwendung von Lineal und Zirkel abgeleitet. Die zahlreichen Figuren sind in erfreulich großem Maßstab gehalten, übersichtlich ausgeführt und durch knappen und klaren Text erläutert. Daß die so erhaltenen Kurven — im Interesse der Deutlichkeit mußten oft die einzelnen Maße in unrichtigem gegenseitigen Verhältnis angesetzt werden — nicht beanspruchen, dem Studierenden ein endgültiges, zahlenmäßig richtiges Bild über das Verhalten der Maschine im Betrieb zu übermitteln, darauf weist der Verf. im Vorwort ausdrücklich hin. Als Ergänzung erscheint uns die experimentelle Aufnahme der Kurven in den praktischen Übungen für den Studierenden unentbehrlich.

C. Deguisne.

B. Glatzel †, Elektrische Methoden der Momentphotographie. (Sammlung Vieweg, Heft 21.) 8°. IX, 100 S. Mit Bildnis u. 51 Abbildungen. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1915. M. 3.60.

Der Verf. hat hier alle die Methoden in vortrefflicher, übersichtlicher und kritisch verarbeiteter

Weise zusammengestellt, die bisher für photographische Momentaufnahmen von äußerst rasch verlaufenden Vorgängen, wie Geschößbewegungen, Insektenflug usw. ausgearbeitet worden sind. Zur Herstellung solcher wurde, seit Mach zum ersten Male ein fliegendes Geschöß zugleich mit seiner Luftwelle photographierte, stets der elektrische Funke benutzt. Die Aufgaben, die es zu lösen gibt, sind dabei: 1. eine äußerst präzise wirkende, womöglich von dem bewegten Objekt selbst zu betätigende Auslösung des elektrischen Funkens zu erreichen; 2. da dies meist durch einen ersten Auslösefunken bewirkt wird, einen zweiten Belichtungsfunken nach einer äußerst kurzen, aber präzise einregulierbaren Zeit hinter dem Auslösefunken folgen zu lassen; 3. falls kinematographische Aufnahmen erforderlich sind, in äußerst kleinen und sehr regelmäßigen Intervallen folgende Reihen von kurzen Belichtungsfunken zu erzeugen.

Sollen statt Schattenbilder der Objekte richtige Abbildungen erzielt werden, so sind besondere Einrichtungen zur Vorderbeleuchtung mit solchen Funken zu treffen, wie sie namentlich Cranz ausgebildet hat.

Alle zur Lösung dieser Aufgaben durchgearbeiteten Verfahren werden in dem Buche systematisch, unter gründlichem Eingehen auf die physikalischen Grundlagen besprochen. Namentlich an der Ausbildung der Hochfrequenzkinematographie mit Hilfe ungedämpfter elektrischer Schwingungen hat Glatzel selbst verdienstvoll mit Cranz zusammengewirkt.

Für Experimentalphysiker ist das Buch von großem Interesse. Denn auch zur Lösung physikalischer Aufgaben wird er häufig auf die hier auseinander gesetzten Methoden zurückgreifen und dann durch das Buch manchen Umweg ersparen können.

Herr Scheel hat an die Spitze des Buches einen warmherzigen Nachruf auf den leider so früh im Kriege gefallenen Verfasser gestellt, auch ist das Buch mit einem Bilde Bruno Glatzels geschmückt.

H. Th. Simon.

W. Winkelmann, Das Fernsprechwesen. (Sammlung Götschen Nr. 155 u. 773.) I. Band: Grundlagen und Einzelapparate der Fernsprechtechnik. 135 S. Mit 56 Abbildungen. II. Band: Fernsprechanlagen, ihre Ausführung und ihr Betrieb. 141 S. Mit 59 Abbildungen. 8°. Berlin, G. J. Götschen. 1916. Geb. je M. 1.—.

Die beiden Bändchen sollen das im Jahre 1902 von L. Reilstab geschriebene eine Bändchen über das Fernsprechwesen ersetzen, da dieses vergriffen ist und der Verfasser sich leider nicht zu einer neuen Auflage entschließen konnte. Die neue Bearbeitung stammt von einem Verfasser, der offenbar ein guter Kenner der Fernsprechtechnik ist. Die von ihr verwendeten Einrichtungen werden in wohlgeordneter Übersicht klar und verständlich dargeboten. Erheblich weniger befriedigend ist die Fernsprechphysik behandelt, die auch hier leider wieder, wie in fast allen Büchern über Fernsprechwesen, viel zu kurz kommt. Man wird z. B. vergebens etwas Systematisches in dem Buche suchen über alle die Einflüsse, welche bei dem Bestreben, die Lautheit der Übertragung zu stärken, den Klangcharakter verderben; während doch das Hindurchwinden zwischen dieser Scylla und Charybdis gerade den wesentlichen wissenschaftlichen Gehalt des Gebietes ausmacht. Diesen Gedanken muß man unbedingt eingehend verfolgen, wenn man die Wege zu guten praktischen Ergebnissen finden will. So z. B. bei den Eigenschwingungen der Membranen, bei der

Umwandlung der mechanischen Energie der Membran in elektrische, sowohl beim Telephon wie beim Mikrophon, bei dem Mikrophontransformator usw. Bei der Kabeltelefonie sind diese Einflüsse allerdings anschaulich hervorgehoben und der Fortschritt durch Pupin usw. verständlich gemacht. Vergebens sucht man auch hier (wie in den meisten ähnlichen Büchern) etwas Zuverlässiges über die Physik des Mikrophons. Daß es zahlreiche andere und recht interessante Methoden gibt, mit gutem Erfolge fernzusprechen, Kapazitätstelephon, chemisches Telephon, Lichtbogentelephon, optisches Telephon, drahtloses Telephon usw., wird kaum erwähnt. In bezug auf diese mehr wissenschaftlichen Fragen war das Bändchen von Rellstab entschieden besser auf dem Laufenden, als diese Neubearbeitung. —

Auch in der Beziehung bedeutet die Neubearbeitung eine Verschlechterung, daß die Sprache zuweilen mit einer breiten und inhaltlosen Wichtigkeit einherschreitet. Sogleich im ersten Satz: „Seit Urvätertagen ist menschlicher Scharfsinn bestrebt, das einer Nachrichtenübermittlung hinderliche Moment der Entfernung zu überwinden. . .“

Trotz dieser Beanstandungen kann das Buch als Einführung in das interessante Gebiet wohl empfohlen werden, namentlich wenn man sich auf die fertige Technik des Fernsprechwesens beschränken will.

H. Th. Simon.

F. F. Martens, Physikalische Grundlagen der Elektrotechnik. (Sammlung Wissenschaft Heft 46.) Erster Band: Eigenschaften des magnetischen und elektrischen Feldes. 8^o. XII u. 245 S. Mit 253 eingedruckten Abbildungen. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1913. Preis geh. M. 7,20.

— (Sammlung Wissenschaft, Band 55.) Zweiter Band, Dynamomaschinen, Transformatoren und Apparate für drahtlose Telegraphie. 8^o. XV, 456 S. mit 289 Abbildungen. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1915. Preis geh. 12,80, geb. M. 14.—.

Das nunmehr vollständig vorliegende Werk muß als eine ganz hervorragende Arbeit bezeichnet werden. Die Darstellung ist von einer Klarheit und zielbewußten Gründlichkeit, wie man sie in Lehrbüchern nur ganz selten findet. Hinsichtlich der Figuren, die größtenteils nach Originalzeichnungen des Verf. hergestellt sind, darf das Buch wohl einzig in seiner Art genannt werden. Bis in die kleinsten Einzelheiten ist der Stoff gründlich durchdacht und mit einer Sauberkeit vorgetragen, welche die Lektüre zu einem Genusse gestaltet! Es ist eigentlich überflüssig, auf den Inhalt im einzelnen einzugehen! es kann nur jedem Physiker, der sich überhaupt mit dieser Richtung zu befassen wünscht — und ohne einige elektrotechnische Grundlagen ist der Physiker von heute doch kaum denkbar — empfohlen werden, sich das Buch anzusehen; er wird es schwerlich unbeachtet beiseite legen.

Im ersten Bande sind die Grundlagen des magnetischen und elektrischen Feldes behandelt. Der zweite Band umfaßt die Abschnitte: 1. Dynamomaschinen. 2. Selbstinduktionen, Transformatoren und Kapazitäten. 3. Elektrische Schwingungskreise. 4. Elektromagnetische Strahlung. 5. Tabellen. Besonders hinweisen möchte ich auf die Behandlung der elektrischen Schwingungskreise. Hier bringt der Verf. eine gute Zusammenstellung der Grundlagen der drahtlosen Telegraphie, die man in den speziellen Lehrbüchern

dieses Gebietes meist nur den Resultaten nach findet. Wer sich z. B. mit der Theorie der Koppelungsschwingungen näher befassen will, bekommt hier einen sehr willkommenen Ausgangspunkt für tiefere Studien. Die Ableitungen sind in leicht faßlicher Darstellung gegeben. Bekanntlich hat F. F. Martens ja auch auf diesem Gebiete gearbeitet (vgl. Verh. d. D. Phys. Ges. 16, 100, 220, 1914). Spezielle Erwähnung verdient auch das Kapitel über Funkenbildung bei kommutierenden Dynamomaschinen. Ferner sei auf Artikel 127 (II, Seite 320), über Erzeugung abklingender Schwingungen durch Öffnung eines Schalters hingewiesen. Schließlich sei eins hervorgehoben: Die experimentellen Beispiele, welche der Erläuterung der Theorie zugrunde gelegt werden, sind im allgemeinen so gewählt und mit Angaben versehen, daß der Leser die betreffenden Experimente danach selbst in Angriff nehmen kann. In dieser Hinsicht dürfte das Werk manchem Vortragenden recht gute Dienste leisten. Es ist hierzu auch am Schlusse des zweiten Bandes ein Verzeichnis der wichtigsten elektrischen Meß- und Schaltungsaufgaben gegeben. Am Schlusse des ersten findet man eine recht nützliche Zusammenstellung von Definitionen und Maßsystemen.

Übrigens hat es offenbar nicht in der Absicht des Autors gelegen, Literaturnachweise zu bringen; es wäre aber zweifellos der Wert dieses aufs nachdrücklichste zu empfehlenden Buches dadurch nur noch erhöht worden.

H. Hörig.

Bruno Glatzel, Methoden zur Erzeugung von Hochfrequenzenergie. Gr. 8^o. 60 S. Mit 57 Abbildungen. Leipzig, Hachmeister & Thal. 1913. M. —.50.

Diese aus einem Naturforschervortrage entstandene Zusammenstellung der Methoden zur Erzeugung von Hochfrequenzenergie ist ein Abdruck aus der Fachzeitschrift Helios, die sich die Pflege solcher technisch-physikalischen Zusammenfassungen in den letzten Jahren in sehr dankenswerter Weise angelegen hat sein lassen. Es werden behandelt: I. Die Erzeugung von ungedämpften Schwingungen mit der Goldschmidt'schen Maschine, durch Frequenztransformation, mit der elektrostatischen Hochfrequenzmaschine, mit dem Lichtbogengenerator. II. Die Erzeugung gedämpfter Schwingungen beim Marconi-Sender, beim Braunschen-Sender, bei dem Wienschen Sender mit Löschfunken. III. Die Tonerzeugung in den Hochfrequenzkreisen (Tönende Funken usw.).

In allen Fällen ist auf die prinzipielle Erläuterung der Vorgänge der wesentliche Wert gelegt.

H. Th. Simon.

Briefkasten.

Die Nomenklatur der Radioelemente.

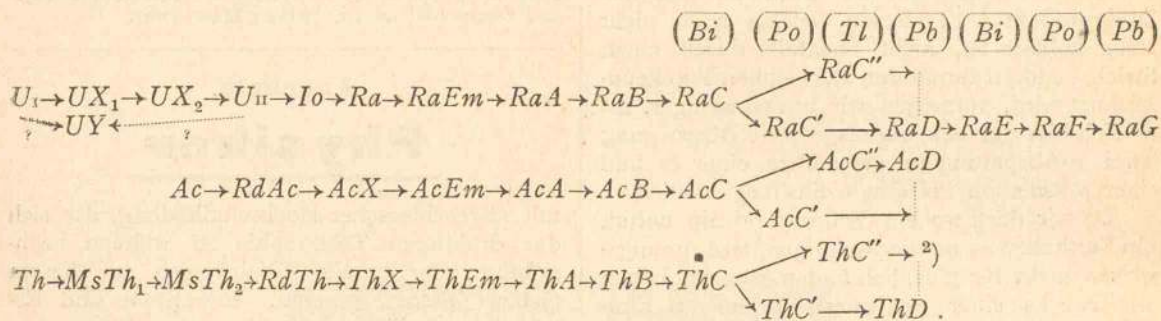
Die Ungleichartigkeit in der Bezeichnung der Radioelemente wurde bei allen beteiligten Forschern unangenehm empfunden. Es bestand daher die Absicht seitens der internationalen Radium-Standard-Kommission¹⁾ auf dem in Aus-

1) Ihr gehören an: B. B. Boltwood, M. Curie, A. Debierne, A. S. Eve, H. Geitel, O. Hahn, St. Meyer, E. Rutherford, E. v. Schweidler, F. Soddy.

sicht genommenen III. Internationalen Kongreß für Radioaktivität in Wien 1915 Vorschläge zur Regelung zu machen. Vorbereitend hatten sich anläßlich einer zwanglosen Zusammenkunft im Sommer 1913 in Bad Ischl, an der B. B. Boltwood, O. Hönigschmid, H. Mache, St. Meyer, E. Rutherford, E. v. Schweidler teilnahmen, die Beteiligten dahin geeinigt, einerseits zur Wahrung der Entwicklungsgeschichte möglichst

konservativ vorzugehen, anderseits doch den neueren Erkenntnissen über Verzweigungsverhältnisse und Isotopie gewisser Produkte einigermaßen Rechnung zu tragen.

Da die kriegerischen Ereignisse eine sonst gewiß leicht erzielte allgemeine Einigung zur Zeit nicht ermöglichen, haben wir in unserem Buche über Radioaktivität¹⁾ auf die folgenden, seither mehrfach benutzten Bezeichnungen hingewiesen:



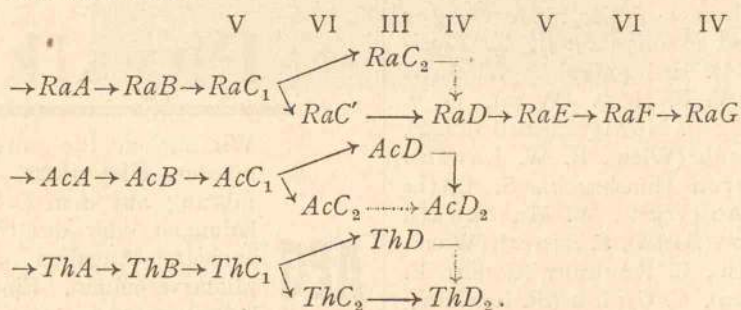
Wir beabsichtigten damit, dort wo Indizes üblich sind, zu unterscheiden:

Isotope durch römische Indizes $/U_I, U_{II}/$

Folgeprodukte durch arabische Indizes / $UX_1, UX_2; MsTh_1, MsTh_2$ /

Zweigprodukte durch Striche (C', C'') (³).

K. Fajans⁴⁾) schlug nun neuerdings vor vorläufig das Prinzip der Priorität anzuerkennen und somit die Beibehaltung einer Schreibart, deren Unterschied nur bei den C -Körpern und deren Folgeprodukten besteht, nämlich:



Wir vermieden den Index bei den Wismut-C-Substanzen besonders deshalb, weil die allgemeine Beziehung

$$\lambda_A A = \lambda_B B = \lambda_C C \dots$$

sonst ihre Geltung verliert, während sie für die bei uns mit arabischen Indizes bezeichneten Stoffe auch zu Recht besteht⁵⁾. [Für die Zweigprodukte gilt $\lambda_C C = (\lambda_{C'} C' + \lambda_{C''} C'')$].

Die C' sind bei uns Poloniumarten, die C'' Thalliumarten.

Da für die Seitenprodukte schon früher zuweilen statt der Indizes Striche benutzt wurden, liegt die wesentlichste Änderung gegenüber den älteren Bezeichnungen darin, daß die bisher als *AcD* und *ThD* bezeichneten Thalliumstoffe nunmehr in Analogie zur Radiumfamilie diese Buchstaben den bleiartigen Endprodukten überlassen. Im Hinblick darauf, daß diese beiden Stoffe keine besonders hervorragende Rolle in den

1) Bei B. G. Teubner, 1916.

2) Hierbei bleibt es noch unentschieden, ob in den bleiartigen D -Produkten sich wieder die Gleichgewichtsmengen zu den C -Produkten zusammenfinden oder ob aus den C' und C'' D -Isotope höherer Ordnung (gleiche Kernladungszahl und gleiches Atomgewicht mit verschiedener Zerfallskonstante) entstehen.

3) Wenn aus einem Ausgangsstoffe mehr wie zwei Zweigprodukte entstehen können, wie dies von E. Rutherford und A. B. Wood, Phil. Mag. 6) 31, 379, 1916 angegeben wurde, so steht der Vermehrung der Striche nichts im Wege, während die arabischen Indizes 3, 4 zu weiteren Schwierigkeiten führen.

4) K. Fajans, Zeitschr. f. Elektrochem. 23, 250, 1917.

5) In der anderen Bezeichnung ist $\lambda c_1 C_1$ nicht $= \lambda c_2 C_2$.

Arbeiten der letzten Zeit gespielt haben, dürfte umso eher erwartet werden, daß der Übergang der Benennungen sich gerade so leicht vollziehen werde, wie seinerzeit der von *RaE* in *RaF* oder bei den Actinium¹⁾ und Thorprodukten derjenige von *A* und *B* in die folgenden *B* und *C*, als diese Auffassung wohl in allen radioaktiven Laboratorien besprochen worden ist.

Eine Störung darin zu erblicken, daß das Zweigprodukt *UY*, dessen Genesis noch nicht völlig geklärt ist, nicht ebenfalls durch einen Strich, sondern durch den Buchstaben *Y* gekennzeichnet wird, vermögen wir um so weniger, als es sich hier um eine andersgeartete Abzweigung (zwei α -Abspaltungen gegenüber einer α - und einer β -Emission bei den *C*-Stoffen) handelt.

Da wir dort, wo ein Ordnungsprinzip nottut, ein Festhalten an unzweckmäßigen Bezeichnungen nicht für glücklich halten können, haben wir zwecks einer wenigstens vorläufigen Einigung der Forscher auf dem engeren Gebiet der Radioaktivität bei einigen derselben angefragt und es haben bisher die nachstehenden Radiologen erklärt, sich bis zu einer endgültigen Regelung unserer Benennungen bedienen zu wollen:

O. v. Baeyer (Berlin), H. Benndorf (Graz), K. Bergwitz (Braunschweig), P. Debye (Göttingen), J. Elster (Wolfenbüttel), K. Fajans (München), L. Flamm (Wien), H. Geiger (Berlin), H. Geitel (Wolfenbüttel), T. Godlewski (Lemberg), O. Hahn (Berlin), W. Hallwachs (Dresden), V. F. Hess (Wien), G. v. Hevesy (Budapest), O. Hönigschmid (Prag), K. W. F. Kohlrausch (Wien), R. W. Lawson (Wien), F. v. Lerch (Innsbruck), S. Loria (Krakau), H. Mache (Wien), W. Marckwald (Berlin), L. Meitner (Berlin), F. Planeth (Wien), K. Przibram (Wien), E. Regener (Berlin), E. Schrödinger (Wien), C. Ulrich (St. Joachimstal).

St. Meyer (Wien),
E. v. Schweidler (Innsbruck).

¹⁾ Die Schreibart Actinium (nicht Aktinium) erscheint uns sowohl wegen des Symbols *Ac* als wegen der lateinischen Endung, als aus Prioritätsrücksichten empfehlenswerter.

(Eingegangen 24. November 1917.)

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Verliehen: Den Abteilungsvorstehern beim Geodätischen Institut in Potsdam Professoren Dr. Friedrich Kühnen und Dr. Andreas Galle, dem Mitglied der

Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in Berlin-Charlottenburg Professor Dr. Emil Liebenthal und dem a. o. Professor für Geodäsie an der Universität Bonn und Direktor des Geodätischen Instituts an der landwirtschaftlichen Akademie Bonn-Poppelsdorf Dr. Curtius Müller der Titel Geh. Regierungsrat, dem Privatdozent für Physik und Honorarprofessor für Meteorologie und Klimatologie an der Deutschen Technischen Hochschule Brünn Dr. Artur Szarvassi der Titel a. o. Professor, dem ord. Professor der Mathematik an der Universität Freiburg i. B. Dr. Lothar Heffter der Titel Geh. Hofrat.

Gestorben: Der a. o. Professor für angewandte medizinische Chemie an der Universität Wien K. K. Regierungs- und Obersanitätsrat Dr. Julius Mauthner.

Angebote.

Physiker

mit abgeschlossener Hochschulbildung, der sich der drahtlosen Telegraphie zu widmen beabsichtigt oder bereits Erfahrungen auf diesem Gebiete besitzt, gesucht. Erwünscht sind Erfahrungen auf dem Gebiete der Elektronenemission und Vakuumtechnik.

Bewerbungen mit kurzem Lebenslauf und Gehaltsansprüchen erbeten an

Dr. Georg Seibt,
Fabrik funkentelegraphischer Apparate.
Berlin-Schöneberg, Hauptstr. 11.

Physiker.

Wir suchen für unser Laboratorium mehrere **Physiker**. Herren mit Erfahrung auf dem Gebiet der Gasentladungen oder des Hochvakuaums bevorzugt. Angaben über Lebenslauf, Militärverhältnis, Eintrittstermin, Gehaltsansprüche unter Beifügung von Zeugnisausschnitten an

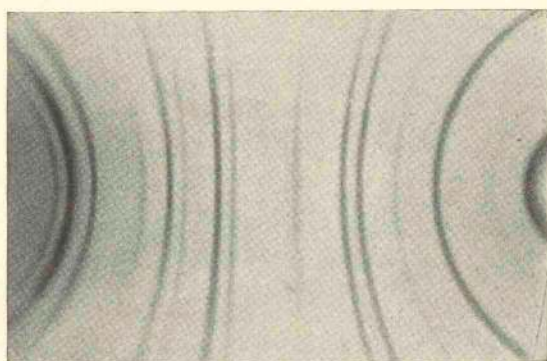
AEG

Allgemeine Elektrizitäts-Gesellschaft, Glühlampenfabrik,
Berlin NW. 87, Sickingenstr. 71.

Gesuche.

Physikerin (promoviert)

sucht Stellung. Unter **S. H. 506** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift in Leipzig, Königstraße 2.



Staats- u. Universitäts-
Bibliothek Hamburg

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 3.

1. Februar 1918.

Redaktionsschluß für No. 5 am 6. Februar 1918.

19. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

H. Thirring, Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie. S. 33.

A. Podjed, Diffusion und Statistik. S. 39.

R. Malmström, Zur Theorie der Versuche von Kaufmann und Bucherer über β -Strahlen. S. 43.

A. Johnsen u. O. Toeplitz, Über die mathematische Auswertung der Debye-Scherrerschen Röntgenspektrogramme. S. 47.

Besprechungen:

W. Porstmann, Normenlehre. S. 55.

M. Schlick, Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik. S. 56.

Personalien. S. 56.

Angebote. S. 56.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie.

Von Hans Thirring.

Die Überlegungen, denen die vorliegende Arbeit ihr Entstehen verdankt, lassen sich am besten klarmachen durch ein Zitat aus Einsteins grundlegender Arbeit vom Jahre 1914¹⁾. Er sagt da einleitend folgendes:

„Zunächst scheint es nun allerdings, daß eine derartige Erweiterung der Relativitätstheorie aus physikalischen Gründen abzulehnen sei. Es sei nämlich K ein im Galilei-Newtonschen Sinne berechtigtes Koordinatensystem, K' ein relativ zu K gleichförmig rotierendes Koordinatensystem. Dann wirken auf relativ zu K' ruhende Massen Zentrifugalkräfte, während auf relativ zu K ruhende Massen solche nicht wirken. Hierin sah bereits Newton einen Beweis dafür, daß man die Rotation von K' als eine „absolute“ aufzufassen habe, daß man also K' nicht mit demselben Rechte wie K als „ruhend“ behandeln könne. Dies Argument ist aber — wie insbesondere E. Mach ausgeführt hat — nicht stichhaltig. Die Existenz jener Zentrifugalkräfte brauchen wir nämlich nicht notwendig auf eine Bewegung von K' zurückzuführen; wir können sie vielmehr ebensogut zurückführen auf die durchschnittliche Rotationsbewegung der ponderablen fernen Massen in der Umgebung in bezug auf K' , wobei wir K' als ruhend behandeln. Lassen die Newtonschen Gesetze der Mechanik eine solche Auffassung nicht zu, so kann dies sehr wohl in Mängeln dieser Theorie begründet sein. . . .“

Da nun die Einsteinsche Theorie in den Publikationen von 1915 fertig ausgebaut zu sein scheint, liegt es nahe zu fragen: Ist die neue Theorie insofern frei von den Mängeln der Newtonschen, als tatsächlich die Rotation ferner

Massen gemäß ihren Gleichungen ein Gravitationsfeld erzeugt, das einem „Zentrifugalfeld“ äquivalent ist? Man wird vielleicht versucht sein, eine Diskussion dieser Frage für müßig zu halten, indem man sagt, daß die geforderte Äquivalenz durch die allgemeine Kovarianz der Feldgleichungen gewährleistet sei. Nun liegt die Sache aber doch nicht ganz so einfach, da ja auch die Randbedingungen für die $g_{\mu\nu}$ im räumlich Unendlichen eine Rolle spielen. Die diesbezüglichen Fragen prinzipieller Natur sind in den Arbeiten von De Sitter¹⁾ und Einstein²⁾ behandelt worden. Es soll nun im folgenden auf diese allgemeinen Fragen nicht eingegangen werden; wir wollen vielmehr an einem speziellen konkreten Beispiel das Feld rotierender ferner Massen durchrechnen und studieren. Zu diesem Zwecke eignet sich ausgezeichnet die von Einstein³⁾ angegebene Methode der näherungsweisen Integration der Feldgleichungen, welche den folgenden Rechnungen als Grundlage dienen soll. Wir wählen als Beispiel das Feld im Innern einer gleichförmig rotierenden, unendlich dünnen Hohlkugel, welche mit konstanter Massendichte belegt ist.

Im ersten Abschnitte dieser Arbeit (welcher ohne Beeinträchtigung des Verständnisses für das folgende überschlagen werden kann) wird die näherungsweise Berechnung der $g_{\mu\nu}$ für das Innere der Kugelschale durchgeführt, im zweiten Abschnitt wird die Bewegung eines Massenpunktes in diesem Felde diskutiert.

A. Rechnerischer Teil: Die Berechnung der $g_{\mu\nu}$ für die Umgebung des Mittelpunktes der rotierenden Hohlkugel.

Bezeichnungen:

a Radius der Hohlkugel;

M ihre Masse;

1) A. Einstein, Berl. Ber. 1914, S. 1030; vgl. auch Ann. d. Phys. 49, 769, 1916.

2) De Sitter, Amsterdam Proc. 19, 527, 1917.

3) A. Einstein, Berl. Ber. 1917, S. 142.

3) A. Einstein, Berl. Ber. 1916, S. 688.

ω ihre Winkelgeschwindigkeit;
 x, y, z rechtwinkelige Koordinaten eines Punktes der Kugeloberfläche;
 x_0, y_0, z_0 Koordinaten des Aufpunktes;
 κ Gravitationskonstante;
 ρ_0 natürliche gemessene Raumdichte der Materie.

Was die Gesichtspunkte der bei der Feldberechnung benutzten Approximationen anlangt, ist folgendes vorzuschicken: Das Feld in der Umgebung des Kugelmittelpunktes wird als so schwach betrachtet, daß in den Feldgleichungen nur die Glieder, welche in bezug auf die Größen $\gamma_{\mu\nu}$ erster Ordnung sind, in Rechnung gesetzt werden ($\gamma_{\mu\nu}$ definiert durch: $g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}$). Diese Vernachlässigung ermöglicht die Verwendung der Einsteinschen Methode der näherungsweise Integration der Feldgleichungen. Nach dem zweiten oft benutzten Gesichtspunkt der Approximation werden die Geschwindigkeitskomponenten der ponderablen Materie als klein gegenüber der Einheit (Lichtgeschwindigkeit) angesehen, so daß in jener grössten Näherung, welche auf die Newtonsche Theorie führt, schon ihre ersten Potenzen vernachlässigt werden können. Wir wollen diese Approximation — die von der ersten völlig unabhängig ist — nur insoweit anwenden, als wir die Glieder dritter und höherer Ordnung in den Geschwindigkeiten gegen 1 streichen. Schließlich beziehen sich unsere Rechnungen auf die Umgebung des Kugelmittelpunktes; sei r der Abstand Aufpunkt—Kugelmittelpunkt und R der Abstand Aufpunkt—Integrationselement, so werden wir $\frac{1}{R}$ in eine Potenzreihe nach $\frac{r}{a}$ entwickeln, die wir nach der zweiten Potenz abbrechen werden.

Die Einsteinsche Methode der näherungs-

$$T_{\mu\nu} = \rho_0 \left(\frac{dx_4}{ds} \right)^2 \begin{Bmatrix} -a^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi, & +a^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi, & 0 & i a \omega \sin \vartheta \sin \varphi \\ +a^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi, & -a^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi, & 0 & -i a \omega \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i a \omega \sin \vartheta \sin \varphi, & -i a \omega \sin \vartheta \cos \varphi, & 0 & 1 \end{Bmatrix}. \quad (6)$$

Da wir unter ρ_0 die natürlich gemessene Dichte der Materie verstehen, haben wir, um den Tensorcharakter des Integrals (3) zu wahren, für dV_0 ebenfalls das natürlich gemessene räumliche Volumelement zu setzen. Für dieses gilt die Formel¹⁾:

$$dV_0 = \sqrt{g} i \frac{dx_4}{ds} dV. \quad (7)$$

Für die Integration führen wir Polarkoordinaten ein, daher

$$\sqrt{g} dV = a^2 da \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (8)$$

1) Vgl. Einstein, Berl. Ber. 1914, S. 1058, Gl. (47 a).

weisen Integration liefert zur Berechnung der $g_{\mu\nu}$ folgende Vorschriften:

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \quad \delta_{\mu\nu} = 1, \mu = \nu, \quad (1)$$

$$= 0, \mu \neq \nu,$$

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}' - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \sum_a \gamma_{aa}', \quad (2)$$

$$\gamma_{\mu\nu}' = -\frac{\kappa}{2\pi} \int \frac{T_{\mu\nu}(x, y, z, t-r)}{R} dV_0. \quad (3)$$

Dabei ist $T_{\mu\nu}$ der kovariante Energietensor der Materie, dV_0 das räumliche Volumelement des Integrationsraumes,

$$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2.$$

Die Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ des Linielements beziehen sich auf die Koordinaten $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = it$.

Nach dem ersten Gesichtspunkt der Approximation dürfen wir den kovarianten Energietensor durch den kontravarianten ersetzen; er ist bei Vernachlässigung der Spannungen gegeben durch:

$$T_{\mu\nu} = T^{\mu\nu} = \rho_0 \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = \rho_0 \frac{dx_\mu}{dx_4} \frac{dx_\nu}{dx_4} \left(\frac{dx_4}{ds} \right)^2. \quad (4)$$

Die Hohlkugel rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z -Achse, dann gilt für einen ihrer Punkte, der die Polarkoordinaten a, ϑ, φ hat:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dx_4} &= -i \frac{dx}{dt} = i a \omega \sin \vartheta \sin \varphi, \\ \frac{dx_2}{dx_4} &= -i \frac{dy}{dt} = -i a \omega \sin \vartheta \cos \varphi, \\ \frac{dx_3}{dx_4} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Diese Werte liefern in (4) eingesetzt für $T_{\mu\nu}$ das folgende Schema:

Schließlich haben wir noch $\frac{1}{R}$ durch die Integrationsvariablen auszudrücken. Wir wählen das Koordinatensystem so, daß der Aufpunkt in die Z - X -Ebene fällt, seine Koordinaten sind dann:

$$x_0 = r \sin \vartheta_0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = r \cos \vartheta_0.$$

Dann gilt:

$$R^2 = (a \sin \vartheta \cos \vartheta - r \sin \vartheta_0)^2 + a^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + (a \cos \vartheta - r \cos \vartheta_0)^2 = a^2 \left[1 - \frac{2r}{a} (\sin \vartheta \cos \vartheta \sin \vartheta_0 + \cos \vartheta \cos \vartheta_0) + \frac{r^2}{a^2} \right].$$

Entwicklung in die binomische Reihe liefert mit den eingangs angegebenen Vernachlässigungen:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a} \left\{ 1 + \frac{r}{a} (\sin \vartheta \cos \varphi \sin \vartheta_0 + \cos \vartheta \cos \vartheta_0) - \frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2} + \frac{3}{2} \frac{r^2}{a^2} (\sin \vartheta \cos \varphi \sin \vartheta_0 + \cos \vartheta \cos \vartheta_0)^2 \right\}. \quad (9)$$

Wir bezeichnen den Ausdruck in der geschlungenen Klammer mit K und schreiben:

$$\frac{1}{R} = \frac{K}{a}. \quad (9a)$$

Einsetzen von (6), (7), (8) und (9a) in (3) gibt:

Da unsere Rechnungsgenauigkeit sich nur bis auf Glieder der Ordnung $\omega^2 a^2$ erstreckt, können wir in allen jenen $\gamma_{\mu\nu}$, welche den Faktor ωa

schon enthalten, $\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^3 = i$ setzen; bloß für

γ_{44}' verwenden wir den Ausdruck (11). Wir setzen noch

$$\varrho_0 da = \sigma,$$

dann gehen Gl. (10) über in:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{11}' &= \frac{i\kappa}{2\pi} \varrho_0 a^3 \omega^2 da \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \left(\frac{dx_4}{ds}\right)^3 \sin^3 \vartheta \sin^2 \varphi K, \\ \gamma_{22}' &= \frac{i\kappa}{2\pi} \varrho_0 a^3 \omega^2 da \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \left(\frac{dx_4}{ds}\right)^3 \sin^3 \vartheta \cos^2 \varphi K, \\ \gamma_{44}' &= -\frac{i\kappa}{2\pi} \varrho_0 a da \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \left(\frac{dx_4}{ds}\right)^3 \sin \vartheta K, \\ \gamma_{12}' &= -\frac{i\kappa}{2\pi} \varrho_0 a^3 \omega^2 da \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \left(\frac{dx_4}{ds}\right)^3 \sin^3 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi K, \\ \gamma_{14}' &= \frac{\kappa}{2\pi} \varrho_0 a^2 \omega da \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \left(\frac{dx_4}{ds}\right)^3 \sin^2 \vartheta \sin \varphi K, \\ \gamma_{24}' &= -\frac{\kappa}{2\pi} \varrho_0 a^2 \omega da \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \left(\frac{dx_4}{ds}\right)^3 \sin^2 \vartheta \cos \varphi K, \\ \gamma_{13}' &= \gamma_{23}' = \gamma_{33}' = \gamma_{43}' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Der Absolutwert der Größe $\frac{dx_4}{ds}$ unterscheidet sich von der Einheit nur um Glieder von der Größenordnung $\omega^2 a^2$; sie tritt in den kleinen Größen erster Ordnung $\gamma_{\mu\nu}'$ als Faktor auf; es genügt daher, wenn man sie aus dem Ausdruck „nullter“ Annäherung für das Linienelement berechnet:

$$\left. \begin{aligned} ds^2 &= -dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2, \\ \frac{ds^2}{dx_4^2} &= -1 - \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{dx_4^2} = \\ &= -1 + \omega^2 a^2 \sin^2 \vartheta, \\ \frac{ds}{dx_4} &= i \left(1 - \frac{\omega^2 a^2}{2} \sin^2 \vartheta \right); \\ \left(\frac{dx_4}{ds}\right)^3 &= i \left(1 + \frac{3}{2} \omega^2 a^2 \sin^2 \vartheta \right). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{11}' &= -\frac{\kappa}{2\pi} \sigma a^3 \omega^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin^3 \vartheta \sin^2 \varphi K, \\ \gamma_{22}' &= -\frac{\kappa}{2\pi} \sigma a^3 \omega^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin^3 \vartheta \cos^2 \varphi K, \\ \gamma_{44}' &= -\frac{\kappa}{2\pi} \sigma a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta K \left(1 + \frac{3}{2} \omega^2 a^2 \sin^2 \vartheta \right), \\ \gamma_{12}' &= \frac{\kappa}{2\pi} \sigma a^3 \omega^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin^3 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi K, \\ \gamma_{14}' &= \frac{i\kappa}{2\pi} \sigma a^2 \omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin^2 \vartheta \sin \varphi K, \\ \gamma_{24}' &= -\frac{i\kappa}{2\pi} \sigma a^2 \omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin^2 \vartheta \cos \varphi K, \\ \gamma_{13}' &= \gamma_{23}' = \gamma_{33}' = \gamma_{43}' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Wenn man in diese Ausdrücke den Wert von K aus (9) einsetzt und die Integrale auswertet, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{11}' &= -\frac{\kappa M}{2\pi 3a} a^2 \omega^2 \left(1 - \frac{r^2}{5a^2}\right), \\ \gamma_{22}' &= -\frac{\kappa M}{2\pi 3a} a^2 \omega^2 \left\{1 - \frac{r^2}{5a^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta_0\right)\right\}, \\ \gamma_{44}' &= \frac{\kappa M}{2\pi a} \left\{1 + a^2 \omega^2 \left[1 - \frac{r^2}{5a^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta_0\right)\right]\right\}, \\ \gamma_{24}' &= -\frac{i\kappa M}{2\pi 3a} \omega r \sin \vartheta_0, \\ \gamma_{12}' = \gamma_{14}' = \gamma_{13}' = \gamma_{23}' = \gamma_{33}' = \gamma_{43}' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Aus diesen Werten erhält man unter Verwendung der Gleichungen (1) und (2) die $\gamma_{\mu\nu}$ und hernach die $g_{\mu\nu}$. Wir setzen noch an Stelle der Polarkoordinaten r und ϑ_0 des Aufpunktes seine rechtwinkligen Koordinaten und ersetzen die Einsteinsche Gravitationskonstante

κ durch die gewöhnliche: $k = \frac{\kappa}{8\pi}$ (Lichtgeschwindigkeit = 1). Dann ergibt sich:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 - \frac{2kM}{a} \left[1 + a^2 \omega^2 - \frac{\omega^2}{10} (2z^2 + x^2 - 3y^2)\right], & + \frac{2kM}{a} \frac{\omega^2}{5} xy, & 0, & + i \frac{4kM}{3a} \omega y, \\ + \frac{2kM}{a} \frac{\omega^2}{5} xy, & -1 - \frac{2kM}{a} \left[1 + a^2 \omega^2 - \frac{\omega^2}{10} (2z^2 - 3x^2 + y^2)\right], & 0, & - i \frac{4kM}{3a} \omega x, \\ 0, & 0, & -1, & 0, \\ + i \frac{4kM}{3a} \omega y, & - i \frac{4kM}{3a} \omega x, & 0, & -1 + \frac{2kM}{a} \left[1 + \frac{5a^2 \omega^2}{3} + \frac{\omega^2}{6} (2z^2 - x^2 - y^2)\right] \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Der Index 0 bei den Koordinaten ist hier weggelassen; x, y, z bedeuten von nun an die Koordinaten des Aufpunktes.

B. Physikalischer Teil: Die Bewegung eines Massenpunktes im Innern der rotierenden Hohlkugel.

Wir wollen die Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes aufstellen, der sich in der Nähe des Mittelpunktes unserer rotierenden Kugelschale befindet. Das Feld in dieser Umgebung ist charakterisiert durch das Koeffizientenschema der $g_{\mu\nu}$ (Gl. (16) des ersten Abschnittes).

Das Bewegungsgesetz für einen Massenpunkt ist in der Einsteinschen Theorie bekanntlich gegeben durch die Bedingung

$$\delta \int ds = 0,$$

oder, wenn man die Variation ausführt:

$$\frac{d^2 x_\tau}{ds^2} = \Gamma_{\mu\nu}^\tau \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} \quad 1. \quad \tau = 1 \dots 4. \quad (17)$$

1) Über Indizes, die zweimal vorkommen, ist von 1 bis 4 zu summieren.

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= -1 - \frac{2kM}{a} \left\{1 + a^2 \omega^2 - \frac{\omega^2}{10} (2z_0^2 + x_0^2)\right\}, \\ g_{22} &= -1 - \frac{2kM}{a} \left\{1 + a^2 \omega^2 - \frac{\omega^2}{10} (2z_0^2 - 3x_0^2)\right\}, \\ g_{33} &= -1, \\ g_{44} &= -1 + \frac{2kM}{a} \left\{1 + \frac{5a^2 \omega^2}{3} - \frac{\omega^2}{6} (2z_0^2 - x_0^2)\right\}, \\ g_{24} &= -i \frac{4kM}{3a} \omega x_0, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

alle übrigen $g_{\mu\nu}$ verschwinden.

Wir wollen uns nun noch von der speziellen Wahl des Koordinatensystems frei machen. (Wir hatten ja den Aufpunkt in die z - x -Ebene gelegt.) Zu diesem Zwecke machen wir die Transformation:

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha, \\ x_2' &= -x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha, \\ x_3' &= x_3, \\ x_4' &= x_4. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Dann geht mittels der Transformationsformel für einen kovarianten Tensor zweiten Ranges

$$g_{\sigma\tau}' = \frac{\partial x_\mu}{\partial x_\sigma'} \frac{\partial x_\nu}{\partial x_\tau'} g_{\mu\nu}$$

das Koeffizientenschema über in:

Für die „Feldkomponenten“ $\Gamma_{\mu\nu}^\tau$ gilt nach dem ersten Gesichtspunkt der Approximation:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\tau &= -\left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \tau \end{matrix} \right\} = \left[\begin{matrix} \mu\nu \\ \tau \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\tau\nu}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\tau} \right). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Wir wollen bloß Bewegungen des Massenpunktes betrachten, welche klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sind, so daß wir die Quadrate und Produkte der Geschwindigkeitskomponenten vernachlässigen können. Dann kann man auf der rechten Seite der Gleichungen (17) alle jene Glieder streichen, in denen der Index 4 nicht vorkommt, und kann außerdem die Ableitungen nach s durch solche nach t ersetzen. Die Gleichungen (17) gehen dann unter Berücksichtigung von $\frac{dx_4}{dt} = i$ über in:

$$\frac{d^2 x_\tau}{dt^2} = 2i \left(\Gamma_{14}^\tau \frac{dx_1}{dt} + \Gamma_{24}^\tau \frac{dx_2}{dt} + \Gamma_{34}^\tau \frac{dx_3}{dt} \right) - \Gamma_{44}^\tau. \quad (19)$$

Von den Feldkomponenten $\Gamma_{\mu\nu}^{\tau}$ kommen also für das folgende nur jene in Betracht, welche den Index 4 mindestens einmal enthalten. Das sind 16 Größen, die (obwohl sie keine Tensor-komponenten sind!) in unserem Falle sich nach dem Schema eines antisymmetrischen Tensors zweiten Ranges darstellen lassen. Denn, da im stationären Felde die partiellen Ableitungen nach x_4 sämtlich verschwinden, lassen sich die Größen $\Gamma_{\sigma 4}^{\tau}$ folgendermaßen schreiben:¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{14}^1 &= 0 & \Gamma_{24}^1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{14}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{24}}{\partial x_1} \right) & \Gamma_{34}^1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{14}}{\partial x_3} - \frac{\partial g_{34}}{\partial x_1} \right) & \Gamma_{44}^1 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_1} \\ \Gamma_{14}^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{24}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{14}}{\partial x_2} \right) & \Gamma_{24}^2 &= 0 & \Gamma_{34}^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{24}}{\partial x_3} - \frac{\partial g_{34}}{\partial x_2} \right) & \Gamma_{44}^2 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_2} \\ \Gamma_{14}^3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{34}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{14}}{\partial x_3} \right) & \Gamma_{24}^3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{34}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{24}}{\partial x_3} \right) & \Gamma_{34}^3 &= 0 & \Gamma_{44}^3 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_3} \\ \Gamma_{14}^4 &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_1} & \Gamma_{24}^4 &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_2} & \Gamma_{34}^4 &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_3} & \Gamma_{44}^4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Setzt man hier die speziellen Werte der $g_{\mu\nu}$ aus (16) ein, so ergibt sich folgendes Schema:

$$\left. \begin{aligned} & 0 & i \frac{4kM}{3a} \omega & 0 & -\frac{kM}{3a} \omega^2 x \\ & -i \frac{4kM}{3a} \omega & 0 & 0 & -\frac{kM}{3a} \omega^2 y \\ & 0 & 0 & 0 & \frac{2kM}{3a} \omega^2 z \\ & \frac{kM}{3a} \omega^2 x & \frac{kM}{3a} \omega^2 y & -\frac{2kM}{3a} \omega^2 z & 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Aus (19) und (21) erhalten wir dann die Bewegungsgleichungen für unser spezielles Problem:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{8kM}{3a} \omega \dot{y} + \frac{kM}{3a} \omega^2 x, \\ \ddot{y} &= \frac{8kM}{3a} \omega \dot{x} + \frac{kM}{3a} \omega^2 y, \\ \ddot{z} &= -\frac{2kM}{3a} \omega^2 z. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

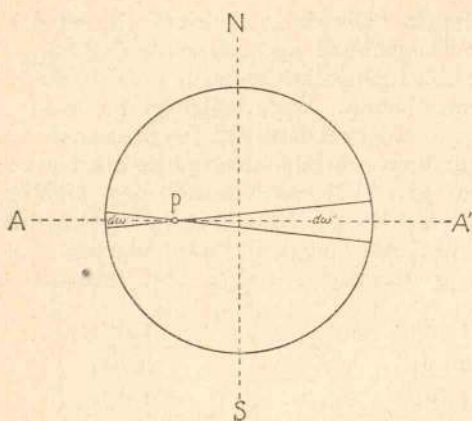
Die rechten Seiten der Gleichungen stellen die Komponenten der Kraft dar, welche unser Feld auf den Massenpunkt mit der Masse 1 ausübt. Wie man sieht, entspricht das erste Glied der X- und Y-Komponente vollständig der Corioliskraft, das zweite Glied der Zentri-

fugalkraft. Die dritte Gleichung liefert das im ersten Augenblick überraschende Ergebnis, daß diese „Zentrifugalkraft“ noch eine axiale Komponente besitzt. Ihr Auftreten im Felde der rotierenden Kugel läßt sich folgendermaßen aufklären: Vom ruhenden Beobachter aus betrachtet haben jene Flächenelemente der Hohlkugel, welche sich in der Nähe des Äquators befinden, größere Geschwindigkeit, und infolgedessen auch größere scheinbare (träge und gravitierende)

Masse als jene, die sich in der Umgebung der Pole befinden. Das Feld einer mit konstanter Flächendichte belegten rotierenden Hohlkugel entspricht also dem einer ruhenden Kugelschale, bei welcher die Flächendichte mit wachsendem Polabstand ϑ zunimmt. Daß im letzteren Falle Punkte, die außerhalb der Äquatorebene liegen, in sie hineingezogen werden, ist ohne weiteres verständlich.

(Man kann sich, nebenbei bemerkt, auch unschwer veranschaulichen, daß im Innern einer derart ungleichförmig mit Massendichte belegten Hohlkugel Kräfte auftreten, die der Zentrifugalkraft analog sind. In der Potentialtheorie kann man bekanntlich das Verschwinden des Kraftfeldes im Innern einer mit konstanter Flächendichte geladenen Hohlkugel so zeigen: Die Anziehungskraft der Flächenelemente, die von P aus betrachtet (vgl. Figur) unter dem Gesichtswinkel $d\omega$ gesehen werden, ist gleich und entgegengesetzt der Kraft, die von den Flächenelementen ausgeübt wird, die in dem zu $d\omega$ gehörigen Scheitelwinkel $d\omega'$ liegen. Das trifft natürlich bei ungleichförmiger Dichtebelegung nicht mehr zu. Sei AA' die Äquatorebene, dann liegen bei der in der Figur ge-

1) Man beachte, daß dieses Schema vollständig dem Sechservektor $\mathcal{M}$ des elektromagnetischen Feldes entspricht. Die Analogie zwischen Elektrodynamik und (angenäherter) Gravitationstheorie geht noch weiter, wenn man bedenkt, daß bei der näherungsweise Integration die Größen g_{14} , g_{24} , g_{34} , g_{44} sich aus der Dichte und Geschwindigkeit der Materie genau so berechnen, wie die Potentiale $\mathcal{A}_x$, $\mathcal{A}_y$, $\mathcal{A}_z$, Φ aus dem elektrischen Viererstrom, und ferner noch, daß in unserem Falle die rechten Seiten der Gl. (19) bis auf numerische Faktoren vollständig den Komponenten der ponderomotorischen Kraft $\mathcal{E} + [\mathbf{v}\mathcal{H}]$ entsprechen!



gezeichneten Lage des Punktes P innerhalb des Gesichtswinkels $d\omega$ Flächenelemente, die im Mittel näher zum Äquator liegen, daher spezifisch schwerer sind als die von $d\omega'$. Es resultiert also eine Kraft in der Richtung $A'A$, d. i. ein Zug senkrecht auf die Drehungsachse nach außen, die um so kleiner wird, je näher der Aufpunkt P gegen den Mittelpunkt rückt.)

Daß wir in der Natur bloß eine radiale, aber nie eine axiale Komponente der Zentrifugalkraft kennen gelernt haben, ließe sich nun mit den hier gefundenen Resultaten etwa dadurch in Einklang bringen, daß wir sagen: Die Approximation des Fixsternhimmels durch eine unendlich dünne Hohlkugel ist eben eine unrichtige. Aber selbst wenn wir unsere Approximation (etwa durch eine räumliche Massenverteilung) verbessern wollten, erhielten wir bei der hier verwendeten Integrationsmethode niemals ein Feld, das einem wirklichen Zentrifugalfelde vollkommen äquivalent ist. Ein solches Feld erhielten wir dann, wenn wir uns sämtliche im Außenraum befindliche Massen (Milchstraßensysteme usw.) rotierend denken und ihre Gravitationswirkung berechnen. Die Lösung für die retardierten Potentiale (Gl. (3)) setzt aber die Randbedingung $\lim \gamma_{\mu\nu} = 0$ für das räumlich Unendliche voraus. Wie nun Einstein in seiner kosmologischen Arbeit¹⁾ gezeigt hat, sind diese Randbedingungen angenähert erfüllt für ein Koordinatensystem, gegen das im Mittel die Fixsterne ruhen. Unsere Lösung (16) stellt demnach nicht das Feld einer „allein auf der Welt befindlichen“ rotierenden Hohlkugel dar, sondern das Feld im Innern einer solchen Hohlkugel, außerhalb welcher sich in noch viel größerer Entfernung vom Ursprung Massen befinden, die im Mittel gegen das gewählte Bezugssystem ruhen. Das durch die Gl. (16) dargestellte Feld ist also beispielsweise jenes, das im Orte des

1) Berl. Ber. 1917, S. 142.

Sonnenmittelpunktes bestünde, wenn statt der Sonne und aller Planeten eine große Hohlkugel, etwa vom Radius der Neptunbahn, vorhanden wäre, die mit der Winkelgeschwindigkeit ω gegen die Fixsterne rotiert. Befänden sich im Zentrum dieser Kugel auf einem Weltkörper, dessen eigenes Schwerfeld vernachlässigt werden kann und der mit der Winkelgeschwindigkeit ω' um dieselbe Achse rotiert, Beobachter, so würden sie Zentrifugal- und Corioliskräfte wahrnehmen, die sich aus der Wirkung ihrer eigenen Rotation und der Wirkung der rotierenden Hohlkugel zusammensetzen. Der Einfluß des Feldes der Hohlkugel auf das von der Eigenrotation herführende Zentrifugalfeld soll im folgenden studiert werden.

Wir führen zu diesem Zwecke ein Koordinatensystem ein, das mit dem mit der Winkelgeschwindigkeit ω' rotierenden Bezugskörper fest verbunden ist. Das geschieht mittels der Transformation:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \omega' \frac{x_4}{i} + \sin \omega' \frac{x_4}{i}; & z' &= z, \\ y' &= -x \sin \omega' \frac{x_4}{i} + y \cos \omega' \frac{x_4}{i}; & x_4' &= x_4. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Durch diese Transformation gehen die uns interessierenden Größen $g_{\mu 4}$ über in:

$$\left. \begin{aligned} g_{14}' &= -iy' \left[\omega' \left(1 + \frac{2kM}{3a} \right) - \omega \frac{4kM}{3a} \right], \\ g_{24}' &= ix' \left[\omega' \left(1 + \frac{2kM}{3a} \right) - \omega \frac{4kM}{3a} \right], \\ g_{44}' &= -1 + \frac{2kM}{a} \left[1 + \frac{5a^2\omega^2}{3} - \frac{\omega^2}{3} z^2 \right] + \\ &\quad + (x'^2 + y'^2) \left\{ \omega'^2 \left(1 + \frac{2kM}{a} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \omega \omega' \frac{4kM}{3a} + \omega^2 \frac{kM}{3a} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Bildet man aus diesen Größen gemäß (19) und (20) die Bewegungsgleichungen, so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= 2 \left[\omega' \left(1 + \frac{2kM}{a} \right) - \omega \frac{4kM}{3a} \right] \dot{y} + \\ &\quad + \left\{ \omega'^2 \left(1 + \frac{2kM}{a} \right) - \omega \omega' \frac{4kM}{3a} + \omega^2 \frac{kM}{3a} \right\} x, \\ \ddot{y} &= -2 \left[\omega' \left(1 + \frac{2kM}{a} \right) - \omega \frac{4kM}{3a} \right] \dot{x} + \\ &\quad + \left\{ \omega'^2 \left(1 + \frac{2kM}{a} \right) - \omega \omega' \frac{4kM}{3a} + \omega^2 \frac{kM}{3a} \right\} y, \\ \ddot{z} &= -\frac{2kM}{3a} \omega^2 z. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Setzt man hier $M = 0$, so erhält man das gewöhnliche Zentrifugal-Coriolisfeld:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega' \dot{y} + \omega'^2 x, \\ \ddot{y} &= -2\omega' \dot{x} + \omega'^2 y, \\ \ddot{z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Setzt man $M \neq 0$, $\omega = 0$, so wird:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\omega' \left(1 + \frac{2kM}{a}\right) \dot{y} + \omega'^2 \left(1 + \frac{2kM}{a}\right) x, \\ \ddot{y} &= -2\omega' \left(1 + \frac{2kM}{a}\right) \dot{x} + \omega'^2 \left(1 + \frac{2kM}{a}\right) y, \\ \ddot{z} &= 0,\end{aligned}\quad (27)$$

woraus man ersehen kann, wie die Trägheitswirkungen durch die Anwesenheit der umgebenden Massen M beeinflusst werden. Zentrifugal- und Corioliskraft multiplizieren sich mit dem Faktor $\left(1 + \frac{2kM}{a}\right)$.

Aus den Gl. (25) selbst ersieht man schließlich, daß die Wirkung einer gleichsinnigen Rotation der Hohlkugel in einer Verkleinerung der Zentrifugal- und Corioliskraft besteht. Setzt man

$$\omega' = \omega \frac{4kM}{3(2kM + a)}, \quad (28)$$

so verschwindet die Corioliskraft. Man könnte die Größe $\frac{4kM}{3(2kM + a)}$ als den Mitführungskoeffizienten der Hohlkugel in bezug auf die Corioliskraft bezeichnen. Die Zentrifugalkraft kann nicht zum Verschwinden gebracht werden, da die Ausdrücke in den geschlungenen Klammern Gl. (25) gleich Null gesetzt keine reellen Wurzeln für ω liefern. Im „ruhenden“ Bezugssystem ($\omega' = 0$) war der Wert der Zentrifugalkraft

$$\frac{kM}{3a} \omega^2 \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Läßt man nun das Bezugssystem gleichsinnig mit der Hohlkugel mitrotieren, so wird zunächst für kleine Werte von ω' die Zentrifugalkraft abnehmen und erreicht ein Minimum, wenn $\frac{\omega'}{\omega}$ gleich dem halben Wert des „Mitführungskoeffizienten“ geworden ist¹⁾. Von da ab wächst sie wieder und erreicht, sobald $\frac{\omega'}{\omega}$ gleich dem Mitführungskoeffizienten wird, wieder den ursprünglichen Wert, den sie für $\omega' = 0$ hatte. Mit wachsendem ω' steigt sie dann weiter und erreicht für große ω' einen Betrag, der sich von dem Werte, den sie ohne Anwesenheit der Hohlkugel hätte (nämlich $\omega'^2 \sqrt{x^2 + y^2}$), nur wenig unterscheidet, da ja unseren Voraussetzungen gemäß $\frac{2kM}{a}$ klein gegen 1 ist.

Es scheint im ersten Augenblicke dem Wesen einer Relativitätstheorie zu widersprechen,

1) Davon kann man sich durch Differentiation der Klammergröße sofort überzeugen.

daß die rechten Seiten der Bewegungsgleichungen (25) nicht bloß von der Differenz $\omega - \omega'$ abhängen. Man darf aber nicht vergessen, daß wir es bei dem hier behandelten Problem nicht nur mit zwei Körpern: Massenpunkt und Hohlkugel zu tun haben, sondern daß vielmehr durch die Randbedingungen $\lim \gamma_{\mu\nu} = 0$ als drittes feldbestimmendes Element noch weiter entfernte Massen hineingebracht werden, welche gegenüber dem zuerst gewählten Bezugssysteme ruhen.

Zusammenfassung.

Es wird an einem konkreten Beispiel gezeigt, daß im (Einsteinschen) Gravitationsfelde ferner rotierender Massen Kräfte auftreten, die der Zentrifugal- bzw. Corioliskraft analog sind. Die dem gerechneten Spezialfalle anhaftenden Eigenheiten werden durchdiskutiert.

Wien, Dezember 1917, Institut für theoret. Physik der Universität.

(Eingegangen 21. Dezember 1917.)

Diffusion und Statistik.

Von Agnes Podjed.

Seit den Arbeiten von Einstein und Smoluchowski kennen wir den Zusammenhang zwischen Diffusion, Brownscher Bewegung und den Konzentrationsschwankungen in einer Lösung. Die scheinbar regellosen Konzentrationsänderungen sind gewissen statistisch abgeleiteten Gesetzen unterworfen und diese sind nur eine andere Form des bekannten Diffusionsgesetzes. In einer seiner letzten Abhandlungen¹⁾ findet Smoluchowski eine Relation für die Geschwindigkeit einer Konzentrationsänderung, die nicht nur vom physikalischen Standpunkte aus von Interesse zu sein scheint.

Es sei v ein abgegrenztes Flüssigkeitsvolumen und ν sei die durchschnittlich auf das Volumen v entfallende Teilchenzahl. In aufeinanderfolgenden Zeitabschnitten betrachtet wird das Volumen v verschiedene, von ν abweichende Teilchenzahlen aufweisen. Eine bestimmte Teilchenzahl n wird im allgemeinen öfters vorkommen und von verschiedenen Zahlen m gefolgt werden. Das arithmetische Mittel aus allen Differenzen $m - n$ bei festgehaltenem n , wird als die mitt-

1) Sitzungsber. d. kais. Akademie d. Wissenschaften in Wien. Mathem.-nat. Klasse; Bd. 123, Abt. IIa, Dezember 1914. — Eine kürzere Darstellung gibt v. Smoluchowski in seinen „Drei Vorträge über Diffusion usw.“, diese Zeitschr. 17, 557, 1916, 1. Vortrag, § 5.

lere Änderung der Zahl n , $\bar{A}_n$ bezeichnet. Der Satz von Smoluchowski lautet:

$$\bar{A}_n = (\nu - n)P, \quad (1)$$

wobei P ein Proportionalitätsfaktor ist. P wird gleich 1, wenn die Zeitabschnitte zwischen den einzelnen Zählungen so lang sind, daß die Zustände als voneinander unabhängig angesehen werden können.

Diese Formel zeigt deutlich die ausgleichende Wirkung der Diffusion und doch ist bei ihrer Herleitung die physikalische Seite des Vorganges gar nicht berücksichtigt worden. Sie ergab sich aus abzählenden, statistischen Betrachtungen über die stationäre Reihe der Konzentrationsschwankungen und vom statistischen Standpunkt aufgefaßt sagt sie aus, daß die mittlere Änderung einer bestimmten Zahl der Zahlenfolge der Abweichung dieser Zahl vom Mittel proportional ist.

Es wäre nun von Interesse zu ermitteln, ob das Diffusionsgesetz in dieser, von der Erscheinung, die man gewöhnlich Diffusion nennt, so ganz unabhängigen Form auch für eine beliebige natürliche statistische Zahlenreihe gilt, die sich nach der Gaußschen Verteilungsfunktion um einen Mittelwert ν gruppiert. Ich will meine Untersuchungen an einer Reihe anstellen, von der es im vornhinein bekannt ist, daß sie der genannten Bedingung genügt. Es ist dies das Geschlechtsverhältnis der Geborenen.

Die nachstehende Zahlenreihe ist der preussischen Statistik¹⁾ entnommen. Jede Zahl bedeutet die in der Rheinprovinz in den einzelnen Monaten auf 1000 Geburten entfallenden Mädchen Geburten.

Tabelle I.

488, 474, 488, 491, 482, 490, 495, 497, 484, 483, 490, 485, 492, 485, 487, 484, 480, 490, 480, 486, 489, 490, 484, 484, 483, 479, 485, 492, 483, 488, 488, 484, 483, 480, 486, 484, 491, 490, 484, 492, 479, 487, 486, 486, 485, 489, 482, 486, 492, 490, 489, 484, 483, 482, 494, 482, 484, 485, 486, 489, 485, 483, 494, 492, 477, 482, 482, 487, 488, 485, 492, 484, 486, 486, 488, 491, 495, 492, 486, 485, 484, 483, 491, 493, 491, 486, 483, 486, 483, 479, 493, 482, 486, 492, 495, 488, 490, 494, 491, 487, 492, 488, 492, 488, 487, 487, 484, 490, 489, 490, 484, 493, 495, 490, 487, 484, 488, 488, 480, 495, 487, 498, 490, 490, 480, 488, 482, 480, 493, 495, 483, 482, 494, 493, 491, 488, 487, 483, 489, 485, 493, 487, 489, 491, 490, 485, 480, 493, 483, 486, 483, 478, 495, 487, 488, 488, 486, 489, 489, 480, 486, 488, 497, 480, 489, 493, 486, 486, 490, 489, 484, 485, 490, 486, 484, 485, 491, 488, 492, 491, 488, 486, 487, 498, 483, 486, 489, 483, 489, 487, 486, 489, 492, 488, 490, 486, 490, 495, 483, 492, 492, 486, 487, 488, 487, 484, 484, 487, 486, 488, 483, 487, 486, 490, 491, 492, 489, 488, 492, 487, 484, 489, 484, 486, 483, 492, 485, 494, 491, 495, 484, 490, 489, 487, 482, 490, 492, 488, 486, 485, 487, 492, 490, 481, 490, 487, 493, 485, 483, 482, 485, 490, 490, 490, 483, 486, 487, 485, 485, 484, 487, 491, 486, 495, 491, 481, 489, 484, 489, 490, 481, 485, 483, 488, 493, 490, 496, 486, 490, 484, 493, 486, 480, 491, 489,

1) Jahrgang 1880—1912.

483, 488, 489, 487, 484, 487, 491, 487, 483, 481, 488, 480, 481, 481, 488, 484, 492, 485, 485, 483, 491, 487, 489, 480, 485, 484, 493, 484, 486, 490, 483, 491, 486, 482, 481, 490, 489, 487, 496, 490, 486, 485, 488, 486, 487, 484, 486, 480, 494, 489, 488, 487, 482, 479, 486, 494, 493, 487, 481, 488, 488, 491, 488, 486, 488, 488, 487, 489, 482, 494, 492, 486, 491, 494, 484, 485, 483, 490, 492, 486, 485, 487, 483, 488, 481, 493, 483, 486, 480, 479, 488, 484, 481, 489, 483, 489, 489, 484, 489, 480, 486, 480, 482, 487, 482, 485, 488, 487.

Greifen wir eine beliebige Zahl n der Tabelle I heraus, so wird sie im allgemeinen in der Tabelle noch öfter vorkommen, und zwar mit der durch die Verteilungsfunktion bestimmten Häufigkeit. Suchen wir diese bestimmte Zahl in der Tabelle I überall auf, und bilden wir die Differenz mit der nächstfolgenden. Das arithmetische Mittel dieser Differenzen nennen wir den mittleren Sprung der Zahl n . Dieser Ausdruck ist nun offenbar nach demselben Bildungsgesetz entstanden, wie im Falle der Konzentrationsschwankungen die Geschwindigkeit der Konzentrationsänderung. Wir wollen ihn deshalb, in Übereinstimmung mit früher, $\bar{A}_n$ nennen.

Um den mittleren Sprung am bequemsten zu berechnen, bedienen wir uns der Tabelle II. Sie hat zwei Eingänge, die beide durch die Zahlen der Tabelle I gebildet sind, und enthält die Häufigkeit mit der ein gewisses Zahlenpaar in der Tabelle I vorkommt. Es sei n eine Zahl des vertikalen Eingangs, m_h bezeichne jede Zahl des horizontalen Einganges, die auf n folgt, und $\psi(n)$ sei die empirisch festgestellte Häufigkeit der Zahl n , dann ist

$$\bar{A}_n = \frac{\sum_h (m_h - n)}{\psi(n)},$$

wobei m_h nur diejenigen Werte durchläuft, die der Zahl n in der Tabelle I wirklich folgen. Ich habe auf diese Weise das $\bar{A}_n$ für jede der Zahlen n gebildet. Die Resultate sind in der ersten Rubrik der Tabelle III ersichtlich. Durch Einsetzen der so gewonnenen $\bar{A}_n$ -Werte in die Smoluchowskische Formel (1), wobei aus Tabelle I $\nu = 487$ berechnet wurde, bekam ich eine Reihe von Werten für den Proportionalitätsfaktor P . Der Theorie nach sollte in unserem Falle wenn wir annehmen, daß die Mädchen geburten in den einzelnen Monaten unabhängig voneinander erfolgen, $P = 1$ sein, denn es ist dann:

$$\sum_h n = n\psi(n)$$

$$\sum_h m_h = \nu\psi(n).$$

Ich bekam als arithmetisches Mittel der verschiedenen, nur sehr wenig voneinander abweichenden empirisch berechneten P -Werte, die

Tabelle II.

	474	477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498
474													1										
477							1																
478																				1			
479										1	1	1	1					1					
480				1		1	1			1	4		1	1	1	1		2	1	1			
481						1				1			3	2	3			1					
482				1	1	1	1		1	2	1	2		1	2				3				
483			1	2	1	1	3				5	1	4	3	2	3	2		1				
484				1	1			5	2	4	4	3	1	3	2	1	2	3					
485					1		1	5	3	2	1	3	2		2	1	3	1	1				
486				4		1	4	2	5	3	4	4	5	5	1	2		1	1				
487						1	3	3	7	1	4	1	3	3		2	2	1			1		2
488	1				2	1	1	1	3	1	5	6	5	1	3	3	3	1					1
489					3	1	1	3	5	2	1	4	2	2	3		1	1					
490					2	2		2	4	2	3	2	1	5	4	1	2		1	2	1		
491						1	1				3	3	4	1	1		1	1	1	2			
492		1		1				1	1	3	4	1	4	1	2	1	1			1			
493							1	2	1	1	2	2			1	2				2			
494							1		1					1		2	2	2					
495								2	1			2	1		1	1	1					1	
496											1				1								
497				1					1														
498								1								1							

Tabelle III.

	474	477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491
$\bar{A}_n$ emp. ber.	+14	+5	+17	+9	+7,7	+7,2	+4,6	+3,5	+2,8	+1,3	+0,7	+0,1	-0,9	-3,2	-2,5	-2,4

	492	493	494	495	496	497	498
$\bar{A}_n$ emp. ber.	-5,2	-5,5	-4,3	-6,8	-8	-15	-11,5

	474	477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491
$\bar{\Delta}_n$ theoret. ber.	+9,9	+9	+8,1	+7,2	+6,3	+5,4	+4,5	+3,6	+2,7	+1,8	+0,9	0	-0,9	-1,8	-2,7	-3,6

	492	493	494	495	496	497	498
$\bar{\Delta}_n$ theoret. ber.	-4,5	-5,4	-6,3	-7,2	-8,1	-9	-9,9

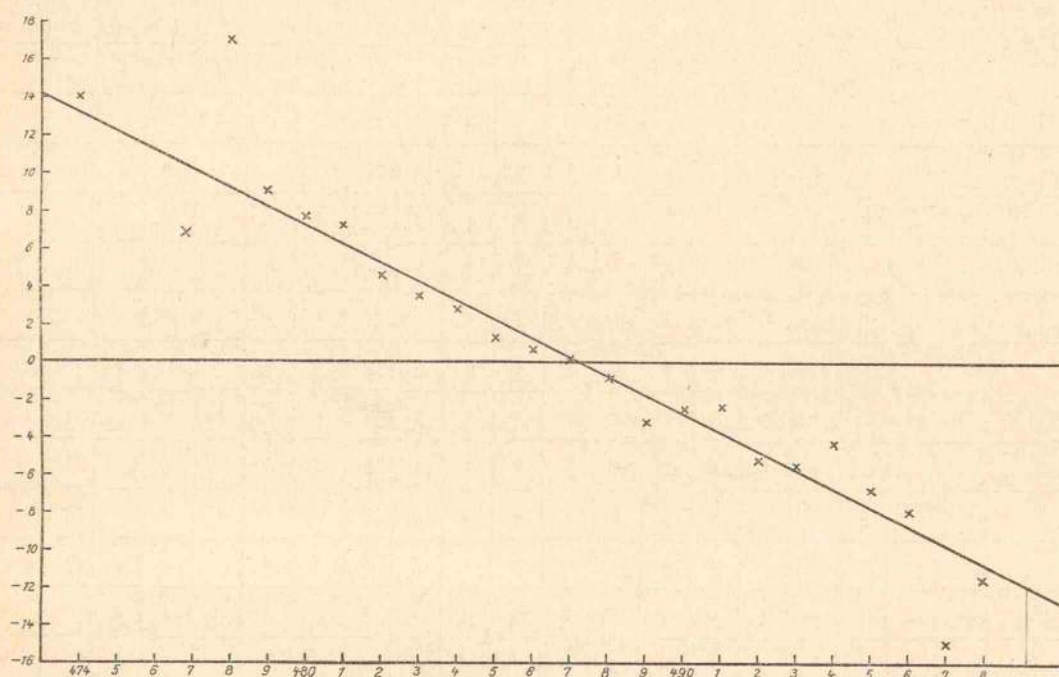


Fig. 1.

Zahl 0,9. Und nun konnte ich, nach Einsetzung dieses Proportionalitätsfaktors, die $\bar{\Delta}_n$ direkt aus der Smoluchowskischen Formel (1) theoretisch berechnen. Die zweite Rubrik der Tabelle III enthält die so gewonnenen $\bar{\Delta}_n$ -Werte. Daß die Übereinstimmung der beiden Wertereihen nicht noch besser ist, muß man wohl dem verhältnismäßig geringen statistischen Material zuschreiben. Im Vorzeichen stimmt die Sache ganz genau, und ob Proportionalität wirklich stattfindet, können wir uns auf graphischem Wege am einfachsten überzeugen: Wenn wir unsere Ausgangszahlen als Abszissen, die dazugehörigen $\bar{\Delta}_n$ als Ordinaten auftragen, müßten, nach der Smoluchowskischen Formel, die Punkte auf einer Geraden liegen. In Fig. 1 sieht man, daß die Punkte eine Gerade approximieren.

Das ausgleichende Wirken der Diffusion tritt an diesem rein statistischen Vorgang deutlich

hervor. Auf unwahrscheinliche, vom Mittel stark abweichende Werte folgt fast immer ein wahrscheinlicherer, dem Mittelwert näherer Wert. Das gibt dem Vorgang den Charakter der Einseitigkeit, Irreversibilität. Die Diffusion galt aber auch immer als Typus eines irreversiblen Vorganges, bis Boltzmanns Untersuchungen über die Gültigkeitsgrenzen des zweiten Hauptsatzes und seine Beziehungen zur kinetischen Gastheorie auf die Sache ein neues Licht warfen. Es ist ja jetzt allgemein bekannt, daß die Diffusion nicht irreversibel ist, daß nur die Wahrscheinlichkeit eines so ausgezeichneten Zustandes, wie es meistens der Anfangszustand ist, verschwindend klein ist. Das von mir behandelte Beispiel ist eine gute Illustration für die Boltzmannsche Auffassung der Irreversibilität. In Tabelle IV habe ich zu jeder Zahl die Häufigkeit eingetragen, mit der ihr eine größere und eine kleinere Zahl als sie selbst folgt. Es ist ersichtlich, daß einer stark unter dem Mittel liegen-

Tabelle IV.

	474	477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494
Häufigkeit der pos. Zuwächse	1	1	1	5	15	10	12	21	23	14	23	14	12	5	7	5	1	2	0

	495	496	497	498
Häufigkeit der pos. Zuwächse	1	0	0	0

	474	477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494
Häufigkeit der neg. Zuwächse	0	0	0	0	1	0	3	8	7	10	16	19	21	22	23	14	20	12	9

	495	496	497	498
Häufigkeit der neg. Zuwächse	9	2	2	2

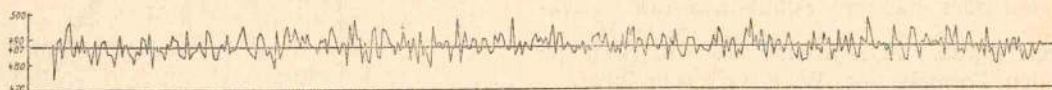


Fig. 2.

den Zahl unvergleichlich öfter eine größere, als eine kleinere Zahl folgt, und umgekehrt bei das Mittel überschreitenden Zahlen. Noch besser tritt die Reversibilität dieses Analogons der Diffusion an der Zickzack-Kurve (Fig. 2), die der Boltzmannschen H -Kurve entspricht¹⁾, hervor. Die einzelnen Monate sind als Abszissen, die Anzahl der Mädchengeburten in jedem Monat als Ordinaten aufgetragen. Von einer gewissen Höhe der Ordinaten an ist immer ein Abstieg zu vermerken, also scheinbare Irreversibilität, und doch wiederholen sich während längerer Zeitabschnitte immer wieder beträchtliche Abweichungen vom Mittel. Es erfolgt dann aber sofort eine Abnahme.

Dieser Zusammenhang zwischen Diffusion und den Schwankungen einer stationären, statistischen Zahlenreihe scheint also sichergestellt und wir sehen, daß die Diffusion eine Erscheinung ist, die nicht nur für den Physiker von großem Interesse ist, sondern auch im sozialen Leben eine bedeutende Rolle spielt.

1) Eine ähnliche Analogie zur Boltzmannschen H -Kurve findet sich bei P. u. T. Ehrenfest, diese Zeitschr. 8, 311, 1907.

(Eingegangen 14. Dezember 1917.)

Zur Theorie der Versuche von Kaufmann und Bucherer über β -Strahlen.

Von R. Malmström.

In einer früheren Arbeit¹⁾ wurde durch Kombination der Elementargesetze von Lorentz und Riemann eine Theorie aufgestellt, welche den scheinbaren Widerspruch zwischen den Versuchsergebnissen von Fizeau und Michelson aufhebt. Die auf diese Weise aufgestellte Formel für die gegenseitige Wirkung zweier Elektronen steht aber nicht im Einklang mit den Versuchen über β -Strahlen. Für die x -Komponente der von dem Elektron e auf das Elektron e' ausgeübten Kraft erhielten wir den Ausdruck

$$\begin{aligned} e'F_x = & -\frac{\partial}{\partial x'} \left[\frac{ee'}{r} \left(1 + \frac{u^2}{2c^2} \right) \right] \\ & + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v_x'} \left[\frac{ee'}{r} \left(1 + \frac{u^2}{2c^2} \right) \right] \\ & + \frac{ee'}{r} \frac{[a_r] \cos(r, x) - [a_x]}{c^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

wobei

$$u^2 = (v_x' - v_x)^2 + (v_y' - v_y)^2 + (v_z' - v_z)^2,$$

und die Formel für ein mit dem Elektron e bewegliches Koordinatensystem gilt, oder ausgeführt

1) Diese Zeitschr. 18, 454, 1917.

$$e' F_x = \frac{ee'}{r^2} \cos(r, x) \left[1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{v'^2}{2c^2} - \frac{v_x' v_x + v_y' v_y + v_z' v_z}{c^2} \right] - \frac{ee' (v_x' - v_x)(v_r' - v_r)}{r^2 c^2} + \frac{ee' a_x' - a_x}{r c^2} + \frac{ee' [a_r] \cos(r, x) - [a_x]}{r c^2} \quad (2)$$

Um die Theorie in Übereinstimmung zu bringen mit den Versuchsergebnissen über β -Strahlen, könnte man entweder so verfahren, daß man in der Formel (1) $1 + \frac{u^2}{2c^2}$ durch eine andere

Funktion der Relativgeschwindigkeit, $\varphi\left(\frac{u^2}{c^2}\right)$ ersetzen würde, welche in erster Annäherung gleich $1 + \frac{u^2}{2c^2}$ wäre. Oder indem man in die Formel

(2) zwei oder mehrere Funktionen von $\frac{u^2}{c^2}$ einführen würde. Man könnte z. B. in Analogie mit den Formeln von W. Ritz¹⁾ schreiben

$$e' F_x = \frac{ee'}{r^2} \varphi\left(\frac{u^2}{c^2}\right) \cos(r, x) - \frac{ee' (v_x' - v_x)(v_r' - v_r)}{r^2 c^2} \psi\left(\frac{u^2}{c^2}\right) + \frac{ee' a_x' - a_x}{r c^2} + \frac{ee' [a_r] \cos(r, x) - [a_x]}{r c^2} \quad (3)$$

In dem dritten Gliede könnte dann noch a_x' fortgelassen werden und, wenn nötig, das Glied noch mit einer Funktion $\chi\left(\frac{u^2}{c^2}\right)$ multipliziert werden. Das erstere ist, wenn durchführbar, aus mehreren Gründen vorzuziehen.

Bei meinen bis jetzt erfolglosen Versuchen, solche Funktionen der Relativgeschwindigkeit aufzustellen, welche sowohl die Versuche von Bucherer als die von Kaufmann richtig

$$e' F_x = \frac{ee'}{r^2} \cos(r, x) \left[\sqrt{1 + \frac{v'^2 + w^2 + 2v'w \cos(v', w)}{c^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{v^2 + w^2 + 2vw \cos(v, w)}{c^2}} - \frac{(v_x' + w_x)(v_x + w_x) + (v_y' + w_y)(v_y + w_y) + (v_z' + w_z)(v_z + w_z)}{c^2} \right] - \frac{ee' (v_x' - v_x)(v_r' - v_r)}{r^2 c^2}$$

Wenn bei den Versuchen über β -Strahlen e ein Leitungselektron ist, so ist tatsächlich

$$a_x, a_y, a_z, a_r = 0.$$

Wenn man das Glied mit a_x' beibehält, so wird es mit der Ablenkung multipliziert und das ganze ist, da wir mit kleinen Ablenkungen rechnen werden, von zweiter Ordnung und kann vernachlässigt werden.

1) W. Ritz, Ges. Werke, S. 380.

wiedergeben, habe ich gefunden, daß man durch eine kleine Veränderung des Riemannschen Elementargesetzes, wobei allerdings die absoluten Geschwindigkeiten eingeführt werden und das Hamiltonsche Prinzip aufgegeben wird, zu Formeln gelangen kann, welche auf die genannten Versuche angewandt, denselben Wert für $\frac{e}{m}$ geben wie die Lorentzschen, und zwar ohne daß man eine von der Geschwindigkeit abhängige und sich deformierende Masse, sowie die Unmöglichkeit einer Geschwindigkeit größer als Lichtgeschwindigkeit anzunehmen braucht. Hierüber möchte ich eine kurze Mitteilung machen.

Wenn wir in der Formel (2) den Ausdruck

$$\frac{ee'}{r^2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2 + v'^2}{c^2} \right)$$

mit

$$\frac{e \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}} \cdot e' \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}}{r^2}$$

ersetzen, wobei v und v' jetzt die absoluten Geschwindigkeiten bedeuten sollen, so sind die Ausdrücke bis auf Glieder zweiter Ordnung in $\frac{v}{c}$ gleich. Nach dem neuen Gesetz hängt also bei kleinen Absolutgeschwindigkeiten die gegenseitige Wirkung zweier Elektronen bis auf Glieder zweiter Ordnung nur von ihrer Relativgeschwindigkeit ab und das negative Resultat des Versuchs von Trouton und Noble wird bestätigt¹⁾.

Denken wir uns jetzt, daß die Elektronen sich mit den Geschwindigkeiten v und v' relativ zu einem Koordinatensystem bewegen, welches wiederum die absolute Geschwindigkeit (= Erdgeschwindigkeit) w hat, so wird, falls die Beschleunigungen verschwinden, die x -Komponente der Kraft

Da $\frac{w}{c} = \frac{1}{10000}$ und $\frac{v}{c}$ noch viel kleiner ist, können wir die Ausdrücke nach Potenzen von

1) Ob man jetzt, da die Absolutgeschwindigkeiten eingeführt sind, eine endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit für die von der Lage und der absoluten Geschwindigkeit abhängigen Kraftwirkungen annehmen und hiermit ein anschauliches Bild, ähnlich z. B. demjenigen von J. J. Thomson in „Elektrizität und Materie“ verbinden könnte, bleibe dahingestellt. Für den jetzigen Zweck ist es nicht nötig.

$\frac{w_x}{c}, \frac{v_x}{c}$ usw. entwickeln und nur die Glieder erster Ordnung beibehalten. Die Glieder zweiter Ordnung von dem zweiten Gliede in Klammern werden außerdem, als von v' unabhängig, durch die Wirkung einer Kompensationsladung aufgehoben. Es wird dann der Klammerausdruck

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}} + \frac{v'w \cos(v', w)}{c^2 \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} \\ & - \frac{v'_x v_x + v'_y v_y + v'_z v_z + v'_x w_x + v'_y w_y + v'_z w_z}{c^2} \\ & = \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}} - \frac{v'_x v_x + v'_y v_y + v'_z v_z}{c^2} \\ & - \frac{v'w \cos(v', w)}{c^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} \right). \end{aligned}$$

Bei der Berechnung der Wirkung eines Stromes auf das Elektron e' fallen das erste und dritte Glied fort, da die Ladung des Stromleiters $= 0$ ist. Umgekehrt fällt das mittlere Glied fort, wenn es sich um die Wirkung eines relativ zum Koordinatensystem ruhenden Elektrons e handelt, und nur das erste und dritte Glied bleiben stehen. Das dritte Glied ist, wenn $w =$ Erdgeschwindigkeit, von der Größenordnung 0,0001 und steht immer neben

$$\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}.$$

Da eine so große Genauigkeit bei Messungen über Radiumstrahlen nicht erreicht worden ist, können wir auch dieses Glied vernachlässigen. Übrigens werden Vernachlässigungen derselben Größenordnung bei der Theorie von Lorentz gemacht. Wir erhalten so für die x -Komponente der Kraftwirkung

$$\begin{aligned} e'F_x = & \frac{ee'}{r^2} \left[\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}} \right. \\ & \left. - \frac{v'_x v_x + v'_y v_y + v'_z v_z}{c^2} \right] \cos(r, x) \\ & - \frac{ee' (v'_x - v_x)(v'_y - v_y)}{r^2 c^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Bei den Versuchen von Kaufmann und Bucherer bewegt sich das Elektron in homogenen magnetischen und elektrischen Feldern. Ein homogenes magnetisches Feld erhalten wir, in dem wir uns eine unendliche Ebene (XY) von Flächenströmen konstanter Dichte und Richtung (Y) durchflossen denken. Es wird dann $v_x = v_z = 0$. Bezeichnen wir die Flächendichte der Leitungselektronen mit ρ , ihre Geschwindigkeiten mit v_{y1} und v_{y2} , so ist die Flächendichte des Stromes

$$i_y = \rho (v_{y1} - v_{y2}).$$

Wir haben dann in obigen Formeln e durch $\rho dx dy$ bzw. $-\rho dx dy$, v_y durch bzw. v_{y1} und v_{y2} zu ersetzen und über die xy -Ebene zu integrieren. Das Resultat wird, wenn noch elektromagnetische Einheiten eingeführt werden,

$$\begin{aligned} e'F_x &= 0, \\ e'F_y &= e'v'_z 2\pi i_y = e'v'_z H_x, \\ e'F_z &= -e'v'_y 2\pi i_y = -e'v'_y H_x. \end{aligned} \quad (5)$$

Wenn die XY-Ebene mit positiver Elektrizität von konstanter Dichte belegt ist, so entsteht ein homogenes elektrisches Feld mit der Feldstärke E_z und die auf das Elektron wirkenden Kräfte werden

$$\begin{aligned} e'F_x &= -\frac{e'v'_x v'_z}{c^2} E_z, \\ e'F_y &= -\frac{e'v'_y v'_z}{c^2} E_z, \\ e'F_z &= -\frac{e'v'^2_z}{c^2} E_z + e'E_z \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Ist wieder die YZ-Ebene belegt, so hat das Feld die Richtung der X-Achse und die Kraftkomponenten werden

$$\begin{aligned} e'F_x &= e'E_x \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}} - e'E_x \frac{v'_x v'_z}{c^2}, \\ e'F_y &= -e'E_x \frac{v'_x v'_y}{c^2}, \\ e'F_z &= -e'E_x \frac{v'_x v'_z}{c^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Bei den Versuchen von Bucherer ist das magnetische Feld senkrecht zum elektrischen. Wir erhalten die Kraftkomponenten durch Addition der Formeln (5) und (6). Die Elektronen bewegen sich auswärts von der Mitte eines kreisförmigen Kondensators (XY-Ebene). Nur diejenigen können heraustreten, deren Geschwindigkeitskomponente senkrecht zu den Kondensatorplatten (z -Richtung) gleich Null ist. Aus den Ausdrücken von F_z in (5) und (6) geht hervor, daß v'_z gleich Null bleibt, wenn es von Anfang gleich Null war und

$$v'_y H_x = E_z \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}.$$

Da die X- und Y-Komponenten der Kraft v'_z enthalten, so bleiben auch diese gleich Null und das Elektron bewegt sich geradlinig.

Wird der Winkel zwischen x -Achse und Geschwindigkeitsrichtung mit α bezeichnet und $\frac{v'}{c} = \beta'$ gesetzt, so erhält man

$$E_z \sqrt{1 + \beta'^2} = c H_x \beta' \sin \alpha. \quad (8)$$

Nach Lorentz hätten wir, wenn wir für diesen Fall $\frac{v'}{c}$ mit β bezeichnen,

$$E_z = cH_x \beta \sin \alpha. \quad (9)$$

Führen wir diesen Wert in (8) hinein, so finden wir

$$\beta = \frac{\beta'}{\sqrt{1 + \beta'^2}}$$

oder

$$\beta' = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (10)$$

Da nach Lorentz β nicht größer als 1 werden kann, können nach (9) nur diejenigen Elektronen heraustreten, für welche

$$\sin \alpha \geq \frac{E_z}{H_x \cdot c}.$$

Nach der Formel (10) wird für diesen Winkel $\beta' = \infty$, woraus folgt, daß auch hier nur diejenigen Elektronen heraustreten können für die $\sin \alpha \geq \frac{E_z}{H_x \cdot c}$.

Wenn die Elektronen herausgetreten sind, wirkt nur das magnetische Feld. Bucherer hat nur für den Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$ die Ablenkung beobachtet. Nach (5) erhalten wir die Ablenkung durch Integration der Formel

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -e' v_y' H_x$$

oder angenähert mit Einführung der Zentrifugalkraft

$$\frac{m v_y'^2}{r} = e' v_y' H_x,$$

woraus

$$\frac{e'}{m} = \frac{v_y'}{r H_x} = \frac{\beta' c}{r H_x}, \quad (11)$$

da für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $v_y' = v'$ ist.

Nach Lorentz hätte man

$$\frac{e}{m} = \frac{c \beta}{r H_x}$$

und hier muß

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

eingeführt werden, also

$$\frac{e}{m_0} = \frac{1}{r H_x} \frac{c \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Führen wir in unsere Formel (11) den Wert für β' aus (10) ein, so erhalten wir dieselbe

Formel und beide geben somit denselben Wert für $\frac{e}{m}$.

Bei den Versuchen von Kaufmann sind die beiden Felder gleichgerichtet (X-Achse). Die Elektronen werden senkrecht zur Feldrichtung herausgeschleudert. Wählen wir hierzu die Z-Richtung, so können wir mit genügender Annäherung Produkte und Quadrate von v_x' und v_y' vernachlässigen und $v_z' = v' = \text{konst.}$ setzen. Durch Kombination der Gleichungen (5) und (7) erhält man für die Bestimmung der Ablenkungen

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = e' E_x \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}} = e' E_x \sqrt{1 + \beta'^2},$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = e' H_x v_z' = e' c H_x \beta',$$

oder da

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dz^2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = \frac{d^2 x}{dz^2} c^2 \beta'^2,$$

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = \frac{e' E_x}{m c^2} \frac{\sqrt{1 + \beta'^2}}{\beta'^2},$$

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{e' H_x}{m c} \frac{1}{\beta'}.$$

Mit den bei dem Versuch herrschenden Bedingungen erhält man, wenn a und b zwei Apparatkonstante bedeuten,

$$x = a \frac{e'}{m} \frac{\sqrt{1 + \beta'^2}}{\beta'^2}, \quad (12)$$

$$y = b \frac{e'}{m} \frac{1}{\beta'}.$$

Nach Lorentz hätten wir erhalten

$$x = a \frac{e}{m} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta^2}, \quad (13)$$

$$y = b \frac{e}{m} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta}.$$

Durch Division der beiden Formeln (13) erhalten wir eine Formel zur Berechnung von β , die unabhängig ist von jeder Annahme über die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit¹⁾. Diese lautet:

$$\beta = \frac{y}{x} \frac{a}{b}.$$

Die Formeln (12) geben wieder

$$\frac{\beta'}{\sqrt{1 + \beta'^2}} = \frac{y a}{x b}$$

und es wird wieder

¹⁾ Hierauf hat Planck aufmerksam gemacht, diese Zeitschr. 7, 753, 1906.

$$\beta' = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Führt man diesen Wert in die Formeln (12) ein, so ergeben sich zur Berechnung von $\frac{e'}{m}$ dieselben Formeln wie (13).

(Eingegangen 30. November 1917.)

Über die mathematische Auswertung der Debye - Scherrerschen Röntgen - Spektrogramme¹⁾.

Von A. Johnsen und O. Toeplitz.

§ 1. Vergleich der Debye-Scherrerschen Spektrogrammetrie mit der Braggschen Spektrometrie.

Wie das Braggsche und das Debye-Scherrersche Verfahren zur Auffindung der Kristallstrukturen beide von demselben Laueschen Standpunkte ausgehen, so haben sie auch in ihrem Verlauf gewisse gemeinsame Wege und Stationen.

Beide Methoden finden zunächst anstatt des regelmäßigen Punktsystems $\mathcal{Q}$ der Atomzentren oder Atome des Kristalls nur ein einziges Punktgitter I' ; dieses ist obendrein in beiden Fällen meist nicht identisch mit den einander kongruenten q -Atomgittern I , welche parallel ineinandergestellt, das Punktsystem $\mathcal{Q}$ bilden. Die Beziehungen zwischen I' und I werden klarer erscheinen, wenn wir zuvor die Ermittlung von I' verfolgt haben.

Braggs messen an natürlichen oder orientiert angeschliffenen Kristallflächen ($h_1 h_2 h_3$) die Glanzwinkel $\frac{\vartheta}{2}$ der Interferenzmaxima, deren Gangunterschiede gleich einer ganzen Zahl n von Wellenlängen λ sind. Die Formel

$$d = \frac{n\lambda}{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} \quad (I)$$

liefert sodann die primitiven Abstände d der

Scharen oder Stellungen eines und desselben Gitters I' . Hierbei bringt das Unbekanntsein der Größen n eine Unsicherheit mit sich, die jedoch in den folgenden Stadien beseitigt wird.

Ergeben drei nicht einer Zone oder einem Büschel angehörende Flächen f_1, f_2, f_3 die Werte $d_{a'}, d_{b'}, d_{c'}$, und bilden diese Flächen miteinander die Außenwinkel A', B', C' und die Kantenwinkel α', β', γ' , so konstruiert man ein Parallelepiped II' , dessen Flächen die Abstände $d_{a'}, d_{b'}, d_{c'}$, die Außenwinkel $A' B' C'$ und die Kantenwinkel α', β', γ' besitzen. Seine Kantenlängen $a' b' c'$ folgen aus

$$\left. \begin{aligned} a' &= d_{a'} \sin \alpha' A'^{-1/2} \\ b' &= d_{b'} \sin \beta' A'^{-1/2} \\ c' &= d_{c'} \sin \gamma' A'^{-1/2} \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

wo A' gleich dem Quadrat des Staudtschen Eckensinus, also eine Funktion von α', β', γ' ist. Somit ergibt sich das Volumen V' des Parallelepipeds II' aus

$$V' = a' b' c' A'^{1/2}. \quad (III)$$

Nun kennt man aber das absolute Molekularvolumen bzw. (bei chemischen Elementen) Atomvolumen v der Kristallart in cm^3 aus

$$v = \frac{M}{N\rho}, \quad (IV)$$

wo M das relative Molekulargewicht (Molgewicht) bzw. Atomgewicht, ρ die Dichte und $N = 6,06 \times 10^{23}$ die Plancksche Konstante ist. Der Quotient $\frac{V'}{v}$ bedeutet hiernach die Anzahl der Molekeln bzw. (bei chemischen Elementen) Atome, welche von dem Parallelepiped II' absorbiert werden. Das mittels II' konstruierte Gitter ist dasjenige, welches eingangs mit I' bezeichnet wurde, und zwar sind in dem betr.

Kristall $q' = \frac{rV'}{v}$ Gitter I' parallel ineinandergestellt, wenn die obige Molekel durch r Atome definiert wurde (bei chemischen Elementen ist also $r = 1$ zu setzen). Nunmehr bildet man den Strukturfaktor (Interferenzfaktor) $|S|^2$ derart, daß derselbe mit den geschätzten oder photometrierten Intensitäten der Interferenzmaxima im Einklang steht; dann ergibt dieser die Art der Ineinanderstellung der q' Gitter I' , also die Verschiebungsvektoren $t_2', t_3' \dots t_{q'}'$, durch welche irgendeines jener q' Gitter I' in die übrigen $q' - 1$ Gitter I' des Punktsystems $\mathcal{Q}$ übergeführt wird.

Jetzt können aus II', I', q' und $t_2', t_3', \dots t_{q'}'$ die anfangs erwähnten q Atomgitter I abgeleitet werden, wenn man dieselben so definiert: Jedes Gitter I besteht ausschließlich aus Atomen eines und desselben chemischen Elements, im übrigen sind alle Gitter I einander kongruent und

1) Der Inhalt von § 2 und 3 ungefähr und von § 5 teilweise wurde im Juli 1917 Herrn Debye brieflich mitgeteilt; Debye bezieht sich darauf in dieser Zeitschr. 18, 485, 1917, Anm. Durch äußere Umstände waren die Verf. verhindert, ihre Untersuchung schon damals zu veröffentlichen. Inzwischen hat C. Runge (diese Zeitschr. 18, 509, 1917) eine Lösung der Aufgabe publiziert. Immerhin scheint unsere Methode, die von der Rungeschen durchaus verschieden und in § 5 mit dieser verglichen ist, nicht überflüssig zu sein; § 4 ist erst nach Kenntnisnahme der Rungeschen Arbeit abgefaßt.

parallel und q ist die kleinste Anzahl solcher Gitter I , aus denen man das Punktsystem Ω des Kristalls aufbauen kann. Hierbei findet man q Gitter I mit einem primitiven Parallelepipeden II und den Verschiebungsvektoren $t_2, t_3, \dots, t_q$. Sind a, b, c die Kantenlängen und α, β, γ bzw. A, B, C die Winkel von II , so heißen $a, b, c, t_2, t_3, \dots, t_q$ und α, β, γ (bzw. A, B, C) die Strukturkonstanten des Kristalls; ihre Anzahl beträgt demnach $6 + (q - 1)$ oder wenn man jeden Vektor t in seine drei Komponenten parallel a, b, c auflöst, $6 + 3(q - 1)$.

Über die Beziehungen zwischen den Gittern I' und I ist schließlich noch folgendes zu sagen. Offenbar liefert ein Kristall verschiedene Gitterarten I' , je nach der strukturellen Bedeutung der Flächen f_1, f_2, f_3 , aus deren Glanzwinkeln die Gitterart I' abgeleitet wird. Bringt man die drei Flächen irgendeines primitiven Parallelepipeden II der Gitterart I zur Reflexion, so ist das aus den Werten $\frac{\vartheta}{2}$ direkt fol-

gende Gitter I' identisch mit dem Atomgitter I und somit auch $q' = q$. In allen andern Fällen dagegen wird entweder $q' > q$ oder $q' < q$. Wenn $q' > q$ ist, dann fungieren $\frac{q'}{q}$ Gitter I' als sogenannte Teilgitter von I , während bei $q' < q$ umgekehrt I ein Teilgitter von I' ist. Bestimmt man z. B. an einem Kristall von Kupfer, dessen Punktsystem Ω nach Braggs aus einem einzigen flächenzentrierten Würfelgitter I besteht, die Interferenzmaxima der Scharen (100), (010), (001), so erhält man zunächst ein einfaches Würfelgitter I' , dessen primitiver Würfel $\frac{1}{8}$ so groß ist als der flächenzentrierte Würfel des Atomgitters I ; mithin wird $q' = \frac{1}{2}$, während $q = 1$, d. h. I' repräsentiert ein Teilgitter von I' derart, daß zur Konstruktion von I' zwei Gitter I vorhanden sein müßten.

Ermittelt man dagegen die Glanzwinkel der Scharen (111), (113), (133), so erhält man ein einfaches Würfelgitter I' , dessen primitiver Würfel II' viermal so groß ist als das primitive Parallelepipeden II des Kupfergitters I ; somit wird $q' = 4$, während $q = 1$ ist, d. h. I' ist ein Teilgitter von I derart, daß man mit vier solchen Gittern I' ein Kupferatomgitter I aufbauen kann.

Wie die Braggsche, so gelangt auch die Debye-Scherrersche Methode zunächst zu Gittern I' , welche die soeben berührten Beziehungen zu I der Kristallart erkennen lassen. Jedoch sind hierbei die geometrischen Kristallkonstanten sowie die Indizes der reflektierenden Scharen ($h_1 h_2 h_3$) unbekannt. Daher bildet den Ausgangspunkt der Berechnungen bei diesem

Verfahren nicht (I), sondern die quadratische Form¹⁾

$$4 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = k_{11} h_1'^2 + k_{22} h_2'^2 + k_{33} h_3'^2 + 2k_{23} h_2' h_3' + 2k_{31} h_3' h_1' + 2k_{12} h_1' h_2', \quad (V)$$

welche nach Laues²⁾ Darstellung die gesamte Optik der Kristallgitter zu beherrschen scheint.

Die Winkel $\frac{\vartheta}{2}$ werden auf dem Spektrogramm ausgemessen, und zwar enthält dieses die Glanzwinkel aller derjenigen Ordnungen n und Scharen ($h_1 h_2 h_3$), für welche $\frac{n\lambda}{2d} \leq 1$ ist. Zu bestimmen sind aus (V) die Koeffizienten k der Kristallart und die ganzen Zahlen $h_1' = nh_1$, $h_2' = nh_2$, $h_3' = nh_3$ jeder reflektierenden Schar ($h_1 h_2 h_3$).

Während die Auflösung von (V) oder einer ähnlichen Form den Inhalt der folgenden Paragraphen bildet, haben wir jetzt die formale Beziehung zwischen (V) und (I) aufzudecken. Aus (I) folgt

$$4 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = \frac{n^2 \lambda^2}{d^2}. \quad (VI)$$

Der reflektierenden Schar ($h_1 h_2 h_3$) primitiver Abstand d sei gleich d' , wo

$$d' = \frac{V'}{F'}; \quad (VII)$$

hierin ist V' wieder das Volumen des Parallelepipeden II' , welches mit den Abständen d_a, d_b, d_c dreier reflektierender Scharen und deren Winkeln $A' B' C'$ bzw. $\alpha' \beta' \gamma'$ (vgl. oben) gebildet ist; F' sei der Inhalt der primitiven Parallelepipeden, die das durch II' bestimmte Gitter I' in den Ebenen ($h_1 h_2 h_3$) erzeugt.

Bezeichnen wir die Flächeninhalte von II' mit F_1', F_2', F_3' , so wird

$$F'^2 = F_1'^2 h_1'^2 + F_2'^2 h_2'^2 + F_3'^2 h_3'^2 + 2F_2' F_3' h_2' h_3' \cos A' + 2F_3' F_1' h_3' h_1' \cos B' + 2F_1' F_2' h_1' h_2' \cos C', \quad (VIII)$$

und (VI) geht infolge von (VII) und (VIII) über in

$$4 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = \frac{\lambda^2 F_1'^2}{V'^2} n^2 h_1'^2 + \frac{\lambda^2 F_2'^2}{V'^2} n^2 h_2'^2 + \frac{\lambda^2 F_3'^2}{V'^2} n^2 h_3'^2 + \frac{2\lambda^2 F_2' F_3' \cos A'}{V'^2} n^2 h_2' h_3' + \frac{2\lambda^2 F_3' F_1' \cos B'}{V'^2} n^2 h_3' h_1' + \frac{2\lambda^2 F_1' F_2' \cos C'}{V'^2} n^2 h_1' h_2' \quad (IX)$$

1) P. Debye und P. Scherrer, Nachr. d. K. Gesellsch. d. Wiss. Göttingen, Sitzung vom 23. Dezember 1916.

2) M. v. Laue, Enzykl. math. Wiss. V. 3, 359, 1915.

$$\begin{aligned}
\text{oder} \\
4 \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\lambda^2}{d_{a'}^2} (nh_1)^2 + \frac{\lambda^2}{d_{b'}^2} (nh_2)^2 + \frac{\lambda^2}{d_{c'}^2} (nh_3)^2 \\
+ \frac{2\lambda^2 \cos A'}{d_{b'} d_{c'}} (nh_2)(nh_3) \\
+ \frac{2\lambda^2 \cos B'}{d_{c'} d_{a'}} (nh_3)(nh_1) \\
+ \frac{2\lambda^2 \cos C'}{d_{a'} d_{b'}} (nh_1)(nh_2) .
\end{aligned} \quad (X)$$

Setzt man in (X)

$$nh_1 = h_1', nh_2 = h_2', nh_3 = h_3', \quad (XI)$$

sowie

$$\begin{aligned}
a'^2 &= d_{a'}^2 \cdot \frac{1 - \cos^2 A'}{1 - \cos^2 A' - \cos^2 B' - \cos^2 C' + 2 \cos A' \cos B' \cos C'} , \\
b'^2 &= d_{b'}^2 \cdot \frac{1 - \cos^2 B'}{1 - \cos^2 A' - \cos^2 B' - \cos^2 C' + 2 \cos A' \cos B' \cos C'} , \\
c'^2 &= d_{c'}^2 \cdot \frac{1 - \cos^2 C'}{1 - \cos^2 A' - \cos^2 B' - \cos^2 C' + 2 \cos A' \cos B' \cos C'} .
\end{aligned} \quad (XIII)$$

Ersetzt man in (XIII) $d_{a'}^2$, $d_{b'}^2$, $d_{c'}^2$, und $\cos^2 A'$, $\cos^2 B'$, $\cos^2 C'$ durch die aus (XII) fließenden Ausdrücke und schreibt zur Abkürzung

$$k_{11} k_{22} k_{33} - k_{11} k_{23}^2 - k_{22} k_{31}^2 - k_{33} k_{12}^2 + 2 k_{23} k_{31} k_{12} = K, \quad (XIV)$$

so entsteht die zur Ermittlung von a' , b' , c' dienliche Gleichung

$$\left. \begin{aligned} a'^2 &= \lambda^2 (k_{22} k_{33} - k_{23}^2) K^{-1} \\ b'^2 &= \lambda^2 (k_{33} k_{11} - k_{31}^2) K^{-1} \\ c'^2 &= \lambda^2 (k_{11} k_{22} - k_{12}^2) K^{-1} \end{aligned} \right\}, \quad (XV)$$

während wir zur Berechnung von A' , B' , C' die folgenden Beziehungen direkt aus (XII) entnehmen:

$$\left. \begin{aligned} \cos A' &= k_{23} (k_{22} k_{33})^{-1/2} \\ \cos B' &= k_{31} (k_{33} k_{11})^{-1/2} \\ \cos C' &= k_{12} (k_{11} k_{22})^{-1/2} \end{aligned} \right\}, \quad (XVI)$$

und somit wird

$$\begin{aligned}
\cos a' &= (k_{31} k_{12} - k_{23} k_{11}) (k_{33} k_{11} - k_{31}^2)^{-1/2} \\
&\quad (k_{11} k_{22} - k_{12}^2)^{-1/2} \\
\cos b' &= (k_{12} k_{23} - k_{31} k_{22}) (k_{11} k_{22} - k_{12}^2)^{-1/2} \\
&\quad (k_{22} k_{33} - k_{23}^2)^{-1/2} \\
\cos c' &= (k_{23} k_{31} - k_{12} k_{33}) (k_{22} k_{33} - k_{23}^2)^{-1/2} \\
&\quad (k_{33} k_{11} - k_{31}^2)^{-1/2} .
\end{aligned} \quad (XVII)$$

Aus den Herleitungen (VI) bis (XVII) ist zu ersehen, daß auch die Auflösung der Debye-Scherrerschen quadratischen Form und die dann folgende Berechnung der Gitterkonstanten im allgemeinen nicht zu den Gittern I' mit den Konstanten a , b , c und α , β , γ bzw. A , B , C führt, sondern zu Gittern I'' mit a' , b' , c' und α' , β' , γ' bzw. A' , B' , C' , wobei wieder die oben vermerkten Beziehungen zwischen I'' und dem daraus abzuleitenden I' bestehen.

Die Bedeutung der drei Indizes und der sechs

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda^2 \cos A'}{d_{b'} d_{c'}} &= k_{23}, \quad \frac{\lambda^2 \cos B'}{d_{c'} d_{a'}} = k_{31}, \quad \frac{\lambda^2 \cos C'}{d_{a'} d_{b'}} = k_{12}, \\
\frac{\lambda^2}{d_{a'}^2} &= k_{11}, \quad \frac{\lambda^2}{d_{b'}^2} = k_{22}, \quad \frac{\lambda^2}{d_{c'}^2} = k_{33},
\end{aligned} \quad (XII)$$

so resultiert die quadratische Form (V).

Nachdem (XI) und (XII) die Bedeutung der drei Indizes und der sechs Koeffizienten von (V) deutlich gemacht haben, können wir aus diesen neun Größen die 6 Gitterkonstanten a' , b' , c' nebst A' , B' , C' bzw. α' , β' , γ' von I'' herleiten.

Aus (II) ergibt sich nämlich, wenn man α' , β' , γ' als Funktionen von A' , B' , C' ausdrückt,

Koeffizienten von (V) gestattet nunmehr ohne weiteres die Spezialisierung der Form (V) des triklinen Kristallsystems für die sechs übrigen höher symmetrischen Systeme und da von den verschiedenen Gitterarten eines Kristallsystems stets eine als Teilgitter der andern betrachtet werden kann, so genügt für jedes System die Aufstellung einer einzigen quadratischen Form. Man findet

Monoklin: $k_{11} h_1'^2 + k_{22} h_2'^2 + k_{33} h_3'^2 + 2 k_{31} h_3' h_1'$
(gerade rhomboidische Säulen) (Va)

Rhombisch: $k_{11} h_1'^2 + k_{22} h_2'^2 + k_{33} h_3'^2$
(Quader) (Vb)

Tetragonal: $k_{11} (h_1'^2 + h_2'^2) + k_{33} h_3'^2$
(quadratische Säulen) (Vc)

Rhomboedrisch: $k_{11} (h_1'^2 + h_2'^2 + h_3'^2) + 2 k_{23} (h_2' h_3' + h_3' h_1' + h_1' h_2')$
(Rhomböeder) (Vd)

Hexagonal: $k_{11} (h_1'^2 + h_2'^2 - h_1' h_2') + k_{33} h_3'^2$
(sechseckige Säulen mit zentrierter Basis) (Ve)

Regulär: $k_{11} (h_1'^2 + h_2'^2 + h_3'^2)$
(Würfel) (Vf)

Das Debye-Scherrersche Verfahren leistet offenbar genau das, was das Braggsche voraussetzt, indem es die Indizes von Scharen sowie die Koeffizienten der quadratischen Form des Kristallsystems und somit letzteres selbst ergibt. Naturgemäß können die unvermeidlichen

Messungsfehler der Werte $\frac{\theta}{2}$ bei pseudosymmetrischen Kristallarten zu einem Kristallsystem führen, das höher symmetrisch als das wirkliche erscheint; ebenso kann aber auch das von Braggs vorausgesetzte System infolge der reflexions-

goniometrischen Fehler unrichtig sein. Was die Symmetrieklasse der Kristallart betrifft, so ergibt sowohl die Spektrometrie als auch die Spektrogrammetrie die Möglichkeit genau so vieler Symmetrieklassen des Kristallsystems als die ermittelte Atomanordnung Raumgruppen zuläßt.

Eine eigentümliche Unsicherheit, die aber praktisch sehr selten ins Gewicht fallen wird, haftet der Debye-Scherrerschen Untersuchungsweise in den fünf rhomboedrischen Symmetrieklassen bei rhomboedrischem Gitter an; sie vermag hier die Orientierung des gefundenen Gitters I' gegenüber dem kristallographischen Achsenkreuz nicht eindeutig, sondern nur zweideutig anzugeben.

Tabelle I.

Kalkspat			
$(h_1' h_2' h_3')$	$\vartheta/2$ gemessen	$\vartheta/2$ berechnet	Differenz
(200)	5° 21'	5° 28'	-7'
(111)	5° 46'	5° 48'	-2'
(220)	6° 36'	6° 41'	-5'
(220)	8° 42'	8° 40'	+2'
(422)	11° 39'	11° 38'	+1'

Graphit			
$(h_1' h_2' h_3')$	$\vartheta/2$ gemessen	$\vartheta/2$ berechnet	Differenz
(111)	13° 5 1/2'	13° 8 1/2'	-3'
(111)	21° 12 1/2'	21° 15'	-2 1/2'
(222)	27° 4'	27° 3 1/2'	+ 1/2'
(220)	37° 53'	37° 52'	+1'
(113)	40° 53'	40° 53'	+0'

Zum Schluß dieses Paragraphen mögen noch die Genauigkeiten der beiden Verfahren verglichen werden. In der Tabelle I haben wir sowohl die von Braggs¹⁾ mit $\lambda_{Pd,\alpha}$ am Kalkspat als auch die von Debye und Scherrer (l. c.) mit $\lambda_{Cu,\alpha}$ am Graphit erhaltenen Glanz-

winkel $\frac{\vartheta}{2}$ nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen und die so berechneten Werte neben die gemessenen gesetzt. Die Differenzen zeigen, daß die Fehler beim spektrometrischen und beim spektrogrammetrischen Verfahren von einer und derselben Größenordnung sind.

§ 2. Die ganzzahligen Relationen.

Wir knüpfen zuerst an den rhomboedrischen Fall an, d. h. wir setzen zunächst als bekannt voraus, daß das vorgelegte Spektrogramm von einem Kristall herrührt, der zum rhomboedrischen System gehört. Es handelt sich alsdann

1) W. H. Bragg and W. L. Bragg, *X rays and crystal structure*, p. 116. London 1915.

um die Aufgabe, zwei Zahlen α, β so zu bestimmen, daß die quadratische Form

$$q = \alpha(k^2 + y^2 + z^2) + \beta(yz + zx + xy) \quad (1) = (Vd)$$

eine Reihe gegebener Werte $q_1, q_2, \dots$, nämlich die Quadrate der am Film ge-

messenen Werte $\sin \frac{1}{2} \vartheta_1, \sin \frac{1}{2} \vartheta_2, \dots$, für

niedrige ganzzahlige Wertsysteme x, y, z annimmt. Dabei ist nicht gesagt, für welche Wertsysteme x, y, z die einzelnen q -Werte von der quadratischen Form angenommen werden; vielmehr ist gerade diese Zuordnung zu ermitteln; hat man die Zuordnung, so ergeben sich nachher die Werte von α und β leicht unter Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate.

1. Wir greifen zunächst drei aus den beobachteten q -Werten heraus, sie mögen q_1, q_2, q_3 heißen; $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$, seien die noch unbekannten ganzzahligen Wertsysteme, für die die quadratische Form bzw. die Werte q_1, q_2, q_3 annimmt, also

$$q_1 = \alpha(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + \beta(y_1 z_1 + z_1 x_1 + x_1 y_1) \\ = \alpha p_1 + \beta q_1$$

$$q_2 = \alpha(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) + \beta(y_2 z_2 + z_2 x_2 + x_2 y_2) \quad (2) \\ = \alpha p_2 + \beta q_2$$

$$q_3 = \alpha(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2) + \beta(y_3 z_3 + z_3 x_3 + x_3 y_3) \\ = \alpha p_3 + \beta q_3;$$

die zur Abkürzung mit p, q bezeichneten Verbindungen der x, y, z sind, wenn auch ihre Werte noch unbekannt sind, jedenfalls wie diese einigermaßen niedrige ganze Zahlen. Sollen nun die drei Gleichungen (2) für die zwei Unbekannten α, β bestehen, so muß ihre Determinante

$$\begin{vmatrix} q_1 & p_1 & q_1 \\ q_2 & p_2 & q_2 \\ q_3 & p_3 & q_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

sein, oder, wenn man nach den Elementen der ersten Kolonne entwickelt, es muß

$$q_1(p_2 q_3 - p_3 q_2) + q_2(p_3 q_1 - p_1 q_3) \\ + q_3(p_1 q_2 - p_2 q_1) = 0 \quad (4)$$

sein: im rhomboedrischen Falle besteht zwischen je drei q -Werten eine dreigliedrige Relation von der Gestalt

$$u_1 q_1 + u_2 q_2 + u_3 q_3 = 0, \quad (5)$$

deren Koeffizienten u_1, u_2, u_3 niedrige ganze Zahlen sind.

2. Zwischen je drei q -Werten besteht im allgemeinen nur eine solche ganzzahlige Relation von der Gestalt (5). Beständen nämlich zwischen denselben drei Werten q_1, q_2, q_3 zwei solche Relationen

$$u_1 q_1 + u_2 q_2 + u_3 q_3 = 0, \\ v_1 q_1 + v_2 q_2 + v_3 q_3 = 0,$$

so verhielten sich $\rho_1 : \rho_2 : \rho_3$ wie

$(u_2 v_3 - u_3 v_2) : (u_3 v_1 - u_1 v_3) : (u_1 v_2 - u_2 v_1)$,
d. h. wie ganze Zahlen. In diesem Falle würde die Auflösung von irgend zweien der drei Gleichungen (2) nach den Unbekannten α, β einen rationalen Wert für das Verhältnis $\alpha : \beta$ ergeben. Nun hängen α, β wie aus § 1 hervorgeht, in einfacher Weise mit der Gestalt des rhomboedrischen Elementarparallelepipeds zusammen, diese variiert stetig mit der Temperatur u. a. m.; es ist daher die Annahme gerechtfertigt, daß $\alpha : \beta$ keinen rationalen Wert hat; dann kann also nur eine ganzzahlige Relation zwischen ρ_1, ρ_2, ρ_3 bestehen. Eine Ausnahme werden nur diejenigen Tripel von ρ -Werten bilden, für die jene Auflösung der Gleichungen (2), und zwar bei je zwei der drei Gleichungen versagt; dies tritt nur ein, wenn

$$\rho_2 \rho_3 - \rho_3 \rho_2 = 0, \rho_3 \rho_1 - \rho_1 \rho_3 = 0, \rho_1 \rho_2 - \rho_2 \rho_1 = 0$$

ist, d. h. wenn $\rho_1 : \rho_2 = \rho_2 : \rho_3 = \rho_3 : \rho_1$.

Der einfachste Fall, in dem für zwei Wertsysteme $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ die Proportion $\rho_1 : q_1 = \rho_2 : q_2$ gilt, ist natürlich derjenige, wo $x_1 : y_1 : z_1 = x_2 : y_2 : z_2$; daß er aber nicht der einzige Fall ist, lehrt das Beispiel (1, -1, 0),

(-2, 1, 1) zweier nicht proportionaler Wertsysteme, für die $(\rho_1, q_1) = (2, -1), (\rho_2, q_2) = (6, -3)$ ist.

3. Sind irgend drei ganzzahlige Wertsysteme $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ gegeben, so ergibt (4) die dreigliedrige Relation, die zwischen den zugehörigen ρ -Werten besteht. Die folgende kleine Tabelle gestattet, diese Relation unmittelbar abzulesen. Sie enthält in ihrem linken Teil die niedrigsten Wertsysteme x, y, z in einer sich natürlich ergebenden Reihenfolge, in ihrem rechten Teil die Werte von $\rho_a q_b - \rho_b q_a$ für alle niedrigen Zahlenpaare a, b . Sind nun z. B. die Tripel Nr. 1 (1, 0, 0), Nr. 3 (1, -1, 0) und Nr. 4 (1, 1, 1) gegeben, so greife man aus der Tabelle dasjenige Rechteck heraus, das von ihr übrig bleibt, wenn man alle anderen Zeilen und Kolonnen außer der 1., 3., 4. wegläßt (in der Tabelle ist es durch Unterstreichen markiert):

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ * & 9 \end{pmatrix};$$

alsdann ist $9\rho_1 - 3\rho_3 - \rho_4 = 0$ die gesuchte Relation zwischen den drei ρ -Werten ρ_1, ρ_3, ρ_4 , die den drei Wertsystemen Nr. 1, 3, 4 zugehören.

Tabelle II.

Nr.	x	y	z	ρ	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	0	0	1	0	*	1	-1	3	-1	0	2	-2	5	-1	-3	4
2	1	1	0	2	1	.	*	-4	3	-5	-4	-1	-9	4	-8	-12	0
3	1	-1	0	2	-1	.	.	*	9	1	4	9	1	16	4	0	16
4	1	1	1	3	3	.	.	.	9	-12	-12	-9	-21	-3	-21	-27	-12
5	1	1	-1	3	-1	.	.	.	.	*	4	11	-1	21	3	-3	20
6	2	0	0	4	0	.	.	.	.	.	*	8	-8	20	-4	-12	16
7	2	1	0	5	2	.	.	.	.	.	.	*	-20	13	-17	-22	4
8	2	-1	0	5	-2	.	.	.	.	.	.	.	*	37	7	-3	36
9	2	1	1	6	5	.	.	.	.	.	.	.	.	*	-36	-48	-16
10	2	-1	1	6	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	-12	32
11	-2	1	1	6	-3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	48
12	2	2	0	8	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*

4. Wären die sämtlichen ρ -Werte bekannt, die die quadratische Form für ganzzahlige Werte x, y, z annehmen kann, und alle diese völlig exakt, so besäße man auch unmittelbar die ganzzahligen Relationen zwischen je drei ρ -Werten, und es wäre an der Hand der Tabelle leicht, die einzelnen Relationen herauszusuchen und so umgekehrt die Tripel von Wertsystemen (x, y, z) zu ermitteln, die den einzelnen Tripeln von ρ -Werten zugehören. Die Schwierigkeiten der Aufgabe entspringen aus den folgenden Umständen:

1. die ρ -Werte liegen nicht exakt vor, sondern sind mit Beobachtungsfehlern behaftet.
2. Die Debye-Scherrerschen Filme enthalten nicht sämtliche Werte, die die

quadratische Form für ganzzahlige x, y, z annimmt, sondern nur diejenigen, die den Wert 1 nicht übersteigen, da für die übrigen $\sin \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\rho} > 1$, also ϑ imaginär ausfällt (totale Reflexion).

3. Auch diese endlichvielen ρ -Werte sind auf dem Film verschieden stark, manche fehlen gänzlich infolge vollständiger Interferenz.

§ 3. Erste Methode (Methode des Jacobi'schen Algorithmus): es sind wenige genaue Werte gegeben.

Wenn nicht drei, sondern zwei Zahlen ρ_1, ρ_2 gegeben sind, zwischen denen eine zweigliedrige

ganzzahlige Relation $u_1 q_1 + u_2 q_2 = 0$ besteht, so dient der sogenannte Kettenbruchalgorithmus dazu, diese Relation, d. h. das Verhältnis $u_1 : u_2 = -q_2 : q_1$ zu ermitteln. Herr Debye hat sich seiner bei Kristallen des regulären Systems, die auf lauter zweigliedrige Relationen führen, gelegentlich bedient. Nun hat C. G. J. Jacobi¹⁾ einen Algorithmus aufgestellt, der für den Fall von drei- und mehrgliedrigen ganzzahligen Relationen das Analoge leistet. Wir wollen ihn an der Hand eines Beispiels schildern, ohne dabei den gewöhnlichen Kettenbruchalgorithmus als bekannt vorauszusetzen.

1. Wir knüpfen an die erste der beiden Aufnahmen an, die Debye und Scherrer vom Graphit gemacht haben, und welche 5 relativ genaue Werte von $\sin \frac{\theta}{2}$ lieferte. Wir bezeichnen die mit 10^4 multiplizierten Quadrate dieser 5 Werte als q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 und haben

4283	3771	513
179	180	513
179	1	154

q_5	q_4	q_1	17	15	2
$q_5 - 8q_1$	$q_4 - 7q_1$	q_1	33	29	2
$q_5 - 8q_1$	$q_4 - q_5 + q_1$	$17q_1 - 2q_5$	33	34	68

Die 3. Liste zeigt, daß die 1 allein unter die möglichen Fehlergrenzen fällt; wir können daher das Verfahren an dieser Stelle abbrechen und schließen, daß innerhalb der zulässigen Fehlergrenzen $q_4 - q_5 + q_1 = 0$ hinreichend genau gilt — das wäre im vorliegenden Falle zufällig leicht zu raten gewesen —, aber auch, was mehr ist, daß keine andere Relation mit niedrigen Koeffizienten innerhalb der

3771	1308	513
180	282	513
180	102	153
78	102	51
27	0	51

q_4	q_2	q_1	15	5	2
$q_4 - 7q_1$	$q_2 - 2q_1$	q_1	29	9	2
$q_4 - 7q_1$	$q_2 - q_4 + 5q_1$	$15q_1 - 2q_4$	29	30	60
$2q_4 - q_2 - 12q_1$	$q_2 - q_4 + 5q_1$	$10q_1 - q_4 - q_2$	59	30	40
$3q_4 - 22q_1$	$3q_2 + q_4 - 15q_1$	$10q_1 - q_4 - q_2$	89	60	40

Hier sind es die beiden Reste 27 und 0 zugleich, die unter die Fehlergrenze fallen, und man erhält nicht nur eine einzige mögliche Relation, sondern zwei verschiedene

$3q_4 - 22q_1 = 0$ und $3q_2 + q_4 - 15q_1 = 0$, von denen man also noch beliebige Kombinationen bilden kann. Es liegt nahe, in einem solchen ungewöhnlich unbequemen Falle eine solche Kombination der beiden Relationen zu wählen, deren Koeffizienten möglichst niedrig sind. In Rücksicht auf die allein hohen Koeffizienten 22 und 15 von q_1 wird das Doppelte der 1. Relation, vermindert um das Dreifache der 2. Relation diese Forderung am ehesten erfüllen²⁾:

$$q_1 - 9q_2 + 3q_4 = 0;$$

1) Werke, 6, S. 385–426.

2) Man könnte übrigens auch tiefere zahlentheoretische Überlegungen zur Motivierung dieser Kombination benutzen.

demgemäß $q_1 = 513$, $q_2 = 1308$, $q_3 = 2070$, $q_4 = 3771$, $q_5 = 4283$. Wir suchen als erste die ganzzahlige Relation zwischen q_1, q_4, q_5 oder 513, 3771, 4283. Wir dividieren mit der kleinsten der drei Zahlen, q_1 , in die beiden übrigen hinein und ermitteln die Reste

$$q_4 - 7q_1 = 180 \text{ und } q_5 - 8q_1 = 179;$$

diese beiden Reste vereinigen wir mit dem Divisor q_1 zu einem neuen Tripel, das wir nach demselben Rezept behandeln: wir dividieren wiederum mit der kleinsten der drei Zahlen, diesmal 179, in die beiden anderen hinein und vereinigen sie mit den beiden Resten zu einem neuen Tripel usw. Wir führen daneben Buch darüber, wie sich die jeweiligen Reste aus q_1, q_4, q_5 zusammensetzen, und wir tun gut, noch eine dritte Buchführung über die mögliche Genauigkeit der jeweils gebildeten Verbindungen daneben zu setzen¹⁾.

Fehlergrenzen mit dieser einen in Konkurrenz tritt. In ähnlicher Weise würde die Behandlung von q_1, q_2, q_3 ergeben, daß $q_3 - 4q_1 = 0$ und keine andere Relation sich mit den Fehlergrenzen verträgt.

2. Ungewöhnliche Schwierigkeiten treten bei der Ermittlung der noch fehlenden 3. Relation, etwa zwischen q_1, q_2, q_4 auf; sie sollen deshalb besprochen werden. Man erhält hier

man verifiziert leicht, daß sie im Rahmen der Fehlergrenzen wirklich möglich ist.

3. Damit sind zunächst sämtliche dreigliedrigen Relationen zwischen den fünf Werten ermittelt. Wir entnehmen nun aus der Tabelle von § 2, daß die Relation $q_1 - 9q_2 + 3q_4 = 0$ auf die einzige niedrige Weise von den Wertsystemen Nr. 4, 1, 3 erfüllt wird. Wir versuchen es also, diese einander zuzuordnen und finden weiter aus der Tabelle, daß zwischen Nr. 3, 4 und 7 (und keiner anderen als 7) die Relation $\begin{pmatrix} 9 & 9 \\ * & -9 \end{pmatrix}$, d. h. $-9\sigma_3 - 9\sigma_4 + 9\sigma_7 = 0$

oder $\sigma_3 + \sigma_4 - \sigma_7 = 0$ besteht, so daß q_5 dem Wertsystem Nr. 7 zugeordnet werden darf; in

1) Die fünf q -Werte selbst sind nach einer freundlichen Mitteilung von Herrn Debye auf 4 Promille genau; danach hat z. B. $180 = q_4 - 7q_1$ einen möglichen Fehler von $15 + 7,2 = 22$ Einheiten usw.

dieser Möglichkeit liegt die Bestätigung der noch etwas vagen Zuordnung des ersten Tripels ϱ_1 , ϱ_2 , ϱ_4 mit Nr. 4, 1, 3. Jedenfalls ist damit für die gegebenen fünf Werte im Rahmen ihrer Fehler eine Lösung der Aufgabe gefunden.

4. Die Genauigkeit von 4 Promille in den

$$\varrho = \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

hat knapp genügt, um den Jacobischen Algorithmus in allen Fällen durchzuführen. Es wird deshalb nicht überflüssig sein, zu bemerken, daß auch weit ungenauere, aber (im Sinne von § 2, 4, Nr. 2) „sämtliche“ θ enthaltende Filme für die vorliegende Methode benutzt werden können. Die Herren Debye und Scherrer haben z. B. vom Graphit eine zweite Aufnahme gemacht, deren ϱ -Werte um 1 Proz. bis 2 Proz. ungenau sind, die dafür aber alle ϱ -Werte enthält, die nicht durch Interferenz oder totale Reflexion ausfallen. Auch aus dieser kann man sich einige genauere Werte herauspräparieren, indem man folgendermaßen operiert. Sei etwa ϱ_1 der kleinste der beobachteten ϱ -Werte, und sei (x_1, y_1, z_1) das noch unbekannte Wertsystem, für welches die quadratische Form den Wert ϱ_1 annimmt; dann wird sie für $(2x_1, 2y_1, 2z_1)$ den Wert $4\varrho_1$, für $(3x_1, 3y_1, 3z_1)$ den Wert $9\varrho_1$ annehmen usw.¹⁾ Soweit diese Werte kleiner als 1 bleiben, müssen sie sich also unter den beobachteten finden, eben da der Film alle diese Werte aufweist. Kombiniert man bei dem genannten 2. Graphit-Film diese Überlegung mit der Analyse der α - und β -Strahlung, die Debye und Scherrer vornehmen, so erhält man im ganzen acht Werte, die mit ϱ_1 in Einklang zu bringen sind, und somit eine Korrektur von ϱ_1 , die das Mittel aus acht Beobachtungen ist. Indem man dies nach Möglichkeit für die anderen niedrigsten ϱ -Werte ebenso durchführt, erhält man für eben jene fünf Werte, die aus der 1. Graphitaufnahme bekannt sind, neue Werte; wir stellen sie einander gegenüber und fügen diejenigen Werte hinzu, die man durch Ausgleichsrechnung aus den Werten der 1. Aufnahme auf Grund der bereits gefundenen Zuordnung berechnet.

	beobachtet aus der 1. Aufnahme	ausgeglichen	präpariert a. d. 2. Aufn.
ϱ_1	513	517	517
ϱ_2	1308	1314	1315
ϱ_3	2070	2069	2068
ϱ_4	3771	3768	3770
ϱ_5	4283	4285	(4290)

¹⁾ Einer ähnlichen Überlegung bedient sich auch Herr Runge, S. 510f. vor Eintritt in sein Verfahren.

Man sieht also, daß die aus der 2. Aufnahme präparierten Werte gewiß nicht weiter von der Wahrheit abstehen, als die der genaueren 1. Aufnahme, die zur Durchführung des Jacobischen Algorithmus genügen.

§ 4. Zweite Methode: Ein vollständiger, ungenauerer Film.

Wenn ein weniger genauer Film, wie z. B. die 2. Graphitaufnahme von Debye und Scherrer, ganz ausgemessen ist, kann man außer dem am Ende von § 3 geschilderten Verfahren auch ein anderes einschlagen, das den Jacobischen Algorithmus nicht benutzt. Man wird damit beginnen, die Werte einer solchen Textkritik zu unterziehen, wie sie am Ende von § 3 angedeutet wurde und wie sie auch Herr Runge voranschickt. Sei damit, um bei der 2. Debye-Scherrerschen Graphitaufnahme zu bleiben, folgende Reihe von ϱ -Werten bereits ermittelt¹⁾.

$$\tau_1 = 51,7; \tau_2 = 132; \tau_3 = 147; (207), 217, 271, 377, 403, 429, (466), 486, (517), 587, 650, 696, 790, 828, 841, (872), 895, 904.$$

Wir nehmen die oberste Relation, die in der Tabelle überhaupt vorkommt, $4\sigma_1 = \sigma_2 + \sigma_3$, und suchen drei unter den Werten $\tau_1, \tau_2, \dots$, die für eine solche Relation innerhalb der Fehlergrenze von 2 Proz. in Betracht kommen. Anstatt also drei bestimmte ϱ -Werte zu nehmen und wie bei der 1. Methode die ganzzahlige Relation zu suchen, die zwischen ihnen besteht, nehmen wir hier die Relation fest und suchen dazu die ϱ -Werte. Wir bilden $4 \cdot 51,7 = 206,8$ oder 207 und suchen zwei andere ϱ -Werte, deren Summe etwa 207 ist; das gibt es sichtlich nicht. Wir versuchen es deshalb mit $4 \cdot 132 = 528$; es ist $377 + 147 = 524$ von 528 um 4 Einheiten entfernt, während 2 Proz. mit 10 Einheiten übereinkommen. Wir versuchen es mit dieser ersten Möglichkeit, die sich bietet, ordnen also die Werte τ_2, τ_3, τ_6 den Wertsystemen Nr. 1, 2, 3 zu, wobei noch Nr. 2 und 3 ihre Rolle vertauschen können wegen der Symmetrie, mit der sie in die gewählte Relation eingehen. Ordnen wir, um mit einem der beiden zu unterscheidenden Fälle zu beginnen, τ_3 und Nr. 2 einander zu, so haben wir zwischen Nr. 1, 2, 4 gemäß der Tabelle die Relation $3\sigma_1 - 3\sigma_2 + \sigma_4 = 0$; wir müssen also ein τ suchen, für das $3\tau_2 - 3\tau_3 + \tau_4 = 0$ ist; dieses wird Nr. 4 zuzuordnen sein. Nun ist $3 \cdot 132 - 3 \cdot 147 = -3 \cdot 15 = -45$ mit ± 6 als etwa möglichem Fehler; $\tau_1 = 52$ kann allenfalls da-

¹⁾ Die 4fachen, 9fachen usw., die zur Korrektur dienten, sind dabei eingeklammert.

mit stimmen. Ebenso liefert $-5\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$, daß $5 \cdot 132 - 147 = 513$ mit $\tau_{10} = 517$ hinlänglich übereinstimmt usw. Man braucht nur den anderen der beiden erwähnten Fälle nachträglich ebenso durchzugehen, um zu sehen, wie unmöglich es ist, mit ihm in ähnlicher Weise zurecht zu kommen. Auf diese Weise finden dann sämtliche τ ihre unmittelbare Einordnung.

§ 5. Der allgemeine Fall. Vergleich mit der Rungeschen Methode.

Es wurde bisher nur an Kristalle des rhomboedrischen Systems gedacht. Dieselben Methoden sind unverändert auch auf den tetragonalen und hexagonalen Fall anwendbar. Man kann in diesen Fällen die quadratische Form in die Gestalt setzen

$$\alpha x^2 + \beta(y^2 + z^2) \quad \text{im tetragonalen Falle,}$$

$$\alpha x^2 + \beta(y^2 - yz + z^2) \quad \text{„ hexagonalen „}$$

und hat dementsprechend lediglich die obige Tabelle I durch eine der beiden folgenden zu ersetzen:

Tabelle III (tetragonal)¹⁾.

Nr.	x	y	z	p	q	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	1	0	*	1	1	2	1	4	5	5
2	0	1	0	0	1	.	*	-1	-1	-4	-1	-1	-4
3	1	1	0	1	1	.	.	*	1	-3	3	4	1
4	1	1	1	1	2	.	.	.	*	-7	2	3	-3
5	2	1	0	4	1	.	.	.	.	*	15	19	16
6	1	2	0	1	4	.	.	.	.	.	*	1	-11
7	1	2	1	1	5	.	.	.	.	.	.	*	-15
8	2	2	1	4	5	.	.	.	.	.	.	.	*

Tabelle IV (hexagonal)¹⁾.

Nr.	x	y	z	p	q	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	1	0	*	1	1	3	1	4	3	7
2	0	1	0	0	1	.	*	-1	-1	-4	-1	-4	-1
3	1	1	1	1	1	.	.	*	2	-3	3	-1	6
4	1	1	-1	1	3	.	.	.	*	-11	1	-9	4
5	2	1	0	4	1	.	.	.	.	*	15	8	27
6	1	2	0	1	4	.	.	.	.	.	*	-13	3
7	2	1	-1	4	3	.	.	.	.	.	.	*	25
8	1	2	-1	1	7	.	.	.	.	.	.	.	*

Sieht man von dem von Debye und Scherrer selbst ausreichend erledigten regulären System ab, so sind also unsere Methoden auf 3 der 6 übrigen Systeme unmittelbar anwendbar. Obgleich es möglich wäre, sie auch noch auf das dreiparametrische rhombische System auszuweiten, scheint es, daß sie da in ihrer Wirksamkeit gegenüber der Rungeschen Methode

¹⁾ Im Gegensatz zu Tabelle I ist hier von solchen Wertsystemen, die proportionale $p:q$ liefern, stets nur eines aufgeführt, um möglichst viel verschiedene Relationen in einer kleinen Tabelle zu vereinigen.

zurücktreten und bei den beiden übrigen Systemen gewissermaßen in dieser aufgehen würden.

Wir können das Verfahren von Herrn Runge von unserem Standpunkt aus dahin charakterisieren, daß Herr Runge sich einer einzigen, speziellen viergliedrigen Relation bedient, nämlich der Relation $2(\rho_1 + \rho_2) = \rho_3 + \rho_4$. Soweit es sich um Kristalle der 3 genannten zweiparametrischen Systeme handelt, scheint unsere Methode der Rungeschen gewisse Vorteile gegenüberzustellen:

1. Wir binden uns nicht an eine einzige Art von Relation, sondern können es mit den verschiedensten probieren, wenn wegen Ungenauigkeit einiger ρ -Werte oder Interferenzausfall eine versagen sollte.

2. Wir erhalten unmittelbar mit einem Schlage die Koeffizienten der Form, die dem besonderen Charakter des Systems angepaßt ist, also z. B. im rhomboedrischen Fall die Gestalt (1) hat. Herr Runge erhält zuerst irgendeine quadratische Form, und muß die Transformation auf die spezielle Gestalt (1) erst nachträglich auffinden.

Es wurde bisher vorausgesetzt, daß man von vornherein weiß, welchem der sieben Systeme der aufgenommene Kristall angehört. Die Rungesche Methode setzt diese Kenntnis nicht voraus. In denjenigen Fällen also, in denen diese Kenntnis fehlt, bleibt zu erörtern, was von unseren Methoden noch wirksam bleibt. Zunächst wird man selbst in diesen Fällen häufig noch aus der Reichhaltigkeit des Films vermuten können, ob es sich um ein niedrig-parametrisches System handelt oder nicht. Bedient man sich aber erst des Ansatzes, daß überhaupt ein zweiparametrisches System vorliegt, so läßt die 2. Methode z. B. ganz von selbst merken, welches der 3 Systeme vorliegt. Die Relation $4\sigma_1 = \sigma_2 + \sigma_3$ z. B., die oberste von Tabelle II, kommt in Tabelle III, auch bei weiterer Fortsetzung als oben, nicht so bald vor. Erweist sie sich als gangbar, so wird man an die Möglichkeit des tetragonalen Systems nicht mehr viel zu denken brauchen; andernfalls wird man durch ähnliche Überlegungen sofort zum Ziel kommen.

Was jedoch die 1. unserer beiden Methoden und den Jacobischen Algorithmus anbelangt, so ist dieser natürlich nicht auf die dreigliedrigen Relationen beschränkt, für die er oben auseinandergesetzt wurde. Im triklinen Falle muß man sieben ρ -Werte herausziehen, um die sechs Koeffizienten der quadratischen Form zu eliminieren; im triklinen Falle besteht also zwischen je sieben ρ -Werten eine ganzzahlige Relation; daneben gibt es spezielle Systeme von vier und solche von sechs ρ -Werten, zwischen denen ganzzahlige Relationen vorhanden sind;

ist das System nicht triklin, so bleiben die eben genannten Relationen bestehen, aber es treten viele neue mit geringerer Gliederzahl hinzu. Die Anwendung des Algorithmus belehrt aber selbsttätig darüber, wieviel parametrig das System

ist, und ob es insbesondere zweiparametrig ist. Ist dies erst festgestellt, so treten wieder die oben angestellten Erwägungen an der Hand der Tabellen II—IV in Kraft.

(Eingegangen 7. Dezember 1917.)

BESPRECHUNGEN.

W. Porstmann, Normenlehre, Grundlagen, Reform und Organisation der Maß- und Normensysteme, dargestellt für Wissenschaft, Unterricht und Wirtschaft. (Band 8 der Allgemein-pädagogischen Schriften, herausgegeben von Karl Rößger, Leipzig.) VIII u. 256 S. mit 28 Abbildungen. Leipzig und Prag, Schulwissenschaftlicher Verlag A. Haase. 1917. geb. M. 7.—

Das Buch ist sehr merkwürdig und wird vom Leser mit steigendem Interesse, um nicht zu sagen Spannung gelesen werden. Obwohl man nicht sagen kann, daß der Titel unrichtig gewählt sei, werden sich die meisten nach ihm allein gar kein Bild vom Inhalt machen können. Es handelt von den Normen oder Grundeinheiten der Längen-, Flächen-, Raummessung, der Winkel- und Zeitmessung, der Gewichte, Münzen, Formate, also von Dingen, die wohl fast allen von uns als herzlich langweilig erscheinen — ein Zeichen dafür, daß sie uns eben noch nicht Gegenstand des Nachdenkens geworden sind. In Porstmanns Buch sind sie Gegenstand einer kritischen und organisierenden Untersuchung von sehr systematischer Art. Einzelne Fragen, wie die Kalenderreform, mögen schon für sich in ähnlicher Weise früher behandelt worden sein, die zusammenfassende Betrachtung aller dieser Gebiete mit ihren Zusammenhängen ist ganz neu und überaus fesselnd. Man erfährt weniger, welches die gebräuchlichen Normen sind, als wie sie sein müßten, nämlich um die größte Einfachheit zu gewährleisten. Das ganze Buch ist eine systematische Untersuchung darüber, wie alle diese Normen auszusehen hätten, um die denkbar größte Einfachheit und Energieersparnis in ihrer Anwendung zu ermöglichen. Einen Teil der Darstellung bildet natürlich jedesmal die Kritik am Bestehenden, wobei der geschichtliche Nonsens, aus dem die meisten dieser Normen zusammengekleistert sind, erbarmungslos aufgedeckt wird.

Ein Beispiel: Die Winkelmessung. Der Winkelgrad — ungefähr der Winkel, den die Sonne an einem Tage unter den Sternen zurücklegt — ist ein Jahrtausende altes Vermächtnis, welches wir aus Trägheit und wegen seines ehrwürdigen Alters festhalten, obwohl gerade das große Alter uns schon verdächtig sein müßte. In der Tat läßt es sich durch nichts verteidigen, daß man eine allgemeine Aufgabe, wie die zweckmäßigste Teilung des Vollkreises, durch Heranziehung einer speziellen Erscheinung, wie der Sonnenbewegung, zu lösen sucht. Das Naturgemäße ist vielmehr auch hier die fortgesetzte Teilung in 10 Untertheile, und zwar ist der Vollkreis — Verf. nennt ihn „ein Dopi“ = 2π — in Dezimalen einzuteilen. Die alte Gradteilung benutzt statt dessen die ganz willkürliche Teilung in 360 „Grade“, deren jeder wieder in anderem Maß, nämlich in 60 „Minuten“ zu 60 „Sekunden“ untergeteilt wird, und um die Verwirrung voll zu machen, wird zum Schluß noch eine Dezimalteilung

in Zehntel- und Hundertstelsekunden angeklebt. Ein Winkel von beispielsweise $139^{\circ} 45' 57,32''$ stellt vom Standpunkt der Normenorganisation geradezu einen Hexensabbat von verschiedensten und ganz unlogischen Einteilungsgründen dar. Nach der logisch einwandfreien Teilung in „Millidopi“ schreibt er sich: 388, 238 672 millidopi.

Ein ganz entsprechendes Kapitel bildet die Zeitmessung. Die übliche Unterteilung des Tages in 24 Stunden und die weitere Teilung dieser in 60 Minuten zu 60 Sekunden läßt sich gleichfalls logisch nicht rechtfertigen. Das Gegebene ist vielmehr, die natürliche Einheit, den Tag, dezimal zu teilen, nämlich in „Millitag“. In den astronomischen Formeln würde dann die lästige Umrechnung von Winkel auf Zeit und umgekehrt fortfallen, da 1000 Millitag ebenso wie 1000 Millidopi dem Vollkreis entsprechen.

Gerade die Zeitmessung ist übrigens ein Beispiel für den Fall, daß man nicht mit einer einzigen Grundeinheit auskommt. Denn auch das Jahr ist so eng mit unserem Leben verknüpft, daß wir es nicht unberücksichtigt lassen können. Da Jahr und Tag inkommensurabel sind, ergibt sich die Notwendigkeit, eine Schalteinrichtung, einen Kalender, zu schaffen. Auch hier ergibt die Kritik unseres gregorianischen Kalenders vieles, ja überraschend vieles, was unzweckdienlich, schwülstig und verbesserungsfähig ist. Bekanntlich wird das Problem der Kalenderreform gerade im Kriege mit Hinblick auf die Möglichkeit, die der Friedensschluß für derartige Reformen bietet, eifrig diskutiert, und Herman Reese, der Erfinder der Sommerzeit, entfaltet bereits seit längerem eine rührige Propaganda für praktisch die gleiche Reform, welche Verf. hier im Zusammenhange mit den übrigen Reformen des Normenwesens ausarbeitet. Den meisten Lesern wird bereits bekannt sein, daß es sich dabei nicht nur um die Festlegung der beweglichen Feste, sondern auch um eine starre Verbindung des Wochentages mit dem Datum und um einen Ausgleich der Monatslängen handelt.

In der oben flüchtig skizzierten Weise werden sämtliche Abschnitte behandelt. Im ersten Kapitel, über Längenmessung, wird das Meter als Norm kritisiert und angenommen, und hieraus die abgeleiteten Normen als das Tausendfache bzw. das Tausendstel der Grundnorm entwickelt. $Km, m, mm, \mu, \mu\mu$ lautet diese Normenreihe. Das Zehnfache und Hundertfache erweist sich als unnötige Zwischennorm, die meist auch in der Praxis unbenutzt bleibt. Später wird gezeigt, daß dies „Dreistellenprinzip“ eine allgemeine Bedeutung hat und in hohem Maße die Mengenbeherrschung erleichtert. Natürlich folgt daraus, daß wir es nun auch konsequent durchführen und das Zentimeter als physikalische Einheit abschaffen sollten.

Das zweite Kapitel behandelt die Flächenmessung, das dritte die Raummessung. Auch hier überrascht die Fülle vermeidbarer Unlogik, von der die heutige Anwendung der metrischen Maße wimmelt. Es ist sehr reizvoll, diese Launen aufzu-

spüren, die sich als Verstöße gegen Einfachheit und Übersichtlichkeit darstellen. Doch wollen wir darauf nicht eingehen. Auch auf die Gewichtsnormen mit ihrem deutlich befolgten Dreistellenprinzip ($Kg, g, mg, \gamma, \gamma\gamma$) und ebenso auf die Münzen wollen wir nicht eingehen und nur sagen, daß der Leser auch hier viel Neues und Interessantes findet. Die Kapitel „Mengennormen“ und „Die Normierung der Normensysteme“ sind vielleicht die wichtigsten. Hier wird die Normierung an sich logisch untersucht, d. h. die Frage, welches die einfachste Methode der Mengenbeherrschung ist, ohne Rücksicht darauf, um was für Mengen es sich handelt. Die 10 findet hier ihre Rechtfertigung, und das vom Verfasser erstmalig entdeckte Dreistellenprinzip ergibt sich auf allgemeiner Grundlage. Der schon besprochenen Winkel- und Zeitmessung sind die nächsten Kapitel gewidmet. Auch für die Erdgradteilung wird in einem kürzeren Kapitel die zweckmäßigste Reform vorgeschlagen. Einen langen Abschnitt bildet weiter die Formatreform, welche im Anschluß an W. Ostwalds leider eingegangenes Institut „Die Brücke“ die Auffindung der zweckmäßigsten Formatreihe in neuer und gegen Ostwald verbesserter Weise behandelt. Ein Schlußkapitel handelt über „Abgeleitete Normen“, zu denen u. a. die des Lichtes und der Temperatur gehören, um nur einige zu nennen.

Vielleicht genügt schon diese Übersicht, um diejenigen, die beim Lesen des Titels meinten, in dem Buche nur wohlbekannte Dinge zu finden, davon zu überzeugen, daß sie sich geirrt haben. Es ist Neuland, das hier zum erstenmal und — wie dem Referenten scheint — mit außerordentlichem Erfolg beackert ist. Denn ich muß gestehen, daß so gut wie alle Reformvorschläge überzeugend sind.

Die Frage, ob, wie und wann diese Reformen verwirklicht werden können, wird in dem Buche nicht erörtert. Es sind zwei verschiedene Dinge, ein Ideal aufzustellen, und es zu verwirklichen. Und es ist zweckmäßig, erst das erste zu tun, bevor man an das zweite geht. Porstmanns Buch geht nur darauf aus, die idealen Normen zu finden; es erhebt diese Fragen zum erstenmal zu einer Wissenschaft: der Lehre von den idealen Normen.

Alfred Wegener.

Moritz Schlick, Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik. Zur Einführung in das Verständnis der allgemeinen Relativitätstheorie. 80. III u. 63 S. Berlin, J. Springer. 1917. Geh. M. 2.40.

Diese vorzüglich geschriebene Broschüre behandelt die Grundgedanken der Einsteinschen allgemeinen Relativitätstheorie von einem vorwiegend philosophischen Standpunkt aus und dürfte jedem Kenner der Einsteinschen Arbeiten von Interesse und Nutzen sein. Der Inhalt gliedert sich wie folgt: 1. Von Newton zu Einstein. 2. Die geometrische Relativität des Raumes. 3. Die mathematische Formulierung der räumlichen Relativität. 4. Die Untrennbarkeit von Geometrie und Physik in der Erfahrung. 5. Die Relativität der Bewegungen und ihr Verhältnis zur Trägheit und Gravitation. 6. Das allgemeine Relativitätspostulat und die Maßbestimmungen des Raum-Zeit-Kontinuums. 7. Aufstellung und Bedeutung des Grundgesetzes der neuen Theorie. 8. Beziehungen zur Philosophie.

H. Hörig.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Karl Bunte für technische Chemie und Dr. Heinrich Brandt für Mathematik und Mechanik.

Ernannt: Der Konservator bei der Hauptstation für Erdbebenforschung und beim erdmagnetischen Observatorium in München Dr. Karl Lutz zum Professor, der ord. Professor der Chemie an der Universität Greifswald Dr. Otto Dimroth in gleicher Eigenschaft an der Universität Würzburg.

Berufen: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Basel Dr. Erich Hecke in gleicher Eigenschaft an die Universität Göttingen, der ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Zürich Dr. Hermann Weyl in gleicher Eigenschaft an die Universität Breslau.

Neuer Lehrauftrag: Dem Geh. Regierungsrat Professor Dr. Adolf Juckenack an der Technischen Hochschule Berlin für Chemie der Nahrungsmittel und chemisch-technische Analyse.

Verliehen: Dem ord. Professor der Mathematik an der Universität München Geh. Hofrat Dr. Aurel Voß der Titel Geheimer Rat, dem Abteilungsvorsteher beim Materialprüfungsamt in Berlin, ord. Professor der Chemie an der Technischen Hochschule Berlin Dr. David Holde (anlässlich des Übertritts in den Ruhestand).

Gestorben: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Halle Geh. Regierungsrat Dr. Georg Cantor, der ord. Honorarprofessor für Geschichte der Mathematik an der Universität Straßburg Dr. Max Simon.

Angebote.

Physiker

mit abgeschlossener Hochschulbildung, der sich der drahtlosen Telegraphie zu widmen beabsichtigt oder bereits Erfahrungen auf diesem Gebiete besitzt, gesucht. Erwünscht sind Erfahrungen auf dem Gebiete der Elektronenemission und Vakuumtechnik.

Bewerbungen mit kurzem Lebenslauf und Gehaltsansprüchen erbeten an

Dr. Georg Seibt,

**Fabrik funkentelegraphischer Apparate.
Berlin-Schöneberg, Hauptstr. 11.**

Physiker.

Wir suchen für unser Laboratorium mehrere **Physiker**. Herren mit Erfahrung auf dem Gebiet der Gasentladungen oder des Hochvakuums bevorzugt. Angaben über Lebenslauf, Militärverhältnis, Eintrittstermin, Gehaltsansprüche unter Beifügung von Zeugnisabschriften an

AEG

**Allgemeine Elektrizitäts-Gesellschaft, Glühlampenfabrik,
Berlin NW. 87, Sickingenstr. 71.**

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 4.

15. Februar 1918.

Redaktionsschluß für No. 6 am 20. Februar 1918.

19. Jahrgang.

INHALT:

Josef Popper-Lynkeus. Zu seinem achtzigsten Geburtstag. Von Ph. Frank. S. 57.

Originalmitteilungen:

E. Budde, Über Schwebungen. (Antwort an Herrn Waetzmann.) S. 60.

F. Jung, Zur Ableitung der Schwerefeldgleichungen. S. 61.

R. Glocker, Absorptionsgesetze für Röntgenstrahlen. S. 66.

Zusammenfassende Bearbeitungen:

O. Lehmann, Die Hauptsätze der

Lehre von den flüssigen Kristallen. (I. Teil.) S. 73.

Berichtigung. S. 80.

Tagesereignisse. S. 80.

Personalien. S. 80.

Angebote. S. 80.

Josef Popper-Lynkeus.

Zu seinem achtzigsten Geburtstag.

In seiner im Jahre 1872 erschienenen Schrift „Die Geschichte und Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit“, in der E. Mach zuerst seine Ideen über eine rein phänomenologische und daher relativistische Physik entwickelte, sagt er: „Ich habe nur einen Mann, Herrn Josef Popper, kennen gelernt, mit dem ich die hier dargelegten Ansichten, ohne Anstoß zu erregen, besprechen konnte. Ja, Herr Popper und ich sind unabhängig voneinander in bezug auf mehrere Punkte der Physik zu ähnlichen Ansichten gelangt“.

Josef Popper wurde am 21. Februar 1838 zu Kolin in Böhmen geboren. Er besuchte 1854 bis 1857 das Polytechnikum in Prag, 1858 bis 1859 das Polytechnikum in Wien. Da er nach Vollendung seiner technischen Studien keine Anstellung als Ingenieur finden konnte, nahm er 1866 in Wien einen Hofmeisterposten an, nachdem er einige Zeit kommerzieller Beamter der Staatsbahn und einige Zeit Herausgeber einer Zeitungskorrespondenz gewesen war. Seine freie Zeit benutzte er aber, um in den Jahren 1858—1865 an der Universität Wien Vorlesungen über Mathematik und Physik zu hören. Er besuchte die Vorlesungen von Petzval, Ettingshausen, Littrow und Reitlinger. Durch diesen lernte er Ernst Mach

kennen, mit dem ihn bis zu dessen Tode enge Freundschaft verband.

Da Popper eine Anstellung, die ihm gestattet hätte, ganz der Wissenschaft zu leben, nicht finden konnte, suchte er sich dadurch unabhängig zu machen, daß er seine technischen Kenntnisse zu Erfindungen benutzte, die sich praktisch verwerten ließen; auf dem Gebiete der Dampfmaschinentechnik rühren von ihm die Popperschen Kesseleinlagen und der Poppersche Luftkondensator her. Seit dem Jahre 1897 hat er jede praktische technische Tätigkeit aufgegeben und lebt in Wien ausschließlich seinem wissenschaftlichen und literarischen Wirken.

Für Popper als Physiker war der entscheidende Moment die Bekanntschaft mit den Ideen Robert Mayers. Unter dem unmittelbaren Eindrucke dieser Ideen von

der Umwandelbarkeit aller Naturkräfte ineinander faßte er den Gedanken, Naturkräfte, wie z. B. Wasserfälle, die fern von menschlichen Wohnstätten vorkommen, dadurch nutzbar zu machen, daß man sie zum Betrieb einer magnetoelektrischen Maschine verwendet und den so erzeugten Strom zu den Verwendungsorten hinleitet, ein Gedanke, den Popper schon im Jahre 1862 in einem versiegelten Schrei-



ben¹⁾ der Akademie der Wissenschaften in Wien mitteilte, und der später unabhängig von ihm die Grundlage der elektrischen Kraftübertragung wurde.

Nach der Belagerung von Paris 1871 herrschte ein allgemeines Interesse für den Luftballon. Poppers energetisch gerichtetem Denken mußte die Frage naheliegen, woher denn die Energie komme, die Lasten in so große Höhen hebt. Diese Frage bildet den Ausgangspunkt für die Abhandlung: „Über die Quelle und den Betrag der durch Luftballons geleisteten Arbeit“²⁾. Sie enthält eine vollkommene Analyse des Energieumsatzes beim unendlich langsamen Steigen eines Ballons. Am Schlusse wird der Warmluftballon als thermodynamische Maschine zum Heben von Lasten diskutiert und gefunden, daß sein Nutzeffekt nur der hundertste Teil von dem der damals üblichen Dampfpumpen wäre. Diese Abhandlung war der Anlaß zu dem interessanten Briefwechsel Poppers mit Robert Mayer³⁾. Als dessen „Mechanik der Wärme“ 1874 in zweiter Auflage erschien, ersuchte er Popper, eine Besprechung dieses Werkes zu schreiben. Diese Besprechung⁴⁾ ist nicht ein bloßes Referat, sondern benutzt Mayers Auffassung der Physik als Ausgangspunkt, um eigene Anschauungen zu entwickeln. Popper stellt die phänomenologische Grundlegung der Physik mit einer Schärfe und frischen Originalität dar, die den besten Stellen in Machs Schriften durchaus gleichkommt. Wenn wir diesen Aufsatz lesen, sehen wir so recht, wie unzutreffend die jetzt oft geäußerte Ansicht ist, die heutige Physik sei eine entschiedene Abwendung von den phänomenologisch-energetischen Lehren. Die so reden, vergessen erstens, daß unsere heutige so freie Hypothesenbildung nur deshalb ohne Schaden möglich ist, weil uns die phänomenologische Auffassung immer eine sichere Rückzugsstellung darbietet und zweitens, daß die ganze relativistische Auffassung, die für die Physik unserer Zeit so kennzeichnend ist, geradezu eine folgerich-

tige Durchführung der phänomenalistischen Forderungen ist.

Wir sehen diesen Zusammenhang sehr schön, wenn wir z. B. lesen, was Popper über den Wärmetod der Welt als angebliche Folgerung aus dem Entropiesatz sagt:

„Zeit ist nichts anderes als die Anzahl von Perioden gewisser Naturvorgänge . . . es ist also ganz willkürlich, die eine Unendlichkeit, nämlich die Zeit, so anzusehen, als ob sie der anderen Unendlichkeit, dem Vorrat an mechanischer Kraft, gegenüber selbst wieder ein Unendliches höherer Potenz, also relativ unerschöpflich wäre.“

Im Jahre 1884 veröffentlichte Popper die „physikalischen Grundsätze der elektrischen Kraftübertragung“¹⁾. Er gibt darin eine Einführung in die Grundlehren der damaligen Elektrotechnik vom Standpunkte der allgemeinen Energielehre. Es werden die Analogien zwischen den verschiedenen Energiearten aufgesucht und besonders hervorgehoben, daß wie die Arbeit beim Heben eines Gewichts das Produkt aus Masse und Niveaudifferenz ist, jede Energie sich als Produkt zweier Faktoren ausdrücken läßt, von denen einer den Charakter einer Menge, der andre den einer Niveaudifferenz hat; so ist die Wärmeenergie das Produkt aus Wärmekapazität und Temperaturdifferenz usw. Dieser Gedanke spielte bekanntlich später in der Helm-Ostwaldschen Energetik eine große Rolle, wo die beiden Faktoren die Namen Kapazitäts- und Intensitätsfaktor bekommen.

Eine Anwendung der energetischen Denkweise auf ein chemisches Problem macht Popper in der Arbeit „Über die Vorausberechnung der Verbrennungs- oder Bildungswärme für Knallgas und andere Gasgemenge“²⁾.

Außer diesen physikalischen Arbeiten veröffentlichte Popper zahlreiche Abhandlungen über Fragen der Dampfmaschinentechnik, Elektrotechnik und Flugtechnik. Auf dem letzteren Gebiet nahm er eine führende Stellung in der österreichischen flugtechnischen Schule ein, deren theoretische Arbeiten der eigentlichen praktischen Lösung des Flugproblems vorangingen. Seine Schrift: „Der Maschinen- und Vogelzug. Eine historisch-kritische flugtechnische

1) Wieder abgedruckt in Poppers Selbstbiographie. (J. Popper-Lynkeus, Selbstbiographie, Leipzig 1917.)

2) Sitzungsber. der kais. Akad. d. Wiss. in Wien (1875).

3) Die drei Briefe Mayers sind im Anhang zu Poppers Selbstbiographie abgedruckt.

4) „Ausland“ 1876, wieder abgedruckt in der Selbstbiographie.

1) Wien, bei A. Hartleben.

2) Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in Wien (1889).

Untersuchung“¹⁾ ist durch ihre begriffliche Klarheit auch für den Physiker sehr lesenswert.

Obwohl Popper eigentlich Techniker ist, so hat er doch von dem Einfluß der technischen Erfindungen auf die menschliche Gesittung niemals sehr hoch gedacht. Davon zeugt seine Schrift: „Die technischen Fortschritte nach ihrer ästhetischen und kulturellen Bedeutung“²⁾. Für ihn standen in der Wissenschaft immer die großen geistigen Konzeptionen am höchsten.

Und wenn die Gegner der phänomenalistischen Physik ihr vorwerfen, sie wolle die Wissenschaft zu einer bloßen Registrierung von Versuchsergebnissen herabdrücken, so braucht man zur Widerlegung nur anzuführen, was ein so entschiedener Vertreter des Phänomenalismus wie Popper sagt, um die Leistung Robert Mayers gegenüber Joule hervorzuheben, ein Verhältnis, das er mit dem eines Newton zum direkten Nachweis der Anziehungskraft durch Cavendish vergleicht: „In Beziehung auf Beherrschung der Natur verschwindet eben oft selbst die interessanteste physikalische Tatsache vor dem, auch nur hypothetischen oder indirekt erwiesenen fruchtbaren Grundgedanken und die bloße Kenntnis neuer Tatsachen trägt in solchen Fällen der geistigen Konzeption gegenüber nur einen wissenschaftlich-plebejischen Charakter“.

Auch auf dem Gebiete der reinen Mathematik war Popper tätig. Er veröffentlichte: „Über die Auffindung der Schwerpunkte mit Zirkel und Lineal“³⁾. „Beiträge zu Weddles Methode der Auflösung numerischer Gleichungen“⁴⁾. „Theorie der Konvergenz unendlicher Reihen und bestimmter Integrale, die keine periodischen Funktionen enthalten“⁵⁾.

Die Beschäftigung mit den exakten Wissenschaften und deren Anwendung bildet aber nur einen Teil der Wirksamkeit Poppers. Es sind seine sozialphilosophischen Schriften,

die immer wachsende Bedeutung gewinnen. Heute, wo durch die Kriegswirtschaft der letzten Jahre der Gedanke immer mehr durchdringt, daß die staatliche Gemeinschaft die Pflicht habe, für die Existenzmöglichkeit jedes ihrer Bürger unmittelbar zu sorgen, werden die Lehren und Forderungen Poppers¹⁾ besser als je gewürdigt werden. In diesen Schriften herrscht überall eine phrasenlose Schlichtheit und Klarheit der Argumentation, die deutlich den an den exakten Wissenschaften gebildeten Geist verrät. Denn nicht dadurch wird in derartigen Erörterungen die Exaktheit der mathematischen Naturwissenschaft erreicht, daß man, wie manche Soziologen und Nationalökonomien es tun, die Worte soziale Statik und Dynamik u. ä. reichlich verwendet oder daß man Differentialgleichungen einführt, sondern dadurch, daß man wie Popper nur mit einfachen und durchsichtigen Begriffen arbeitet.

Selbst in dem einzigen dichterischen Werk Poppers, den unter dem Pseudonym Lynkeus erschienenen²⁾ „Phantasien eines Realisten“ verleugnet sich jene eigentümliche leuchtende Klarheit nicht. Und nichts ist ergreifender, als zu lesen, wie in diesen kleinen Skizzen die menschlichen Leidenschaften von einem Dichter, dessen Menschenliebe keine Grenzen kennt, dennoch mit der kühlen Sachlichkeit des Forschers dargestellt werden.

Das Lebenswerk Poppers ist uns eine Bürgschaft dafür, daß der an den exakten Wissenschaften geschulte Geist, so wie er in der Zeit Galileis den Kampf gegen die mittelalterliche Scholastik eröffnete, wie er im Zeitalter der Aufklärung ihn siegreich zu Ende führte, auch heute noch führend ist in dem Ringen der Menschheit um höhere Lebensformen.

1) Das Recht zu leben und die Pflicht zu sterben, 3. Aufl. Dresden 1903 bei C. Reißner. Das Individuum und die Bewertung menschlicher Existenzen (unter dem Pseudonym Lynkeus). Dresden 1910. Die allgemeine Nährpflicht als Lösung der sozialen Frage. Dresden 1912.

2) Dresden 1899, bei C. Reißner, 12. Aufl. 1909.

1) Berlin 1911, bei M. Krayn.

2) Dresden 1886, bei C. Reißner.

3) Zeitschr. d. österr. Ingen.- u. Arch.-Ver. 1860.

4) Sitzungsber. d. k. böhm. Akad. d. Wiss. Prag 1861.

5) Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. Wien 1865.

Philipp Frank.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über Schwebungen.

(Antwort an Herrn Waetzmann.)

Von E. Budde.

In seiner neuesten Abhandlung¹⁾ ist Waetzmann auf die Theorie der Schwebungen zurückgekommen. Er stellt nach wie vor in Abrede, daß man berechtigt sei, die Schwebungswirkung zweier Töne von den Schwingungszahlen p und q ($p > q$) durch die Gleichung

$$x = 2A \cos 2\pi \frac{p-q}{2} t \cdot \sin 2\pi \frac{p+q}{2} t$$

in bekannter Weise darzustellen. Die Frage läßt sich jetzt, wie ich glaube, soweit klarlegen, daß es gerechtfertigt sein mag, die Meinungsverschiedenheit vor der Öffentlichkeit zum Austrag zu bringen; kleinere vielleicht vorhanden gewesene Mißverständnisse mögen dabei unberücksichtigt bleiben. Die Leser, welche Interesse an der Sache nehmen, seien außer der eben zitierten Waetzmannschen Arbeit auf meine frühere Abhandlung²⁾ verwiesen. Ich beschränke mich hier auf den Fall, daß die in Rede stehenden Töne p und q gleiche Amplitude haben; die Übertragung auf Amplituden von mäßiger Ungleichheit liegt auf der Hand.

Eins der Argumente von Waetzmann möchte ich ganz ausscheiden sehen. Das ist der Satz, den er nunmehr ausspricht in der Fassung:

daß ein „Ton“, dessen Amplitude ein Cosinus oder eine andere periodische Funktion der Zeit ist, eben kein Ton ist, und daß zur Beantwortung der Frage, welche Töne da sind, das Produkt [auf der rechten Seite von Gl. (1)] in Summen zerlegt werden muß.

Man denke sich irgendwo einen stationären Ton, etwa ein a , erzeugt. Man kann die Amplitude der zum Ohr gelangenden Schwingungen mit allbekannten Mitteln innerhalb ziemlich weiter Grenzen beliebig variieren, kann sie auch, etwa mit Hilfe von ausziehbaren Interferenzröhren, mit der Genauigkeit, die das Experiment überhaupt gestattet, periodisch mit sehr langer Periode (z. B. etwa 1 Sekunde) gestalten. Es glaubt wohl niemand, daß der Hörer in solchem Falle etwas anderes vernehmen würde als einen Ton a von periodisch veränderlicher Intensität. Ich vermute auch, daß Herr Waetzmann diesem Satze zustimmen wird; und er kann das, ohne

seiner Auffassung etwas zu vergeben; denn es kommt für die Kontroverse nicht darauf an, ob man überhaupt einen Ton von veränderlicher Amplitude hören kann, sondern darauf, ob das in Frage stehende Produkt der Gl. (1) dann noch

als Ton $\frac{p+q}{2}$ aufzufassen ist, wenn es aus dem Zusammenklang zweier einfachen Töne p und q hervorgeht. Das ist der Kernpunkt des Streites.

Bezüglich dessen stehe ich nun, wie vermutlich alle, die sich mit dem Gegenstand befassen, ganz auf dem von Waetzmann vertretenen Standpunkt des Ohmschen Prinzips: Wir hören einen einfachen Ton, wenn das Ohr von einer (hinreichend großen) Zahl von Wellen getroffen wird, die mit hinreichender Annäherung als reine Sinusschwingungen angesprochen werden können. Ich setze die Worte „mit hinreichender Annäherung“ mit Bedacht zu; denn absolute Regelmäßigkeit zeigt ja kein technischer Vorgang; die Abweichung von der genauen Sinusschwingung darf nur über gewisse auf der Hand liegende Grenzen nicht hinausgehen.

Nun habe ich behauptet und behaupte noch, daß der Faktor $\sin \frac{p+q}{2} t$ als einfacher Ton

$\frac{p+q}{2}$ gehört wird, wenn $p - q$ „sehr klein“

ist. Ich habe diesen Fall ausdrücklich als Grenzfall bezeichnet und dabei den Vorbehalt gemacht, daß das Ohr, um nach Gl. (1) zu perzipieren, Zeit haben muß, die veränderliche Intensität als solche mehr oder weniger bequem zu erfassen. Waetzmann dagegen berechnet und weist mit Hilfe von Schwingungskurven nach, daß der Ton $\frac{p+q}{2}$ nicht hörbar werden

kann, wenn es sich um Intervalle $\frac{p}{q}$ von der

Ordnung $5/4$ oder $7/5$ handelt. Dem stimme ich vollständig zu; aber Intervalle von einer großen Terz und darüber sind im Sinne meiner (und der Starkeschen) Ausführungen nicht „sehr klein“, sondern „groß, fast sehr groß“. Selbstverständlich bedeutet der Satz „ $p - q$ ist klein“ nichts anderes als „ $p - q$ ist klein gegen q “. Wie im allgemeinen, so kann man auch in unserem Falle die Grenze zwischen groß und klein nicht ohne Willkür ziehen. Aber die sinnliche Wahrnehmung gibt hier doch einen recht brauchbaren Anhalt. Das Intervall, welches in meinem Sinne als sehr klein zu gelten hat, läßt sich auf zweierlei Weise charakterisieren:

1) E. Waetzmann, diese Zeitschr. 18, 560, 1917.

2) E. Budde, diese Zeitschr. 18, 285, 1917.

1. Stellt man die Bewegung eines Punktes, an dem die beiden Schwingungen p und q zusammenwirken, graphisch dar, so erscheint sie dem Auge unter dem allbekannten Bilde einer regelmäßig an- und abschwellenden Sinuskurve. Derartige Bilder sind dem Leser wohl aus allen Lehrbüchern bekannt; eine rohe Wiedergabe findet sich als einzige Figur in meiner zitierten Abhandlung, eine bessere in Waetzmans Lehrbuch¹⁾. 2. Nimmt man die Doppelschwingung mit dem Ohr wahr, so präsentiert sie sich wesentlich als ein an- und abschwellender Ton. Dabei ist noch zulässig — und es entspricht den Verhältnissen, die sich bei näherer Betrachtung ergeben —, daß dieser Ton geringe periodische Höhenänderungen aufweist, die, wenn auch nicht allen, so doch manchen Beobachtern zum Bewußtsein kommen. Der Hörer muß dabei, wie oben gesagt, Zeit haben, das An- und Abschwellen der Tonintensität mehr oder weniger bequem zu verfolgen. Von dem Augenblick an aber, wo man deutlich zwei getrennte Töne p und q hört, ist das Intervall $\frac{p}{q}$ nicht mehr „sehr klein“. Für die große Mehrzahl der Menschen ist das sicherlich der Fall, wenn es sich um ein Intervall handelt, das etwa ein Viertel eines ganzen Tones beträgt; die Intervalle, für welche ich Gl. (1) als ausreichende Darstellung der Schwebungen in Anspruch nehme, liegen also etwa zwischen 1 und $31/30$. Man kann bekanntlich mit zwei Stimmgabeln aus der großen Oktave ohne jede Schwierigkeit Schwebungen von zwei Sekunden Dauer hörbar machen. Dann hat man es mit Intervallen etwa von der Ordnung $\frac{201}{200}$ zu tun. Und da bedarf es wohl keiner eingehenden Rechnung, um die Behauptung zu stützen: Die Einzelschwingungen, aus denen sich eine Schwebungsperiode zusammensetzt, weichen von einer regelmäßigen Sinusschwingung der Periode $\frac{1}{200,5}$ so wenig ab, daß das Ohr den ganzen Wellenzug von einer Schwächungszeit zur anderen als einen erst an-, dann abschwellenden Ton wahrnimmt. Man vergleiche damit auch die Regelmäßigkeit der oben zitierten Kurve für $\frac{81}{80}$ in Waetzmans Lehrbuch.

Die hier angegebenen Grenzen, innerhalb deren ich die Gl. (1) für die Darstellung des Schwebungsphänomens in Anspruch nehme, sind so bescheiden, daß ich glaube, auch Herr Waetz-

mann kann mir innerhalb derselben zustimmen. Wie mein im vorstehenden erwähnter Vorbehalt deutlich zeigt, habe ich nie daran gedacht, die Gl. (1) als eine genügende Darstellung des Schwebungsphänomens für Intervalle von mehr als etwa ein Viertel Ton anzusehen, bin auch keineswegs der Meinung, daß das Problem des Zusammenklangs zweier einfachen Töne, selbst wenn man von Kombinationstönen absieht, vollständig gelöst sei. Handelt es sich um den anderen Grenzfall, um sehr große Intervalle, wo die Schwebungserscheinungen praktisch nicht mehr zum Bewußtsein des (naiven) Hörers gelangen, so genügt, wie bekannt, die Darstellung als Summe zweier Töne. Bei mittleren Intervallen bleibt die Frage offen, wie es zugeht, daß das Ohr gleichzeitig zwei getrennte Töne und Schwebungen wahrnimmt, und die wird wohl nicht ohne näheres Eingehen auf die Konstruktion des Ohres zu lösen sein. Die Fouriersche Reihe allein genügt nicht dazu, da sie nur die Summe zweier Töne liefert, ohne über Schwebungen etwas auszusagen.

(Eingegangen 26. Dezember 1917.)

Zur Ableitung der Schwerefeldgleichungen.

Von F. Jung.

Für das Schwerefeld gelten nach Einstein die Gleichungen¹⁾

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \sum_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right), \quad (1)$$

$$\sqrt{-g} = 1,$$

wo

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = - \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \alpha \end{Bmatrix}$$

die negativen Christoffelschen Dreizeiger-Größen zweiter Art sind, gebildet für den „Fundamentaltensor“ $g_{\mu\nu}$, und

$$g = |g_{\mu\nu}|$$

seine Determinante. Die Feldgleichungen sind aufzufassen als Verallgemeinerungen der Laplace-Poissonschen Gleichung der Newtonschen Theorie. Sie werden abgeleitet mit Benutzung des „Riemann-Christoffelschen Tensors“. Im folgenden soll eine Herleitung der linken Seite dieser Gleichungen vorgeführt werden, welche sie unmittelbar liefert durch einen Vorgang, den ich als Bildung der Feldableitung bezeichne. Er spielt eine wichtige Rolle bei der Behandlung der Größenfelder

1) E. Waetzmans, Resonanztheorie des Hörens. Braunschweig 1912, S. 142, vierte Kurve $\frac{81}{80}$.

1) Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Ann. d. Phys. 49, 1916, auch selbständig.

überhaupt. Als Darstellungsmittel bietet sich am passendsten das Rechnen mit Ausdehnungsgrößen, wovon jedoch nur das Nötigste Anwendung finden soll¹⁾.

Die beiden Hauptkante.

Wir nehmen an, daß in einem Ausdehnungsgebiete (Raume) n -ter Stufe (d. h. von n Ausdehnungen) ein Verein (System) von n -Vektoren erster²⁾ Stufe (Strecken) $\bar{a}^i, i = 1, \dots, n$, die Hauptvektoren, so gegeben ist, daß nicht drei davon in eine Ebene fallen, wenn sie von einem Punkte aus gezogen werden. Die Vektoren $\bar{a}^i$ bilden ein n -Kant, das Hauptkant. Außerdem soll ein zweiter Verein angenommen werden von ebenfalls n -Vektoren erster Stufe $\bar{a}_i$ so, daß die Bedingungen erfüllt sind

$$\begin{aligned}\bar{a}_i \bar{a}^i &= 1, \\ \bar{a}_i \bar{a}^k &= 0,\end{aligned}\quad (2)$$

wo der Strich zwischen den Faktoren das innere Produkt bezeichnet. Die zweite Gleichung sagt aus, daß $\bar{a}_i$ senkrecht steht auf allen Hauptvektoren $\bar{a}^k$ außer $\bar{a}^i$. Aus der ersten folgt der Wert a_i von $\bar{a}_i$

$$a_i = \frac{1}{\bar{a}^i \cos(\bar{a}^i \bar{a}_i)}.$$

Die Vektoren $\bar{a}_i$ mögen die Gegenvektoren der $\bar{a}^i$ heißen, ihr n -Kant das Gegenkant des früheren. Geht man von dem Vereine der $\bar{a}_i$ aus, so erhält man als Gegenvektoren zu ihm wieder die $\bar{a}^i$, wie aus den Gleichungen (2) folgt, da die Faktoren vertauschbar sind. Wir bezeichnen deshalb die $\bar{a}_i$ ebenfalls als Hauptvektoren und ihr n -Kant als Hauptkant. Man hat also zwei reziproke Hauptkante, jedes ist das Gegenkant des anderen.

Ein beliebiger Vektor erster Stufe $\bar{c}$ kann offenbar durch die Hauptvektoren beider Vereine dargestellt werden in der Form

$$\bar{c} = \sum_i C_i \bar{a}^i = \sum_i C^i \bar{a}_i. \quad (3)$$

$C_i \bar{a}^i$, bzw. $C^i \bar{a}_i$ ist die Komponente in der Richtung von $\bar{a}^i$, bzw. $\bar{a}_i$. Die Zahlen (Skalare) C_i ,

1) Vgl. auch Jung, Die Feldableitung in allgemeinen Koordinaten. Sitzungsber. d. Kais. Akad. d. Wiss. Wien 126, 1917, wo die ins Spiel kommenden Größen eingehender behandelt sind.

2) Nach der jetzt mehrfach üblichen Benennungsweise müßte man das einen „ n -er-Vektor“ heißen. Mir scheint diese Benennungsart eines Vektors nach der Zahl seiner Komponenten ganz ungeeignet, weil sie abhängt von der Anzahl der Ausdehnungen des Gebietes, in dem der Vektor liegt. Der „Vierervektor“ z. B. des Ausdehnungsgebietes vierter Stufe ist im Gebiete dritter Stufe ein „Dreervektor“, der „Sechservektor“ ein „Dreervektor“ usw. Die Graßmannsche Bezeichnung nach der Stufenzahl des Vektors dagegen hängt nur von diesem ab, ist also für ihn kennzeichnend. In diesem Sinne könnte man allenfalls Einservektor, Zweervektor usw. sagen.

C^i sollen die zugehörigen Komponentenbeiwerte genannt werden. Eine Größe, welche dargestellt wird durch den Ausdruck

$$\bar{a} = \sum \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \dots, \bar{r}$$

wo $\bar{b}, \bar{c}, \dots$ Vektoren erster Stufe sind und der Beistrich als Zeichen der dyadischen Multiplikation dient, ist ein Affinor m -ter Ordnung („Tensor m -ten Ranges“), falls m die Anzahl der Faktoren ist. Die Größe $\bar{b}, \bar{c}, \dots, \bar{r}$ ist eine Polyade m -ter Ordnung. Stellt man die Faktoren durch die Hauptvektoren dar, so folgen für $\bar{a}$ die Ausdrücke

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \sum_i A_{i_1, \dots, i_m} \bar{a}^{i_1} \dots \bar{a}^{i_m} = \sum_i A^{i_1, \dots, i_m} \bar{a}_{i_1} \dots \bar{a}_{i_m} \\ i_1, \dots, i_m &= 1, \dots, n.\end{aligned}\quad (4)$$

Symmetrische Affinoren heißen Tensoren.

Multiplizieren wir einen Vektor erster Stufe $\bar{r}$ innerlich mit einem Affinor zweiter Ordnung $\bar{a}$, so ergibt sich ein neuer zu $\bar{r}$ affiner Vektor erster Stufe $\bar{r}'$

$$\bar{r}' = \bar{r} \bar{a} = \bar{r} (\sum \bar{b}, \bar{c}) = \sum (\bar{r} \bar{b}) \bar{c}, \quad (5)$$

dessen Komponenten in die Richtungen der Vektoren $\bar{c}$ fallen, $(\bar{r} \bar{b})$ sind die Komponentenbeiwerte. Wird $\bar{r}' = \bar{r}$, so ist $\bar{a}$ ein Einheitsaffinor. Für die beiden Hauptkante sind die Einheitsaffinoren

$$\bar{A}_{i,o}^{o,i} = \sum \bar{a}_i \bar{a}^i, \quad \bar{A}_{o,i}^{i,o} = \sum \bar{a}^i \bar{a}_i. \quad (6)$$

Es ist ja z. B. nach (2)

$$\begin{aligned}\bar{r} | \bar{A}_{i,o}^{o,i} &= (\sum_k R_k \bar{a}^k) | (\sum_i \bar{a}_i \bar{a}^i) = \sum_{ik} R_k (\bar{a}^k | \bar{a}_i) \bar{a}^i \\ &= \sum_i R_i \bar{a}^i = \bar{r}.\end{aligned}$$

Nach (5) erhalten wir durch Multiplikation eines Vektors mit $\bar{A}_{i,o}^{o,i}$, bzw. $\bar{A}_{o,i}^{i,o}$ seine Darstellung im Hauptkant der $\bar{a}^i$, bzw. $\bar{a}_i$.

Die Ableitungen der Hauptvektoren.

Wir nehmen an, daß die Hauptkante von Ort zu Ort sich stetig ändern, es soll die Änderung der Hauptvektoren hierbei bestimmt werden. Jenes Hauptkant, in welchem wir den Ortswechsel darstellen, heiße das Längskant, seine Vektoren Längsvektoren, das Gegenkant nennen wir Querkant, seine Vektoren die Quervektoren. Mit $\bar{a}_i$ seien von nun an die Längsvektoren bezeichnet, mit $\bar{a}^i$ die Quervektoren. Ein beliebiges Bogenelement $d\bar{s}$ kann man ausdrücken in der Form

$$d\bar{s} = \sum_i d\bar{s}_i, \quad (7)$$

wo die $d\bar{s}_i$ seine Komponenten sind in den Richtungen des Längskantes. Es ist dann

$$d\bar{s}_i = \bar{a}_i dx^i, \quad (8)$$

also

$$ds_i = a_i dx^i,$$

und

$$(ds)^2 = d\bar{s} | d\bar{s} = \sum_{ik} (\bar{a}_i | \bar{a}_k) dx^i dx^k. \quad (7')$$

Die Bogenelemente $d\bar{s}_i$ können wir ansehen als Änderungen eines Ortsvektors $\bar{r}$, gezogen von einem festen Punkte nach dem Anfangspunkte des Bogenelements $d\bar{s}$. Dann ist

$$d\bar{s}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s_i} ds_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^i} dx^i$$

und daher nach (8)

$$\bar{a}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^i} \quad (9)$$

Setzen wir voraus, daß

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial x^k} \right),$$

so folgt zunächst wegen (9)

$$\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k} = \frac{\partial \bar{a}_k}{\partial x^i}. \quad (10)$$

Für die Änderungen der Hauptvektoren hat man

$$d\bar{a}_i = \sum_k \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial s_k} ds_k = \sum_k \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k} dx^k, \quad (11)$$

$$d\bar{a}^i = \sum_k \frac{\partial \bar{a}^i}{\partial s_k} ds_k = \sum_k \frac{\partial \bar{a}^i}{\partial x^k} dx^k.$$

Um sie in den Hauptkanten auszudrücken, haben wir die Vektoren $\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k}$ und $\frac{\partial \bar{a}^i}{\partial x^k}$ in ihnen darzustellen, was nach Früherem erreicht wird durch innere Multiplikation mit den betreffenden Einheitsaffinoren. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k} &= \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k} | \bar{A}_{m,o}^{o,m} = \sum_m \left(\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k} | \bar{a}^m \right) \bar{a}_m \\ &= \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k} | \bar{A}_{o,m}^{m,o} = \sum_m \left(\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k} | \bar{a}_m \right) \bar{a}^m \\ \frac{\partial \bar{a}^i}{\partial x^k} &= \frac{\partial \bar{a}^i}{\partial x^k} | A_{m,o}^{o,m} = \sum_m \left(\frac{\partial \bar{a}^i}{\partial x^k} | \bar{a}^m \right) \bar{a}_m \\ &= \frac{\partial \bar{a}^i}{\partial x^k} | \bar{A}_{o,m}^{m,o} = \sum_m \left(\frac{\partial \bar{a}^i}{\partial x^k} | \bar{a}_m \right) \bar{a}^m. \end{aligned} \quad (12)$$

Die Komponentenbeiwerte unter den Summenzeichen in den ersten beiden Gleichungen sind gerade die Christoffelschen Dreizeigergrößen¹⁾

$$\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k} | \bar{a}^m = \{ik\}^m, \quad \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k} | \bar{a}_m = [ik]_m. \quad (13)$$

Entsprechend bezeichnen wir

$$\frac{\partial \bar{a}^i}{\partial x^k} | \bar{a}^m = [ik]^m, \quad \frac{\partial \bar{a}^i}{\partial x^k} | \bar{a}_m = \{ik\}_m. \quad (13')$$

Daher wird

$$\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k} = \sum_m \{ik\}^m \bar{a}_m = \sum_m [ik]_m \bar{a}^m \quad (14)$$

$$\frac{\partial \bar{a}^i}{\partial x^k} = \sum_m [ik]^m \bar{a}_m = \sum_m \{ik\}_m \bar{a}^m,$$

was in (11) einzusetzen ist.

Aus (2) folgt durch Differentiation

$$\frac{\partial \bar{a}^i}{\partial x^k} | \bar{a}_m = - \bar{a}^i | \frac{\partial \bar{a}_m}{\partial x^k}$$

und daher nach (13) und (13')

$$\{ik\}_m = - \{mk\}_i. \quad (15)$$

Durch innere Multiplikation mit $\bar{a}_m$ bzw. $\bar{a}^m$ erhalten wir ferner aus (10)

$$\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k} | \bar{a}_m = \frac{\partial \bar{a}_k}{\partial x^i} | \bar{a}_m, \quad \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k} | \bar{a}^m = \frac{\partial \bar{a}_k}{\partial x^i} | \bar{a}^m$$

und demnach wegen (13)

$$[ik]_m = [ki]_m, \quad \{ik\}_m = \{ki\}_m, \quad (16)$$

weiter nach (15)

$$\{ik\}^m = \{im\}^k. \quad (17)$$

Jeder der von Ort zu Ort veränderlichen Hauptvektoren bestimmt ein Vektorfeld. Es sind also in dem Ausdehnungsgebiete n -ter Stufe n -Längenvektorfelder und ebenso viele Quervektorfelder übereinandergelagert. Ferner bestimmt die Gesamtheit der Hauptkanten die Felder der Einheitsaffinoren $\bar{A}_{i,o}^{o,i}$ und $\bar{A}_{o,i}^{i,o}$.

Die Feldableitung.

Wir wollen nun den Begriff der Feldableitung einer Größe G einführen, welche gegeben sei als Funktion des Ortes in dem Ausdehnungsgebiete n -ter Stufe. Um einen Punkt O denken wir uns einen Gebietsteil u abgegrenzt durch ein geschlossenes Gebilde $n-1$ -ter Stufe (Oberfläche). Die Elemente dieser Hülle sollen $d\bar{v}$ heißen. Sie sind unendlich kleine Vektoren $n-1$ -ter Stufe und mögen mit einem solchen Durchlaufungssinne genommen werden, daß ihre (senkrechte) Ergänzung aus u hinausgerichtet ist. Die Ergänzung jedes Hüllenelementes, $d\bar{v}$, werde in irgendeiner Art multipliziert mit dem zugehörigen G , das Integral dieser Produkte genommen über die ganze Hülle und hierauf durch die Maßzahl u dividiert. Zieht man die Hülle um

1) Vgl. Jung, a. a. O.

den Punkt O zusammen, läßt also u gegen Null abnehmen, so heiße der Grenzwert der so erhaltenen Größe die Feldableitung von G im Punkte O . Sie werde bezeichnet durch $\nabla \sim G$, wo das Zeichen $\sim$ für das jeweilige Multiplikationszeichen gesetzt ist¹⁾, also

$$(18) \quad \nabla \sim G = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} \int d\bar{v} \sim G.$$

Man kann auch setzen

$$(18') \quad \nabla \sim G = \frac{1}{du} \sum d\bar{v} \sim G.$$

wo du das Gebietselement ist um O in Gestalt eines unendlich kleinen Übervielles, $d\bar{v}$ die Elemente seiner Hülle. Das Element du wählt man am einfachsten so, daß seine Kanten zusammenfallen mit den Längsvektoren der Eckpunkte, die Hüllenelemente also mit den Über-ebenen der Längskante in den Eckpunkten. Man findet dann für $\nabla \sim G$ den Ausdruck¹⁾

$$(19) \quad \nabla \sim G = \sum_i \bar{a}^i \frac{\partial G}{\partial x^i},$$

wo die $\bar{a}^i$ die Quervektoren sind.

Die Feldableitungsbildung ist ein Vorgang, welcher bekanntlich dazu dient, aus einem Größenfelde andere abzuleiten. Er liefert z. B. zu einem Skalarfelde den Gradienten, zu einem Vektorfelde die Divergenz, den Rotor (Wirbel) usw.²⁾.

Wir nehmen jetzt an, daß die Skalare x^i allgemeine Koordinaten sind in dem Ausdehnungsgebiete n -ter Stufe. Aus (9) erhellt, daß die Längsvektoren $\bar{a}_i$ in die Tangentenrichtungen der Koordinatenlinien fallen, weshalb die Quervektoren senkrecht stehen auf den Koordinaten-überflächen. Fassen wir x^k als Feldgröße auf, so wird ihr Gradient

$$\nabla x^k = \sum_i \bar{a}^i \frac{\partial x^k}{\partial x^i}.$$

Da jedoch die Koordinaten als voneinander unabhängig vorausgesetzt werden, ist

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^i} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{,, } i = k \end{cases}$$

und deshalb

$$(20) \quad \nabla x^k = \bar{a}^k.$$

Die Quervektoren sind also die Gradienten der Koordinaten.

Bedeutet y^i andere Koordinaten, so sind diese Funktionen der x^i und umgekehrt

$$y^i = y^i(x^1, \dots, x^n), \quad x^i = x^i(y^1, \dots, y^n).$$

Dann ist

$$(21) \quad dx^i = \sum_k \frac{\partial x^i}{\partial y^k} dy^k, \quad dy^i = \sum_k \frac{\partial y^i}{\partial x^k} dx^k,$$

¹⁾ Das Zeichen ∇ (Nubla) könnte kurz „Fa“ gelesen werden.

²⁾ Vgl. Jung, a. a. O.

die Koordinatendifferentiale dx^i, dy^i sind also kontravariante Größen. Für die Ableitungen des Ortsvektors $\bar{r}$ folgt

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial x^i} = \sum_k \frac{\partial \bar{r}}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial y^i} = \sum_k \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial y^i}.$$

Bezeichnen wir mit $\bar{b}_i$ die Längsvektoren der Koordinaten y^i , also

$$\bar{b}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial y^i},$$

so gehen die vorigen Gleichungen nach (9) über in

$$(22) \quad \bar{a}_i = \sum_k \bar{b}_k \frac{\partial y^k}{\partial x^i}, \quad \bar{b}_i = \sum_k \bar{a}_k \frac{\partial x^k}{\partial y^i},$$

die Längsvektoren sind demnach kovariant. Sind $\bar{b}^i$ die Gegenvektoren der $\bar{b}_i$, so gilt mit Rücksicht auf (2) die Gleichung

$$\sum_k \bar{a}_k \bar{a}^k = \sum_i \bar{b}_i \bar{b}^i = n = \text{const},$$

woraus durch Einsetzen des Ausdruckes von $\bar{b}_i$ nach (22) folgt

$$\sum_k \bar{a}_k \bar{a}^k = \sum_i \sum_k \bar{a}_k \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \bar{b}^i$$

und daher für $\bar{a}^k$ und ebenso für $\bar{b}^k$

$$(23) \quad \bar{a}^k = \sum_i \bar{b}^i \frac{\partial x^k}{\partial y^i}, \quad \bar{b}^k = \sum_i \bar{a}^i \frac{\partial y^k}{\partial x^i}.$$

Die Quervektoren sind also kontravariant.

Der Bildungsvorgang bei der Feldableitung ist unabhängig vom Koordinatenvereine. Daher ist zu erwarten, daß er invariant ist bei beliebigen Koordinatentransformationen. Dies bestätigt sich, denn es wird

$$\begin{aligned} \nabla \sim G &= \sum_i \bar{a}^i \frac{\partial G}{\partial x^i} = \sum_i \bar{a}^i \left(\sum_k \frac{\partial G}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \right) \\ &= \sum_k \left(\sum_i \bar{a}^i \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \right) \frac{\partial G}{\partial y^k}. \end{aligned}$$

Nach (23) ist also

$$(24) \quad \sum_i \bar{a}^i \frac{\partial G}{\partial x^i} = \sum_k \bar{b}^k \frac{\partial G}{\partial y^k}.$$

Die Feldableitungen der Längsvektoren.

Für den Einheitsaffinor $\bar{A}_{i,o}^o$, jetzt kurz mit $\bar{A}$ bezeichnet, erhalten wir nach (19) als Feldableitung erster Ordnung

$$\begin{aligned} \nabla \sim \bar{A} &= \sum_k \bar{a}^k \frac{\partial}{\partial x^k} (\sum_i \bar{a}_i, \bar{a}^i) \\ &= \sum_{ki} \bar{a}^k \left(\frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k}, \bar{a}^i + \bar{a}_i, \frac{\partial \bar{a}^i}{\partial x^k} \right). \end{aligned}$$

Hält man in $\bar{A}$ bei der Ableitungsbildung die Rechtsfaktoren konstant, so fällt das zweite Klammernglied weg und es ist

$$\nabla \sim \bar{A} = \sum_i (\nabla \sim \bar{a}_i), \bar{a}^i. \quad (25)$$

Die Feldableitung zweiter Ordnung wird dann

$$\begin{aligned} \nabla \sim (\nabla \sim \bar{A}) &= \sum_{ki} \bar{a}^k \sim \frac{\partial}{\partial x^k} [(\nabla \sim \bar{a}_i), \bar{a}^i] \\ &= \sum_{ki} \bar{a}^k \sim \frac{\partial}{\partial x^k} (\nabla \sim \bar{a}_i), \bar{a}^i, \end{aligned}$$

weil wieder das zweite Glied wegfällt, oder

$$\nabla \sim (\nabla \sim \bar{A}_i) = \sum_i [\nabla \sim (\nabla, \bar{a}_i)], \bar{a}^i. \quad (26)$$

Es kommt also auf die Feldableitung des Längsvektors $\bar{a}_i$ an, wie aus (25) und (26) ersichtlich.

Wegen (14) wird

$$\begin{aligned} \nabla \sim \bar{a}_i &= \sum_k \bar{a}^k \sim \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k} = \sum_{km} \left\{ \begin{matrix} ik \\ m \end{matrix} \right\} \bar{a}^k \sim \bar{a}_m \\ &= \sum_{km} \left[\begin{matrix} ik \\ m \end{matrix} \right] \bar{a}^k \sim \bar{a}^m. \end{aligned} \quad (27)$$

Nimmt man für $\sim$ das innere Produkt, so wird wegen (2)

$$\nabla | \bar{a}_i = \sum_k \left\{ \begin{matrix} ik \\ k \end{matrix} \right\} = \sum_{km} \left[\begin{matrix} ik \\ k \end{matrix} \right] \bar{a}^k | \bar{a}^m. \quad (28)$$

Hierfür läßt sich noch ein anderer Ausdruck finden. Es ist nach (10)

$$\nabla | \bar{a}_i = \sum_k \bar{a}^k | \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial x^k} = \sum_k \frac{\partial \bar{a}_k}{\partial x^i} | \bar{a}^k$$

und bei Einführung der äußeren Multiplikation, bezeichnet durch $\wedge$, statt der inneren

$$\nabla | \bar{a}_i = \sum_k \frac{\partial \bar{a}_k}{\partial x^i} \wedge \bar{a}^k,$$

wo $\bar{a}^k$ die (senkrechte) Ergänzung von $\bar{a}^k$ bedeutet.

Setzen wir das äußere Produkt

$$\bar{a}_{i_1} \wedge \bar{a}_{i_2} \wedge \dots \wedge \bar{a}_{i_m} = \bar{a}_{i_1 \dots i_m},$$

so stellt $\bar{a}_{i_1 \dots i_m}$ einen Vektor m -ter Stufe dar, welcher durch die Faktoren in der gegebenen Reihenfolge bestimmt ist. Der Vektor n -ter Stufe

$$\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n = \bar{a}_1 \wedge \bar{a}_2 \wedge \dots \wedge \bar{a}_n$$

ist im Ausdehnungsgebiete n -ter Stufe ein Skalar (Zahl). Es sei nun

$$\bar{a}_i \wedge \bar{a}_{k_1 \dots k_{n-1}} = \bar{a}_{i k_1 \dots k_{n-1}}, \quad i \neq k,$$

wo $\bar{a}_{k_1 \dots k_{n-1}}$ das äußere Produkt der $n-1$ Hauptvektoren $\bar{a}_k$ außer $\bar{a}_i$ bedeuten soll in einer solchen Reihenfolge, daß diese Gleichung auch dem Vorzeichen nach befriedigt ist. Dann wird

$$\bar{a}_i \wedge \frac{\bar{a}_{k_1 \dots k_{n-1}}}{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n} = 1,$$

$$\bar{a}_k \wedge \frac{\bar{a}_{k_1 \dots k_{n-1}}}{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n} = 0, \quad k = k_1, \dots, k_{n-1}$$

während nach (2)

$$\bar{a}_i \wedge \bar{a}^i = 1, \quad \bar{a}_k \wedge \bar{a}^i = 0.$$

Demnach hat man

$$\bar{a}^i = \frac{\bar{a}_{k_1 \dots k_{n-1}}}{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n}, \quad i \neq k.$$

In den letzten Ausdruck für $\nabla | \bar{a}_i$ eingesetzt liefert dies

$$\begin{aligned} \nabla | \bar{a}_i &= \frac{1}{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n} \sum_k \frac{\partial \bar{a}_k}{\partial x^i} \wedge \bar{a}_{j_1 \dots j_{n-1}} \\ &= \frac{1}{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n} \frac{\partial \bar{a}_1 \dots \bar{a}_n}{\partial x^i}. \end{aligned} \quad (29)$$

In (23) sind die Koeffizienten von $\bar{a}^k \sim \bar{a}_m$ und $\bar{a}^m \sim \bar{a}_k$ gleich wegen (16). Setzen wir also für $\sim$ das dyadische Produkt, so ist der Affinor

$$\nabla, \bar{a}_i = \sum_{km} \left\{ \begin{matrix} ik \\ m \end{matrix} \right\} \bar{a}^k, \bar{a}_m = \sum_{km} \left[\begin{matrix} ik \\ m \end{matrix} \right] \bar{a}^k, \bar{a}^m \quad (30)$$

ein Tensor.

Die Feldableitung zweiter Ordnung von $\bar{a}$ wird

$$\begin{aligned} \nabla \sim (\nabla \sim \bar{a}_i) &= \sum_h \bar{a}^h \sim \frac{\partial}{\partial x^h} \left(\sum_{km} \left\{ \begin{matrix} ik \\ m \end{matrix} \right\} \bar{a}^k \sim \bar{a}_m \right) \\ &= \sum_{hkm} \left[\begin{matrix} ik \\ m \end{matrix} \right] \bar{a}^h \sim \bar{a}^k \sim \bar{a}_m \\ &\quad + \left\{ \begin{matrix} ik \\ m \end{matrix} \right\} \bar{a}^h \sim \left(\frac{\partial \bar{a}_k}{\partial x^h} \sim \bar{a}_m + \bar{a}^k \sim \frac{\partial \bar{a}_m}{\partial x^h} \right). \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf (14) folgt durch Einsetzen

$$\begin{aligned} \nabla \sim (\nabla \sim \bar{a}_i) &= \sum_{hkm} \bar{a}^h \sim \left[\frac{\partial}{\partial x^h} \left\{ \begin{matrix} ik \\ m \end{matrix} \right\} \bar{a}^k \sim \bar{a}_m \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \begin{matrix} ik \\ m \end{matrix} \right\} \left(\sum_p \left\{ \begin{matrix} kh \\ p \end{matrix} \right\} \bar{a}^p \sim \bar{a}_m + \bar{a}^k \sim \sum_p \left\{ \begin{matrix} mh \\ p \end{matrix} \right\} \bar{a}_p \right) \right]. \end{aligned}$$

Das mittlere Glied gestalten wir um nach (15) und ordnen nach den Hauptvektoren. Dann ist

$$\begin{aligned} \nabla \sim (\nabla \sim \bar{a}_i) &= \sum_{hkm} \left[\frac{\partial}{\partial x^h} \left\{ \begin{matrix} ik \\ m \end{matrix} \right\} - \sum_p \left\{ \begin{matrix} ip \\ m \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} kh \\ p \end{matrix} \right\} \right] \bar{a}^h \sim \bar{a}^k \sim \bar{a}_m \\ &\quad + \sum_p \left\{ \begin{matrix} ik \\ p \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} ph \\ m \end{matrix} \right\} \bar{a}^h \sim \bar{a}^k \sim \bar{a}_m. \end{aligned} \quad (31)$$

Dies ist gleichzeitig bei Ersetzung des Zeichens $\sim$ durch $\cdot$ (Beistrich) der Ausdruck für die dyadische Feldableitung zweiter Ordnung.

Beim Rechnen mit Polyaden ist die Verwendung einer Multiplikationsart vorteilhaft, welche ich als mehrfaltiges Produkt bezeichne¹⁾. Sie werde angedeutet durch Verdoppelung des Multiplikationszeichens und ist bestimmt durch die Gleichung beispielsweise

$$(\bar{a}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{c}_k, \dots, \bar{d}_m, \dots, \bar{e}_r, \dots) \overset{k \times m \dots}{\underset{q \times \mu \dots}{\approx}}$$

1) Vgl. Jung, a. a. O.

$$\begin{aligned}
 & (\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\gamma}_n, \dots, \bar{\delta}_m, \dots, \bar{\epsilon}_p, \dots) \\
 & = (\bar{c}_k \sim \bar{\epsilon}_p), (\bar{e}_r \sim \bar{\gamma}_n), (\bar{d}_m \sim \bar{\delta}_\mu), \dots \\
 & \bar{a}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{a}_1, \bar{\beta}_2, \dots
 \end{aligned} \quad (32)$$

wo $\bar{a}, \bar{b}, \dots, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \dots$ irgendwelche Vektoren sind und durch die Zeiger die Stellung der Faktoren angedeutet ist in den beiden gegebenen Polynomen. Besondere Fälle dieser Multiplikation finden sich schon bei Gibbs¹⁾, z. B. das mehrfaltige innere Produkt. Eben dieses wollen auch wir jetzt benutzen, um von der dyadischen Feldableitung $\nabla, \bar{a}_i$ die mehrfaltige innere Feldableitung zu berechnen, und zwar

$$\nabla_{\frac{1}{2}}^I(\nabla, \bar{a}_i) = \sum_h \bar{a}_h^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x^h} \left(\sum_m \begin{Bmatrix} ik \\ m \end{Bmatrix} a^k, \bar{a}_m \right).$$

Wir bekommen das Ergebnis aus der Formel (31) offenbar durch Ersetzung des ersten Zeichens $\sim$ durch $\frac{1}{2}$, des zweiten durch den Beistrich, also zeitgemäß (32)

$$\bar{a}_h^{\frac{1}{2}} (\bar{a}^k, \bar{a}_m) = (\bar{a}^k | \bar{a}_m) \bar{a}^k.$$

Wegen (2) bleiben nur jene Glieder übrig, für die $h=m$ wird, also

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\frac{1}{2}}^I(\nabla, \bar{a}_i) &= \sum_{hk} \left[\frac{\partial}{\partial x^h} \begin{Bmatrix} ik \\ h \end{Bmatrix} - \sum_p \begin{Bmatrix} ip \\ h \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} kh \\ p \end{Bmatrix} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_p \begin{Bmatrix} ik \\ p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} ph \\ h \end{Bmatrix} \right] \bar{a}^k.
 \end{aligned}$$

Im dritten Gliede der eckigen Klammer läßt sich der Faktor $\begin{Bmatrix} ik \\ p \end{Bmatrix}$ herausheben bei der Summation nach h und dann wird nach (28) und (29)

$$\begin{aligned}
 \sum_{hp} \begin{Bmatrix} ik \\ p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} ph \\ h \end{Bmatrix} &= \sum_p \begin{Bmatrix} ik \\ p \end{Bmatrix} \left(\sum_h \begin{Bmatrix} ph \\ h \end{Bmatrix} \right) \\
 &= \frac{1}{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n} \sum_p \frac{\partial \bar{a}_1 \dots \bar{a}_n}{\partial x^p} \begin{Bmatrix} ik \\ p \end{Bmatrix}.
 \end{aligned} \quad (33)$$

Wir haben daher

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\frac{1}{2}}^I(\nabla, \bar{a}_i) &= \sum_{hk} \left[\frac{\partial}{\partial x^h} \begin{Bmatrix} ik \\ h \end{Bmatrix} - \sum_p \begin{Bmatrix} ip \\ h \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} kh \\ p \end{Bmatrix} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n} \sum_p \frac{\partial \bar{a}_1 \dots \bar{a}_n}{\partial x^p} \begin{Bmatrix} ik \\ p \end{Bmatrix} \right] \bar{a}^k.
 \end{aligned} \quad (34)$$

Die Feldableitungen des Affinors $\bar{A}$ ergeben sich nun ohne weiteres durch Einsetzen der gewonnenen Ausdrücke in (25) und (26)

Die Schwerefeldgleichungen.

Betrachtet man den erhaltenen Ausdruck (34) der Feldableitung zweiter Ordnung, so fällt seine Übereinstimmung auf mit der linken Seite der Einsteinschen Schwerefeldgleichungen. Wird über g keine Annahme gemacht, so lautet jene linke Seite

1) Gibbs-Wilson, Vector Analysis, New Haven, 1913.

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left\{ \frac{\mu \nu}{\alpha} \right\} + \sum_{\alpha \beta} \left\{ \frac{\mu \alpha}{\beta} \right\} \left\{ \frac{\nu \beta}{\alpha} \right\} \\
 & + \frac{\partial^2 \lg \sqrt{-g}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \sum_{\alpha} \left\{ \frac{\mu \nu}{\alpha} \right\} \frac{\partial \lg \sqrt{-g}}{\partial x^{\alpha}}.
 \end{aligned}$$

Dies ist bis auf das dritte Glied genau der Komponentenbeiwert in $\nabla_{\frac{1}{2}}^I(\nabla, \bar{a}_i)$, Letztere

Größe ist unmittelbar die Verallgemeinerung der linken Seite in der Laplace-Poissonschen Gleichung

$$\nabla(\nabla \varphi) = -x \rho,$$

(φ Schwerepotential, ρ Massendichte), so daß man als Feldgleichungen versuchen könnte

$$\nabla_{\frac{1}{2}}^I(\nabla, \bar{a}_i) = -x \sum_k \bar{a}_k^k,$$

bzw. nach (26) für den Schwereaffinor

$$\nabla_{\frac{1}{2}}^I(\nabla, \bar{A}) = -x \bar{C}, \quad (35)$$

wo

$$\bar{C} = \sum_{ki} C_{ki} \bar{a}^k, \bar{a}^i.$$

Aus dem Ausdrucke

$$\nabla_{\frac{1}{2}}^I(\nabla, \bar{A}) = \sum_i [\nabla_{\frac{1}{2}}^I(\nabla, \bar{a}_i)], \bar{a}^i$$

[gemäß (26)], ist nach Einsetzung aus (34) wegen der Symmetrie in i und k ersichtlich, daß dies ein Tensor ist.

Wählt man zur Vereinfachung das Koordinatensystem so, daß

$$\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n = \text{const},$$

dann fällt in (34) das letzte Klammernglied weg und (35) geht über in die Formeln (1). Aus der Beziehung (29) folgt dann

$$\nabla | \bar{a}_i = 0,$$

die Divergenz der Längsvektoren verschwindet. Solange also die Längsvektoren endlich bleiben, können die Koordinatenlinien derselben Schar einander nicht schneiden bei einem derartigen Koordinatensystem.

Wien, 24. Dezember 1917.

(Eingegangen 27. Dezember 1917.)

Absorptionsgesetze für Röntgenstrahlen.

Von R. Glocker.

Das Absorptionsverhalten jedes chemischen Elements gegenüber von homogenen Röntgenstrahlen verschiedener Wellenlänge läßt sich, wie Kossel¹⁾ und Siegbahn²⁾ gezeigt haben, in folgender Weise graphisch darstellen (Fig. 1): An gewissen Stellen des Spektrums erleidet der

1) Verh. d. D. Phys. Ges. 16, 898, 1914.

2) Diese Zeitschr. 15, 753, 1914.

Absorptionskoeffizient plötzlich einen Sprung, während in den Spektralbezirken zwischen zwei solchen selektiven Absorptionsgebieten der Absorptionskoeffizient μ eine stetige, monotone Funktion der Wellenlänge λ ist. Diese Funktion ist bei allen bisher untersuchten Elementen eine lineare, wenn $\lg \mu$ und $\lg \lambda$ als Variable gewählt werden.

Zur ausreichenden Beschreibung der Absorptionseigenschaften irgendeines Elements sind somit folgende Bestimmungsstücke erforderlich:

I. Spektrale Lage der selektiven Absorptionsstellen.

II. Zahlenwerte der beiden Konstanten in der Gleichung zwischen $\lg \mu$ und $\lg \lambda$ für jeden Spektralbezirk zwischen zwei selektiven Stellen.

III. Größe des Sprunges im Absorptionskoeffizienten für jede dieser selektiven Stellen.

Von den beiden bisher bekannten selektiven Absorptionsgebieten ist das der *K*-Sekundärstrahlungsemission entsprechende am eingehendsten erforscht worden, da das *L*-Absorptionsgebiet bei Verwendung der gewöhnlichen Röntgenröhren nur bei sehr wenigen Elementen (*Pt* usw.) in Erscheinung tritt. Die folgenden Betrachtungen werden sich daher ausschließlich mit dem *K*-Absorptionsgebiet befassen.

I. Die genaue Lage der der *K*-Emission entsprechenden Absorptionsbandkante λ_A ist für die Elemente *Fe* bis *Er* von E. Wagner¹⁾ bestimmt worden, welcher das Resultat seiner Messungen in der Gleichung

$$r_A = 1,08 \cdot 10^5 (Z - 3,5)^2 \quad (1)$$

zusammenfaßt; $r_A = \frac{1}{\lambda_A}$ ist die Frequenz der

Bandkante und *Z* bedeutet die Ordnungszahl des betreffenden Elements im periodischen System. Die überraschend große Schärfe der Bandkante auf den Spektralaufnahmen deutet darauf hin, daß der Sprung im Zahlenwert des Absorptionskoeffizienten sich in einem außerordentlich engen Spektralbereich vollzieht. Die Verbindung der beiden logarithmischen Geraden (G_1 und G_2 in Fig. 1) durch eine vertikale Gerade an der Stelle λ_A gibt somit ein physikalisch richtiges Bild der Absorptionserscheinungen, sobald die Gültigkeitsgrenze von G_1 auf $\lambda \leq \lambda_A$, von G_2 auf $\lambda > \lambda_A$ festgesetzt wird.

II. Durch Verknüpfung der Barklaschen Absorptionskoeffizienten der Eigenstrahlungen

¹⁾ Ann. d. Phys. 46, 868, 1915; Bayr. Akad. d. Wiss., 4. April 1916.

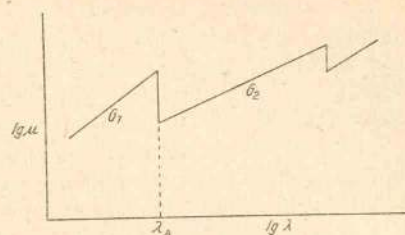


Fig. 1.

der Elemente mit den von Moseley ermittelten Wellenlängenwerten haben Kossel und Siegbahn für die Absorption beiderseits der Bandkante λ_A folgende Beziehungen erhalten:

$$\frac{\mu}{\rho} = A \lambda^b \quad \text{für } \lambda > \lambda_A \quad (2)$$

ρ = Dichte

$$\frac{\mu}{\rho} = A' \lambda^b \quad \text{für } \lambda \leq \lambda_A. \quad (3)$$

Die Geraden G_1 und G_2 wären also in Fig. 1 zueinander parallel zu zeichnen. Die Werte von b sind von Element zu Element nur wenig verschieden und liegen zwischen den Grenzen 2,55 und 2,90, während die Konstanten A und A' mit zunehmendem Atomgewicht größer werden.

III. Über die Größe des Sprunges des Absorptionskoeffizienten an der Stelle λ_A ist sehr wenig bekannt. Kossel gibt an, daß er bei den Elementen der Gruppe *Fe* bis *Zn* 7,4, beim Aluminium 11 beträgt.

Die in der Zwischenzeit erfolgte Veröffentlichung weiteren experimentellen Materials gibt näheren Aufschluß in bezug auf die Punkte II und III. Die untere Gültigkeitsgrenze der Absorptionsgesetze [Gleichungen (2) und (3)], welche bisher nur für Wellenlängen $\lambda \geq 0,56 \cdot 10^{-8}$ cm experimentell gesichert waren, kann um ein beträchtliches Stück vorgeschoben werden. Ferner ist es möglich für eine große Reihe von Elementen die charakteristischen Konstanten A und A' zu bestimmen, so daß die wichtige Frage, ob sich die Werte A und A' in eine einfache Beziehung zu der fundamentalen Größe Z bringen lassen, mit Erfolg in Angriff genommen werden kann.

1. Absorption in Aluminium.

Das Element, dessen Absorptionseigenschaften am genauesten untersucht worden sind, ist das Aluminium. Wie die Fig. 2 zeigt, erstreckt sich hier die experimentell geprüfte Gültigkeit der Gleichung (3) auf den großen Wellenlängenbereich von $\lambda = 0,15 \cdot 10^{-8}$ bis $\lambda = 5,4 \cdot 10^{-8}$ cm.

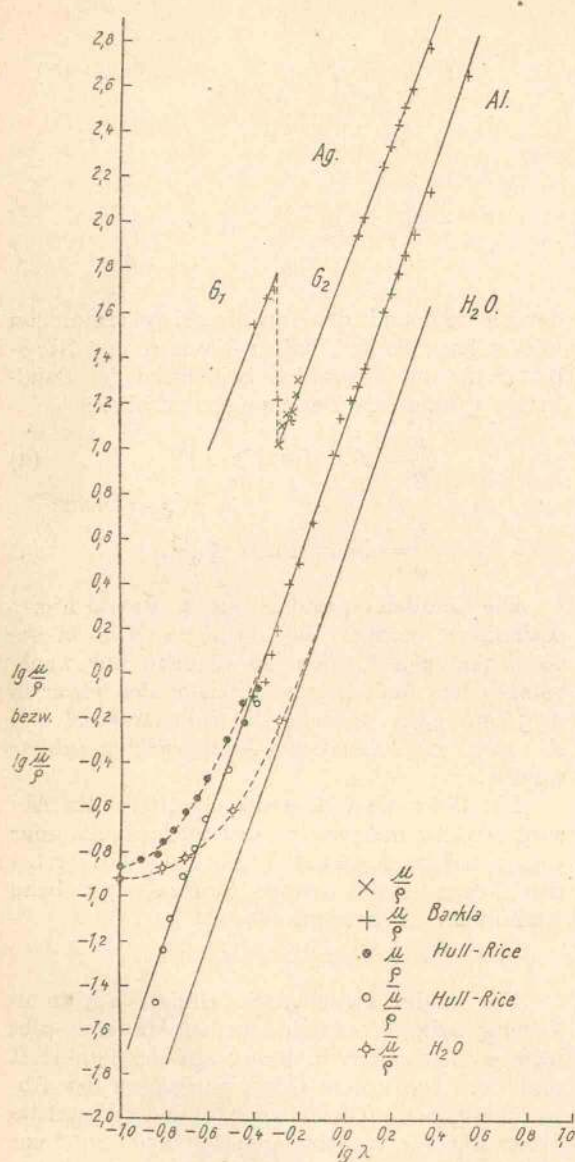


Fig. 2.

Eine Extrapolation bis etwa $\lambda = 7,8 \cdot 10^{-8}$, wo die selektive Absorptionsstelle λ_A liegen dürfte — eine direkte, experimentelle Bestimmung steht noch aus — erscheint ohne weiteres erlaubt. Bei einer Diskussion der unteren Grenze ist zu beachten, daß nicht der direkt ermittelte, (μ) , sondern der „korrigierte“ Absorptionskoeffizient $(\bar{\mu})$ diesem einfachen Gesetz gehorcht. Zwischen beiden Größen besteht die Gleichung

$$\mu = \bar{\mu} + s \quad s = \text{Zerstreuungskoeffizient.} \quad (4)$$

Bei Absorptionsmessungen im kurzwelligen Gebiet ist nämlich ein großer Prozentsatz der beim Durchgang durch die Schicht beobachteten Abnahme der Primärenergie auf Rechnung der

entstehenden Streustrahlung zu setzen. Für Aluminium ist schon bei $\lambda = 0,2 \cdot 10^{-8}$ cm dieser Verlust infolge Streuung von der gleichen Größenordnung wie der „wahre“ Absorptionsverlust infolge Transformation der Primärenergie in Wärme und in solche Strahlungsenergien, die als charakteristische Sekundärstrahlung und als sekundäre Korpustularstrahlung wieder in Erscheinung treten. Die im kurzwelligen Gebiet der Fig. 2 eingezeichneten Werte $\left(\frac{\mu}{\rho}\right)$ experimen-

teller, $\frac{\bar{\mu}}{\rho}$ korrigierter Massenabsorptionskoeffizient

entstammen Messungen von Hull und Rice¹⁾ an isolierten, engen Spektralbezirken des Impulsspektrums einer technischen Röntgenröhre. Der

von Hull und Rice für $\frac{s}{\rho}$ eingesetzte Wert 0,12

ist kleiner als der bekannte Barklasche Wert 0,2, welcher vom Härtegrad unabhängig und für alle leichten Elemente gleich groß sein soll. Obgleich aus der Arbeit von Hull und Rice nicht hervorgeht, auf welche Weise die Verfasser gerade zu dem Wert 0,12 gelangen, darf als sicher gelten, daß der Barklasche Wert 0,2 für die ganz kurzen Wellenlängen zu groß ist²⁾.

Für $\lambda = 0,16 \cdot 10^{-8}$ cm ergibt sich nämlich der experimentelle, unkorrigierte Absorptionskoeffizient $\frac{\mu}{\rho}$ zu 0,18, also kleiner als $\frac{s}{\rho}$ (nach Barkla),

während aus energetischen Gründen immer $\frac{\mu}{\rho} > \frac{s}{\rho}$ sein muß. Es liegt der Gedanke nahe

zu vermuten, daß der Streukoeffizient $\frac{s}{\rho}$ mit

abnehmender Wellenlänge im kurzwelligen Gebiet ebenfalls abnimmt. Diese Annahme wird gestützt durch die Messungen von Ishino³⁾, welcher für sehr harte γ -Strahlen bei Aluminium

$\frac{s}{\rho}$ zu 0,04 bestimmte. In diesem Zusammenhang

betrachtet, gewinnt auch die auffallend große Abweichung des letzten Versuchspunktes in Fig. 2 ($\lg \lambda = -0,83$) eine prinzipielle Bedeutung; bei dieser Wellenlänge ($\lambda = 0,15 \cdot 10^{-8}$ cm) scheint

demnach $\frac{s}{\rho}$ bereits kleiner als 0,12 zu sein.

Es ist von vornherein zu erwarten, daß auch

1) Phys. Rev. 8, 326, 1916.

2) Phil. Mag. 33, 129, 1917.

3) Die diesbezüglichen Messungen Barklas erstrecken sich nicht sehr weit in das kurzwellige Gebiet. Die unter Benutzung dieses Wertes 0,2 berechneten Werte $\frac{\bar{\mu}}{\rho}$ würden mit abnehmender Wellenlänge von der Geraden in Fig. 2 stark nach unten abweichen.

die Absorption der γ -Strahlen des Radiums dem in Fig. 2 dargestellten Gesetz gehorcht. Eine genaue Prüfung wird erschwert durch die Inhomogenität der γ -Strahlen und durch die Verschiedenheit der Angaben der Absorptionskoeffizienten, welche bekanntlich von der besonderen Art der Versuchsanordnung abhängig sind¹⁾.

Tabelle I enthält einige Zahlenwerte für $\frac{\mu}{\rho}$ (experimenteller, unkorrigierter Massenabsorptionskoeffizient), aus dem durch Abzug von $\frac{s}{\rho}$ nach Gleichung 4 die wahre Absorption $\frac{\mu}{\rho}$ erhalten wird.

Tabelle I.

Clelland ²⁾	$\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{Al} = 0,038$
Rutherford ³⁾	0,042
Keetman ⁴⁾	0,05
Ishino ⁵⁾	0,066.

Die einzige experimentelle Bestimmung von $\frac{s}{\rho}$ findet sich bei Ishino, welcher $\frac{\mu}{\rho} = 0,026$ aus seinen Messungen berechnet. Nach Fig. 2 wäre diesem Wert eine Wellenlänge $\lambda = 0,12 \cdot 10^{-8}$ cm zuzuordnen, während sich aus den Spektralaufnahmen von Rutherford³⁾ für das kurzwellige γ -Strahlenspektrum von Radium B und C eine mittlere Wellenlänge $\lambda = 0,13 \cdot 10^{-8}$ cm ergibt. Das für Röntgenstrahlen aufgestellte Absorptionsgesetz behält somit seine Gültigkeit auch bei der Absorption der sehr durchdringungsfähigen γ -Strahlen. Wenn man bedenkt, daß der optisch sichtbare Teil des Spektrums nur eine Oktave umfaßt, so erscheint es sehr bemerkenswert, daß die einfache Absorptionsbeziehung des Aluminiums in einem Bereich von mehr als sechs Oktaven sich als gültig erweist. Für die Frage der noch unsicheren Existenz einer J-Serienemission läßt sich hieraus folgern, daß für Aluminium die Wellenlänge der entsprechenden Absorptionsbandkante λ_J sicher kleiner als $0,1 \cdot 10^{-8}$ cm sein muß, während für alle Elemente mit höheren Atomgewichten λ_J bei noch kürzeren Wellenlängen zu suchen ist.

2. Absorption in Wasser.

In verschiedenen neueren Arbeiten wurde darauf hingewiesen, daß das Verhältnis der Ab-

sorptionskoeffizienten von Aluminium und Wasser mit zunehmendem Härtegrad der Strahlung abnimmt. Bei einer Erklärung dieser zunächst überraschenden Beobachtung — beim Ausschluß selektiver Absorptionsgebiete ist bekanntlich das Verhältnis der Absorptionskoeffizienten zweier Elemente eine von der Wellenlänge unabhängige Konstante — sind folgende Möglichkeiten in Betracht zu ziehen.

1. Vorhandensein einer selektiven Absorptionsstelle des Wassers. (Das „normale“ Absorptionsverhalten des Aluminiums wurde bereits oben bewiesen.)

2. Erhebliche Verschiedenheit der Werte von b für Aluminium und Wasser.

3. Einfluß des bei der Absorptionsmessung auftretenden Energieverlustes infolge Streuung, welcher bei beiden Elementen einen verschiedenen großen Bruchteil der gesamten, gemessenen Absorption beträgt.

Eigene Versuche¹⁾ des Verfassers mittels der auf Seite 334 des Jahrganges 1917 dieser Zeitschrift beschriebenen Methode widerlegen die an und für sich wenig wahrscheinliche Annahme einer Anomalie der Absorption des Wassers.

Sucht man die Härteinkonstanz des Absorptionsverhältnisses von Wasser und Aluminium als eine Folge der verschiedenen b -Werte zu deuten, so würde sich unter der Voraussetzung $b_{Al} = 2,94$ etwa $b_{H_2O} = 2,2$ ergeben, ein Wert, der wesentlich kleiner wäre als sämtliche bekannten b -Werte (vgl. Tabelle II).

Da für die Absorption des Wassers hauptsächlich die Sauerstoffatome in Betracht kommen, darf bei der benachbarten Stellung von O und Al im periodischen System b für beide Stoffe annähernd gleich groß angenommen werden (vgl. Tabelle II: $b_{Stickstoff} = 2,88$). Auf Grund der Beobachtung, daß Al im langwelligen Gebiet zehnmal so stark absorbiert wie H_2O , ergibt sich für das mutmaßliche Absorptionsgesetz des Wassers die in Fig. 2 eingezeichnete logarithmische Gerade. Bei Berücksichtigung der Streustrahlung²⁾ Gleichung (4) erhält man für die experimentell zu beobachtenden Werte des Absorptionskoeffizienten $\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{H_2O}$

die gestrichelte Kurve, die im langwelligen Gebiet, wo $\frac{s}{\rho} \ll \frac{\mu}{\rho}$ ist, mit der Geraden zusammenfällt.

1) Glocker und Reusch, Fortschr. a. d. Gebiet der Röntgenstr. 24, 528, 1917.

2) Nicht zu verwechseln mit dem bei Absorptionsmessungen häufig vorkommenden „Streufehler“, der darin besteht, daß ein Teil der entstehenden Streustrahlung auf das Strahlungsreagens fällt und die Intensitätsmessung fälscht.

1) Brommer, diese Zeitschr. 13, 1037, 1912. (Auf-treffen sekundärer Strahlungen auf die Ionisationskammer.)

2) Phil. Mag. 25, 722, 1913.

3) Phil. Mag. 28, 263, 1914.

4) Ann. d. Phys. 52, 709, 1917.

5) l. c.

menfällt. Aus den beiden gestrichelten Kurven der Fig. 2 läßt sich für jedes λ das Verhältnis $\frac{(\mu/\rho)_{Al}}{(\mu/\rho)_{H_2O}}$ und $\frac{\mu_{Al}}{\mu_{H_2O}}$ berechnen. Diese theoretischen Werte stimmen gut überein mit den Messungen von Winawer und Sachs¹⁾, welche an technischen, gefilterten Röntgenstrahlungen gleichzeitig μ_{Al} und μ_{H_2O} bestimmt haben (Fig. 3).

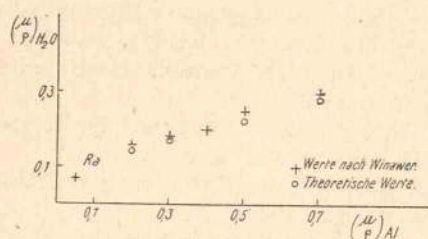


Fig. 3.

Die experimentell ermittelte Wellenlängenabhängigkeit des Verhältnisses $\frac{\mu_{Al}}{\mu_{H_2O}}$ läßt sich also zwanglos damit erklären, daß der zu dem „wahren“ Absorptionsverlust hinzutretende Energieverlust infolge Zerstreuung eine mit abnehmenden Wellenlängen wachsende Annäherung der beiden experimentellen Absorptionskurven (gestrichelte Kurven in Fig. 2) bewirkt. Für die γ -Strahlen des Radiums ergibt sich experimentell $\frac{(\mu/\rho)_{Al}}{(\mu/\rho)_{H_2O}}$ nahezu = 1. Der gemessene Absorptionsverlust besteht hier zum größten Teil aus einem Energieverlust infolge Zerstreuung, d. h. $\frac{\mu}{\rho}$ nahezu = $\frac{s}{\rho}$; für alle leichten Atome ist aber $\frac{s}{\rho}$ gleich groß, daher $\left(\frac{\mu}{\rho}\right)$ für beide Stoffe annähernd gleich.

3. Absorption in Silber.

Während die Mehrzahl der bisher bestimmten Absorptionskoeffizienten durch Messungen an den nicht streng homogenen²⁾ Eigenstrahlungen der Elemente C_r bis C_e erhalten wurde, finden sich für die Absorption in Silber einige Angaben bei Bragg³⁾, bei deren Ermittlung isolierte Spektrallinien von Rh , Pd , Ag als Strahlungsquelle dienten. Ein Blick auf die Fig. 2 zeigt die gute Einordnung dieser exakten

1) Winawer und Sachs, diese Zeitschr. 16, 258, 1915.

2) Außer dem α -Dublett sind noch zwei wesentlich schwächere Linien (β und γ) mit ihren um etwa 10 Proz. kürzeren Wellenlängen darin enthalten. Bei den graphischen Bestimmungen wird λ_β und λ_γ gegenüber von λ_α vernachlässigt.

3) Phil. Mag. 29, 407, 1914.

Absorptionskoeffizienten in die Gerade, wie sie sich allein unter Benutzung der mit + bezeichneten Werte (gemessen an Eigenstrahlungen) ergibt. Man sieht, daß der durch die Inhomogenität der verwendeten Strahlung bedingte Fehler die Größenordnung der möglichen Versuchsfehler nicht überschreitet.

Es ist daher zu erwarten, daß die in Tabelle II angegebenen Werte für die charakteristischen Konstanten keine wesentlichen Änderungen erleiden würden, falls sämtliche Absorptionsbestimmungen an Spektrallinien vorgenommen würden. Die Inhomogenität der Strahlung kommt jedoch darin zum Ausdruck, daß etwa auf $1/4$ der Höhe des Absorptionssprunges ein Versuchspunkt¹⁾ liegt (Fig. 2), der von der Eigenstrahlung des Sn herrührt. Während das α -Dublett nach dem Gesetz G_2 absorbiert wird, gilt für das kurzwelligere β -Dublett bereits das Gesetz G_1 , da die Beziehung gilt

$$\lambda_{\alpha Sn} > \lambda_{A Ag} > \lambda_{\beta Sn}.$$

4. Charakteristische Konstanten und Atomzahl.

In gleicher Weise lassen sich die charakteristischen Konstanten A , A' und b für die Elemente N , Mg , Fe , Ni , Cu , Zn , Sn , Pb gra-

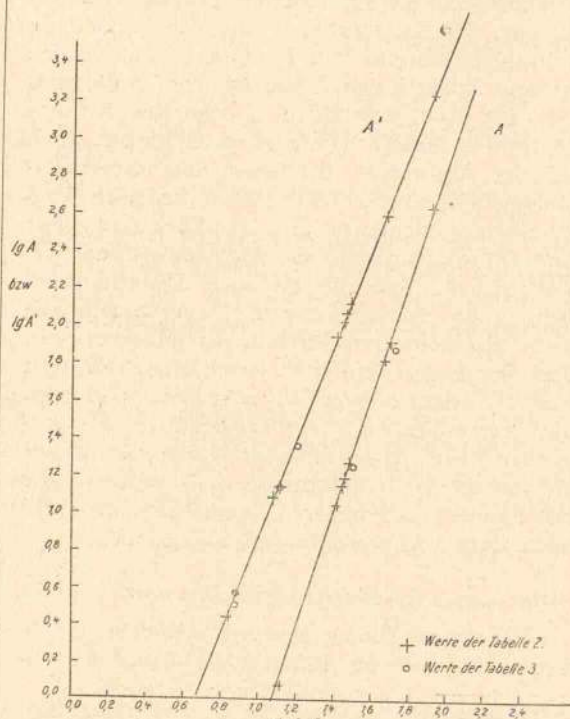


Fig. 4.

1) Vgl. Kossel, Verh. d. D. Phys. Ges. 18, 342, 1916.

phisch bestimmen (Tabelle II). Da sich hierbei nichts prinzipiell Neues ergibt, wurde von einer Wiedergabe der Zeichnungen abgesehen. Laut Gleichung (2) und (3) bezieht sich A auf den Bereich $\lambda > \lambda_A$, A' auf den Bereich $\lambda \leq \lambda_A$. Während die Schwankungen der b -Werte klein bleiben, sind die Unterschiede in der Größe der Konstanten A bzw. A' sehr groß. Sie zeigen das deutliche Bestreben mit wachsender Atomzahl Z zuzunehmen. Eine einfache graphische Darstellung des Zusammenhanges zwischen Z und A bzw. A' läßt sich dadurch gewinnen, daß $\lg Z$ und $\lg A$ bzw. $\lg A'$ als Koordinaten gewählt werden (Fig. 4). Wie aus der Figur ersichtlich ist, liegen die Punkte (+) mit ausgezeichneter Genauigkeit auf zwei Geraden.

Tabelle II.

	Z	$\lg Z$	A	$\lg A$	A'	$\lg A'$	b	$\lambda_A \cdot 10^8$
N	7	0,845	—	—	2,8	0,445	2,88	—
Mg	12	1,08	—	—	12	1,08	2,82	9,4*
Al	13	1,11	1,17	0,07	13,8	1,14	2,94	7,9*
Fe	26	1,415	11	1,04	87	1,94	2,73	1,76
Ni	28	1,45	14,2	1,15	106	2,025	2,66	1,50
Cu	29	1,46	15,5	1,19	116	2,065	2,79	1,39
Zn	30	1,48	18,7	1,27	132	2,12	2,70	1,29
Ag	47	1,67	66	1,82	389	2,59	2,65	0,49
Sn	50	1,70	84	1,92	—	—	2,69	0,425
Pb	82	1,91	430	2,63	1710	3,23	3,0	0,135

*) Extrapoliert.

Für die wichtige Beziehung zwischen der Atomzahl Z und A bzw. A' ergeben sich hieraus die Gleichungen

$$A = 0,0004 Z^{3,14} \text{ für } \lambda > \lambda_A, \quad (5)$$

$$A' = 0,0195 \cdot Z^{2,58} \text{ für } \lambda \leq \lambda_A, \quad (6)$$

wobei λ in Ångström ($= 10^{-8}$ cm) gemessen wird.

Die Größe des Absorptionssprunges an der Stelle der Absorptionsbandkante λ_A (vgl. Fig. 1), d. h. der multiplikative Faktor, mit dem der Absorptionskoeffizient dort zu multiplizieren ist, ist $a = \frac{A'}{A}$. Wie Gleichung (5) und (6) lehrt, nimmt er mit wachsender Atomzahl Z ab, und zwar annähernd proportional mit $\sqrt{Z}$.

Für die Werte von b läßt sich ein systematischer Gang mit der Atomzahl Z nicht auffinden. Andererseits sind die Unterschiede bei den einzelnen Elementen derartige, daß sie wohl kaum ausschließlich als Folge von Versuchsfehlern erklärt werden können. Für Interpolationsrechnungen ist der Mittelwert $b = 2,8$ am besten geeignet.

Das Absorptionsverhalten irgendeines Elementes in den Spektralgebieten beiderseits der Absorptionsbandkante λ_A der K -Serie läßt sich

nunmehr in folgender Weise darstellen aus (2), (3), (5), (6):

$$\frac{\mu}{\rho} = 0,0004 Z^{3,14} \lambda^{2,8} \text{ für } \lambda > \lambda_A \quad (7)$$

$$\frac{\mu}{\rho} = 0,0195 Z^{2,58} \lambda^{2,8} \text{ für } \lambda \leq \lambda_A. \quad (8)$$

Als Maßeinheit für λ gilt 1 Ångström $= 1 \cdot 10^{-8}$ cm. μ „wahre“ Absorption (vgl. Gl. (4)).

Diese beiden Beziehungen sind theoretisch und praktisch von großer Bedeutung. Als zusammenfassende Darstellung des gesamten empirischen Materials werden sie für eine Theorie der Absorption der Röntgenstrahlen von Nutzen sein, während sie für technische Zwecke bei der Verwendung bisher nicht auf Absorption geprüfter Stoffe [vgl. Abschnitt 5] umständliche Versuche ersparen werden.

Ihr spektraler Gültigkeitsbereich erstreckt sich nach der langwelligen Seite bis zu der kurzwelligeren Absorptionsbandkante λ_A der L -Serie, welche erst bei den Elementen mit Z größer als 70 im Gebiet der technischen Röntgenstrahlungen liegt ($\lambda_{A_2} = 0,934 \cdot 10^{-8}$ cm für Pt, $\lambda_{A_2} = 0,914 \cdot 10^{-8}$ cm für Au). Die Spektralbezirke, in denen λ_{A_2} bei den Elementen mit leichteren Atomen liegt, werden nämlich schon durch die Glaswand der Röhre völlig absorbiert. Da sich andererseits die Gültigkeit der Gleichung (7) und (8) bis zu den kürzesten bisher bekannten Röntgenwellenlängen erstreckt, so liefern sie ein das ganze technische Strahlungsgebiet umfassendes Absorptionsgesetz für alle Elemente mit Z kleiner als 70, während für die übrigen Elemente wenigstens der größere und praktisch wichtigere Teil des technischen Strahlungsgebietes in dem Gültigkeitsbereich enthalten ist.

Nimmt man zu den Gleichungen (7) und (8) die Gleichung (1) hinzu, so erhält man eine den drei Bedingungen der Einleitung völlig genügende, quantitative Darstellung der Absorption im K -Gebiet.

5. Die Berechnung der Absorption chemischer Verbindungen.

Bei einer Anwendung der Gleichung (7) und (8) auf die Absorption chemischer Verbindungen begegnet man der Schwierigkeit, daß die Größe Z in diesem Falle nicht mehr definiert ist. Ausgehend von dem empirischen Gesetz der additiven Absorption einer Verbindung kann man jedoch in folgender Weise jeder chemischen Verbindung eine Zahl Z zuordnen, welche ihr Absorptionsverhalten in eindeutiger Weise bestimmt:

Sind in N Molekülen einer Verbindung N_1

Atome des ersten, N_2 des zweiten ... Elements enthalten, so berechnet sich der Absorptionskoeffizient α der Verbindung (bezogen auf 1 Molekül) gemäß der Gleichung¹⁾

$$N\alpha = N_1\alpha_1 + N_2\alpha_2 + \dots \quad (9)$$

aus den Atomabsorptionskoeffizienten α_1, α_2 usw. der einzelnen Komponenten. Durch Umformung ergibt sich hieraus

$$\frac{\mu}{\rho} \cdot N \cdot M = \frac{\mu_1}{\rho_1} N_1 \cdot M_1 + \frac{\mu_2}{\rho_2} N_2 \cdot M_2 + \dots \quad (10)$$

$\frac{\mu}{\rho}, \frac{\mu_1}{\rho_1} \dots$ Massenabsorp.-Koeffizient $M, M_1, M_2 \dots$

Atom- bzw. Molekulargewicht. Durch Kombination mit Gleichung (5) bzw. (6) folgt

$$Z^{2,58} = Z_1^{2,58} \cdot \frac{N_1 M_1}{NM} + Z_2^{2,58} \cdot \frac{N_2 M_2}{NM} + \dots$$

für $\lambda \leq \lambda_A$ (11)

$$Z^{3,14} = Z_1^{3,14} \cdot \frac{N_1 M_1}{NM} + Z_2^{3,14} \cdot \frac{N_2 M_2}{NM} + \dots$$

für $\lambda > \lambda_A$ (12)

Aus den experimentellen Angaben der Absorptionskoeffizienten verschiedener gasförmiger Verbindungen²⁾ wurden durch Benutzung der Gleichung (10) bzw. (11) folgende Werte für Z erhalten (die Konstanten A, A' und b wurden, wie oben, graphisch ermittelt):

Tabelle III.

	Z	$\lg Z$	A'	$\lg A'$	A	$\lg A$
CO_2	7,5	0,87	3,2	0,50	—	—
H_2O	7,6	0,88	3,7	0,57	—	—
SO_2	13	1,11	13,8	1,14	—	—
SH_2	16	1,20	22,9	1,36	—	—
$\text{C}_2\text{H}_5\text{Br}$	31,7	1,50	—	—	17,8	1,25
CH_3J	51,7	1,71	—	—	76	1,88

Wie die Fig. 4 zeigt, sind die Punkte o in guter Übereinstimmung mit den früher ermittelten logarithmischen Geraden, welche für die Elemente A und A' als Funktion von Z darstellen. Die Gleichungen (11) und (12) können also gedeutet werden als eine Substitution einer chemischen Verbindung durch ein ihr in bezug auf das Absorptionsverhalten äquivalentes Element. Die Atomzahl Z ist bei

1) Thomson, Elektrizitätsdurchgang in Gasen, S. 261.
2) Owen, Proc. Roy. Soc. 86, 426, 1912; Barkla-
Colliers, Phil. Mag. 23, 987, 1912.

den Elementen gleich der Anzahl der in einem Atomkern enthaltenen Elementarladungen. Die für eine chemische Verbindung ermittelten Z -Werte (Tabelle III) sind immer kleiner als die Summe der Z -Werte der einzelnen elementaren Komponenten. Diese Tatsache ist wohl so aufzufassen, daß von der Gesamtzahl der in einem Molekül einer Verbindung enthaltenen Kernladungen nur ein gewisser Teil bei der Absorption der Röntgenstrahlen in Wirksamkeit tritt. Auf Grund dieser Anschauung ist zu erwarten, daß sich bei größerer experimenteller Genauigkeit für die Z der Tabelle III ganze Zahlen ergeben.

Ferner ist diese Substitutionsmethode von erheblichem Nutzen für praktische Zwecke, weil sie es gestattet im Verein mit dem Absorptionsgesetz (7) und (8) für jeden beliebigen Stoff allein aus der Kenntnis seiner chemischen Zusammensetzung¹⁾ die Absorptionskoeffizienten gegenüber Röntgenstrahlen beliebiger Wellenlänge zu berechnen.

Nachtrag.

Erst nach Abschluß dieser Arbeit erhielt ich Kenntnis von der Bragg'schen Absorptionsformel $A = C \cdot Z^4 \lambda^{1/2}$, wobei A der Atomabsorptionskoeffizient ist. Vor dem Absorptionssprung ist $C = 0,235 \cdot 10^{-6}$, nach demselben ist $C = 1,79 \cdot 10^{-6}$. Die Größe des Absorptionssprunges ergibt sich hieraus im Widerspruch zu der experimentellen Erfahrung als eine für alle Elemente universelle Konstante, nämlich 7,6. Bei jedem Absorptionsgesetz, das die experimentell beobachtete Abnahme des Sprungfaktors f mit zunehmendem Z zum Ausdruck bringen soll ($f = 4$ für Pb , $f = 11$ für Al), muß der Exponent von Z vor dem Sprung ein anderer sein als nach dem Sprung. Auch dürfte der Wert des Exponenten von λ etwas zu klein sein. Bei einer Anwendung der Bragg'schen Gleichung auf die Absorption in Blei ergeben sich beim Vergleich mit den experimentellen Werten von Hull und Rice³⁾ sehr große Differenzen, welche jenseits des Sprunges bis zu 250 Proz. betragen.

Der Verfasser.

1) Tabelle sämtlicher Z -Werte für Elemente bei Wagner, diese Zeitschr. 18, 418, 1917.

2) Wagner, diese Zeitschr. 18, 432 ff., 1917.

3) Phys. Rev. 8, 326, 1916.

(Eingegangen 21. Dezember 1917.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Die Hauptsätze der Lehre von den flüssigen Kristallen¹⁾.

Von O. Lehmann.

Einleitung.

Physik und Chemie legten bisher das Axiom zugrunde, jeder „Stoff“ existiere in drei „Aggregatzuständen“. Nach dieser „Identitätstheorie“ sind also die Moleküle in allen drei Zuständen dieselben, letztere unterscheiden sich nur durch die Art der Aggregation der Moleküle. Jedes Lehrbuch weist ausdrücklich darauf hin, polymorphe Umwandlung, Schmelzen und Verdampfen seien „physikalische“ Aggregatzustandsänderungen im Gegensatz zu den „chemischen“ Erscheinungen, bei welchen die Moleküle selbst sich ändern. Wäre diese Theorie richtig, so könnten flüssige Kristalle nicht existieren, denn nach ihr ist Kristallisation gleichbedeutend mit Erstarrung (und Entglasung). Während in Flüssigkeiten (und amorphen Gläsern, d. h. überkühlten Schmelzen) die Anordnung der Moleküle eine regellose ist (weshalb diese Stoffe isotrop erscheinen), sind in Kristallen die gleichen Moleküle zu einem anisotropen Gebäude, einem Raumgitter fest zusammengefügt, welches nicht fließen kann.

In das bisherige System der Physik passen hiernach die flüssigen Kristalle nicht hinein, die Lehrbücher erwähnen meist nicht einmal ihre Existenz. Voraussetzung der Behandlung flüssiger Kristalle wäre der Nachweis der Unhaltbarkeit der Identitätstheorie, der Notwendigkeit, dieselbe durch die „Theorie der molekularen Isomerie“²⁾ zu ersetzen. Erst die Erkenntnis des Irrtums hat die Entdeckung der „flüssigen Kristalle“³⁾ ermöglicht. Nachdem neuerdings

Erforschung der Molekularstruktur mit Hilfe von Röntgenstrahlen geglückt ist, dürfte die exakte Bestätigung der Unzulässigkeit des Axioms der „drei Aggregatzustände jedes Stoffes“ nur noch eine Frage der Zeit sein¹⁾.

Auf Grund des unrichtigen Axioms hat man weiter geschlossen, das Raumgitter eines Kristalls mache dessen Wesen aus, eine Störung des Raumgitters sei unmöglich, abgesehen von dem Falle, daß es plötzlich wie ein Kartenhaus in ein anderes Raumgitter umklappe, als welchen man die polymorphe Umwandlung betrachtete. Nun sind die wesentlichen Eigenschaften, (z. B. die Löslichkeiten) der polymorphen Modifikationen verschieden, wie man ohne weiteres daraus erkennt, daß eine labile Modifikation aufgezehrt wird, wenn sie sich neben der stabilen in derselben Lösung befindet (unter Bildung eines „Hofes“ um letztere), weil, entgegen der alten Auffassung, jede Lösung habe nur einen einzigen Sättigungspunkt, (wie sich aus meinen Versuchen ergab), der Sättigungspunkt für jede Modifikation ein anderer ist²⁾. Wäre die alte Theorie der Polymorphie richtig, so müßte also jede Änderung des Raumgitters eine Änderung der Löslichkeit bedingen und da man eine solche beim Verbiegen plastischer Kristalle nicht beobachtet, könnte die Plastizität nur eine scheinbare, auf Zertrümmerung und Wiederverschweißung der Trümmer unter Erhaltung des Raumgitters beruhende sein. Bei flüssigen Kristallen wäre eine Zertrümmerung ausgeschlossen, sie könnten also schon aus diesem Grunde nicht existieren. Es wäre aber auch

1) Die Ansicht, welche man zuerst auf Grund dieser Untersuchungen aufgestellt hat, die Kristalle seien große chemische Moleküle — ich habe sie als „Atomgruppierungstheorie“ von der gewöhnlichen unterschieden — ist mit der Existenz der flüssigen Kristalle ebenfalls nicht vereinbar. Wahrscheinlich liegen die Moleküle in Kristallen zu nahe aneinander, als daß bei dem bis jetzt erzielten Grade der Genauigkeit eine Unterscheidung der Moleküle möglich wäre. Die Röntgenstrahleninterferenzen erfolgen so, wie wenn die Kristalle aus ineinandergestellten Raumgittern der Atome beständen. Siehe W. H. u. W. L. Bragg, Zeitschr. f. anorg. Chem. 90, 153, 1913; P. Groth, Zeitschr. f. Kristallogr. 54, 65, 1914; W. L. Bragg, X-rays and crystal structure 1915; P. Niggli, K. Sächs. Ges. d. Wiss. 1915, 6. Ser.; M. Born, Dynamik der Raumgitter, Leipzig 1915; F. Rinne, Zeitschr. f. anorg. Chem. 96, 317, 1916; N. Jahrb. f. Min. 1916 (2), S. 47; Die Naturwissenschaften 1916, Nr. 17 u. 18; 1917, Nr. 4; W. Voigt, diese Zeitschr. 17, 161, 1916; A. Johnsen, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektronik 14, 52, 1917; C. Runge, diese Zeitschr. 18, 509, 1917; P. Debye u. P. Scherrer, ebenda 17, 277, 1916; 18, 291, 483, 1917.

2) Zeitschr. f. Kristallogr. 1, 101, 1877; 8, 527, 1883; Molekularphysik 2, 151, 1888; Zeitschr. f. phys. Chem. 9, 671, 1892; Flüssige Kristalle 1904, 159; Die neue Welt d. fl. Krist. 1911, 86.

1) Auszug aus meiner zusammenfassenden Abhandlung: „Die Lehre von den flüssigen Kristallen und ihre Bedeutung für die Biologie“ in der Zeitschrift „Ergebnisse der Physiologie“ von L. Asher u. K. Spiro 16, 255, 1917 (254 Seiten mit 572 Abbildungen im Text), welche auch als Sonderabdruck bei J. F. Bergmann, Verlagsbuchhandlung in Wiesbaden zu haben ist. Eine nach dieser Abhandlung geordnete Sammlung von Lichtbildern und Kinetographenfilmen ist (nach dem Kriege) zu beziehen von der Firma Ernemann-Werke A.-G. Dresden A., Schandauer Str. 48/52.

2) Wenn bei den nachfolgenden Zitaten kein Name genannt ist, so ist gemeint, daß es sich um eine meiner eigenen Veröffentlichungen handelt. Zeitschr. f. Kristallogr. 1, 97, 1877; Molekularphysik, Leipzig 1, 683, 1888; 2, 399, 1889; Flüssige Kristalle 1904, 200; J. Frick u. O. Lehmann, Phys. Technik II (2) 1319, 1909; Zeitschr. f. phys. Chem. 71, 355, 1910; Die neue Welt der flüssigen Kristalle, Leipzig 1911, 89.

3) Zeitschr. f. phys. Chem. 4, 462, 1889; Wied. Ann. 40, 401, 1890; Ann. d. Phys. 25, 852, 1908; 27, 1044, 1908; diese Zeitschr. 15, 617, 1914.

kein Lösungsgleichgewicht eines Kristalltropfens mit der umgebenden Mutterlauge denkbar, denn in einem solchen kann das Raumgitter an einer Stelle z. B. so gestört sein, daß hier die Molekülachsen radial angeordnet sind, die Löslichkeit also etwa größer wäre als dicht daneben, diese Stelle somit beständig aufgezehrt würde. Der Nachweis der Unrichtigkeit der Theorie der Polymorphie ist deshalb der Ausgangspunkt der Lehre von den flüssigen Kristallen.

1. Polymorphe Umwandlung. Kristallisations-Schubkraft.

Bei Ammoniumnitrat entdeckte ich fünf feste Modifikationen, die bei ganz bestimmten „Umwandlungstemperaturen“ (-16^0 ; $32,4^0$; $82,8^0$; $125,6^0$) im einen und entgegengesetzten Sinn sich ineinander umwandeln können¹⁾ — ich nannte sie enantiotrope Modifikationen —, ganz ähnlich wie z. B. eine wasserreiche kristallwasserhaltige Substanz bei einer ganz bestimmten Dissoziationstemperatur in wasserärmere und Wasser zerfällt und umgekehrt beim Abkühlen die wasserärmere bei derselben Temperatur wieder in wasserreichere übergeht. Die polymorphen Modifikationen können also nicht aus denselben Molekülen in verschiedener Raumgitteranordnung bestehen, denn dann müßten die Umwandlungstemperaturen für Vor- und Rückumwandlung verschieden sein, da die Temperaturänderung jeweils zunächst eine Art molekularer Spannung erzeugen müßte, welche die durch die Umlagerung geweckte elastische Reaktionskraft übertrifft. Die polymorphen Modifikationen sind hiernach nicht verschiedene Aggregatzustände derselben Substanz, sondern molekular (physikalisch) isomere verschiedene chemische Verbindungen, wobei zu berücksichtigen ist, daß molekulare Verbindungen von atomistischen sich nur durch geringere Festigkeit unterscheiden, eine scharfe Grenze zwischen beiden also nicht existiert²⁾.

Die Kräfte, welche die Parallelrichtung der Moleküle und deren Ordnung zum Raumgitter

1) Zeitschr. f. Kristallogr. I, 97, 1877; Molekularphysik I, 1888; 2, 1889; Ann. d. Phys. 8, 908, 1902; Zeitschr. f. phys. Chem. 71, 355, 1910; Das Kristallisationsmikroskop 1910, S. 20; M. Bellati und R. Romanese, Atti Ist. Ven. (6) 4, 1895, 1886; W. Schwarz, Gött. Preisschr. 1892; S. Lussana, N. Cim. (4) I, 105, 1895; G. Tammann, Wied. Ann. 68, 640, 1899; B. Goßner, Zeitschr. f. Krist. 38, 110, 1904; O. Lehmann, Ann. d. Phys. 21, 181, 1906; F. Wallerant, Compt. rend. 142, 217, 1906; U. Behn, Proc. Roy. Soc. 80, 444, 1908; M. Bellati und L. Finazzi, Atti Ist. Ven. 59, 1163, 1910; K. Vogt, diese Zeitschr. 12, 1129, 1911.

2) Molekularphysik 2, 413, 1889; A. Werner, Neuere Anschauungen a. d. Geb. d. anorg. Chem. 3. Aufl. 1913.

bei festen Kristallen bewirken, kann man sich vorstellen ähnlich den Richtkräften, welche Magnete aufeinander ausüben, die durch geeignete anziehende und abstoßende Zentralkräfte (etwa elektrischer Natur) in bestimmtem Abstand gehalten werden. Einfache Dipole genügen allerdings nicht, da bei deren Parallelrichtung freie Magnetismen hervortreten würden; man muß sich also die Magnete als astatistische Systeme vorstellen, z. B. als polygonale Blättchen, deren Ecken abwechselnd nord- und südmagnetisch sind¹⁾. (Fig. 1.) An-

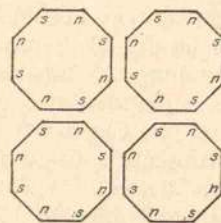


Fig. 1.

dert sich deren Beschaffenheit durch polymorphe Umwandlung, so wird unter Umständen, da sich das Raumgitter entsprechend ändern muß, eine molekulare Schubkraft hervortreten, die auf Kosten von chemischer Energie, die sonst als Umwandlungswärme zum Vorschein käme, Bewegungsenergie erzeugt.

Fälle dieser Art beobachtete ich z. B. bei Protokatechusäure, Chinondihydroparadikarbonsäureester und Paraazophenetol²⁾. Die stäbchenförmigen Kristalle der Protokatechusäure scheinen sich gewissermaßen zu verflüs-

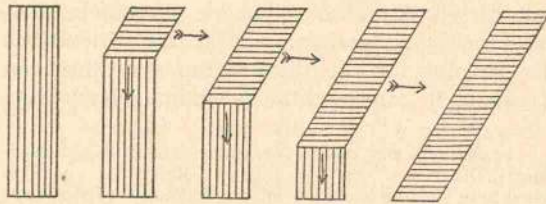


Fig. 2.

sigen, sie verziehen (Fig. 2), krümmen und zerspalten sich; in Wirklichkeit bleiben sie aber fest, und daß es sich nicht einfach um Änderung des

1) Molekularphysik 2, 393, 1889; diese Zeitschr. 10, 553, 1909; Die neue Welt d. fl. Krist. 1911, 347 ff.; Prometheus 25, 4, 1913; Die Lehre v. d. flüss. Krist. 1917, 290. Siehe auch E. Riecke, Ann. d. Phys. 3, 345, 1900; J. Beckenkamp, Sitzber. d. phys. med. Ges. Würzb. 1911, 112; Stat. u. kin. Kristalltheorien 1913 u. 1915; Centr. f. Min. 1917, Nr. 5, 97; Kinet. Atomtheorie 1917; J. Stark, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 12, 280, 1915; Atomdynamik 1915; M. Born, Berl. Akad. 30, 614, 1916.

2) Wied. Ann. 25, 173, 1885; Ann. d. Phys. 21, 384, 1906.

Raumgitters handelt, geht daraus hervor, daß sich mit der Form auch die Löslichkeit ändert, denn nicht umgewandelte Teile werden allmählich von umgewandelten unter Hofbildung aufgezehrt.

Die Verschiedenheit der Moleküle der Schmelze von der der festen Modifikationen folgt daraus, daß zwei verschiedene polymorphe Modifikationen (z. B. rhombischer und monokliner Schwefel) unmöglich, wie es tatsächlich der Fall ist, dieselbe Schmelze geben könnten, wenn das Schmelzen nur in einem Auseinanderrücken der Moleküle bestände, weil ihre Moleküle verschieden sind. Gleiches gilt für die Verdampfung; der Dampf der beiden Modifikationen ist derselbe, seine Moleküle können also weder die der einen, noch die der andern Modifikation sein.

Unter Vermittlung des Dampfes vermag die stabile Modifikation die labile aufzuzeihen, somit müssen beide darin gelöst sein. Tröpfchen der Schmelze werden ebenso von festen Kristallen aufgezehrt, der Dampf muß somit auch Flüssigkeitsmoleküle enthalten. Der Kondensationspunkt ist offenbar der Sättigungspunkt der Lösung; übersättigter Dampf ist eine gasförmige übersättigte Lösung. Ebenso ist der Erstarrungspunkt als Kristallisationspunkt oder Sättigungspunkt der Lösung der betr. festen Modifikation in der Schmelze aufzufassen; überkühlte Schmelze ist übersättigte Lösung. Amorphe (glasartige) Stoffe, die sich durch starke Überkühlung bilden, sind somit stets Gemische von mindestens zwei verschiedenen Molekülarten. Darum können sie nicht wachsen wie Kristalle, sie sind keine Phasen, ihre Lösungen besitzen keinen Sättigungspunkt, ihre Schmelzen keinen bestimmten Erstarrungspunkt¹⁾. Die Schmelzwärme ist im wesentlichen Dissoziationswärme; beim Erweichen amorpher Körper verteilt sie sich auf ein größeres Temperaturgebiet.

In der Lösung besteht Gleichgewicht zwischen den verschiedenen Molekülarten. Scheiden sich Kristalle aus, so bilden sich an Stelle der hierdurch entzogenen festen Moleküle sofort wieder neue, so daß das Mengenverhältnis dasselbe bleibt²⁾. Auch die Umwandlungstemperaturen fester polymorpher Modifikationen können als Sättigungs- oder Lösungstemperaturen aufgefaßt werden³⁾, freilich nicht nach der alten Theorie der Aggregatzustände, nach welcher nur isomorphe Stoffe Mischkristalle

bilden könnten, während polymorphe Modifikationen naturgemäß nicht isomorph sind (nicht in derselben Kristallform kristallisieren), so daß notwendig eine Störung des Raumgitters die Folge sein müßte, die aber der Theorie gemäß unmöglich ist.

2. Anomale Mischkristalle und Raumgitterstörung.

Meine Versuche ergaben, daß auch diese Theorie der Isomorphie nicht haltbar ist; ich konnte z. B. künstliche Färbungen von Kristallen erhalten unter Umständen, bei welchen eine Aufnahme des Farbstoffs in Form feiner Einschlüsse (wie man sie z. B. bei Sénarmonts künstlich gefärbten Kristallen annahm) ausgeschlossen war, weil sich die Kristalle unter Hofbildung weit dunkler färbten als die umgebende Lösung¹⁾ (z. B. Salmiak mit Eisenchlorid, Fig. 3), und zwar dichroitisch ent-

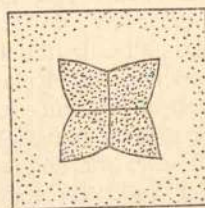


Fig. 3.

sprechend regelmäßig orientierter Aufnahme; weil sich ferner der Einfluß des Zusatzes auch äußerte durch Verminderung der Wachstumsgeschwindigkeit (Annäherung an das Verhalten amorpher Körper, die immer Gemische sind), der Löslichkeit und der Größe der einzelnen Individuen; durch ungleichmäßiges Wachstum an verschiedenen Stellen, Krümmung bis zur Ringbildung und schraubenförmigen Verdrillung, Aufreißen, Verzweigung, Zerkleinerung, Aufblättern und Übergang der Kristalle in Sphärokristalle. Dabei zeigten selbst zu sehr engen Ringen gebogene Kristalle zwischen gekreuzten Nicols keinerlei Unstetigkeiten, sondern gleichmäßig tangentialen bzw. radialen Verlauf der Auslöschungsrichtungen (Fig. 4), wie es bei stetiger Störung der Raumgitterstruktur zu erwarten war²⁾. Walle-

1) Zeitschr. f. Kristallogr. 8, 433, 1883; Zeitschr. f. phys. Chem. 1, 15, 1887; 8, 543, 1891; Wied. Ann. 51, 47, 1894; N. Jahrb. f. Mineral. (2) 109, 1915; Ann. d. Phys. 47, 832, 1915; J. Retgers, Zeitschr. f. phys. Chem. 12, 621, 1893; J. H. van t'Hoff, ebenda 5, 325, 1890; W. Nernst, ebenda 6, 577, 1890.

2) Progr. Mittelschule Mülhausen i. E. 1877, 10, Fig. 8; Zeitschr. f. Kristallogr. 1, 479, 1877; 10, 7, 1885, Taf. I, Fig. 39; 18, 459, 1890, Fig. 1-5; Flüssige Kristalle 123, 1904.

1) Zeitschr. f. Kristallogr. 18, 457, 1890.

2) Zeitschr. f. Kristallogr. 1, 97, 1877; Ann. d. Phys. 47, 832, 1915.

3) Die neue Welt d. fl. Krist. 150 u. 248, 1911.

rant¹⁾ beobachtete weiterhin Sphärokristalle mit schraubenförmig verdrehten Fasern speziell bei Zumischung optisch aktiver Stoffe. Die Möglichkeit der Störung der Raumgitteranordnung der Moleküle ist durch diese Tatsachen zweifellos festgestellt, doch war die Frage, ob auch bei völlig reinen Kristallen lediglich durch mechanische Einwirkung eine Störung hervorgebracht werden kann, auch durch diese Versuche noch nicht entschieden.

3. Plastische feste Kristalle. Konstanz ihrer Eigenschaften.

Stellt man sich die Kristalle als regelmäßige Aggregate astatischer Magnetsysteme (Fig. 1) vor, die durch abstoßende und anziehende (elektrische?) Kräfte in bestimmten mittleren Abständen gehalten werden²⁾, so erscheint verständlich, daß Deformation eine elastische Kraft wecken muß, die den früheren Zustand wiederherzustellen sucht. Plastische Deformation würde nun erfordern, daß ein verbogener eingezwängter Kristall allmählich seine elastische Spannung verliert, daß Relaxation eintritt, so daß der Kristall bei Beseitigung des Zwangs seine frühere Form nicht mehr völlig annimmt. Vielleicht beruht dies darauf, daß die thermische Bewegung bald da bald dort kleine Lagenänderungen der Moleküle im Sinne einer Verminderung der Spannung hervorbringt, welche nicht mehr zurückgehen können; die verschwindende Spannungsenergie würde dabei als Wärme der inneren Reibung wieder zum Vorschein kommen.

Jedenfalls gelang es mir, Kristalle von Ammoniumnitrat zu engen Ringen zu biegen unbeschadet ihrer Durchsichtigkeit und ohne die geringste Änderung ihrer Löslichkeit, die sich beim Einlegen in gesättigte Lösung durch Aufzehren einzelner Stellen durch andere hätte zu erkennen geben müssen. Die Untersuchung zwischen gekreuzten Nicols ergab, daß die Molekülachsen, wie erwartet, ihre Lagen rela-

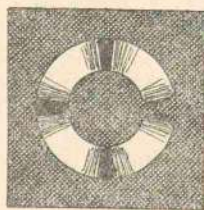


Fig. 4.

1) F. Wallerant, Compt. rend. 143, 555, 1169, 1906; P. Gaubert, ebenda 153, 683, 1911; 156, 1161, 1913.

2) Diese Zeitschr. 10, 533, 1909; Die neue Welt d. fl. Krist. 343, 356, Fig. 231, 1911; Prometheus 25, 1, 1913.

tiv zu den nun gebogenen Kanten bewahrt hatten (Fig. 4) entsprechend gleichmäßiger Störung des Raumgitters¹⁾. Die Existenz flüssiger Kristalle ist somit nicht, wie die Identitätstheorie annahm (s. oben), von vornherein ausgeschlossen.

4. Die zähflüssigen Kristalle. Fächerstruktur.

Bei Untersuchung der Polymorphie von Ammoniumnitrat fiel mir auf, daß die kurz vor dem Schmelzen erscheinende regulär kristallisierende Modifikation so plastisch ist, daß die Existenz einer Elastizitätsgrenze, somit die Berechtigung, die Kristalle als „fest“ zu bezeichnen, bezweifelt werden kann. Die Entscheidung, welche etwa durch Torsion einer Platte mit aufgezeichneten Radien herbeigeführt werden könnte²⁾, stieß leider auf technische Schwierigkeiten. Auch bezüglich der regulären Kristalle des Jodsilbers geriet ich in Zweifel, ob sie als feste oder als zähflüssige Kristalle zu bezeichnen seien³⁾. Bei den jedenfalls nicht festen, sondern zähflüssigen Kristallen des sauren Ammoniumoleathydrats⁴⁾ zeigt sich zwischen gekreuzten Nicols eine eigentümliche Fächerstruktur, die an diejenige der Sphärokristalle erinnert, also wahrscheinlich durch geringe Verunreinigung vielleicht mit gewöhnlichem Ammoniumoleathydrat bedingt ist und starke Raumgitterstörung bedeutet⁵⁾.

5. Die schleimig-flüssigen Kristalle. Gestaltungskraft.

Kristalle von schleimig-flüssiger Konsistenz fand ich schließlich bei dem normalen Ammoniumoleathydrat⁶⁾. Sie unterschieden sich

1) Zeitschr. f. Kristallogr. 1, 110, 1877; Molekularphysik 1, 64, 1888; Ann. d. Phys. 50, 576, 1916. (Hier ist auch die gesamte Literatur über Plastizität der Kristalle angegeben.)

2) Flüssige Kristalle 1904, 91 Fig. 502; Verh. d. D. phys. Ges. 15, 413, 1913, Fig. 1.

3) G. F. Rodwell, Chem. News 30, 289, 1874; Proc. Roy. Soc. Lond. 25, 287, 1876/77; Phil. Trans. Lond. 173, 1137, 1882; O. Lehmann, Zeitschr. f. Kristallogr. 1, 120, 492 Anm., 1877; Wied. Ann. 24, Taf. I, Fig. 27, 1885; 38, 400, Anm. 2, 1889; Molekularphysik 1, 826, 848, 1888; Die neue Welt d. fl. Krist. 165, 1911.

4) Flüssige Kristalle 1904, S. 21, Taf. 1 u. 2; Zeitschr. f. Kristallogr. 52, 592, 1913; diese Zeitschr. 17, 250, Fig. 33, 1916; Die Lehre von d. fl. Krist. 1917, 274, Fig. 16.

5) Weiter gehört zu den zähflüssigen Kristallen das wasserärmere Hydrat der 10-Bromphenanthren-3 oder 6-sulfosäure, siehe H. Sandqvist, Kolloidzeitschr. 19, 113, 1916; O. Lehmann, Ann. d. Phys. 50, 599, 1916.

6) Zeitschr. f. phys. Chem. 18, 91, 1895; Wied. Ann. 56, 771, 1895; diese Zeitschr. 7, 722, 789, 1906; Sitzb. d. Heidelb. Akad. 1911, Nr. 22; 1912 Nr. 13; 1913 Nr. 13; Verh. d. D. phys. Ges. 16, 443, 1914; Ann. d. Phys. 48, 725, 1915.

von festen Kristallen sehr auffallend dadurch, daß beim Zerteilen in kleine Stücke (z. B. durch Vorbeiströmen an Hindernissen), welche in einer indifferenten Flüssigkeit schwebend erhalten wurden, jedes Stück alsbald wieder seine normale Form annahm (Fig. 5), ähnlich wie ein freischwebender Tropfen sich beim Zerreißen in kleine genau kugelförmige Tröpf-

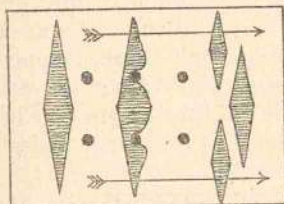


Fig. 5.

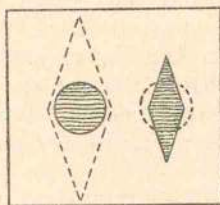


Fig. 6.

chen zerteilt. Würde man eine Kugel aus einem solchen Kristall ausschneiden, so würde sie demgemäß freischwebend sofort von selbst Polyederform annehmen (Fig. 6). Mit dem Vorhandensein vollkommener Elastizität, welche die Deformation der Kugel hindern müßte, d. h. mit der Existenz einer Elastizitätsgrenze, dem Kennzeichen des festen Zustandes, ist dieses Verhalten nicht verträglich, somit müssen die Kristalle notwendig als „flüssige“ bezeichnet werden, eine beliebige Menge solchen Stoffes als „kristallinische Flüssigkeit“.

Die Kraft, welche die Gestaltung bewirkt, kann nicht Elastizität sein, ihre Natur ist nicht näher bekannt und deshalb gab ich ihr den Namen „Gestaltungskraft“¹⁾. Vielleicht ist sie einfach Folge der durch die stäbchen-²⁾ oder blättchenförmige³⁾ Gestalt der Moleküle und durch deren Parallelrichtung bedingten Anisotropie der thermischen Bewegung, wodurch das Oberflächenhäutchen, dessen Spannung unabhängig von der Molekularanordnung ist [wie die wesentlichen Eigenschaften des Kristalls überhaupt (z. B. die Löslichkeit)] an jeder Stelle in anderer Weise hervorgetrieben wird, nämlich soweit, bis der geweckte kapillare Gegendruck den Überschuß der Expansivkraft kompensiert. Vielleicht wirkt aber noch Richtkraftoberflächen-⁴⁾ mit.

1) Ann. d. Phys. 17, 728, 1905; Verh. d. D. phys. Ges. 8, 331, 1906; diese Zeitschr. 7, 722, 789, 1906; Verh. d. D. phys. Ges. 16, 443, 1914; Ann. d. Phys. 48, 182, 1915.

2) Zeitschr. f. phys. Chem. 18, 95, 1895; Ann. d. Phys. 12, 319, 1903; Verh. d. D. phys. Ges. 8, 143, 331, 1906; diese Zeitschr. 7, 725, 1906; Die scheinb. lebenden Krist. 26, 1911.

3) Diese Zeitschr. 14, 1131, Fig. 1; 1133, Fig. 3a, b, 1913; Verh. d. D. phys. Ges. 15, 420, 1913; diese Zeitschr. 15, 620, 1914.

4) Verh. d. D. phys. Ges. 16, 443, 1914; Ann. d. Phys. 48, 764, 1915.

6. Bildung halbisotroper Kristalle durch Zusammenfließen.

In Berührung gebracht fließen solche schleimig-flüssigen Kristalle zu einheitlichen Kristallen zusammen (Fig. 7), ebenso wie zwei Flüssigkeitstropfen zu einem einheitlichen Flüssigkeitstropfen. Die Parallelrichtung der Moleküle, welche nach beliebiger Verzerrung oder beim Zusammenfließen ungeachtet der regellosen thermischen Bewegung sich sofort wieder herstellt, nannte ich „spontane Homöotropie“, die Kräftepaare, welche dabei auf die Moleküle wirken, „molekulare Richtkraft“.

Anordnung in den Ecken eines Raumgitters, welche die Polyederform fester Kristalle bedingt, findet höchstens bei den allerkleinsten flüssigen Kriställchen statt. Auch die Parallelrichtung der Moleküle ist keine vollkommene, denn bei größeren Individuen ist der Querschnitt immer kreisförmig, die Form also zylindrisch, konisch, ellipsoidisch usw. (Fig. 8).



Fig. 7.



Fig. 8.

Sind die Moleküle polygonale Blättchen, deren Fläche senkrecht zur Längsrichtung der Kristalle ist, worauf aus der verschiedenen Art des Zusammenfließens je nach der gegenseitigen Lage der Kristalle geschlossen werden kann¹⁾, so muß man sich vorstellen, daß wohl ihre Flächen parallel sind, also auch deren Normalen, die Hauptachsen, daß dagegen die Kanten, die Nebenachsen, beständig wechselnde regellose Richtung haben. Ich nannte eine derartige Struktur zum Unterschied von der Raumgitterstruktur „halbisotrope Struktur“²⁾.

7. Bewegung durch Parallelrichtung beim Zusammenfließen.

Die Gestaltungskraft bewirkt auch die Parallelrichtung verschieden orientierter Kristalle nach Herstellung der Berührung oder während des Zusammenfließens³⁾ (Fig. 7). Die

1) Diese Zeitschr. 14, 1133, 1913; 15, 620, 1914.

2) Ann. d. Phys. 12, 311, 1903; Sitzb. d. Heidelb. Akad. 1911, Nr. 22, Taf. 2, Fig. 4-15; 1912, Nr. 13, Taf. 1; diese Zeitschr. 15, 618, 619, 1914; Ann. d. Phys. 48, 725, 1915.

3) Ann. d. Phys. 48, 738, Taf. 4, Fig. 1, 1915.

lebhaften Bewegungsvorgänge bei Anhäufungen flüssiger Kristalle, wobei diese gewissermaßen im Kampf miteinander begriffen zu sein scheinen, derart, daß schließlich der stärkere den schwächeren sich einverleibt, sind Folge dieser Parallelrichtung oder auch von Aufrichtung am Glase.

8. Anschmiegung und Aufrichtung an Glasflächen.

Mit Glasflächen in Berührung kommende flüssige Kristalle zerfließen auf dem Glase so, daß die Hauptachse der Moleküle senkrecht zum Glase wird, d. h. die Molekülblättchen

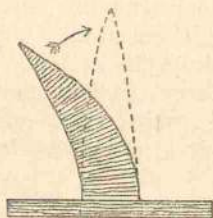


Fig. 9.

schmiegen sich dem Glase an und schräg stehende Kristalle drehen sich senkrecht zu diesem¹⁾ (Fig. 9).

9. Anschmiegung in Röhren, Tropfen und an Blasen.

Scheidet sich Ammoniumoleathydrat in engen Kapillaren aus alkoholischer Lösung aus, so entstehen infolge von Anschmiegung kristallinische Flüssigkeitssäulen, in welchen die optische Achse überall radial gerichtet ist²⁾.

Durch Ausscheidung im Innern von Tropfen oder an der Außenseite von Luftblasen entstehen aus gleichem Grunde hohle flüssige Sphärökristalle, die sich auch zu flüssig-kristallinen Schäumen vereinigen können³⁾. Auch die ebene Oberfläche einer nicht bedeckten Lösung überzieht sich mit einer homogenen halbisotropen Haut.

1) Wied. Ann. 56, 786, 1895; Zeitschr. f. phys. Chem. 18, 95, 1895; Ann. d. Phys. 12, 332, 1903; 19, 410, 1906; diese Zeitschr. 7, 579, 1906; Ber. d. D. chem. Ges. 41, 3782, Ann., 1908; Heidelb. Akad. 1911, Nr. 22, 16; 1913, Nr. 13, 15, Ann. 28; diese Zeitschr. 17, 241 Ann., 1916; F. Wallerant, Compt. rend. 143, 694, 1906; D. Vorländer, Zeitschr. f. phys. Chem. 61, 166, 1908; 85, 701, 1913; Nova acta, Halle 1909; D. Vorländer u. W. Kasten, Ber. d. D. chem. Ges. 31, 2033, 1908.

2) Heidelb. Akad. 1911, Nr. 22, 17, Taf. 2, Fig. 16—20, Taf. 3, Fig. 17 u. 18.

3) Verh. d. D. phys. Ges. 10, 321, 407, 1908; Ann. d. Phys. 43, 125; 44, 975, 1914; Heidelb. Akad. 1913, Nr. 13, 22; Zeitschr. f. Kristallogr. 52, 600, 1913; Ch. P. White, Medical Chronicle, March 1908.

10. Einfache und doppelte konische Strukturstörungen.

Sind die Kristalle hemimorph, z. B. am einen Ende spitz, am andern stumpf, so bilden sich beim Zusammenfließen in verkehrter Lage eigentümliche Störungen der Struktur aus. Die Hauptachsen (optischen Achsen) der Moleküle sind nicht mehr parallel, sondern liegen auf konaxialen Kegelflächen mit gemeinsamer Basis¹⁾. Liegen solche Störungen im Innern, so sind die Kegel ganze Doppelkegel (Fig. 10 a). Liegt die Achse auf der Oberfläche, so fehlt die Hälfte, es sind halbe doppelkonische Störungen (Fig. 10 b). Liegt

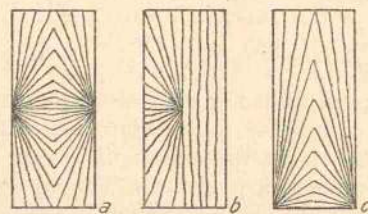


Fig. 10 a, b, c.

die Basis auf der Oberfläche, so sind es einfache konische Störungen (Fig. 10 c).

11. Systeme konischer Störungen, Polygonsysteme.

Die Trübung zusammenhängender Massen ist nicht wie die fester kristallinischer Körper dadurch bedingt, daß verschieden orientierte Individuen aneinandergrenzen, sondern durch zahlreiche, regellos orientierte konische Störungen. Solche können sich aber auch zu regelmäßigen, z. B. quadratischen, Systemen aneinanderreihen. Dabei erscheinen die Kegelspitzen durch Polygonsysteme verbunden, d. h.

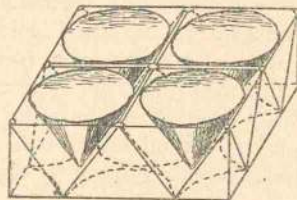


Fig. 11.

1) Wied. Ann. 56, 786, Fig. 13 a, Fig. 20—22 b, 1895; Flüssige Kristalle 1904, 39, Fig. 40—51; 40, Fig. 52—67, Taf. 3—5 u. 10—35; 41, Fig. 68—73; Ann. d. Phys. 12, 329, 1903; 19, 22, 408, Fig. 1—12, 26, 29, 20 usw.; 20, 63, 1906; Die scheinbar leb. Krist. 1907, 28, Fig. 29 u. 30; 34, Fig. 46; 57, Fig. 103—108; Verh. d. D. phys. Ges. 13, 338, 1911; 15, 413, 1913; Ann. d. Phys. 35, 193, 203, 1911; Die neue Welt d. fl. Krist. 1911, 368; Heidelb. Akad. 1911, Nr. 22, Taf. 4, Fig. 24, Taf. 5; 1912, Nr. 13, 368, Taf. 1; Ann. d. Phys. 48, 725, 739, 1915.

durch gerade Linien, in welchen Molekülreihen von verschiedener Richtung zusammenstoßen (Fig. 11). Stets sind die Molekülreihen (falls Gleichgewicht eingetreten ist) gerade, gleichgültig, ob sie parallel sind oder Fächerstrukturen bilden wie bei den konischen Störungen oder in den Gebieten zwischen den Kegeln¹⁾.

12. Erzwungen homogene schleimig-flüssige Kristalle.

Erzeugt man schleimig-flüssige Kristalle von Paraazoxybenzoesäureäthylester durch Erhitzen einer festen kristallinen Schicht, welche zwischen Glasplatten erstarrt war, so bleiben bei der Umwandlung die gebildeten flüssig-kristallinen Moleküle in der Stellung, in der sie sich aus den festen gebildet hatten, am Glase haften. Nach diesen fixierten Molekülen richten sich die übrigen, so daß erzwungen homogene flüssig-kristallinische Schichten entstehen, die sich optisch ganz wie feste Kristalle verhalten, obschon die Moleküle wahrscheinlich kein Raumgitter bilden, sondern nur parallel sind²⁾.

Beim Erhitzen bis zu teilweiser Ablösung vom Glase bilden sich konische Störungen, deren Achsen im allgemeinen schief zum Glase sind (Fig. 12), da ihre Lage durch die Orien-

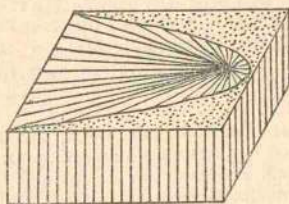


Fig. 12.

tierung der Schicht bedingt wird. Es können sich auch Systeme mit zwei oder drei zueinander senkrechten Achsen bilden³⁾.

13. Glatte und kettenförmige ölige Streifen, Perlen.

An den Rändern angeschmiegtter Schichten sieht man häufig halbe einfache Störungen von gleicher Größe (Fig. 13), eventuell regel-

mäßig abwechselnd mit solchen von umgekehrter Lage (Fig. 14) auftreten. Bei Vergrößerung oder Verkleinerung des Umfangs ändert sich die Zahl solcher Perlen sprunghaft derart daß immer alle gleiche Größe behalten, auch können alle zusammen oder nur einzelne derselben sich zu glatten Streifen vereinigen (Fig. 15). Beim Zusammenfließen

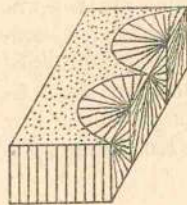


Fig. 13.

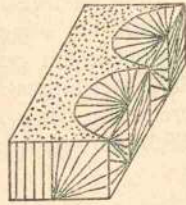


Fig. 14.

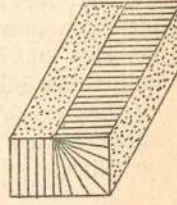


Fig. 15.

Ben mehrerer Schichten können aus kettenartig verbundenen konischen Störungen oder glatten Streifen sog. „ölige Streifen“ von entsprechender Struktur entstehen. Beim Zusammenfließen halbisoformer Kristalle entstehen in gleicher Weise ringsumlaufende Ketten, sog. „Perlen“, von welchen den Kegelachsen entsprechend nach beiden Seiten eine Streifung ausgeht¹⁾.

14. Zwillinge flüssiger Kristalle und Umklappen.

Beim Zusammenfließen flüssiger Kristalle unter bestimmten Winkel können flüssige Zwillinge (Fig. 16) entstehen²⁾, doch tritt gewöhnlich an der Zwillingsebene eine konische

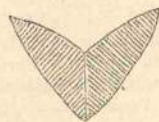


Fig. 16.

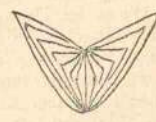


Fig. 17.

Störung auf (Fig. 17). Nach einiger Zeit klappen die Zwillinge öfters zu einfachen Kristallen zusammen, umgekehrt kann aber auch aus

1) Ann. d. Phys. 12, 332, 1903; 48, 745, 1915; Flüssige Kristalle 46, 1904; Die Lehre v. d. fl. Krist. 316, 1917; G. Friedel u. F. Grandjean, Bull. soc. min. 33, 300, 1910 (Dez.); Compt. rend. 151, 327, 442, 988, 1910.

2) Ann. d. Phys. 12, 325, 1903; Flüssige Kristalle 51, 1904.

3) Flüssige Kristalle 1904, Taf. 5; Die neue Welt d. fl. Krist. 1911, 201, Anm. 3; Ann. d. Phys. 48, 750, 1915; Die Lehre v. d. fl. Krist. 320, 1917.

1) Zeitschr. f. phys. Chem. 4, 462, 1889; Flüssige Kristalle 1914, Taf. 9; Ann. d. Phys. 35, 211, 1911; 48, 740, 1915; diese Zeitschr. 17, 241, 1916; Heidelb. Akad. 1911, Nr. 22, Taf. 4, Fig. 40b; 1912, Nr. 13, Taf. 2, Fig. 34 u. 35, Taf. 4, Fig. 72.

2) Wied. Ann. 56, 771, 1895; Zeitschr. f. phys. Chem. 18, 91, 1895; Flüssige Kristalle 39, 1904; Ann. d. Phys. 19, 409, Fig. 26, 1906; 35, 211, 1911; 48, 760, 1915; Heidelb. Akad. 1911, Nr. 22, S. 17, Taf. 1, Fig. 16b; Arch. sc. phys. et nat. 32, 10, Taf. 1, Fig. 5, 1911; Verh. d. D. phys. Ges. 15, 413, 1913; Heidelb. Akad. 1912, Nr. 13, Taf. 1, Fig. 16, 52, 53.

einem einfachen Kristall von selbst durch Zusammenklappen ein Zwilling entstehen¹⁾.

15. Biegung, Drillung und Knickung flüssiger Kristalle.

Beim Biegen oder Drillen schleimig-flüssiger Kristalle treten immer so viele konische Störungen auf, daß trotz der Änderung der Gestalt alle Molekulareihen gerade gestreckt bleiben. Auch zwillingsartige Knickungen kommen vor, namentlich bei öligen Streifen²⁾, wobei sich unter Umständen regelmäßig-polygonale Netze bilden. Bei angeschnittenen Schichten wurde Verzerrung des Ringsystems im konvergenten Licht infolge von Knickung festgestellt³⁾.

1) Zeitschr. f. phys. Chem. 4, 462, 1889; Heidelb. Akad. 1912, Nr. 13, Taf. 2, Fig. 19; Taf. 3, Fig. 55; Verh. d. D. phys. Ges. 15, 413, 1913; Ann. d. Phys. 48, 759, 1915.

2) Molekularphysik I, 825, 1888; 2, 222, 1889; diese Zeitschr. 7, 578, 1906; Verh. d. D. phys. Ges. 16, 447, 1914.

3) Diese Zeitschr. 11, 581, 1910; Die neue Welt d. fl. Krist. 197, 233, 1911; D. Vorländer u. H. Hauswaldt, Acta nova, Halle 90, 107, 1909; Zeitschr. f. phys. Chem. 61, 1907; D. Vorländer, Ber. d. D. chem. Ges. 31, 2042, 1908.

(Fortsetzung folgt.)

Berichtigung.

In der Notiz K. Federhofers auf Seite 560 des 18. Jahrganges soll es in der letzten Zeile anstatt Maximum Minimum heißen.

Tagesereignisse.

Ein Deutsches Erfindungsinstitut. Eine gemeinnützige Organisation der Erfindertätigkeit in Deutschland ist das Ziel einer Gesellschaft, die in Gießen begründet wurde.

Auf Grund zahlreicher Anregungen, die in der „Umschau“, Wochenschrift über die Fortschritte in Wissenschaft und Technik (Frankfurt a. M.), erschienen, wurde folgendes Programm aufgestellt:

Das Deutsche Erfindungsinstitut bezweckt die Förderung deutscher technisch-schöpferischer Arbeit durch Auslese und Förderung erfinderisch begabter Persönlichkeiten, sowie durch Unterstützung brauchbarer Erfindungen durch Geldmittel, technische und Rechtsberatung, ferner durch die Weiterleitung der Erfindungen an Heer und Marine, Industrie und Gewerbe.

Dieses Ziel soll durch folgende Mittel angestrebt werden:

1. Einrichtung einer Vorprüfung der Erfindungen unter dem Gesichtspunkte des technischen Fortschrittes und der wirtschaftlichen Verwertbarkeit.
2. Förderung brauchbarer Erfindungen durch Rechtsschutz, technische Durchbildung und Weiterleitung an Heer und Marine, Industrie und Gewerbe; Anregung und Bildung von Studiengesellschaften.
3. Sammlung und Sichtung von Erfindungsaufgaben und deren Förderung durch Bekanntgabe, Preisausschreiben usw.
4. Förderung begabter Erfinder durch Geldbeihilfen, z. B. für Ausbildungszwecke und Studienreisen, sowie Vermittlung eines geeigneten Wirkungskreises.
5. Mitarbeit an der Ausbildung des gewerblichen Rechtsschutzes.
6. Event. Herausgabe eines Instituts-Organes mit Berichten über neue Aufgaben und Fortschritte der Technik.

Die neugegründete Gesellschaft will die Vorbereitungen zur Errichtung dieser Organisation treffen. Nähere Auskunft erteilen der Vorsitzende Geheimrat Prof. Dr. Sommer (Gießen) sowie die stellvertretenden Vorsitzenden Prof. Dr. Bechhold (Frankfurt a. M.-Niederrad), Prof. Dr. S. v. Kapff (Berlin W., Viktoria-Luise-Platz Nr. 8) und der Schriftführer Zivilingenieur Jacobi-Siesmeyer (Frankfurt a. M., Battonstr. 4).

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität München Dr. Peter Paul Ewald für theoretische Physik, an der Technischen Hochschule Lemberg Professor Dr. Arnold Bolland von der Handelsakademie in Krakau für Mikrochemie.

Ernannt: Der Abteilungsvorsteher der Deutschen Seewarte in Hamburg Professor Stürtz zum Vorstand des Observatoriums in Wilhelmshaven, der wissenschaftliche Assistent am Chemischen Staatslaboratorium in Hamburg Dr. F. Gillmeister und der Laboratoriumsvorstand an der Universität Heidelberg Chemiker Dr. Eberhard Müller zum Professor, der o. Professor an der Deutschen Technischen Hochschule Prag Dr. Otto Höning Schmid zum a. o. Professor für analytische Chemie an der Universität München, Professor Dr. Grillier vom Technikum in Biel zum ord. Professor der Mathematik an der Universität Bern, die Privatdozenten Dr. Moritz Kohn an der Universität Wien (organische Chemie), Dr. Tibor Széki an der Universität Klausenburg (zyklische Kohlenmischungen) und Dr. techn. Rudolf Vondráček von der Böhmischen Technischen Hochschule Brünn zu a. o. Professoren, der bisherige Privatdozent Professor Dr. Erich Waetzmann zum a. o. Professor und Abteilungsvorsteher am Physikalischen Institut der Universität Breslau.

Verliehen: Dem ord. Honorarprofessor der Astronomie an der Universität Erlangen und Direktor der Remise Sternwarte in Bamberg Dr. Ernst Hartwig der Titel Geheimer Hofrat, dem wissenschaftlichen Hilfsarbeiter am chemischen Universitätslaboratorium in Heidelberg Dr. Joh. Rissom und dem Privatdozenten für Mathematik an der Universität Göttingen Dr. Richard Courant der Titel Professor.

Gestorben: Der ord. Professor für physiologische Chemie an der Universität Budapest Hofrat Dr. Franz Tangl, der ord. Professor für Arithmetik und Geometrie an der landwirtschaftlichen Hochschule Berlin Geh. Reg.-Rat Dr. Otto Reichel, der frühere ord. Professor für chemische Technologie an der Technischen Hochschule Graz Dr. Max v. Kraft, der Professor für Agrikulturchemie an der Universität Göttingen Geh. Reg.-Rat Dr. Bernhard Tollens.

Angebote.

Physiker

mit abgeschlossener Hochschulbildung, der sich der drahtlosen Telegraphie zu widmen beabsichtigt oder bereits Erfahrungen auf diesem Gebiete besitzt, gesucht. Erwünscht sind Erfahrungen auf dem Gebiete der Elektronenemission und Vakuumtechnik.

Bewerbungen mit kurzem Lebenslauf und Gehaltsansprüchen erbeten an

Dr. Georg Seibt,

**Fabrik funkentelegraphischer Apparate.
Berlin-Schöneberg, Hauptstr. 11.**

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 5.

1. März 1918.

Redaktionsschluß für No. 7 am 6. März 1918.

19. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

R. v. Mises, Einfache und exakte Ableitung des Maxwellschen Geschwindigkeits-Verteilungs-Satzes. S. 81.

R. Durrer, Über die spezifischen Wärmen von Blei-Antimonlegierungen. S. 86.

Zusammenfassende Bearbeitungen:

O. Lehmann, Die Hauptsätze der

Lehre von den flüssigen Kristallen. (II. Teil.) S. 88.

Besprechungen:

L. Zehnder, Grundriß der Physik. S. 100.

C. Cranz, Lehrbuch der Ballistik. S. 101.

L. Graetz, Die Physik. S. 102.

K. Strecker, Jahrbuch der Elektrotechnik. II. III. IV. S. 103.

J. I. Weyrauch, Robert Mayer zur Jahrhundertfeier seiner Geburt. S. 104.

C. Neumann, Franz Neumanns Beiträge zur Kristallonomie aus den Jahren 1823 und 1826. S. 104.

J. Hartmann, Tabellen für das Rowlandsche und das internationale Wellenlängensystem. S. 104.

Personalien. S. 104.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Einfache und exakte Ableitung des Maxwell'schen Geschwindigkeits-Verteilungs-Satzes.

Von R. v. Mises.

Für den Satz, daß unter allen möglichen Geschwindigkeits-Verteilungen in einem Gase die sog. Maxwell'sche Verteilung:

$$m_i = A e^{-h^2(v_i - c)^2} \quad (1)$$

(A, h, c Konstante, m_i Zahl der Moleküle mit der Geschwindigkeit v_i) die wahrscheinlichste sei, wird in der Regel eine Ableitung gegeben, die weder als einfach noch als einwandfrei bezeichnet werden kann. Die Ableitung geht von der Stirlingschen Formel aus, die sich wieder auf die Eigenschaften der Eulerschen Γ -Funktion stützt, sie verwirft die natürliche Forderung nach der Ganzzahligkeit der Lösung und läßt es im unklaren, in welchem Maße die Lösung eine nur für eine große Zahl der Moleküle gültige Annäherung bildet. In den folgenden Zeilen wird im Anschluß an eine kurze Darstellung der bisherigen Ableitung ein neuer, ganz elementarer Beweis gegeben, der von den ange deuteten Mängeln frei ist und zu einer exakt formulierten, über das bisher Bekannte hinausgehenden Aussage führt; an einem Zahlenbeispiel wird der Sinn des neu formulierten Hauptsatzes erörtert.

1. Problemstellung.

Wenn n -Elemente derart in k -Gruppen zerfallen, daß die erste Gruppe n_1 , die zweite $n_2 \dots$, die k -te n_k -Elemente umfaßt, so sind bekanntlich

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \quad (2)$$

verschiedene individuelle Anordnungen der Elemente möglich, die diese Einteilung ergeben. Die Wahrscheinlichkeit einer Verteilung — Gleich-

heit für jede individuelle Anordnung vorausgesetzt — ist also dem Ausdruck

$$N = n_1! n_2! \dots n_k! \quad (3)$$

umgekehrt proportional. Es sei nun jeder Gruppe von Elementen eine bestimmte Zahl $v_1, v_2 \dots v_k$ — in der Gastheorie ist dies die Geschwindigkeit der betreffenden Moleküle — zugeordnet und neben der Gesamtzahl n der Elemente auch der Mittelwert v_0 und der quadratische Mittelwert v_{00}^2 von vornherein gegeben, d. h.

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + \dots + n_k &= n, \\ n_1 v_1 + n_2 v_2 + \dots + n_k v_k &= n v_0, \\ n_1 v_1^2 + n_2 v_2^2 + \dots + n_k v_k^2 &= n v_{00}^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Alle gegebenen Größen müssen wir naturgemäß als rationale oder, was bei entsprechender Wahl der Einheit auf dasselbe hinauskommt, als ganze Zahlen voraussetzen. Ist $k > 3$, was wir hinfür immer annehmen, so haben die „diophantischen Gleichungen“ (4) unendlich viele ganzzahlige Lösungen, unter denen im allgemeinen eine beschränkte Anzahl von positiven sich befindet. Von diesen muß eine, oder eventuell mehrere, den Ausdruck (3) zu einem Minimum machen und somit die „größte Wahrscheinlichkeit“ besitzen. Die Bedingungen, denen v_0 und v_{00}^2 genügen müssen, damit es überhaupt positive Lösungen von (4) gibt, setzen wir als erfüllt voraus. Ebenso nehmen wir an, daß es möglich sei, die drei Konstanten A, h, c in (1) so zu wählen, daß m_i für n_i in (4) eingesetzt, diese drei Gleichungen erfüllt. Es besteht dann folgende Aufgabe:

Man soll nachweisen, daß die Maxwell'sche Lösung (1) oder wenigstens eine ihr „benachbarte“ ganzzahlige Lösung von (4) und keine andere den Ausdruck (3) zu einem Minimum unter den Nebenbedingungen (4) macht.

Es ist nützlich, sich die ganzzahligen Lösungen von (4) unter dem Bilde eines $(k-3)$ dimen-

sionalen „Gitters“ im k -dimensionalen Raum vorzustellen. Unter „Gitter“ wird eine Anordnung äquidistanter auf äquidistanten und parallelen Geraden liegender Punkte im Raum verstanden. Man denke sich etwa im dreidimensionalen Raum eine Ebene, die nur gewisse Punkte mit ganzzahligen Koordinaten enthält. Alle diese Punkte zusammen bilden ein ebenes Gitter, d. h. sie sind die Kreuzungspunkte zweier Scharen paralleler, in gleichen Abständen gezogener Geraden auf der Ebene. Die Maxwellsche Lösung liefert einen Punkt des durch (4) bestimmten $(k-3)$ -dimensionalen Raumes, aber im allgemeinen keinen Gitterpunkt.

2. Beweis auf Grund der Stirlingschen Formel.

Man stützt einen Beweis für den in (1) angeführten Satz auf die sog. Stirlingsche Formel, nach der mit Annäherung für große n

$$n! = n^n e^{-n} \quad (5)$$

gesetzt werden darf. Führt man diesen Ausdruck in (3) ein, so erhält man

$$\log \text{nat } N = \sum_{i=1}^k n_i \log \text{nat } n_i - \sum_{i=1}^k n_i,$$

hat also wegen (4), mit λ, μ, ν als unbestimmten Konstanten,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k n_i \log \text{nat } n_i + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^k n_i + \mu \sum_{i=1}^k n_i v_i + \\ + \nu \sum_{i=1}^k n_i v_i^2 \end{aligned}$$

zu einem Extremum zu machen. Dies ergibt die k -Gleichungen:

$$\log \text{nat } n_i = -\lambda - \mu v_i - \nu v_i^2, \quad (i=1, 2, \dots, k), \quad (6)$$

wobei λ, μ, ν aus (4) zu bestimmen sind. Man sieht, daß auf diese Weise sich als einziges Extremum $n_i = m_i$ mit der in (1) gegebenen Bedeutung von m_i ergibt.

Zunächst wird zu bemerken sein, daß die gefundenen m_i im allgemeinen keine ganzen Zahlen sein können. Allein die Ungenauigkeit der Annäherung (5) ist vielleicht noch viel bedeutender als der Unterschied zwischen den m_i und den nächst benachbarten ganzzahligen Lösungen von (4). Man muß ja bedenken, daß die Lage eines Extremums sich bei Verwendung einer Annäherung nur mit sehr großen Fehlergrenzen ergibt. Schwerwiegender ist noch der Einwand, daß die gefundenen m_i zum Teil sehr kleine Zahlen sein können, während die Annäherung (5) nur für große n_i gilt, so daß man gar nicht übersehen kann, wie weit das Resultat noch brauchbar ist. Es ist auch nicht sicher, ob N , das eine Funktion der ganzzahligen

n_i ist, nicht auch Spitzenwerte aufweist, die bei Annäherung durch eine stetige Funktion gar nicht als Extrema zur Geltung kommen. Schließlich wird man verlangen dürfen, daß die Lösung des Problems, das nur für ganzzahlige n_i einen Sinn hat, unabhängig von jeder Festsetzung über die Bedeutung von $n!$ bei nicht ganzen n erfolgt. Wir geben im folgenden einen diesen Forderungen genügenden Beweis für den in (1) angedeuteten Satz.

3. Hilfssatz über Fakultäten.

Sind a und $a+x$ natürliche Zahlen, so sieht man ohne weiteres ein, daß

$$\frac{(a+x)!}{a! a^x} \geq 1, \quad (7)$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für $x=0$ und $x=-1$ gilt. Denn für positive x kann man durch $a!$ kürzen und es bleiben nur Faktoren wie $(a+1):a, (a+2):a, \dots$. Bei negativem x kürzt man durch den Zähler und es bleiben die Faktoren $a:a, a:(a-1), a:(a-2), \dots$. Beiderseits der Stellen, in denen der Quotient (7) den Wert eins besitzt, wächst er mit wachsendem Absolutwert von x unbeschränkt.

Wir betrachten nun etwas allgemeiner den Ausdruck

$$g(x) = \frac{(a+x)!}{a! m^x}, \quad (8)$$

wo m eine beliebige, nicht notwendig ganze, Zahl bedeutet. Die Funktion g der ganzzahligen Variablen x im Bereich $(-a+1)$ bis ∞ hat den Wert 1 für $x=0$ und ist vollständig definiert durch

$$g(0) = 1, \quad \frac{g(x+1)}{g(x)} = \frac{a+x+1}{m}. \quad (9)$$

Bezeichnen wir mit ξ die größte ganze Zahl, die nicht größer als $m-a$ ist; also

$$0 \leq m - (a + \xi) < 1 \quad (10)$$

so folgt aus (9):

$$\frac{g(x+1)}{g(x)} > 1 \text{ für } x > \xi, \quad \frac{g(x)}{g(x-1)} \leq 1 \text{ für } x \leq \xi. \quad (11)$$

Diese Ungleichungen besagen, daß $g(x)$ seinen kleinsten Wert für $x=\xi$ annimmt. Dieser Kleinstwert ist zufolge (9) mindestens gleich $(a:m)^\xi$. Denn bei positivem ξ ist $m > a$ und die Abnahme der $g(x)$ von einem x -Wert zum nächsten höchstens $a:m$; bei negativem ξ hat man $a > m$ und die Abnahme höchstens gleich $m:a$.

Nach beiden Seiten von der Stelle $x=\xi$ wächst g mit $|x-\xi|$ in stets steigendem Maße ins Unendliche. Wir haben also folgenden Hilfssatz:

Bezeichnen a und $a+x$ natürliche Zahlen, m eine beliebige reelle Zahl, $a+\xi$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als m ist, so gilt:

$$g(x) = \frac{(a+x)!}{a! m^x} \geq \left(\frac{a}{m}\right)^\xi, \quad (12)$$

der Kleinstwert von g liegt bei $x=\xi$ und g wächst mit $|x-\xi|$ in unbeschränkt steigendem Maße ins Unendliche.

Auf Grund dieses Hilfssatzes werden wir nunmehr sofort den in 1 angedeuteten Satz beweisen.

4. Beweis des Hauptsatzes.

Nehmen wir zunächst an, die durch (1) dargestellte Lösung der Gleichungen (4) sei ganzzahlig. Wir bilden den Ausdruck

$$N(m) = m_1! m_2! \dots m_k! \quad (13)$$

und analog

$$N(m+x) = (m_1+x_1)! (m_2+x_2)! \dots (m_k+x_k)!, \quad (13')$$

wobei m_i+x_i irgendeine von m_i verschiedene Lösung von (4) bezeichnen soll. Aus dem linearen Charakter der Gl. (4) folgt:

$$\sum_{i=1}^k x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^k v_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^k v_i^2 x_i = 0. \quad (14)$$

Wenden wir nun Gl. (7) an, indem wir für a der Reihe nach $m_1, m_2, \dots, m_k$ für x entsprechend $x_1, x_2, \dots, x_k$ setzen, so erhalten wir:

$$\frac{N(m+x)}{N(m)} > m_1^{x_1} m_2^{x_2} \dots m_k^{x_k}. \quad (15)$$

Das Gleichheitszeichen kann wegbleiben, da zufolge (14) nicht alle x_i gleichzeitig den Wert -1 haben können. Setzt man rechts in (15) die Werte aus (1) ein, so erhält man mit Rücksicht auf (14):

$$m_1^{x_1} m_2^{x_2} \dots m_k^{x_k} = A^{\sum x_i} e^{-h^2 (\sum v_i^2 x_i - 2c \sum v_i x_i + c^2 \sum x_i)} = 1. \quad (16)$$

Es ist somit $N(m+x) > N(m)$, w. z. b. w.

Sind nun nicht alle m_i ganzzahlig, dann wählen wir eine möglichst nahe benachbarte ganzzahlige Lösung $a_1, a_2, \dots, a_k$ von (4) und bezeichnen analog wie oben mit $N(a)$ bzw. $N(a+x)$ den Wert des Ausdruckes (3), wenn darin für n_i einmal a_i und einmal a_i+x_i gesetzt wird. Die a_i+x_i sind ganze Zahlen, die (4) erfüllen, so daß wieder (14) gilt. Mit Rücksicht auf (16) besagt jetzt (8):

$$\frac{N(a+x)}{N(a)} = g_1(x_1) \cdot g_2(x_2) \dots g_k(x_k). \quad (17)$$

Die Indizes an den g sollen darauf hindeuten, daß die Parameter a und m der Funktion g

der Reihe nach die Werte $a_1, m_1; a_2, m_2, \dots$ annehmen. Die rechte Seite von (17) ist nun nicht mehr für beliebige x_i größer als 1. Dies ist aber auch gar nicht zu verlangen, da ja $a_1 \dots a_k$ ein beliebiger Punkt in der Umgebung von m_i war. Bezeichnet $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ die ganzen Zahlen, die der zu (10) analogen Bedingung

$$0 \leq m_i - (a_i + \xi_i) < 1 \quad (18)$$

genügen, so folgt aus (12):

$$g_1(x_1) \cdot g_2(x_2) \dots g_k(x_k) \geq g_1(x_1) \cdot \left(\frac{a_2}{m_2}\right)^{\xi_2} \left(\frac{a_3}{m_3}\right)^{\xi_3} \dots \left(\frac{a_k}{m_k}\right)^{\xi_k}. \quad (19)$$

Hierin sind alle Faktoren rechts bis auf den ersten von der Wahl der x_i unabhängig. Dieser erste Faktor wächst aber, nach dem Hilfssatz mit $|x_1 - \xi_1|$ ins Unendliche. Man kann also sich eine X_1 so wählen, daß für alle $|x_1 - \xi_1| \geq X_1$ der Ausdruck rechts in (19) größer als 1 wird. Dasselbe gilt für die Indizes 2, 3, ..., k und man sieht daher, daß es ein durch gewisse Zahlen $X_1, X_2, \dots, X_k$ genau bestimmtes Gebiet um den Punkt $a+\xi$ herum geben muß, außerhalb dessen das Minimum von N nicht liegen kann, weil dort $N(a+x)$ größer ist als $N(a)$. Es handelt sich nur noch darum, wie sich die X_i der Größenordnung nach verhalten, ob nicht etwa das durch sie bestimmte Gebiet alle positiven Lösungen von (4) umschließt. Um dies zu untersuchen, sehen wir nach, was bei Vergrößerung von n aus den X_i wird.

Seien einmal die Konstanten der Gl. (4), sämtliche v_i , sowie v_0, v_{00} und n gegeben und sei die diesen Angaben entsprechende Lösung m_i gefunden. Dazu sei dann ein benachbarter Gitterpunkt a_i gewählt, das zugehörige ξ_i bestimmt und schließlich der Bereich X_i nach dem eben dargelegten Verfahren abgegrenzt. Nehmen wir nun an, das Problem werde nochmals mit denselben v_i, v_0 und v_{00} , aber mit λ -mal vergrößertem n , also mit $n' = \lambda n$ gestellt, wobei λ eine große ganze Zahl bezeichnet. Alle auf die neuen Angaben bezüglichen Größen wollen wir mit Akzenten bezeichnen. Die neue Maxwell'sche Lösung ist, wie man sofort sieht, $m'_i = \lambda m_i$. Der benachbarte Gitterpunkt a'_i kann aber, wenn λ genügend groß ist, sicher „günstiger“ gewählt werden als mit λa_i , nämlich näher an m'_i liegend, da nach den Gesetzen der „diophantischen Approximationen“ jeder irrationale Wert durch größere ganze Zahlen besser approximiert werden kann. Überdies gilt auch

$$a'_i + \xi'_i \geq \lambda(a_i + \xi_i), \quad (i=1, 2, \dots, k), \quad (20)$$

wenn wieder $a'_i + \xi'_i$ die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als m'_i ist. Man kann demnach durch hinreichend große Wahl von λ

erreichen, daß der Quotient $a'_i : m'_i$ beliebig nahe an 1 und daß $\xi'_i : \lambda$ beliebig nahe an Null liegt. Wird daher irgendein $\eta > 1$ gewählt, so kann man ein λ so finden, daß

$$\left(\frac{a'_i}{m'_i}\right)^{\frac{\xi'_i}{\lambda}} > \frac{1}{\eta} \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (21)$$

Es werde nun verlangt, daß der Unterschied zwischen der Maxwell'schen Lösung und der Stelle des wirklichen Minimums von N , also der größte Wert der X_i , nicht mehr als q -mal der Gesamtzahl n' aller Moleküle betrage, wo q eine beliebig vorgegebene kleine Zahl sei. Wir wählen n zunächst so, daß

$$n > \frac{2}{q} \quad (22)$$

und überdies derart, daß das kleinste der m_i größer als 2 ist. Die Punkte m , a und $a + \xi$ sind dadurch bestimmt. Die kleinere der beiden Zahlen $(a_1 + \xi_1 + 1) : m_1$ und $m_1 : (a_1 + \xi_1)$, die beide größer als 1 sind, bezeichnen wir mit η^k , also mit η die positive, reelle k -te-Wurzel daraus. Bestimmen wir nun diesem η entsprechend λ nach (21), so erhalten wir zufolge der Definition der g in (11):

$$g'_1(q\lambda n + \xi'_1) > \left(\frac{a'_1}{m'_1}\right)^{\xi'_1} \cdot \frac{a'_1 + \xi'_1 + 1}{m'_1} \cdot \frac{a'_1 + \xi'_1 + 2}{m'_1} \dots \frac{a'_1 + \xi'_1 + q\lambda n}{m'_1} > \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\lambda} \eta^{\lambda k}, \quad (23)$$

weil unter den $q\lambda n > 2\lambda$ Faktoren, die neben dem Klammerausdruck stehen, wenigstens λ Faktoren größer als

$$\frac{a'_1 + \xi'_1 + 2}{m'_1} > \frac{\lambda(a_1 + \xi_1 + 1)}{\lambda m} > \eta^k$$

sich befinden. Benutzt man nochmals die Ungleichung (21), so erhält man für den Ausdruck (19):

$$g'_1(q\lambda n + \xi'_1) \cdot \left(\frac{a'_2}{m'_2}\right)^{\xi'_2} \dots \left(\frac{a'_k}{m'_k}\right)^{\xi'_k} > \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\lambda} \cdot \eta^{\lambda k} \cdot \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\lambda(k-1)} = 1, \quad (24)$$

womit bewiesen ist, daß für $x'_1 - \xi'_1 = q$ $n = qn$ die Grenze X'_1 erreicht ist, außerhalb der sich das Minimum von N nicht finden kann. Ganz analog beweist man, mit Rücksicht auf die Bedeutung von η auch dasselbe für $x'_1 - \xi'_1 = -q\lambda n$. Denn auch unter den Faktoren

$$\frac{m'_1}{a'_1 + \xi'_1} \cdot \frac{m'_1}{a'_1 + \xi'_1 - 1} \dots \frac{m'_1}{a'_1 + \xi'_1 - q\lambda n + 1}$$

befinden sich wenigstens λ , deren Wert größer ist als $m_1 : (a_1 + \xi_1)$, also auch größer als η . — Dieselbe Überlegung, die hier für x'_1 angestellt wurde, wiederholt man ohne Schwierigkeit für

jeden andern der k -Indizes und braucht nur den größten der so errechneten λ -Werte zu nehmen, um folgenden Satz in seinem ganzen Umfang erwiesen zu sehen:

Ist die Maxwell'sche Lösung m nach (1) eine ganzzahlige Lösung von (4), so macht sie N zu einem absoluten Minimum, hat also die größte Wahrscheinlichkeit; sind die m_i nicht sämtlich ganze Zahlen, so gibt es in der Umgebung des Punktes m (im $k - 3$ dimensionalen Raum, der durch (4) aus dem k dimensionalen Raum der n_i herausgehoben wird) ein begrenztes Gebiet, in dem das absolute Minimum von N liegt; wird unter sonst gleichbleibenden Verhältnissen die Gesamtzahl $n = \sum n_i$ hinreichend groß, so reduzieren sich die Abmessungen dieses Gebietes, in das das Minimum von N hineinfällt, auf einen beliebig klein vorgegebenen Bruchteil von n .

5. Zahlenbeispiel.

Die Bedeutung und die Anwendbarkeit unseres Hauptsatzes wird durch ein Zahlenbeispiel klarer werden. Wir nehmen an, die Geschwindigkeit v_i habe die ganzzahligen Werte zwischen -4 und $+4$ und der quadratische Mittelwert der Geschwindigkeiten sei $v_{00}^2 = 4$. Dann verschwindet, der Symmetrie wegen, die Konstante c in der Maxwell'schen Formel (1) und die Konstante h^2 ist aus der Gleichung

$$\frac{\sum \lambda^2 e^{-\lambda^2 h^2}}{\sum e^{-\lambda^2 h^2}} = 4 \quad (\lambda = -4, -3, \dots, 0, \dots, 4) \quad (25)$$

zu bestimmen. Numerische Auflösung führt zu $h^2 = 0,0954$ und $e^{-\lambda^2 h^2} = 1, 0,90901, 0,68277, 0,42376, 0,21732$ für $\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ und ± 4 . Der Proportionalitätsfaktor A der Formel (1) läßt sich diesmal aus n ohne weiteres berechnen. Die diophantischen Gleichungen (4) gestatten bei den getroffenen Annahmen die Auflösung:

$$\begin{aligned} n_0 &= -3n + 15n_4 + 8n_3 + 3n_2 + 3n_1 + 8n_3 + 15n_4 \\ n_1 &= 2n - 6n_4 - 3n_3 - n_2 - 3n_1 - 6n_3 - 10n_4 \\ n_{-1} &= 2n - 10n_4 - 6n_3 - 3n_2 - n_1 - 3n_3 - 6n_4. \end{aligned} \quad (26)$$

Für die rechts stehenden 6 Veränderlichen kann jeder ganze positive Wert gesetzt werden, der den Ausdruck nicht negativ macht.

Wir nehmen nun der Reihe nach die Fälle $n = 30, n = 300$ und $n = 3000$ vor und wollen für jeden den Bereich, in dem das Minimum von N nach unserm Hauptsatz liegen muß, bestimmen.

Für $n = 30$ ergibt sich zunächst als Maxwell'sche Lösung die in der zweiten Spalte der Tabelle I stehende Zahlenreihe, die aus den oben angegebenen Werten für $e^{-\lambda^2/h^2}$ durch Multiplikation mit $4,9893 = 30: \Sigma e^{-\lambda^2/h^2}$ hervorgeht. Wir haben dann einen dem Maxwell'schen Punkt möglichst naheliegenden Gitterpunkt, der (26) erfüllt, zu wählen. Wir tun das, indem wir $a_2 = a_{-2} = 3$, $a_3 = a_{-3} = 3$, $a_4 = a_{-4} = 1$ annehmen, weil die auf den ersten Blick näher liegende Annahme 4, 2, 1 keine positiven Lösungen von (26) gibt. Die gewählten und die aus (26) berechneten a_i sind in der dritten Spalte der Tabelle I eingetragen. Aus den a_i und m_i folgen die in der vierten Spalte angeführten ξ_i , das sind nach (10) die Unterschiede zwischen den a_i und den größten in m_i enthaltenen ganzen Zahlen. Die fünfte Spalte enthält die aus der zweiten und vierten berechneten Werte von $(m:a)\xi$, die für die Bestimmung der gesuchten Gebietsgrenzen nach (19) erforderlich sind. Man hat z. B. die Grenzen von x_0 so zu bestimmen, daß

$$g_0(x_0) \geq H\left(\frac{m}{a}\right)^{\xi_0} (\lambda = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4). \quad (27)$$

Die rechte Seite hat den Wert $(1,002 \cdot 1,289)^2 = 1,66$, die entsprechenden Werte für die fol-

Tabelle I.

v	m	a	ξ	$(m:a)\xi$	$g_{\min}$	x	
						min	max
0	5,49	6	-1	1,090	1,665	-3	1
+1	4,99	5	-1	1,002	1,814	-2	2
+2	3,75	3	0	1	1,821	-1	2
+3	2,33	3	-1	1,289	1,094	-3	0
+4	1,19	1	0	1	1,821	-1	1

genden Indizes enthält die sechste Spalte der Tabelle. Nun ist nach (8)

$$g_0(2) = \frac{(a_0+2)!}{a_0! m_0^2} = \frac{7 \cdot 8}{5,49^2} = 1,86 > 1,66,$$

$$g_0(1) = \frac{7}{5,49} < 1,66;$$

$$g_0(-4) = \frac{(a_0-4)!}{a_0! m_0^{-4}} = \frac{5,49^4}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = 2,53 > 1,66,$$

$$g_0(-3) = \frac{5,49^3}{6 \cdot 5 \cdot 4} < 1,66.$$

Demnach sind die äußersten Grenzen für x_0 , wie in der letzten Spalte der Tabelle I angegeben, +1 und -3. In gleicher Weise sind die Grenzen für die übrigen Indizes bestimmt und in die Tabelle eingetragen worden.

Wenn n nicht 30, sondern 300 bzw. 3000 beträgt, findet man die in den zweiten Spalten der Tabelle II und III stehenden Werte der

Maxwell'schen Lösung m durch Verwendung des Proportionalitätsfaktors 49,893 bzw. 498,93 statt des oben verwendeten 4,9893. Die Punkte a mit ganzzahligen Koordinaten und daraus die ξ ergeben sich ohne weiteres, indem man die drei letzten m auf ganze Zahlen abrundet. Die beiden folgenden Spalten sind dann ohne Schwierigkeit zu berechnen. Aber auch die Grenzen für die x sind bei großen n nicht etwa umständlicher zu finden. Suchen wir z. B. für $n = 3000$ die Grenzen von x_0 , so muß nach der ersten Zeile in Tabelle III der Wert von g_0

Tabelle II.

v	m	a	ξ	$(m:a)\xi$	$g_{\min}$	x	
						min	max
0	54,89	56	-2	1,042	1,040	-4	1
+1	49,89	49	0	1	1,083	-2	3
+2	37,48	38	-1	1,014	1,058	-3	1
+3	23,26	23	0	1	1,083	-2	1
+4	11,93	12	-1	1,006	1,070	-1	0

Tabelle III.

v	m	a	ξ	$(m:a)\xi$	$g_{\min}$	x	
						min	max
0	548,88	548	0	1	1,00523	-2	2
+1	498,93	499	-1	1,000140	1,00495	-2	1
+2	374,75	375	-1	1,000754	1,00372	-2	1
+3	232,60	233	-1	1,001720	1,00179	-2	0
+4	119,29	119	0	1	1,00523	-1	0

größer oder mindestens gleich gemacht werden 1,00523. Nun ist

$$g_0(1) = \frac{549}{548,88} = 1,000218,$$

$$g_0(2) = g_0(1) \cdot \frac{550}{548,88} = 1,00226,$$

$$g_0(3) = g_0(2) \cdot \frac{551}{548,88} = 1,00551 > 1,00523.$$

Demnach ergibt sich $x_0 \leq 2$, wie in der letzten Spalte der Tabelle III eingetragen.

Die Bedeutung der in der Tabelle enthaltenen Ergebnisse liegt darin, daß damit bewiesen ist, das Minimum von N werde in einem Punkt $a_i + x_i$ sicher erreicht, dessen a_i die Werte der Spalte 3 und dessen x_i die Grenzen der Spalte 5 besitzen. Suchen wir im Sinne unseres Hauptsatzes die Größe des um m_i liegenden Gebietes im Verhältnis zu n zu bestimmen, so müssen wir den größtmöglichen Wert von $(a_i - m_i + x_i)$ aufsuchen und durch n dividieren. Dieser größte Wert tritt in allen drei Fällen bei der unteren Grenze von x_0 ein und beträgt der Reihe nach 2,49, 2,89, 2,88, also im Verhältnis zu n : 0,083,

0.0096, 0.00096. Damit ist das „Engerwerden“ des Gebietes im Sinne des Hauptsatzes zur Anschauung gebracht.

Die gefundenen Grenzen für die x_i können aber noch weiter ausgenützt werden, um die genaue Lage des Minimums von N durch Probieren zu finden. Beschränken wir uns auf symmetrische Lösungen, also solche, für die $n = n_{-i}$ ist, so folgt aus der Gl. (26):

$$\begin{aligned} -4x_2 - 9x_3 &= x_1 + 16x_4 \\ 6x_2 + 16x_3 &= x_0 - 30x_4. \end{aligned} \quad (28)$$

Setzt man für x_4 einen der nach der Tabelle zulässigen Werte ein, für x_0 und x_1 die beiden Grenzen, so stellt (28) jedesmal zwei Geradenpaare in einem x_2/x_3 -Koordinatensystem dar. Es sind nun jene Gitterpunkte zu suchen, welche in den von den Geradenpaaren eingeschlossenen Bereichen liegen und den Ungleichungen für x_2 und x_3 entsprechen. Führt man die Konstruktion durch, so zeigt sich, daß im Falle $n=30$ allein die Lösung $x_0 = -2$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$ möglich ist, in den Fällen $n=300$ und $n=3000$ überhaupt keine. In diesen beiden Fällen muß demnach der Punkt mit den Koordinaten a_i die genaue Stelle des Minimums von N bilden. Im Falle $n=30$ bringen wir die noch offene Frage dadurch zur Entscheidung, daß wir

$$\begin{aligned} g_0(-2) \cdot [g_1(2) \cdot g_2(0) \cdot g_3(-2) \cdot g_4(1)]^2 &= \\ = \frac{5.49^2}{6.5} \left[\frac{6.7}{4.99^2} \cdot 1 \cdot \frac{2.33^2}{3.2} \cdot \frac{2}{1.19} \right]^2 &= 6.6 \end{aligned}$$

bilden. Da dieser Wert größer als 1 ist, so folgt, daß auch für $n=30$ der willkürlich in der Nähe von m gewählte Punkt a die genaue Lage des Minimums darstellt.

Wien, am 11. Januar 1918.

(Eingegangen 11. Januar 1918.)

Über die spezifischen Wärmen von Blei-Antimonlegierungen.

Von R. Durrer.

Besitzen die beiden Komponenten eines binären Systems in einem bestimmten Konzentrationsgebiet im festen Zustande vollständige Nichtmischbarkeit, so soll nach Tammann¹⁾ die spezifische Wärme der Legierungen bei konstanter Temperatur innerhalb dieses Gebietes eine lineare Funktion der Konzentration sein. Untersuchungen hierüber liegen vor bei den

1) G. Tammann, Zeitschr. f. phys. Chem. 63, 130, 1908.

Systemen $Bi-Sn$ ¹⁾, $Fe-Fe_3C$ ²⁾ und $Bi-Cd$ ¹⁾. Bei Wismut-Zinnlegierungen zeigt nach O. Richter³⁾ die Kurve der spezifischen Wärmen einen nach unten konkaven Verlauf. Gleichgerichtete, aber größere Abweichungen von der Geraden besitzen Wismut-Bleilegierungen. Die spezifischen Wärmen beider Systeme sind zwischen 0 und 100° bestimmt worden. A. Meuthen⁴⁾ hat gefunden, daß die spezifischen Wärmen von Eisen-Kohlenstofflegierungen, die er zwischen 650 und 0 bzw. 700 und 0° untersucht hat, auf zwei Geraden liegen, die sich bei der Konzentration von 0,95 Proz. schneiden. Im Gegensatz zu diesen Abweichungen vom linearen Verlauf haben die Untersuchungen von M. Levin und H. Schottky⁵⁾ für die spezifischen Wärmen zwischen 17 und 100° für Wismut-Cadmiumlegierungen und Eisen-Kohlenstofflegierungen Größen ergeben, die sich innerhalb der Versuchsfehler mit dem nach der Mischungsregel berechneten decken.

Das gleiche gilt nach den im folgenden mitgeteilten Versuchen für die spezifischen Wärmen der Blei-Antimonlegierungen in dem Temperaturintervall von 20 bis 100°.

Versuchsmaterial.

Antimon, bezogen von E. Merck, bezeichnet als reinstes Antimon,

Blei, bezogen von C. A. F. Kahlbaum, bezeichnet als reinstes Stangenblei.

Messungen.

Die spezifischen Wärmen wurden nach der Mischungsmethode mit dem von Levin und Schottky⁶⁾ benutzten Wasserkalorimeter bestimmt.

Kontrollversuche.

Der Wasserwert des Kalorimeters ist von Levin und Schottky dadurch bestimmt worden, daß mehrere Versuche mit Blei zwischen 10 und 100° ausgeführt, die spezifische Wärme des Bleis nach Angaben der Literatur zu 0,03090 angenommen und hieraus der Wasserwert berechnet wurde. Aus den ausgeführten Versuchen ergab sich in vorliegender Arbeit unter Annahme des von Levin und Schottky gefundenen Wasserwertes für

1) Schmelzdiagramm s. b. Bornemann: Die binären Metallegierungen, II. Halle 1912, S. 94 u. 105.

2) Schmelzdiagramm s. z. B. P. Goerens: Einführung in die Metallographie, 2. Aufl. Halle, 1915.

3) O. Richter, Diss. Marburg, 1908.

4) A. Meuthen, Ferrum 10, 1, 1912.

5) M. Levin und H. Schottky, Ferrum 11, 1913, 1913.

6) a. a. O.

die spezifische Wärme des Bleis im Mittel der Wert 0,03084, der mit dem von Levin und Schottky angenommenen Wert innerhalb der Versuchsfehler übereinstimmt.

Ferner wurden die spezifischen Wärmen von Antimon und einer Legierung von Eisen mit 0,17 Proz. in dem Temperaturintervall von 20 bis 100° bestimmt und mit den Ergebnissen früherer Untersuchungen verglichen.

Die Resultate sind in Tabelle I zusammengestellt. Die Werte der spezifischen Wärmen von Eisen mit 0,17 Proz. stimmen überein; die Werte der vorliegenden Arbeit der spezifischen Wärme von Antimon liegen im Mittel um 1,5 Proz. tiefer als die Werte der Literatur, was wahrscheinlich auf Verschiedenartigkeit des Versuchsmaterials zurückzuführen ist.

Tabelle I.

Metall	Beobachter	Spezifische Wärme zwischen ca. 16 u. 100°		
		ältere Angaben	Mittel aus den älteren Angaben	Eigene Resultate
Antimon	Gaede	0,0500	0,05055	0,04981
	Jaeger u. Diesselhorst	0,0508		
	Schimpff	0,0503		
	Levin u. Schottky	0,05111		
Eisen mit 0,17 Proz. C	Levin u. Schottky	0,01118	0,01118	0,01118

Tabelle II.

Gew.- Proz. Pb.	Beginn der primären Ausscheidung	Eutektische Temperatur	Zeitdauer der eutek- tischen Kristallisation ber. für gleiche Gewichtsmengen
0,00	631	—	—
21,02	590	248	36
40,17	534	249	72
59,20	446	249	114
80,01	316	249	180
90,08	258	249	180
100,00	327	—	—

Versuchsergebnisse.

Die Legierungen wurden durch Zusammenschmelzen der Komponenten in Glasröhren in einer Stickstoffatmosphäre hergestellt. Zur Aufnahme der Abkühlungskurven wurde ein Pt-Pt-Rh-Thermoelement benutzt, dessen Angaben mit Hilfe der Schmelzpunkte von Zinn (231°), Blei (327°), Zink (419°) und Antimon (631°) korrigiert wurden. Mit Rücksicht auf die bei den Blei-Antimon-Schmelzen vorhandene starke Neigung zu Seigerungen wurden die Schmelzen stark gerührt. Die Ergebnisse der Schmelzversuche sind in Tabelle II zusammengestellt.

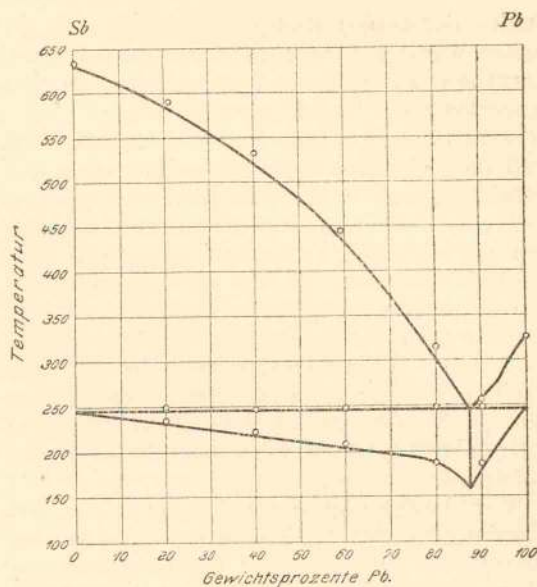


Fig. 1.

In der Fig. 1 ist das von Bornemann¹⁾ auf Grund der Versuche von Gontermann²⁾ gezeichnete Schmelzdiagramm des Systems Blei-Antimon wiedergegeben. Die bei vorliegenden Untersuchungen beobachteten Punkte sind als Kreise in das Diagramm eingezeichnet. Die Temperaturen des Beginnes der primären Ausscheidung von reinem Antimon liegen nach vorliegenden Versuchsergebnissen etwa 10° höher als nach den Angaben von Gontermann.

Nach dem Diagramm bestehen die erstarrten Schmelzen aus Konglomeraten von Kri-

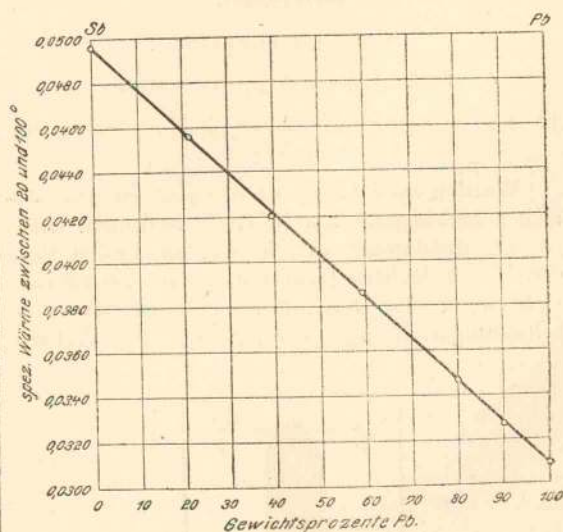


Fig. 2.

1) a. a. O.

2) Zeitschr. f. anorg. Chem. 55, 410. 1907.

stallen der beiden Komponenten Blei und Antimon, was durch die Ergebnisse der von Gontermann ausgeführten mikroskopischen Untersuchung der Reguli bestätigt wird.

Gontermann gibt an, daß zwischen 20 und 80 Gewichtsprozent *Pb* anstatt eines einheitlichen eutektischen Haltepunktes deren zwei nur 4 bis 6° auseinanderliegende auftreten. Bei vorliegenden Versuchen zeigte von fünf Abkühlungskurven, die von der Legierung mit 80 Proz. *Pb* aufgenommen wurden, nur eine einen zweiten Haltepunkt, der um 5° tiefer liegt. Von vier Abkühlungskurven der 60 proz. Legierung zeigte ebenfalls eine einen zweiten Haltepunkt, der um 5° tiefer liegt. Bei den übrigen Abkühlungskurven trat dieser zweite Haltepunkt nicht auf.

Vor Ausführung der kalorimetrischen Bestimmung wurden die Reguli mit einer axialen Bohrung zur Aufnahme des Thermometers versehen. Infolge der in den Proben vorhandenen Seigerungen erfuhr die Zusammensetzung der Proben durch das Ausbohren eine Änderung; es war daher noch eine nachträgliche Analyse der Proben notwendig.

Die für die spezifische Wärme der Legierungen erhaltenen Werte sind in Tabelle III und Fig. 2 wiedergegeben. Man erkennt, daß die

spezifische Wärme sich innerhalb der Versuchsfehler linear mit der Konzentration ändert. Diese Gerade gehorcht der Gleichung:

$$s = 0,04965 - 0,0001884 \cdot K,$$

in der *s* die spezifische Wärme, *K* die dazugehörige Konzentration bedeutet. Die Konstanten sind aus den Versuchsergebnissen nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet.

Die Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Werten sind stets kleiner als 0,4 Proz. und liegen damit innerhalb der Grenze der Versuchsfehler.

Tabelle III.

No.	Gewichtsprozent Blei	Spezifische Wärme		Differenz <i>s</i> beob. — <i>s</i> ber.	Differenz in Proz.
		beobachtet	berechnet		
1	0,00	0,04970	0,04965	+0,00005	+0,10
2	21,02	0,04564	0,04569	—0,00005	—0,11
3	40,17	0,04197	0,04208	—0,00011	—0,26
4	59,20	0,03865	0,03850	+0,00015	+0,39
5	80,01	0,03455	0,03457	—0,00002	—0,06
6	90,08	0,03262	0,03268	—0,00006	—0,18
7	100,00	0,03084	0,03081	+0,00003	+0,10

(Eingegangen 28. Januar 1918.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Die Hauptsätze der Lehre von den flüssigen Kristallen.

Von O. Lehmann.

(Fortsetzung von S. 73 und Schluß.)

16. Erzwungene Homöotropie, homogene Netze.

Werden zwei Glasplatten, zwischen welchen sich schleimig-flüssige Kristalle befinden, kräftig gegeneinander verschoben, so stellen sich die Molekülachsen (und demgemäß die Längsrichtungen der Kristalle) senkrecht zur Verschiebungsrichtung (ähnlich wie die Achsen

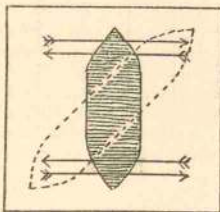


Fig. 18.

von Lenkrollen). Dies ist augenscheinlich die Richtung geringsten Widerstandes (Fig. 18). Sind die Kristalle hinreichend dicht gehäuft, so können hierbei durch Zusammenfließen derselben netzartig durchbrochene oder völlig zusammenhängende ausgedehnte Lamellen von einheitlicher Struktur entstehen¹⁾.

17. Flüssige Mischkristalle, künstliche Färbung, Diffusion.

Flüssige Kristalle können auch, ebenso wie feste, Mischkristalle bilden²⁾, überhaupt fremde Moleküle in regelmäßig orientierter Stellung³⁾, aufnehmen, z. B. Farbstoffmoleküle, in welcher letzterem Fall sie künstlich dichroitisch gefärbt

1) Ann. d. Phys. 12, 318, 1903; Flüssige Kristalle 1904, Taf. 8, Fig. 1—4; diese Zeitschr. 8, 386, 1907; Die neue Welt d. fl. Krist. 183, 1911; Ann. d. Phys. 50, 586, 1916.

2) Wied. Ann. 41, 525, 1890; Die neue Welt d. fl. Krist. 204, 1911; Ann. d. Phys. 2, 686, 1900; 43, 123, 1914.

3) Molekularphysik I, 393, 1888; Ann. d. Phys. 19, 410, 1906; 43, 122, 123, 1914; 47, 832, 1915; Zeitschr. f. phys. Chem. 56, 753, 1906; diese Zeitschr. 11, 580, 1910.

werden¹⁾. Eine kristallinische Flüssigkeit kann somit auch als Lösungsmittel dienen wie eine gewöhnliche, doch zeigt sie erhebliches Lösungsvermögen nur für ähnlich zusammengesetzte flüssige Kristalle. Andere Stoffe, die etwa in der isotropen Schmelze gelöst waren, werden bei Bildung der flüssigen Kristalle ausgeschieden, ebenso wie sich ein solches Selbstreinigungsvermögen bei festen Kristallen zeigt (infolge Wirkung der molekularen Richtkraft).

18. Innere Lösung und Schmelzung, Überkühlung.

Insofern von flüssigen Kristallen auch etwas isotropes Lösungsmittel aufgenommen wird, zeigt sich beim Erwärmen nicht nur Lösung an der Oberfläche wie bei gewöhnlichen Kristallen, es treten auch im Innern Tröpfchen von Lösung auf, welche ellipsoidisch geformt und regelmäßig orientiert sind²⁾. Fig. 19 stellt eine

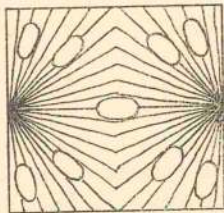


Fig. 19.

konische Störung mit entsprechend orientierten Tröpfchen dar. Vor dem Erstarren einer gewöhnlichen Schmelze ist die feste Modifikation in der flüssigen gelöst anzunehmen, so daß der Erstarrungspunkt als Sättigungspunkt dieser Lösung erscheint und unterkühlte Schmelze als übersättigte Lösung, deren Zähigkeit infolge des Anwachsens der Zahl fester Moleküle mit sinkender Temperatur erheblich steigt³⁾. In gleicher Weise gilt dies für die Erstarrung kristallinischer Flüssigkeiten. Verdampfende flüssige Kristalle enthalten Dampf gelöst⁴⁾.

1) Ann. d. Phys. 8, 908, 1902; Flüssige Kristalle 1904, Taf. 9, Fig. 1; R. Schenck, Kristallinische Flüssigkeiten u. fl. Krist., 1905; O. Lehmann, Ann. d. Phys. 16, 160, 1905; Zeitschr. f. phys. Chem. 56, 750, 1906; Ann. d. Phys. 21, 181, 1906; diese Zeitschr. 11, 575, 1910; Die neue Welt d. fl. Krist. 206, 1911; P. Gaubert, Compt. rend. 153, 573, 1911; Bull. soc. min. 36, 174, 1913; O. Lehmann, Ann. d. Phys. 43, 124, 1914.

2) Heidelb. Akad. 1911, Nr. 22, Taf. 4, Fig. 34.

3) Molekularphysik 2, 588, 1889; Wied. Ann. 41, 525, 1890; Flüssige Kristalle 50, 85, 1904; D. Vorländer, Ber. d. D. chem. Ges. 41, 2045, 1908.

4) Flüssige Kristalle 248, 1904; D. Vorländer, Ber. d. D. chem. Ges. 40, 4527, 1907.

19. Polymorphie und Schraubenstruktur bei flüssigen Kristallen.

Ebenso wie ein Stoff in mehreren festen kristallinischen Modifikationen auftreten kann, können unter Umständen mehrere flüssig-kristallinische beobachtet werden. Beispielsweise zeigt Cholesterylkaprinat zwei solche Modifikationen, die sich bei bestimmter Umwandlungstemperatur vorwärts und rückwärts ineinander umwandeln wie die enantiotropen Modifikationen des Ammoniumnitrats. Der Stoff besitzt also drei flüssige Zustände, deren Moleküle notwendig verschieden sein müssen, in Widerspruch mit der alten Identitätstheorie der Aggregatzustände, welche das Faktum nicht zu erklären vermag¹⁾.

In der Nähe des Umwandlungspunktes zweier flüssig-kristallinischer Modifikationen derselben Substanz sind beide in einem von der Temperatur abhängigen Mengenverhältnis miteinander gemischt zu denken, denn die Kristalle besitzen Schraubenstruktur, wie sich durch Zirkularpolarisation und Drehung der Polarisationssebene zu erkennen gibt²⁾.

20. Heterotropie, Lamellenbildung, Schillerfarben.

Durch Mischung der beiden Modifikationen erklärt sich die eigentümliche Erscheinung, daß die Grenze derselben nicht scharf, sondern verbreitert ist, falls sie als homogene angeschmiegte Schichten untersucht werden. Es findet dann vermutlich Bildung feiner Lamellen statt, welche abwechselnd mehr von der einen und andern Modifikation enthalten, denn nur so läßt sich das Auftreten von Schillerfarben unter

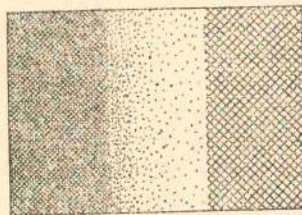


Fig. 20.

1) Zeitschr. f. phys. Chem. 56, 750, 1906; 73, 598, 1910; F. M. Jaeger, Proc. Amsterd. 9, 359, 472, 1906; D. Vorländer, diese Zeitschr. 7, 804, 1906; Zeitschr. f. phys. Chem. 57, 357, 1907; O. Lehmann, Die scheinb. leb. Krist. 1907, 49, Fig. 86; diese Zeitschr. 17, 243, Ann. 4, 1916.

2) Molekularphysik 2, 510, 1888; Zeitschr. f. phys. Chem. 4, 472, 1889; Ann. d. Phys. 2, 669, 684, 1900; 52, 527, 1917; D. Vorländer u. Fr. Jancke, Zeitschr. f. phys. Chem. 85, 697, 1913; M. Ed. Huth, Diss. Halle 1909; D. Vorländer, Ber. d. D. chem. Ges. 41, 2036, 2045, 1908.

enormer Zunahme der Intensität des reflektierten Lichtes erklären, sowie ähnlicher Farben zwischen gekreuzten Nicols, derart, daß die Grenze der beiden Modifikationen als Spektrum erscheint (Fig. 20)¹⁾. Ursache ist wahrscheinlich das Selbstreinigungsvermögen, welches Sonderung der Bestandteile (Heterotropie) anstrebt²⁾ (z. B. bei Cholesterylennamylat und -chlorid).

21. Gleichgewichtsveränderung durch Zusätze, farbige Höfe.

Zusatz einer fremden Substanz ändert die Breite der Mischzone und erzeugt farbige Höfe um deren Kristalle (Fig. 21), weil das Mi-

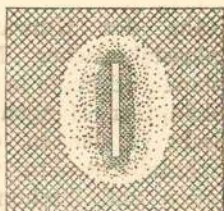


Fig. 21.

schungsverhältnis der beiden Modifikationen beeinflußt wird, wie man aus dem Einfluß auf die Umwandlungstemperaturen und die Stabilität der Modifikationen³⁾ schließen kann. Auffallend ist dabei, daß die Sättigungskurven zuweilen bei bestimmtem Mischungsverhältnis (z. B. bei Cholesterylcaprinat und Paraazoxyanisol) abbrechen.

22. Erzwungen homogene tropfbar-flüssige Kristalle.

Außer den schleimig-flüssigen Kristallen gibt es auch tropfbar-flüssige, deren Gestaltungskraft so gering ist, daß freischwebende Tropfen sich zu vollkommenen Kugeln gestalten. Zuerst wurde dies beobachtet bei Paraazoxyphenetol. Beim Erwärmen einer zwischen Glasplatten kristallinisch erstarrten festen Schicht bildet sich durch enantiotrope Umwandlung eine erzwungen-homogene flüssig-kristallinische Schicht (Fig. 22) aus gleichem Grunde wie bei den schleimig-flüssigen Kri-

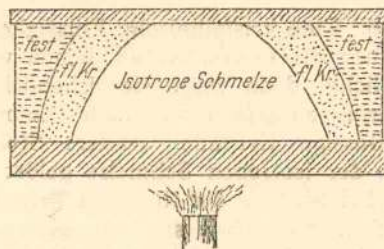


Fig. 22.

stallen. Die vom Glase in der regelmäßig orientierten Stellung, in der sie sich aus den festen Molekülen gebildet haben, fixierten flüssig-kristallinen Moleküle bilden anisotrope Häutchen von großer Beständigkeit, welche mechanisch geprüft mehr den zähflüssigen als den tropfbar flüssigen Kristallen gleichen und sowohl bei Überschreitung der Umwandlungstemperatur in die isotrop-flüssige Modifikation wie auch bei Unterschreitung des Erstarrungspunktes noch Bestand behalten können, wenn die genannten Temperaturen nicht zu stark überschritten wurden. Infolge der Adsorptionswirkung des Glases ist wahrscheinlich das Mischungsverhältnis der im chemischen Gleichgewicht befindlichen Moleküle ein anderes als in der freien kristallinen Flüssigkeit¹⁾.

Bei Anwendung eines linsenförmigen Deckglases zeigen die erzwungen homogenen Schichten zwischen gekreuzten Nicols Newtonsche Ringe, [eventuell mit Verwerfungen entsprechend der verschiedenen Orientierung der aneinandergrenzenden Felder (Fig. 23)], aus deren

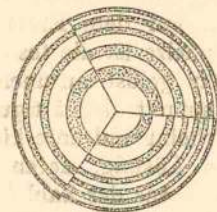


Fig. 23.

Durchmesser die Brechungsindizes ermittelt werden können²⁾.

23. Verdrehung homogener flüssig-kristallinischer Schichten.

Werden die beiden Glasplatten gegeneinander verdreht und damit auch die auf die

1) Dichtere Schraffierung bedeutet die kältere Modifikation, dichtere Punktierung die rote Seite des Spektrums.

2) Diese Zeitschr. 7, 578, 1906; II, 583, 1910; Zeitschr. f. phys. Chem. 73, 598, 1910; Die neue Welt d. fl. Krst. 235, 1911; F. Giesel, diese Zeitschr. II, 192, 1910; F. Wallerant, Compt. rend. 143, 605, 1906.

3) Wied. Ann. 41, 525, 1890; R. Schenck u. Schneider, Zeitschr. f. phys. Chem. 29, 546, 1899; R. Schenck, diese Zeitschr. I, 427, 1900; O. Lehmann, Zeitschr. f. phys. Chem. 58, 750, 1906; 73, 598, 1910; Kristallisationsmikroskop 1910, 76, Tafel.

1) Wied. Ann. 40, 408, 421, 1890; 41, 525, 1890; Ann. d. Phys. 2, 657, 663, 1900; 12, 325, 1903; Flüssige Kristalle 1904, 51, § 13 u. 58; Die neue Welt d. fl. Krst. 222, 1911; diese Zeitschr. II, 580, 1910; Ann. d. Phys. 51, 353, 1916.

2) Ann. d. Phys. 2, 649, 1900; 18, 808, 1905; 51, 355, 1916; Siehe auch W. Voigt, diese Zeitschr. 17, 76, 128, 152, 305, 1916.

übrigen Moleküle orientierend wirkenden adsorbierten Häutchen, oder kommen aus anderem Grunde verschieden orientierte Häutchen übereinander, so nimmt die zwischen ihnen

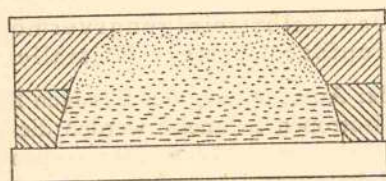


Fig. 24.

befindliche Masse (Fig. 24) Schraubenstruktur an, verhält sich also im polarisierten Licht nicht mehr wie ein einfacher fester Kristall wie vor der Verdrehung (Fig. 25 a u. b¹⁾), son-

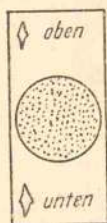


Fig. 25 a.

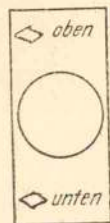


Fig. 25 b.

dern zeigt z. B. Verdrehung der Richtung stärkster Absorption, [d. h. erscheint in verschiedener Farbe, je nachdem man das polarisierende Prisma vor oder hinter dem Präparat einschaltet (Fig. 26 a u. b bei 90° Dr.)] und Drehung der Polarisationsebene des Lichtes oder Umwandlung desselben in elliptisch- oder

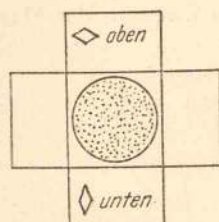


Fig. 26 a.

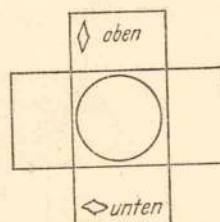


Fig. 26 b.

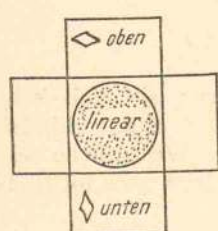


Fig. 27 a.

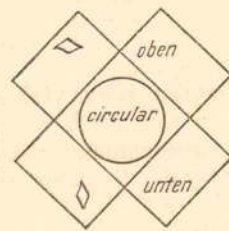


Fig. 27 b.

1) Rhomben = Nicols; Punktierung = Gelb.

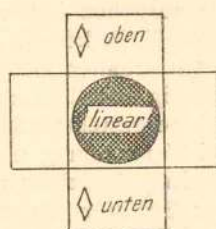


Fig. 28 a.

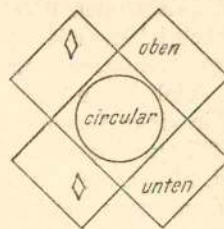


Fig. 28 b.

zirkular-polarisiertes Licht¹⁾ (Fig. 27 a, b; 28 a, b; 29; 30 u. 31 jeweils beide Nicols gleichzeitig).

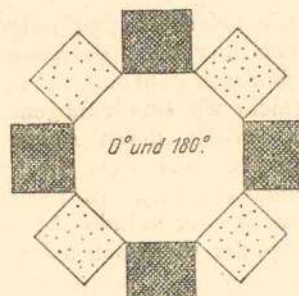


Fig. 29.

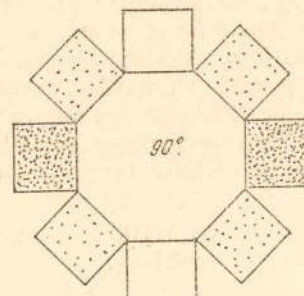


Fig. 30.

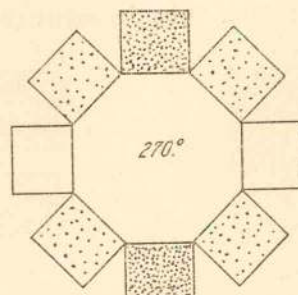


Fig. 31.

24. Verdrehung infolge von Orientierung durch feste Flächen.

Die orientierende Wirkung kann auch von

1) Ann. d. Phys. 51, 378, 1916; s. a. Ch. Mauguin, Compt. rend. 151, 1141, 1910.

andern anisotropen Flächen ausgehen statt von den beschriebenen Häutchen. Z. B. können erzwungen homogene Schichten erhalten werden durch Einbringen der flüssig-kristallinen Masse in einen feinen frisch hergestellten Spalt eines Glimmerblatts¹⁾. Bei Verwendung eines Gipskristalls erhielt Mauguin²⁾ Schichten mit schraubenförmig verdrehter Struktur; die beiden Flächen des Spaltes wirkten also in verschiedener Weise orientierend.

25. Erzeugung von Halbisotropie durch Adsorption.

Ebenso wie bei schleimig-flüssigen Kristallen kann auch hier die Adsorptionskraft des Glases Ansmiegung bedingen, so daß sich die ganze Schicht wie eine homogene einachsige Kristallplatte verhält, deren Achse senkrecht zur Glasplatte ist, auch wenn die Substanz an sich nicht einachsig ist³⁾. In letzterem Falle zeigt sich rasch wechselnde Aggregatpolarisation⁴⁾ infolge der thermischen Bewegung.

26. Einwirkung des Magnetismus auf homogene Schichten.

Auch durch Einwirkung eines Magnetfeldes können die Moleküle gerichtet werden. Ihre Hauptachsen (opt. Achsen) suchen dabei den Kraftlinien parallel zu werden, werden hieran aber durch die Wirkung des Glases gehindert, so daß eine Zwischenstellung gemäß dem Parallelogramm der Kräfte zustande kommt⁵⁾.

27. Spurlinien, Spurflächen und Spurgebiete.

An den Grenzen verschieden orientierter erzwungen homogener Gebiete befinden sich die Moleküle ebenfalls in Zwischenstellung zwischen den beiden Orientierungen (Fig. 32), so

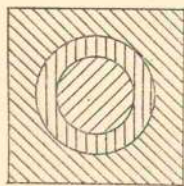


Fig. 32.

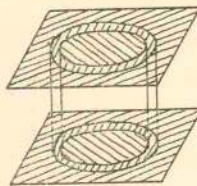


Fig. 33.

1) Die neue Welt der fl. Krist. 1911, 203 Anm. u. 223 Anm.

2) Ch. Mauguin, Compt. rend. 156, 1246, 1913.

3) Die scheinb. lebenden Krist. 1907, 52, Fig. 90. Die von dem stäbchenförmigen Kristall hervorgebrachte Störung beruht auf Aufzehrung, nicht, wie angegeben, auf direkter Einwirkung auf die tropfbar flüss. kr. Masse.

4) Ch. Mauguin, Compt. rend. 154, 1359, 1912.

5) Ann. d. Phys. 2, 675, 676, 1900; Ch. Mauguin, Compt. rend. 152, 1680, 1911.

daß solche Spurlinien oder Spurstreifen oder Spurgebiete (Fig. 33) zwischen gekreuzten Nicols sich hell oder dunkel von den angrenzenden Feldern abheben¹⁾.

28. Das Selbstreinigungsvermögen tropfbar flüssiger Kristalle.

Bei der Ausscheidung der flüssigen Kristalle aus der isotropen Schmelze werden die in letzterer enthaltenen gelösten oder suspendierten Verunreinigungen nicht aufgenommen, sondern in die Zwischenräume zwischen die einzelnen Individuen zusammengedrängt²⁾ (Fig. 34).

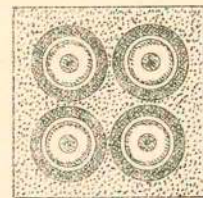


Fig. 34.

30. Ganze und halbe Fäden, mechanisches Verhalten.

Die Verunreinigungen, welche beim Wachsen der festen Kristalle in deren Zwischenräumen zusammengedrängt worden waren, finden sich nach der Umwandlung in die flüssig-kristallinische Modifikation an den Spurlinien als „Fäden“ vor, d. h. als glatte dunkle Linien, die sich auch teilweise frei durch die kristallinische Flüssigkeit hindurch ziehen, insbesondere bei nicht in sich zurücklaufenden Spurlinien (Fig. 35). Beim Strömen der Masse

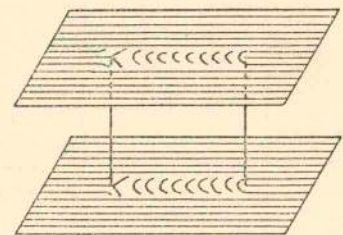


Fig. 35.

verlängern oder verkürzen sie sich beliebig, können sich auch zerteilen und verbinden, so daß anzunehmen ist, das Wesentliche sei eine Störung der Struktur, welche noch fortbestehen

1) Heidelb. Akad. 1912, Nr. 13, 23; Ann. d. Phys. 52, 445, 1917.

2) Diese Zeitschr. 11, 44, 1910; Umschau 14, 951, 1910; Ann. d. Phys. 47, 833, 1915.

kann, nachdem der fremde Gehalt verschwunden ist. Kleine Partikelchen bleiben auch in diesem Falle noch an den Fäden kleben¹⁾.

31. Ganze und halbe Kern- und Konvergenzhöfe.

Kommen die Enden eines solchen Fadens mit der freien Oberfläche in Berührung, so breitet sich dort die Strukturstörung aus (Fig. 36 a u. b). Die Anordnung der Molekülachsen

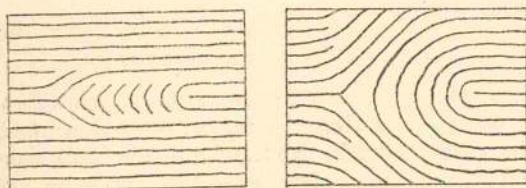


Fig. 36a.

Fig. 36b.

wird eine radiale oder hyperbelartige. Entsprechend unterscheidet man Kern- und Konvergenzfäden. Die Struktur ist im einfachsten Falle auf der einen Hälfte normal (parallele Achsen), die Fäden werden dann als „halbe“

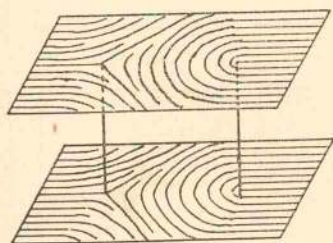


Fig. 37.

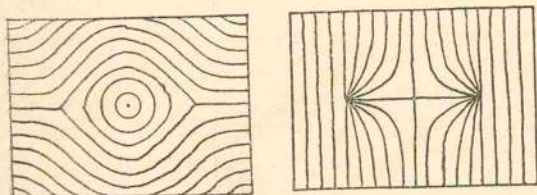


Fig. 38a.

Fig. 38b.

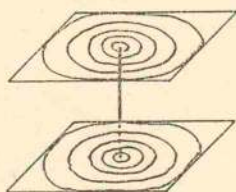


Fig. 38c.

bezeichnet¹⁾. Durch Vereinigung von halben Fäden entstehen „ganze“ (Fig. 38 a—c, 39 a—c).

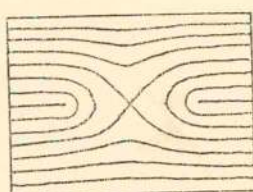


Fig. 39a.

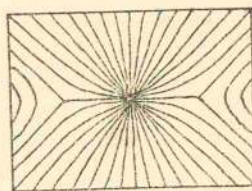


Fig. 39b.

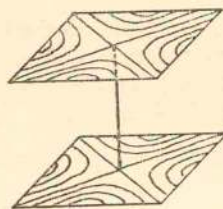


Fig. 39c.

32. Fäden mit isotropem Hof und halb-isotropem Mantel.

Der Faden kann ferner von einem zylindrischen an beiden Enden spitz zulaufenden Gebiet umgeben sein, in welchem die Lage der Moleküle eine regellose ist, so daß es sich völlig optisch isotrop verhält, obschon es keineswegs mit der isotropen Schmelze identisch ist, deren Moleküle ja andere Beschaffenheit haben (Fig. 40 u. 41). Da der Brechungsindex des isotropen Hofes übereinstimmt mit dem kleine-

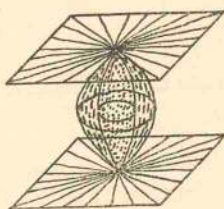


Fig. 40.

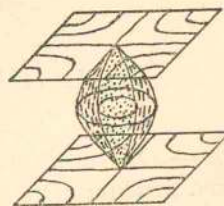


Fig. 41.

ren Brechungsindex des halbisotropen Mantels, tritt an den Enden, falls die Polarisationsrichtung des Lichtes dem größeren Brechungsindex entspricht (wobei das Feld nicht wie im entgegengesetzten Falle weiß, sondern gelb erscheint), eine starke Lichtbrechung ähnlich wie bei Konkavlinsen ein, so daß, falls die Molekülachsen radial (d. h. die Blättchen in konzentrischen Kreisen) um das Fadenende angeordnet sind, die gelben Felder in schwarze

¹⁾ Heidelb. Akad. 1912, Nr. 13, 23; Ann. d. Phys. 52, 445, 1917; H. Deischa, Zeitschr. f. Krist. 50, 28, 1911.

¹⁾ Flüssige Kristalle 1904, Taf. 13—16; Ann. d. Phys. 52, 445, 1917. Der Stoff ist Paraazoxyphenetol.

Sektoren auslaufen (Fig. 42 u. 43). Im natürlichen Licht, das aus zwei zueinander senkrecht polarisierten Strahlen bestehend gedacht

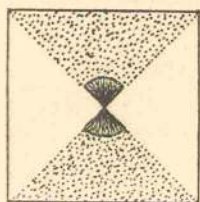


Fig. 42.

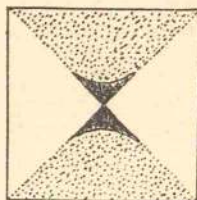


Fig. 43.

werden kann, erscheint deshalb ein senkrecht stehender Faden dieser Art, zu einem schwarzen Punkt (Kernpunkt) verkürzt und von einem runden grauen Hof umgeben (Fig. 44). Bei

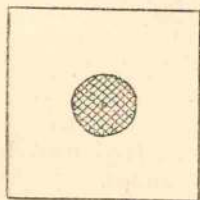


Fig. 44.

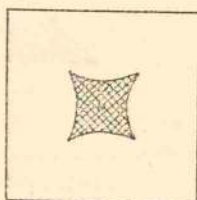


Fig. 45.

hyperbelartiger Anordnung der Achsen oder Blättchen erscheint der Punkt (Konvergenzpunkt) von einem viereckigen Hofe umgeben (Fig. 45). Gewöhnlich zeigen sich Serien

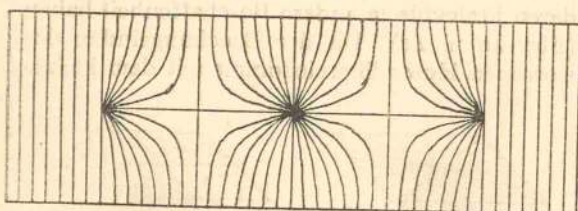


Fig. 46.

abwechslender Kern- und Konvergenzpunkte, deren Strukturen zusammenhängen (Fig. 46¹⁾).

Bei Bromphenanthrensulfosäurehydrat beobachtet man nur Paare von halben Kern- und Konvergenzpunkten, weil die flüssigen Kristalle nicht durch Umwandlung der festen Kristalle entstehen, sondern durch deren Verbindung mit Wasser.

33. Kristallinische Lösungen, inneres Schmelzen, Überkühlung.

Ähnlich zusammengesetzte tropfbar flüssige Kristalle bilden in allen Verhältnissen Mischkristalle. Andere Stoffe werden nur in sehr geringem Maße von solchen flüssigen Kri-

¹⁾ Ann. d. Phys. 52, 463, 1917; Flüssige Kristalle 1904, Taf. 13—16.

stallen in Lösung aufgenommen. Dabei zeigen sich entsprechende Änderungen der Umwandlungspunkte. Das Schmelzen erfolgt nicht nur an der Oberfläche, es bilden sich auch im Innern kugelige Tröpfchen isotroper Schmelze. Überkühlung unter den Erstarrungspunkt ist weniger leicht möglich als bei isotropen Schmelzen¹⁾. Das Existenzgebiet kann durch Zusätze vergrößert, auch Übergang von enantiotropen in monotrope Modifikationen erzielt werden.

34. Drehung der Polarisationssebene und der Absorptionsrichtung.

Fremde Beimischungen können schraubenförmige Verdrehung der Struktur bewirken, die entsprechende Änderungen des optischen Verhaltens zur Folge hat (Fig. 47 a—c; 48 a—c; 49 u. 50), so daß die Stellen, welche

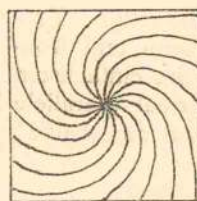


Fig. 47a.

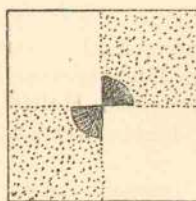


Fig. 47b.



Fig. 47c.

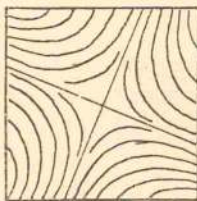


Fig. 48a.

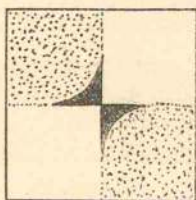


Fig. 48b.



Fig. 48c.

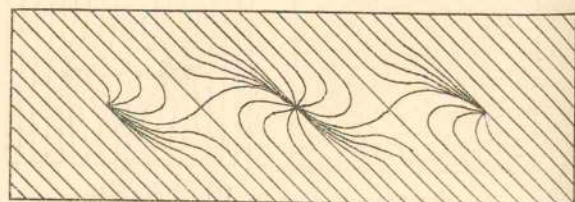


Fig. 49.

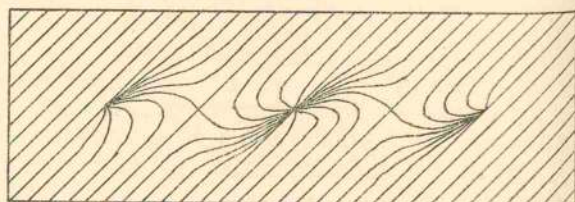


Fig. 50.

¹⁾ Wied. Ann. 41, 525, 1890; Ann. d. Phys. 8, 908, 1902; 16, 160, 1905; 21, 181, 1906; 35, 214, 1911;

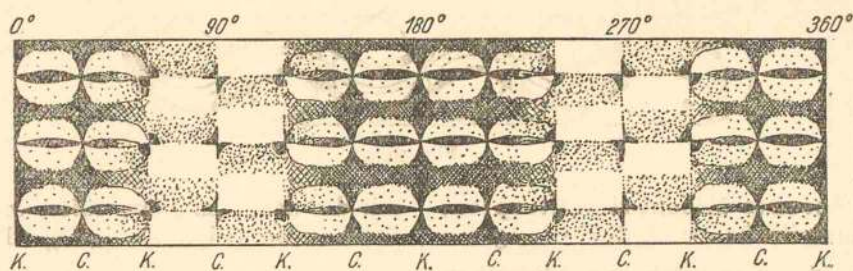


Fig. 51.

bei normaler Struktur zwischen gekreuzten Nicols dunkel erscheinen, z. B. die Kreuze bei Kern- (K) und Konvergenzpunkten (C) bei anderer Verdrehung der Nicols, z. B. bei Parallelstellung schwarz werden¹⁾. Bei keilförmiger Schicht sieht man deshalb abwechselnd helle und dunkle Zonen (Fig. 51), ebenso bei Anwendung eines linsenförmigen Deckglases, [wobei die Dicke von der Mitte nach dem Rande zunimmt] einen gleichmäßigen Wechsel heller und dunkler Ringe, die sich bei Drehung des Analysators erweitern oder verengern. Bei einfach polarisiertem Licht entsteht ein Wechsel weißer und gelber Ringe, die sich ebenso verhalten²⁾, weil für die Absorption die Struktur der dem Nicol zugewandten Oberfläche maßgebend ist, die gegen die Struktur der Mittelschicht um so mehr verdreht ist (z. B. oben nach rechts, unten nach links), je größer die Dicke.

35. Symmetrische Kristalltropfen mit Zwillingssebene.

Freischwebende Kristalltropfen zeigen immer, falls sie rein sind, einen Kernfaden in der Mitte (Fig. 52), von dessen Enden, den „Polen“, die Molekülachsen (Auslöschungsrichtungen) auf der Oberfläche radial ausstrahlen gegen den Äquator, wo aber häufig eine Strukturstörung auftritt, die den Äquator als Trennungslinie, gewissermaßen als Rand einer Zwillingssebene (Fig. 53) hervortreten läßt, die sich aber nur in geringe Tiefe fortsetzt, weil der spindel-

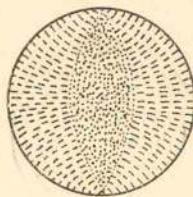


Fig. 52.

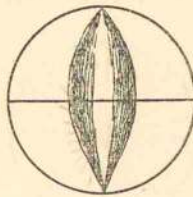


Fig. 53.

förmige Kern des Tropfens isotrop ist¹⁾. Bei Bromphenanthrensulfosäure zeigt sich keine solche scheinbare Zwillingssebene.

36. Kristalltropfen mit schwacher Verdrehung.

Durch fremde Zusätze wird eine Verbiegung des Fadens, sowie des spindelförmigen isotropen Kerns hervorgerufen. Die äquatoriale Trennungslinie stellt sich zunächst schief zum Kern und verbiegt sich dann windschief (Fig. 54). Die Struktur erleidet schraubenförmige

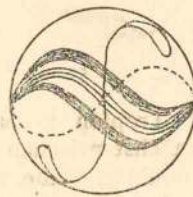


Fig. 54.

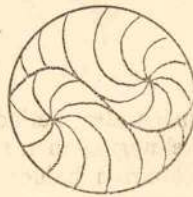


Fig. 55.

Verdrehung (Fig. 55), die sich in entsprechenden optischen Erscheinungen äußert. In engen Kapillaren kann man lange Säulen kristallinischer Flüssigkeit mit gleichmäßig spiralig umlaufendem Faden, [entsprechend spiralig gewundener Spindel] und parallel verlaufenden Trennungslinien erhalten (Fig. 56²⁾).

Zeitschr. f. phys. Chem. 73, 598, 1910; R. Schenck, Zeitschr. f. phys. Chem. 25, 337, 1898; Kristall. Flüssigkeiten u. fl. Krist. 1905; Eichwald, Diss. Marburg 1904; A. C. de Kock, Zeitschr. f. phys. Chem. 48, 129, 1904; J. J. van Saar, ebenda 64, 291, 1908; A. Bogojawlensky u. N. Winogradow, Zeitschr. f. phys. Chem. 60, 435, 1907; 64, 229, 1908; Ada Prins, Zeitschr. f. phys. Chem. 67, 689, 1909; H. Pick, ebenda 77, 577, 1911; P. Gaubert, Compt. rend. 153, 1158, 1909; Bull. soc. min. 36, 174, 1913; G. A. Hulett, Zeitschr. phys. Chem. 28, 639, 1899; B. Goßner, Habilitationsschr. München 96, 1908.

1) Ann. d. Phys. 2, 667, 1900; Heidelb. Akad. 1912, Nr. 13, Taf. 3, Fig. 63; Ann. d. Phys. 52, 536, 1917.

2) Ann. d. Phys. 18, 808, 1905; Heidelb. Akad. 1912, Nr. 13, Taf. 3, Fig. 64.

1) Heidelb. Akad. 1911, Nr. 22, 25; diese Zeitschr. 12, 540, 1911; Ann. d. Phys. 35, 213, 1911.

2) Diese Zeitschr. 12, 540, 1911; Heidelb. Akad. 1911, Nr. 22, 31; Ann. d. Phys. 35, 218, 1911; 52, 527, 1917.

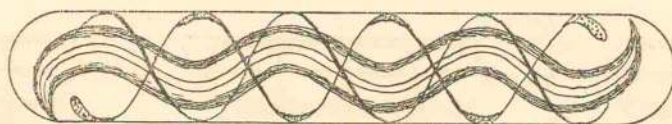


Fig. 56.

37. Dünn gepreßte Mischkristalltropfen, Zusammenfließen und Zerteilung.

Bei Tropfen, die zwischen zwei Glasplatten gepreßt werden, stellt sich der Faden zunächst senkrecht zum Glase (Fig. 57 a) und zerteilt

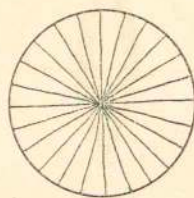


Fig. 57a.

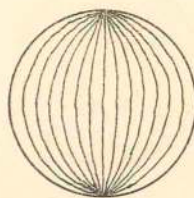


Fig. 57b.

sich dann in zwei halbe Fäden (Fig. 57 b), die sich an die entgegengesetzten Enden eines Durchmessers der entstehenden Kreisscheibe begeben. Zwischen gekreuzten Nicols erscheinen sie als die spitzen Enden eines schwarzen Kreuzbalkens, während der andere schwarze Kreuzbalken sehr breit ist und nicht spitz zuläuft (Fig. 58 u. 59). Beim Zusammenfließen

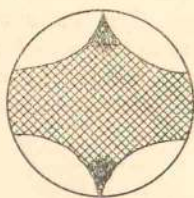


Fig. 58.

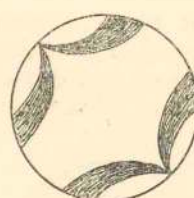


Fig. 59.

nebeneinander befindlicher Tropfen in paralleler Stellung können sich zunächst zwischen den benachbarten halben Kernpunkten halbe Konvergenzpunkte ausbilden. Infolge spontaner Homöotropie verschwindet dann ein Kern-Konvergenzpunktpaar, sodann auch das andere, indem sich die Punkte nähern und bei Vereinigung sich spurlos verlieren. Der Tropfen hat dann normale Struktur. Bei Vereinigung von vier Tropfen können vier halbe Kernpunkte und ein ganzer Konvergenzpunkt in der Mitte sich ausbilden, indem je zwei halbe Kernpunkte am Rande sich vereinigen. Der Konvergenzpunkt ist die Stelle, wo die 4 Tropfen zusammenstoßen¹⁾. Bei Zerteilung eines gepreßten Tropfens, z. B. beim Vorbeiströmen an einem Hindernis, nimmt natürlich jeder Teil

¹⁾ Ann. d. Phys. Bromphenanthrensulfosäure, i. Druck.

mit der normalen Form sofort wieder normale Struktur an (Fig. 60 a—c¹⁾). Im Falle von

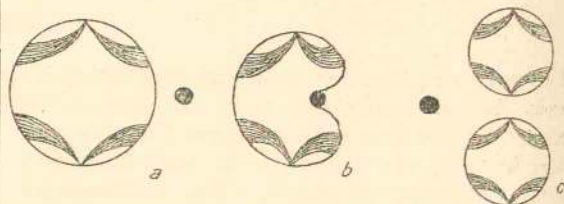


Fig. 60 a—c.

Schraubenstruktur infolge von Beimischung (Fig. 61 a, b) kann das Kreuz z. B. bei par-

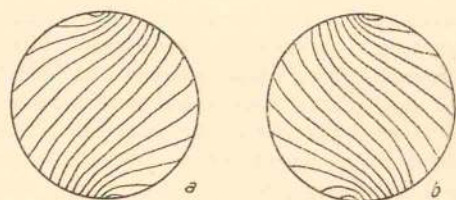


Fig. 61 a, b.

allelen statt gekreuzten Nicols dunkel erscheinen usw. (Fig. 62 a, b).

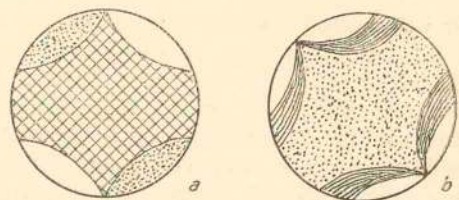


Fig. 62 a, b.

38. Künstliche Färbung und Verminderung der Richtkraft.

Zusatz fremder Stoffe kann sich außer in Strukturverdrehung und dichroitischer Färbung auch in Verminderung der molekularen Richtkraft äußern, die sich optisch durch Verminderung der Doppelbrechung zu erkennen gibt, insbesondere aber durch Beförderung der Anschmiegung an Glas. Beispielsweise genügt ein geringer Zusatz von Paraazoxymizsäure-

¹⁾ Wied. Ann. 40, 401, 1890; Ann. d. Phys. 2, 649, 1900; 52, 527, 1917; Flüssige Kristalle 1904, Taf. 11, 12, 13, 25, 26, 27; Die scheinb. lebend. Krist. 37, 1907.

äthylester zu den Kristalltropfen des Paraoxyanisol, um diese bis auf den Rand zur Anschmiegung an das Glas zu bringen, so daß zwischen gekreuzten Nicols nur letzterer hell erscheint (Fig. 63 u. 64)¹⁾. Bei Mischungen

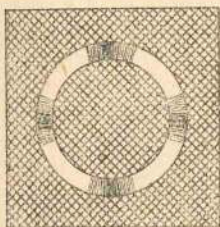


Fig. 63.

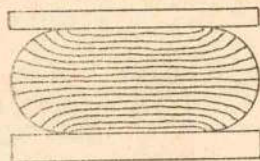


Fig. 64.

von Methoxyzimtsäure und Anisaldazin mit etwas Kolophonium werden Interferenzfarben zeigende Tropfen infolge Anschmiegung an die eine Glasfläche plötzlich weiß, sodann infolge Anschmiegung an die andere plötzlich schwarz. Bei Bromphenanthrensulfosäurehydrat bildet sich infolge einseitiger Anschmiegung (z. B. nur unten) Schraubenstruktur aus, die sich durch entsprechendes optisches Verhalten kundgibt und bunte Farbenscheinungen erzeugt.

39. Wirbelbewegung in Kristalltropfen und an Luftblasen.

Ist beim Erwärmen erhebliche Temperaturdifferenz zwischen Unter- und Oberseite eines Tropfens mit verdrehter Struktur entstanden, welche Differenz der Oberflächenspannungen bedingt, so tritt eine wirbelnde Strömung ein, die fortwährend die Struktur der Unterseite nach oben führt und umgekehrt. Dies macht sich bei Tropfen in erster Hauptlage in natürlichem Licht durch fortgesetzte Kontraktion und Neubildung der ringförmigen Brennlinie am Rande geltend (Fig. 65), im polarisierten



Fig. 65.

Lichte durch fortgesetzten Wechsel der gelben und weißen Quadranten²⁾; ferner durch Zusam-

1) Ann. d. Phys. 8, 908, 1902; 16, 160, 1905; 19, 411, 1906; Flüssige Kristalle 1904, Taf. 28, 29, 30; Die scheinb. lebend. Krist. 1904, S. 35, Fig. 49, S. 36, Fig. 51; diese Zeitschr. 17, 250, 1916; E. Däumer, Dissert. Halle 1912.

2) Ann. d. Phys. 39, 80, 1912; Heidelb. Akad. 1912, Nr. 13, S. 25.

menrollen und Rotieren von Fäden an Luftblasen, an welchen solche Wirbel auftreten.

40. Scheinbare Rotation der Tropfen und deren Beeinflussung.

Bei Tropfen in zweiter Hauptlage und gepreßten Tropfen erzeugt die gleiche Wirbelbewegung infolge der fortgesetzten Strukturänderung eine scheinbare Rotation (Fig. 66 a bis c, 67 a—c), welche je nach der Natur



Fig. 66.

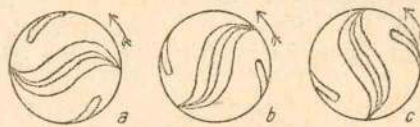


Fig. 67.

der Beimischung im einen oder andern Sinne erfolgt, und zwar um so rascher, je größer die Temperaturdifferenz und die Menge des Zusatzes¹⁾.

41. Brennnlinien an Grenzflächen infolge Temperaturdifferenz.

In ausgedehnten Schichten treten hierbei die Trennungslinien als Brennnlinien die Konvergenzhöfe berührend stark hervor (Fig. 68)

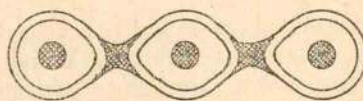


Fig. 68.

und die schwarzen Streifen zwischen gekreuzten Nicols zeigen wellenartige Fältelung²⁾.

42. Wirkung von Magnetismus auf Kristalltropfen.

Im Magnetfeld wird die ganze Masse eines Kristalltropfens, auch der halbisierte Teil, nachdem die Struktur sich zunächst derart geändert hat, daß der Faden den Kraftlinien parallel wurde, halbisorop. Dabei richten sich

1) Ann. d. Phys. 2, 649, 1900; 48, 184, 1915; 52, 541, 1917.

2) Ann. d. Phys. 2, 682, 1900; Flüssige Kristalle 1904, Taf. 17—19; Ann. d. Phys. 39, 105, 1912; 48, 186, 1915.

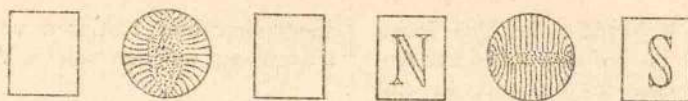


Fig. 69 a u. b.

Molekülhauptachsen ebenfalls den Kraftlinien parallel, bei geringer Feldstärke nur an den vom Faden entfernten Stellen (Fig. 69 a u. b¹) bei großen überall, wobei der Faden ausgestoßen wird und der Tropfen homogene halbisotrope Struktur annimmt.

43. Kristalltropfen mit starker Verdrehung, Schraffierung.

Bei Tropfen, welche infolge reichlichen Gehalts an fremder Substanz stark verdreht sind, bilden die auf der Oberfläche verlaufenden spiralförmig gewundenen Fäden und Trennungslinien in Verbindung mit den parallel verlaufenden Brennlinsen (Fig. 70) eine gleich-



Fig. 70.

mäßige Schraffierung, die so fein sein kann, daß man sie nur an den auftretenden Beugungserscheinungen erkennt, sowie an den Polygonssystemen, deren Seiten die Grenzen zwischen verschiedenen Schraffierungsrichtungen sind²).

Wirbelbewegungen in solchen schraffierten Tropfen veranlassen scheinbares Wandern der Schraffierung, sowie Drehung, Verschwinden und Wiederentstehen von Spiralen aus dem gleichen Grunde, der das Auftreten der scheinbaren Rotationen bei wenig verdrehten Tropfen bedingt³).

44. Ellipsoidische Mischkristalltropfen und deren Zwillinge.

Durch Mischung schleimigflüssiger und tropfbarflüssiger Kristalle können ellipsoidische

oder stäbchenförmige fein schraffierte Kristalltropfen hervorgehen. Solche setzen sich häufig zu Zwillingen und Drillingsen (Fig. 71 a—c)

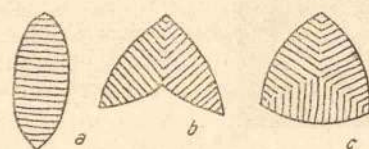


Fig. 71 a—c.

oder ausgedehnten regelmäßigen Systemen zusammen, die als Grenzen der verschiedenen Schraffierungsrichtungen Polygonsysteme ähnlich den Aggregaten konischer Störungen zeigen¹).

45. Angeschmiegte Schichten mit bandförmigen Trennungsflächen.

Bei stark verdrehten tropfbar flüssig-kristallinen Schichten, welche Neigung haben, sich an das Glas anzuschmiegen, erscheinen die Trennungslinien als Ränder von hochkant stehenden spiralförmig gewundenen Bändern, zwischen welche sich entgegengesetzt gewundene Spiralbänder einlagern. Bei dicken Schichten sind beide Spiralen kegelförmig, aber von umgekehrter Lage der Kegel. Die Kegelspitzen erscheinen durch helle und dunkle gerade Streifen verbunden, welche scharfen Richtungsänderungen der Bänder entsprechen²). Gegen Luftblasen konvergieren die Bänder (Fig. 72), wäh-

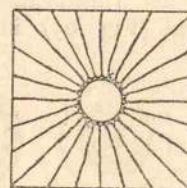


Fig. 72.

rend sie sonst parallel sind. Bei Bromphenanthren-sulfosäurehydrat zeigen sich die Bänder nicht, sondern nur Grenzen von Gebieten mit verschiedener durch teilweise Anschmiegung bedingter Schraubenstruktur.

1) Ann. d. Phys. 2, 675, 1900; Flüssige Kristalle 1904, Taf. 35—38; Die scheinb. leb. Krist. 32, 1907; Die neue Welt d. fl. Krist. 346, 1911; diese Zeitschr. 13, 550, 1912; Heidelb. Akad. 1912, Nr. 13, Taf. 5 u. 6.

2) Ann. d. Phys. 2, 687, 1900; 35, 193, 1911; diese Zeitschr. 12, 540, 1911; Arch. sc. phys. et. nat. Genève 32, 6, 19, 1911; Heidelb. Akad. 1911, Nr. 22, Taf. 7 u. 8; diese Zeitschr. 7, 241, 1916.

3) Ann. d. Phys. 52, 549, 751, 1917.

1) Ann. d. Phys. 2, 640, Fig. 158—168, 1900.
2) Ann. d. Phys. 2, Fig. 142, 1900; diese Zeitschr. 17, 248, 1916.

46. Quellung flüssiger Kristalle, Myelinformen.

Übergänge zwischen schleimig-flüssigen und tropfbar-flüssigen Kristallen können auch durch Quellung entstehen. Diese ist nicht ein einfacher Diffusionsvorgang, sondern ein chemischer Prozeß. Beispielsweise können bei dem flüssig-kristallinen Ammoniumoleathydrat die Moleküle an der Oberfläche durch Wasseraufnahme in ein wasserreicheres Hydrat übergehen, welches alsbald wieder Wasser an die darunter liegende Molekülschicht abgibt usw. Wird eine Kapillarröhre mit Ammoniumoleat in Wasser gelegt, so entstehen derart die Myelinformen (Fig. 73), bei welchen die Molekül-

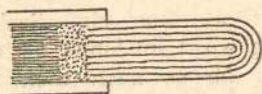


Fig. 73.

reihen im allgemeinen, abgesehen von konischen Störungen, radial angeordnet sind. Sie wachsen durch Innenaufnahme, insofern sich neue Moleküle zwischen die vorhandenen eindrängen und dieselben auseinandertreiben. Die mechanische Arbeit wird dabei auf Kosten von chemischer Energie geleistet. Die große Mannigfaltigkeit von Gestaltungs- und Bewegungsvorgängen erinnert an solche bei Lebewesen¹⁾.

47. Kopulation der Myelinformen, flüssige Sphärökristalle.

Hemimorphe stäbchenförmige Kristalle erscheinen zu Kugeln mit abgeplatteter Stelle zusammengedrückt, welche die Basis einer konischen Störung bildet (Fig. 74). Während zwei



Fig. 74.

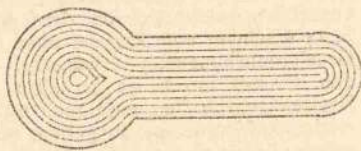


Fig. 75.

solche Kugeln in übereinstimmender Stellung zu einer einzigen gleichartigen zusammenfließen oder bei nicht übereinstimmender Stellung zu

Kugeln mit zwei Abplattungen, bilden sich bei Vereinigung mit der abgeplatteten Stelle Doppelkugeln, zwischen welche sich auch ein zylindrischer Teil einschieben kann. Ist dessen Durchmesser gleich dem der Kugeln, so entstehen bakterienartige Stäbchen oder lange schlangenförmige Gebilde, deren Windungen wohl durch verschieden starke Substanzaufnahme an verschiedenen Stellen bedingt sind. Man sieht auch einfache Kugeln aus ihren Abplattungen Knospen treiben (Fig. 75) oder sich zu langen Schlangen ausstrecken, die sich plötzlich wieder zu Kugeln kontrahieren, mit solcher Gewalt, daß diese fortschnellen¹⁾.

48. Verdrillung und Schlingelbewegung der Myelinformen.

Manche der schlangenförmigen Myelinformen befinden sich bei schwankender Temperatur in beständiger schlingelnder Bewegung, andere rotieren um ihre Achse und wickeln sich dabei zu Spiralen, bakterienartige Stäbchen können ohne ersichtliche Ursache vorwärts und rückwärts schreiten²⁾.

49. Selbstteilung und wellenartig fortschreitende Strukturveränderung.

Stäbchen und Doppelkugeln teilen sich häufig von selbst, wobei an der Trennungsstelle zuerst eine doppeltkonische Strukturstörung auftritt. Schlangen können in zahlreiche Kugeln oder Stäbchen zerfallen. Ferner können an solchen Strukturstörungen entlang wandern. Rosettenartige Anhäufungen konischer Störungen bei dicken Myelinformen können (wohl ebenfalls wegen fortschreitender Strukturstörung) in gleichmäßige scheinbare Rotation kommen, bei welchen die Masse sich nicht bewegt³⁾.

50. Gestalt- und Farbenänderung bei Umwandlung, Saugkraft.

Durch polymorphe Umwandlung können sich Myelinformen plötzlich gerade strecken (Fig. 76) oder kontrahieren und bei der Rückumwandlung die frühere Form annehmen. Damit ist bei gefärbten Gebilden Farbänderung verbunden. Sind es hohle Gebilde, wie sie ebenfalls von selbst entstehen, so wirken sie dabei

1) Wied. Ann. 56, 771, 1895; Flüssige Kristalle 1904, 257; Ann. d. Phys. 19, 22, 407, 1906; Arch. f. Entwicklungsmechanik 21, Heft 3, 1906; 28, 483, 1908; Biolog. Zentralbl. 28, 517, 1908; Verh. d. D. phys. Ges. 10, 326, 407, 1908; Heidelb. Akad. 1913, Nr. 13; Prometheus 25, 1, 1913; diese Zeitschr. 14, 1128, 1913; Biochem. Zeitschr. 63, 74, 1914; Ann. d. Phys. 48, 177, 1915.

1) Ann. d. Phys. 19, 22, 1906; 20, 63, 1906; Die scheinb. lebend. Krist. 57, 1907; Flüssige Kristalle und die Theorien des Lebens, Leipzig, 2. Aufl. 54, 1908; Die neue Welt d. fl. Krist. 269, 1911; Prometheus 25, 1, 1913.

2) Chemikerzeitung 30, 1, 1906; Ann. d. Phys. 19, 22, 1906; 48, 177, 1915; T. Frick u. O. Lehmann, 2, (2), 1186, 1909 usw.; Die Lehre von d. fl. Krist. 494, 1917.

3) Diese Zeitschr. 14, 1134, 1913 u. a. a. O.

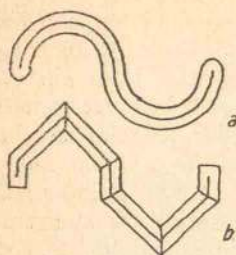


Fig. 76.

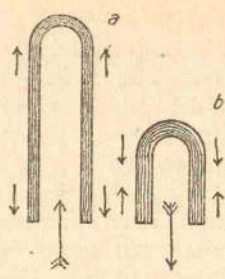


Fig. 77 a, b.

wie Teleskoppumpen, saugen Flüssigkeit ein oder stoßen sie aus (Fig. 77 a, b) und können gar andere Myelinformen in sich aufnehmen, so daß ineinander geschachtelte Gebilde entstehen¹⁾.

Schluß.

Das beschriebene Verhalten der flüssigen Kristalle paßt, wie eingangs bemerkt, insoweit nicht in das bisherige System der Physik, als sich dieses auf die Identitätstheorie der Aggregatzustände gründet. Es paßt aber auch nicht in das alte System der Molekularphysik, welches alle molekularen Vorgänge rein mechanisch deuten wollte. Eher dürften sich die gestaltenden und bewegenden Kräfte der flüssigen Kristalle auf Grund der elektromagne-

¹⁾ Ann. d. Phys. 43, 112, 123, 1914; 48, 187, 1915; Die Lehre v. d. fl. Krist. 498, 1917.

tischen Theorie der Materie deuten lassen¹⁾. In meinen Vorlesungen über Physik pflege ich deshalb nach kurzer Behandlung der Hauptsätze der Lehre von der Bewegung und Wärme mit Elektrizität und Strahlung zu beginnen, worauf dann Mechanik und Thermodynamik folgen und nun erst Molekularphysik einschließlich der flüssigen Kristalle. Hierdurch wird zugleich ein Übergang gewonnen zur physiologischen Physik (Akustik und Optik²⁾). Jedenfalls erscheint notwendig, die bisherigen Atom- und Molekülmodelle solange zu verbessern, bis die vorliegenden Tatsachen erklärt werden können. Durch Vergleich mit den gestaltenden und bewegenden Kräften bei niedrigsten Lebewesen wird ferner zu untersuchen sein, inwieweit diese verwandter Natur sind und ob und wie hier eine Seele auslösend zweckmäßig wirkt im Sinne der dualistischen Theorie oder ob es nach monistischer Auffassung³⁾ Leben auch ohne Ernährung gibt, ob auch den gesetzmäßig zwecklos wirkenden Atomen, Elektronen und Kraftfeldern eine Seele zuzuschreiben wäre.

¹⁾ Vgl. § 1, Anm. 4. Ferner W. Wien, Ann. d. Phys. 5, 507, 1901; O. Lehmann, Verh. d. Karlsr. nat. Ver. 26, 129, 1916; G. Mie, diese Zeitschr. 18, 596, 1917; A. Korn, ebenda 19, 10, 1918.

²⁾ J. Frick-O. Lehmann, Physikal. Technik 2 (2), 1363 u. ff., 1909.

³⁾ Siehe E. Haeckel, Kristallseelen. Leipzig, A. Kröner 1917; O. Lehmann, Die Lehre v. d. fl. Krist. 1917.

(Eingegangen 24. Dezember 1917.)

BESPRECHUNGEN.

L. Zehnder, Grundriß der Physik. Zweite, umgearbeitete Auflage. gr. 8°. XXXII u. 424 S. mit 373 Abbildungen. Tübingen, H. Lauppsche Buchhandlung. 1914. Geh. M. 7.—, geb. M. 8.—

Diese zweite Auflage des Grundrisses der Physik ist gegenüber der ersten (besprochen in dieser Zeitschrift 9, 78, 1908) in der ganzen Anlage insofern geändert, als die eingehendere Behandlung von noch aktuellen Streitfragen hier fortgelassen, das Buch also mehr dem ersten Studium jüngerer Studierender angepaßt ist. Die knappe und übersichtliche Art der Darstellung läßt es im ganzen hierzu wohl geeignet erscheinen, zumal sie belebt ist durch die Aufnahme technischer Anwendungen auf dem Gebiete der Festigkeitslehre, besonders aber der Wärmemotoren und des Gleich- und Wechselstroms. Jedem Artikel ist außer der Überschrift eine kurze Zusammenfassung ihres Inhalts vorgesetzt; dieselbe Zusammenfassung ist im Inhaltsverzeichnis auf den Seiten V—XXXII wiedergegeben, um als kürzestes Repetitorium nach eingehendem Studium dienen zu können; das mag gewiß nützlich sein, nur möchte man hier und da vielleicht ein Aus-

feilen und gelegentliche Erweiterung dieser Zusammenfassungen wünschen.

Im folgenden seien einige Hinweise und Wünsche angeführt, welche sich bei der Lektüre ergeben. Auf S. 24 erscheint eine Angabe über die Bestimmung der Gravitationskonstante erwünscht. Der Artikel über den Kreisel auf S. 41 ist allzu kurz, um von den Kreiseigenschaften eine auch nur einigermaßen ausreichende Vorstellung zu geben, die wegen der ständig zunehmenden technischen Anwendungen der Kreiselwirkung besonders nützlich wäre. In der Hydrodynamik, die in den üblichen Lehrbüchern überhaupt sehr stiefmütterlich behandelt wird, fehlt der Begriff des Wirbels völlig. Der Absatz über Quecksilberpumpen auf S. 67 ist auch zu kurz, um verständlich zu sein, besonders die fünf Zeilen über die Gaedepumpe. Die Lehre von den Wellenbewegungen ist in zusammenhängender, klarer Darstellung auf etwa 20 Seiten der Akustik vorangeschickt, auch die Polarisation und Interferenz der Wellen ist bereits an dieser Stelle behandelt, so daß die Optik entlastet wird. Die Erklärung der Kombinationstöne, speziell der Differenzstöne durch Interferenzwirkungen auf S. 120 ist falsch; diese Darstellung ist um so unverständlicher, als auch die Sum-

mationstöne dort erwähnt werden, die doch durchaus nicht auf Interferenz zurückführbar sind. In den einleitenden Kapiteln zur Optik, die charakteristischerweise hinter der Akustik und vor der Elektrizität steht, klingt die Vorliebe des Verf. für die elastische Theorie des Lichtes, zumal in Rücksicht auf die Anschaulichkeit der Vorstellung, stark durch, wenn auch natürlich die elektromagnetische Theorie gebührend erwähnt wird. Immerhin gehen die Darlegungen des Verf. auf S. 125 und 126 in dem Artikel über „Elastische Theorie der Lichtemission“ reichlich weit, in dem die lichtaussehenden Schwingungen auf elastische Wellen im Atom zurückgeführt werden und unter Zugrundelegung der Schallgeschwindigkeit im Eisen abgeleitet wird, daß die „so gefundenen Schwingungszahlen elastischer Schwingungen in den Atomen tatsächlich im Bereich der Lichtschwingungszahlen liegen“. Demgegenüber muß denn doch betont werden, daß die Gesetze der Schwingungszahlen mechanischer Modelle prinzipiell andere sind wie die der Serienlinien, worauf vor allem Ritz und Lord Rayleigh hingewiesen haben. Der photographische Prozeß ist auf S. 147 doch wohl allzu kurz beschrieben, die Chemie des Prozesses ist völlig unerörtert geblieben, das Fixieren der Bilder überhaupt nicht erwähnt. Das Ultramikroskop wird auf S. 148 in vier Zeilen abgehandelt und dürfte daher wohl unverständlich bleiben; die Rolle der Beugung dabei bleibt völlig unerwähnt. Recht bedauerlich aber ist das gänzliche Fehlen der Strahlungsgesetze, die der Verf., ganz abgesehen von ihrer außerordentlichen theoretischen Bedeutung für die moderne Physik, schon in Rücksicht auf seinen Grundsatz, die wichtigsten technischen Anwendungen der Physik zu bringen, hätte anführen müssen; denn die Strahlungsgesetze bilden bekanntlich die Grundlage unserer heutigen Beleuchtungstechnik. In dem Artikel „Phosphoreszenz“ auf Seite 170 und 171 wird die Phosphoreszenz nur mit den doch recht hypothetischen „chemischen Umwandlungen“ in Zusammenhang gebracht; von der auf breiter experimenteller Basis errichteten lichtelektrischen Theorie Lenards wird nicht gesprochen. In Fig. 157b ist das Fresnelsche Biprisma falsch gezeichnet. Die wenigen Zeilen über Lumierephotographie auf S. 177 können kein Verständnis für das Verfahren erwecken. Im Artikel über „Optisch drehende Substanzen“ auf S. 190 wäre ein Hinweis auf den Unterschied des Grundes für die Drehung bei Kristallen und bei Flüssigkeiten, bzw. Gasen erwünscht. Die mechanische Wärmetheorie, speziell auch der zweite Hauptsatz der Thermodynamik, findet erfreulicherweise eine ausführlichere Behandlung, als das in den meisten Lehrbüchern dieses Umfanges immer noch der Fall ist. Hier findet sich auch in einem besonderen Artikel ein Überblick über die wichtigsten Wärmemotoren. Was man aber vermißt, ist die Ausführung und Erläuterung des rein thermodynamischen Wirkungsgrades, also die Verbindung zwischen den vorhergehenden thermodynamischen Darlegungen mit denen über die mehr praktischen Konstruktionen der Wärmemotoren. Auf den letzten 262 Seiten wird die Elektrizität und der Magnetismus behandelt. Ein Satz wie der: „Auch wer die völlige Wesensgleichheit der elektromagnetischen und der Licht-Wellen nicht zugibt“, — klingt in einem modernen Lehrbuch der Physik mindestens auffällig. Ferner dürften die Darlegungen über den Widerstand und die Elektrolyse reinen Wassers etwas exakter zu formulieren sein; wenn der Verf. schreibt: „Man glaubt, daß chemisch absolut reines Wasser durch den elektrischen Strom überhaupt nicht zersetzt werden könne“, so ist dagegen zu bemerken, daß „chemisch ganz reines“ Wasser eine durchaus definierte Leitfähigkeit besitzt, deren übereinstimmende Berechnung nach drei ver-

schiedenen Methoden einen der glänzendsten Erfolge der Theorie der elektrolytischen Dissoziation bildet, daß ferner die zur Elektrolyse nötige Spannung sich ebenfalls zahlenmäßig angeben läßt. Daß hier wie in den meisten Lehrbüchern der Physik immer noch die sekundäre Wasserzersetzung von Lösungen durch den Strom gelehrt wird, muß wohl noch eine Zeilang in Kauf genommen werden. Unverständlicher dagegen ist, daß auch hier noch behauptet wird, daß die Teslaströme trotz ihrer hohen Spannung physiologisch deshalb unwirksam wären, weil sie wegen der hohen Schwingungszahl in der äußersten Oberhaut des Menschen verliefen. Abgesehen davon, daß das durch die durch zahlreiche Versuche bestätigte Nernstsche Nervenreiztheorie längst als falsch erwiesen und richtig gestellt ist, sollte doch durch die praktische Anwendung der Teslaströme in der Medizin bei dem sog. Diathermieverfahren bekannt sein, daß sie gerade zur Erwärmung des Körperinneren benutzt werden.

Der Verf. hat in dem Grundriß selbst die „mathematischen Grundsätze“, da die mathematischen Entwicklungen des Buches ohne den Apparat der Differential- und Integralrechnung durchgeführt worden sind, fortgelassen, sie aber später auf mehrfachen Wunsch noch gesondert drucken lassen. Dem Referenten würde es passender erscheinen, wenn dieser kurze Abriß in das Buch selbst verarbeitet würde, denn die Zeit sollte doch allmählich vorüber sein, in der ein für Studenten bestimmtes Lehrbuch der Physik ängstlich die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung meiden mußte.

Auch aus diesem Grunde ist dem anregend und übersichtlich geschriebenen Buche baldigst eine neue Auflage zu wünschen.
F. Krüger.

C. Cranz, Lehrbuch der Ballistik. Band I: Äußere Ballistik, 2. Auflage, unter Mitwirkung von Hauptmann Becker. gr. 8^o. XVI u. 528 S. mit 184 Figuren im Text und 4 Lichtdrucktafeln. Leipzig, B. G. Teubner. 1917. Geh. M. 19.—, geb. M. 22.—.

Im Jahre 1896 gab der durch ballistische Versuche schon wohlbekannte Verfasser ein „Kompendium der theoretischen äußeren Ballistik“ heraus, welches den ganzen bis dahin vorliegenden Stoff zusammenfaßte. Daraus ging dann das erweiterte „Lehrbuch der Ballistik“ in 4 Bänden hervor, von denen im Jahre 1910 der erste, enthaltend die äußere Ballistik, Band 4 mit den zugehörigen Tabellen nebst Lichtbildern fliegender Geschosse, sowie 1913 die experimentelle Ballistik als Band 3 erschienen, während die dem zweiten Band vorbehaltene innere Ballistik noch aussteht. Inzwischen hat sich eine neue Auflage des ersten Bandes als notwendig herausgestellt, die gegenüber der vorhergehenden bemerkenswerte, durch neuere Forschungen bedingte Erweiterungen aufweist.

Der Verfasser geht wie üblich von der elementaren Wurfbewegung im luftleeren Raum aus und behandelt im zweiten Kapitel ausführlich die theoretischen Ansätze und empirischen Formeln für den Luftwiderstand. Die scharfe Prüfung ergibt, daß bisher noch keine Formel allen Einflüssen, von denen die Geschosßform infolge ihrer Wirkung auf die Relativbewegung der umgebenden Luft wohl die größten Schwierigkeiten bereitet, gerecht wird.

Im dritten Abschnitt werden die Differentialgleichungen der Bewegung unter der allgemein gebräuchlichen Beschränkung des Widerstandes auf eine reine Geschwindigkeitsfunktion aufgestellt und daraus die von der speziellen Gestalt dieser Funktion unabhängigen

Eigenschaften der Flugbahn abgeleitet. Die erste Integration wird im Anschluß hieran für einige einfache Widerstandsgesetze streng und die zweite mit Näherungsmethoden, die schon auf Euler zurückgehen, durchgeführt. Eine weitere Gruppe von Näherungslösungen beruht auf einer solchen Vereinfachung der grundlegenden Differentialgleichung, daß ihre strenge Integration unter Zuhilfenahme von Tabellen für die dabei auftretenden Funktionen (Band 4) möglich wird. Hierher gehört auch eine Reihe graphischer Verfahren, die im wesentlichen auf eine Zerlegung der Flugbahn in gekrümmte oder gerade Zonen hinauslaufen. Eine derartige Zerlegung wird jedenfalls dann notwendig, wenn man der durch neuere Versuche ermittelten starken Änderung des Luftwiderstandes beim Unterschreiten der Schallgeschwindigkeit durch einfache Ansätze gerecht werden will. Auf diese Weise lassen sich — wieder mit Hilfe der erwähnten Tabellen — die wichtigsten praktisch vorkommenden Aufgaben rechnerisch erledigen, was der Verfasser durch eine Anzahl von als Normalbahnen bezeichneten Beispielen belegt. Die Berechnung der sogenannten Schuß tafeln auf Grund von Schießversuchen wird unter Bezugnahme auf die Heydenreichsche „Lehre vom Schuß“ nur kurz angedeutet.

Die nächsten Abschnitte sind den Geschoßabweichungen gewidmet, von denen die infolge des Windes, der Erddrehung, sowie durch einseitige Gestaltung der Schießvorrichtung (Gewehr mit aufgestecktem Bajonett) zuerst behandelt werden. Darauf folgt die vielumstrittene Abweichung aus der Flugbahnebene durch die Geschoßrotation. Der Verfasser bemerkt, daß es sich hierbei um drei zusammenwirkende Vorgänge handelt: erstens um die Mitnahme von Luft durch die Rotation (Zirkulation, Magnus-Effekt), welche bei geneigter Geschoßachse gegen die Flugbahntangente eine Impulskomponente normal zu letzterer ergibt, weiterhin um das Abrollen des Geschosses auf der vor ihm verdichteten Luft (Polsterwirkung, Poisson-Effekt) und schließlich um die Kreiselwirkung selbst. Da die ersten beiden Einflüsse mit der Lage der Geschoßachse über oder unter der Flugbahntangente ihr Vorzeichen wechseln, so schließt der Verfasser ganz richtig auf das Überwiegen der Kreiselwirkung im Falle einseitiger Abweichung bei gleichsinnigem Drall. Er erklärt die von ihm als überaus verwickelt erkannte Erscheinung auf graphischem Wege durch eine zyklonische, bei Rechtsdrall ganz auf der rechten Seite der Vertikalebene liegende Kurve der Geschoßspitze, welche infolge der Drehung der Bahntangente und der Verschiebung des Angriffspunktes des Luftwiderstandes an Stelle des vollen Präzessionskreises tritt. Diese schon in der vorigen Auflage enthaltene Theorie wirkt nicht recht überzeugend, zumal in der darauf folgenden Näherungsrechnung die mit der Kreiselgleichung unvereinbare Unabhängigkeit der Präzession von der Neigungsänderung der Bahntangente vorausgesetzt wird. Es scheint demnach, als ob man für den ganzen Vorgang vor der Hand noch auf Versuche angewiesen ist, wie sie u. a. der Verfasser in vorbildlicher Weise mit Holzmodellen angestellt hat. Diese ergaben für sehr steile Flugbahnen fast stets eine mit dem Auftreffen des Geschoßbodens verbundene Umkehr der Seitenabweichung beim Niedergang. Allerdings waren bei diesen Versuchen die Geschwindigkeiten viel kleiner als bei scharfen Schüssen und blieben insbesondere stets weit unter der des Schalles. Daher kann auch der Zustand der Luft in der Umgebung des Geschosses in beiden Fällen nicht übereinstimmen, was zweifellos den Vergleichswert der Modellversuche beeinträchtigt.

Um die weitere Ausbildung der Lichtbildaufnahmen von Geschossen hat sich der Verfasser ganz besondere

Verdienste erworben; er gibt am Schluß des Werkes eine Anzahl außerordentlich schöner Lichtbilder, welche die Wellenbildung in der Luft mit bisher unerreichter Schärfe zum Ausdruck bringen. Den Schluß des Werkes bildet nach einer Erörterung der zufälligen Geschoßabweichungen mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Wirkung der Geschosse am Ziel, wobei eine Reihe neuer Erfahrungstatsachen, z. B. die sogenannte Sprengwirkung beim Durchschießen feuchter Massen, eingehend besprochen wird.

Der Wert des Buches, welches keiner Empfehlung mehr bedarf, beruht vor allem in seiner Vollständigkeit; er wird noch erhöht durch eine bis 1916 fortgeführte Literaturübersicht.

H. Lorenz.

L. Graetz, Die Physik. 1. Band von „Die Naturwissenschaften und ihre Anwendungen“ von C. Thesing. Mit einer Einführung in das gesamte Werk von W. Ostwald. gr. 8°. XXXI u. 569 S. mit 385 Abbildungen und 15 Tafeln. Leipzig, Verlag „Naturwissenschaften“ G. m. b. H. 1917. Geh. M. 16.—, geb. M. 18 u. 20.—.

Dieses Werk bildet den ersten Band eines Sammelwerkes, das unter dem Namen „Die Naturwissenschaften“ einen Überblick über die gesamten Naturwissenschaften in einer „mehr erzählend gehaltenen, für eine zusammenhängende Lektüre geeigneten Form“ geben will, und in 7 Bänden die Gebiete: Physik und ihre Anwendungen, Chemie und ihre Anwendungen, Himmelskunde einschließlich Geophysik, Meteorologie und Klimatologie, Erdgeschichte einschließlich Gesteinskunde, Kristallographie und Mineralogie, Allgemeine Biologie, Allgemeine Zoologie und Anthropologie, einschließlich Paläozoologie und Urgeschichte, Allgemeine Botanik einschließlich Paläobotanik, behandeln soll.

Dieser erste, jetzt erschienene Band über die Physik löst jedenfalls überaus geschickt die schwierige Aufgabe, im wesentlichen ohne mathematische Ableitungen in fließend geschriebener Form eine Einführung in die Gesamtheit der physikalischen Probleme zu geben und zugleich dem Leser bis in die schwierigsten Fragen hinein ein guter Führer zu sein. Da es sich nicht um ein Lehrbuch der Physik im gewöhnlichen Sinne handelt, so konnten und mußten manche Gegenstände von der Behandlung ausgeschlossen werden, die man sonst in Physikbüchern findet, aber man muß bewundern, mit welchem Geschick die Auswahl getroffen ist und wie es dem Verfasser geglückt ist, ein lückenloses Ganzes zur Darstellung zu bringen, bei dem sich eins auf dem anderen aufbaut, und das den Leser bis zu den höchsten Problemen führt und zugleich durch Ausblicke auf die Anwendungen in der Technik den Anschluß an das praktische Leben wahrt. Bezeichnend für die geschickte und durchaus eigenartige Darstellung ist die Gliederung, die der Verfasser dem gesamten Stoff gegeben hat, der in vier Hauptabschnitte: Die materiellen Körper, Die Elektronen, Die Strahlungserscheinungen und Der Äther, Strahlen, Elektronen und Materie, eingeteilt wird. Der erste Abschnitt bringt die Grundbegriffe über Kraft und Bewegung, Kreisbewegung und Kreisel, Schwerkraft, Temperatur, Wärme, Arbeit, Flüssigkeiten und Gase, Dämpfe, tiefste Temperaturen, Atome, Moleküle, Ionen, kinetische Gastheorie, osmotischer Druck, Verwandlung von Wärme in Arbeit, Wellenbewegung und Schall.

Der zweite Abschnitt bringt die elektrischen Grunderscheinungen, Elektrolyse, atomistische Struktur der Elektrizität, Durchgang der Elektrizität durch Gase, freie Elektronen, Elektronen in Metallen, Magnetismus

und Elektromagnetismus, Induktionswirkungen, Erzeugung starker Ströme und ihre Anwendung.

Der dritte Abschnitt behandelt: Die elektrischen Schwingungen, das Licht als Wellenbewegung, optische Apparate, Spektralanalyse, Polarisation des Lichtes, Ultraviolett und Ultrarot, Strahlung des schwarzen Körpers.

Im vierten Abschnitt werden dann noch die Röntgenstrahlen und die Radioaktivität behandelt.

Die Darstellung ist überall sehr klar und mathematische Ableitungen werden nur in elementarster Form herangezogen, dafür gelegentlich einfache Formeln als Ergebnisse genauerer Ableitung mitgeteilt. Hohe Anerkennung verdient, wie es trotzdem dem Verfasser gelingt in schwierige Verhältnisse einen sehr klaren Einblick zu gewähren, so z. B. in die kinetische Gastheorie mit der Berechnung der Größe der Moleküle, der mittleren Weglängen und Avogadro'schen Zahl. So dürfte das Buch seiner Aufgabe, den naturwissenschaftlich interessierten Leser in das Wissensgebiet der Physik einzuführen und einen klaren Einblick über den gegenwärtigen Stand der Forschung zu gewähren in ausgezeichnete Weise genügen. Ein sehr reichhaltiges alphabetisches Namen- und Sachverzeichnis macht das Buch im Gebrauch zum Nachschlagewerk sehr handlich. Allerdings soll auch nicht verschwiegen werden, daß zuweilen die Reichhaltigkeit der Inhaltsangabe und der Stichworte auch ein klein wenig enttäuscht. Es finden sich z. B. die Lehren von den Energiequanten, vom Äther, der Aberration, dem Michelsonschen Versuch, der Relativitätstheorie im Verzeichnis angeführt, aber in Wahrheit werden alle diese Probleme auf insgesamt 3 Seiten erledigt, so daß nach der Meinung des Ref. ein Nichtphysiker schwerlich einen anderen Eindruck gewinnen kann, als daß hier noch Probleme auftauchen, von denen er nichts mehr versteht. Wenn auch durch die Größe der Aufgabe strengste Beschränkung im Raum unbedingt nötig war, so hätte hier vielleicht durch Hinzufügen von noch ganz wenigen Seiten der Einblick in diese Fragen, namentlich ihre außerordentlich zukunftsreiche Bedeutung etwas mehr geklärt werden können. Ebenso hätte wohl die Grenze der Leistungsfähigkeit von Fernrohr und Mikroskop ein klein wenig deutlicher zur Darstellung gebracht werden können, dann wäre der Sinn des Ultramikroskopes besser hervorgetreten. Ein Fehler in zu weitgehender elementarer Behandlung ist Ref. aufgefallen. Bei der Ableitung der Zentrifugalkraft wird von der Fig. 26 behauptet und in der Ableitung auch als richtig vorausgesetzt, daß $AB = AD$ ist, aber hier wird der Laie sich vergebens fragen, wie man diese beiden Strecken gleich nennen kann. Das sind jedoch nur kleine Schwächen, durch die der große Wert der schönen Darstellung des Ganzen nicht herabgesetzt werden soll. Die Ausstattung des Werkes ist sehr ansehnlich, die Figuren meist sehr klar und deutlich, nur einzelne sind weniger geglückt, so z. B. die Abbildung der Kundtschen Staubfiguren und die Gewinnung fester Kohlensäure. Eine schöne Beigabe sind die Porträts einer großen Zahl berühmter Physiker, wobei allerdings die Wiedergabe im Druck in dem dem Ref. vorliegenden Exemplar zum Teil zu wünschen übrig läßt. Schlecht ausgefallen sind auch die farbigen Abbildungen im Text und die farbigen Tafeln. Hierin sind wir eigentlich gewöhnt, in sonst so gut ausgestatteten Werken Besseres zu sehen.

Die dem Bande vorangestellte Einführung in das gesamte Werk von W. Ostwald enthält eine kurz gefaßte Übersicht über die Gesamtheit aller Wissenschaften, die im wesentlichen eine Darstellung Ostwald'scher Philosophie über diesen Gegenstand ist. Danach würde auch jede andere „Geisteswissenschaft“ nur so

viel wahre Wissenschaft enthalten, als sie sich der naturwissenschaftlichen Methoden und Hilfsmittel bedient. Auch wenn man dieser Auffassung zustimmen will, so kann sich Ref. des Eindrucks nicht erwehren, als ob durch diese Einführung für die Naturwissenschaften noch eine besondere Reklame gemacht werden soll, die doch diese wirklich nicht nötig haben.

Classen.

K. Strecker, Jahrbuch der Elektrotechnik.
gr. 8°. II. Jahrgang 1913, VII u. 249 S.
M. 10.—. III. Jahrgang 1914, VIII u. 236 S.
M. 10.—. IV. Jahrgang 1915, VIII u. 246 S.
M. 16.—. München u. Berlin, R. Oldenbourg.

Daß die Menschheit noch weit mehr als bisher dazu kommen muß, sich selber ihre geistige Produktion und Überproduktion durch einheitliche und zuverlässige Berichterstattung, sowie durch vollendet organisierte Registratur verdaulich zu machen, ist schon häufig empfunden und ausgesprochen worden. Das in vier Jahrgängen vorliegende, von der bewährten Arbeitskraft und Organisationsfähigkeit K. Streckers geschaffene und geleitete Jahrbuch der Elektrotechnik stellt für sein Gebiet einen tüchtigen Schritt auf diesem Wege dar. Zunächst wurde ein zweckmäßiges Schema für die Gliederung des gewaltigen Wissensstoffes geschaffen, den die theoretische und praktische Elektrophysik und Elektrotechnik in jedem Jahre hervorbringen. Dann wurde ein Stab ausgezeichneter Spezialisten mit der Bearbeitung des Jahresstoffes betraut. Endlich wurde auf sorgfältige Literaturnachweise Wert gelegt, sowie auf vollständige Namen- und Sachregister. So kann man sich einmal über den Zusammenhang und die Neuerscheinungen eines Gebietes orientieren; kann weiter zu jedem sachlichen Stichwort und endlich zu jedem Autorennamen die Literaturnachweise rasch finden. Die Hauptgliederung in A. Elektromechanik, B. Elektrochemie, C. Elektrisches Nachrichten- und Signalwesen, D. Messungen und wissenschaftliche Untersuchungen zeigt, in wie breitem Umfang diese Orientierung beabsichtigt ist. Ausstattung und Druck sind vorzüglich. Trotz aller dieser rühmlichen Vorzüge hat der Referent doch seine Zweifel, ob das hohe Ziel, was vorschwebte, schon erreicht ist. Es können ja bei dem Umfang von rund 250 Seiten die Berichte nur gewissermaßen in Kurzschrift abgefaßt werden, so daß dem Leser der Inhalt der Arbeiten doch nur sehr unvollständig zu Gemüte kommen kann. Da man auch, wohl absichtlich, einen nüchternen Berichterstatton gewählt hat, so steht das Bild meist ohne Licht und Schatten und ziemlich farblos da. Während doch gerade die kritische Vorlese des sachverständigen Berichterstatters zur Entlastung der übrigen Menschheit das Ziel sein sollte. Aber es wird wohl auch hier wieder sein, wie immer: Auch der sachverständigste Berichterstatton bringt nicht soviel freie Zeit für diese Art von kritischer Auslese auf, als nötig wäre, um wirklich mit voller Verantwortlichkeit die Spreu von dem Weizen zu scheiden. Ehe nicht eine mit gewaltigen Mitteln ausgestattete Berufsorganisation für diesen sichtenenden Dienst der Wissenschaft geschaffen wird, werden wohl alle solche Versuche eine gewisse menschliche Unzulänglichkeit behalten. — Findet man sich mit dieser Resignation ab, so muß man die Leistung Streckers und seines Mitarbeiterstabes als eine hervorragende anerkennen.

H. Th. Simon.

Jakob I. Weyrauch, Robert Mayer zur Jahrhundertfeier seiner Geburt. Mit zwei Bildnissen und einer Darstellung der Totenmaske R. Mayers. gr. 8°. V, 105 S. Stuttgart, Konrad Wittwer. 1915. Geh. M. 5.—, geb. M. 6.—.

Am 25. November 1914, dem hundertjährigen Geburtstag Robert Mayers, sollte in Stuttgart eine von der dortigen Technischen Hochschule und von dem Verein deutscher Ingenieure (in Berlin) eine Gedächtnisfeier stattfinden. Der Weltkrieg machte sie unmöglich. Den ersten Teil des vorliegenden kleinen Buches bildet der Festvortrag, den Weyrauch halten sollte. Er schildert mit warmer Verehrung für seinen schwäbischen Landsmann dessen Lebensgang, den Weg, der ihn zu seiner großen Entdeckung führte, und widerlegt insbesondere ausführlich die auch noch heute zuweilen gehörte Behauptung, Mayer sei auf „metaphysischem“ Wege dazu gelangt. In Wahrheit „disgustierten“ ihn, wie er einmal schreibt, derartige Spekulationen „aufs äußerste“. So entsteht vor unserm Auge durch Weyrauchs Darlegungen das Bild eines echten Naturforschers und einer liebenswerten Persönlichkeit.

Der zweite Teil enthält Angaben über technische Bestrebungen Mayers, der dritte eine kräftige, aber verdiente Abfertigung Treitschkes, der in seiner Deutschen Geschichte eine gänzlich schiefe und aller tatsächlichen Kenntnis bare Darstellung der Persönlichkeit Mayers und seiner Entdeckung gegeben hatte. Der vierte Teil, „Poggendorff und Mayer“ beschäftigt sich mit der Frage, was Poggendorff wohl veranlaßt haben möge, Mayers Aufsatz nicht nur nicht zu veröffentlichen, sondern ihn trotz Mayers Reklamation diesem nicht wieder zurückzuschicken. Der fünfte Abschnitt, „Helmholtz und Mayer“ stellt regestenartig alle Äußerungen von Helmholtz und Mayer, die sich auf ihr gegenseitiges Verhältnis beziehen, zusammen; der sechste endlich bespricht die bekannten Bildnisse Mayers, von denen zwei in schöner Ausführung beigegeben sind.

Aus dieser Aufzählung wird der Leser ersehen haben, daß es sich um eine durchaus empfehlenswerte Schrift handelt, die namentlich allen historisch Interessierten warm empfohlen werden kann, gleichzeitig als Beispiel einer sachlichen und leidenschaftslos urteilenden Auseinandersetzung. C. Schaefer.

C. Neumann, Franz Neumanns Beiträge zur Kristallonomie aus den Jahren 1823 und 1826. Ein Versuch, den wesentlichen Inhalt dieser vor fast hundert Jahren erschienenen fundamentalen Schriften in übersichtlicher u. lückenloser Weise darzustellen. (Abhdlgn. sächs. Ges. d. Wiss. Band XXXIII, No. III. gr. 8°. S. I—XX u. 196—458, 66 Fig. u. 22 Tafeln. Leipzig, B. G. Teubner. 1916. M. 14.—)

Die geometrische Kristallographie kann, soweit sie es wie hier, mit der äußeren Begrenzung der Kristalle zu tun hat, als abgeschlossen gelten und die vorliegende Neu-Herausgabe ist daher schon aus diesem Grunde ausschließlich von historischem Interesse. Es handelt sich um zwei Schriften. Davon ist die F. Neumannsche Dissertation *De lege zonarum* (1826) die bekanntere und auch heute noch lesenswert, wenn auch das „Zonengesetz“ sich nicht als „dominierendes Prinzip“ der kristallographischen Entwicklung im physikalischen Sinne hat nachweisen lassen. Die hier be-

nutzte gnomonische Projektion ist in der ersten Abhandlung der anderen Schrift (Beiträge zur Kristallonomie, 1. [u. einziges] Heft 1823) ausführlich behandelt („Methode, den Zusammenhang der Glieder eines Kristallsystems und ihre gegenseitigen Beziehungen graphisch darzustellen“), und hat bekanntlich durch v. Laues Kristall-Röntgenogramme erneut praktische Bedeutung gewonnen. Die zweite Abhandlung derselben Schrift („Über den eigentümlichen Entwicklungsgang der zwei- und eingliedrigen Kristallsysteme“) beschäftigt sich mit den Analogien der Kristalle von Orthoklas, Epidot und Eisenvitriol mit rhomboedrischen und rhombischen Kristallen in geometrischer Hinsicht. Analogien, auf die wir heute, nach Kenntnis der physikalischen Unterschiede, wenig Gewicht mehr zu legen pflegen.

Da die Abhandlungen z. Z. lateinisch geschrieben und in Sprache und Auffassung immerhin einiges, dem heutigen Mineralogen Fremdartige enthalten, werden die Herausgabe in deutscher Sprache und die vom Herausgeber gemachten erläuternden Zusätze wie auch die Unterdrückung von heute veralteten Erörterungen das Verständnis erleichtern. O. Mügge.

J. Hartmann, Tabellen für das Rowlandsche und das internationale Wellenlängensystem. (A. u. d. T. Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen. Mathemat.-phys. Klasse. N. F. 10. Bd. No. 2.) 78 S. mit 1 Tafel. Berlin, Weidmannsche Buchhandlung. 1916. M. 6.60.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht in der Aufstellung von Tabellen, welche eine zuverlässige Umrechnung der an die Rowlandschen Wellenlängennormalen angeschlossenen Messungen — das sind alle älteren und fast alle astrophysikalischen Beobachtungen — auf die internationalen Angströmeinheiten gestatten. Da bekanntlich infolge von Druckverschiebung, Dopplereffekt usw. die Fraunhoferschen Linien nicht direkt mit den Emissions-Linien irdischer Lichtquellen zusammenfallen, so wurde zunächst durch neue genaue Messungen des Verfassers die Lage der Eisenlinien gegenüber dem Fraunhoferschen Sonnenlinien, deren Wellenlängen dem Rowlandschen System entnommen wurden, festgelegt und somit eine direkte Zurückführung des internationalen Systems auf die Rowlandsche Festlegung der Fraunhoferschen Sonnenlinien gewonnen. Försterling.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Münster Dr. V. Geilen für Mathematik.

Berufen: Der a. o. Professor an der Universität Tübingen Dr. Rudolf Weinland zum ord. Professor der pharmazeutischen Chemie an der Universität Straßburg.

Ehrung: Der Professor der Physik an der Universität Cambridge Sir Joseph John Thomson wurde zum Vorsteher des Trinity College ernannt.

Verliehen: Dem mit Titel des a. o. Professors bekleideten Privatdozenten für Physik und Honorarprofessoren für Meteorologie und Klimatologie an der Deutschen Technischen Hochschule Brunn Dr. Arthur Szarvassi der Charakter des a. o. Professors.

Vom Lehramt zurück: Der ord. Professor der chemischen Technologie und Elektrochemie an der Technischen Hochschule Darmstadt Geh. Hofrat Dr. Otto Dieffenbach.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 6.

15. März 1918.
Redaktionsschluß für No. 8 am 20. März 1918.

19. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

- P. Selényi, Spiegelung an Flächen mit negativer Krümmung. S. 105.
V. F. Hess u. W. Schmidt, Über die Verteilung radioaktiver Gase in der freien Atmosphäre. S. 109.
A. Gockel, Über die Ursache der Zunahme der Ionisation der Atmosphäre mit der Höhe. S. 114.

- A. Einstein, Notiz zu E. Schrödingers Arbeit „Die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes“. S. 115.

Zusammenfassende Bearbeitungen:

- L. Flamm, Zum gegenwärtigen Stand der Quantentheorie. S. 116.

Besprechungen:

- V. Kohlschütter, Die Erschei-

- nungsformen der Materie. Vorlesungen über Kolloidchemie. S. 128.

- F. Auerbach, Die Grundbegriffe der modernen Naturlehre. Einführung in die Physik. S. 128.

- W. Deutsch, Metallphysik. S. 128.

- Personalien. S. 128.

- Gesuche. S. 128.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Spiegelung an Flächen mit negativer Krümmung.

Von Paul Selényi.

1. Eine zufällige Beobachtung des eigenen Spiegelbildes in einem metallenen, blank polierten Serviettenring von der Form der Fig. 1

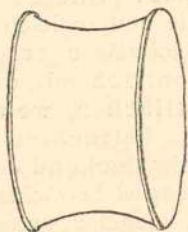


Fig. 1.

gab die Veranlassung, mich mit dem oben genannten Gegenstand etwas näher zu beschäftigen. Insofern es ohne Nachforschung der Literatur sich behaupten läßt, findet man nirgends Erwähnung der recht interessanten Eigenschaften eines Spiegels mit negativem

Gaußschen Krümmungsmaße $\left(\frac{1}{\rho_1 \rho_2}\right)$. Die auf-

fälligste von diesen Eigenschaften sei sofort vorausgeschickt: Die Bilder sind im allgemeinen nicht spiegelsymmetrisch zum Gegenstand, wie die vom ebenen oder Kugel-Spiegel, sondern im Sinne der Analysis situs ähnlich bzw. auch den Dimensionen nach also im gewöhnlichen geometrischen Sinne ähnlich: die rechte Hand bleibt also auch im Spiegelbilde die rechte, das Bild einer Schrift ist keine Spiegelschrift, sondern eine gewöhnliche, lesbare Schrift usw.

Eine beiläufige, populäre Erklärung dieser Eigenschaft ist ganz naheliegend. Vorausgesetzt, — und diese Voraussetzung soll im folgenden auch beibehalten werden — daß die

Ebene der konvexen Krümmung vertikal, die der konkaven horizontal liegt, so liefert die erstere ein aufrechtes Bild, mit dem Kopfe nach oben; die letztere aber ein verkehrtes Bild, die linke Hand rechts zeigend und umgekehrt; wodurch eben die in den gewöhnlichen Spiegeln stattfindende „Vertauschung“ der rechten und linken Hand paralytisch ist.

Schon der Umstand aber, daß das von der konvexen Krümmung gelieferte Bild virtuell, das von der konkaven erzeugte aber reell ist, zeigt die Kompliziertheit des eigentlichen Sachverhaltes und rechtfertigt ein näheres Eingehen in diesen; um so mehr, als dadurch auch ein tieferer Einblick in die Natur der astigmatischen Abbildung gewonnen werden kann.

2. Für die weiteren Betrachtungen soll uns ein kleines, viereckiges Spiegelstück dienen, begrenzt durch benachbarte Krümmungslinien, wie Fig. 2 es zeigt, und als Gegenstand nehmen

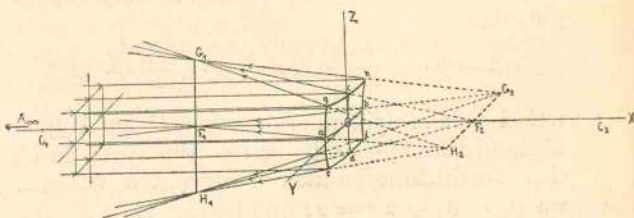


Fig. 2.

wir einen unendlich weit entfernten, auf der Hauptnormale des Spiegels liegenden leuchtenden Punkt an. Das einfallende parallele Strahlenbündel wird durch die Reflexion in die Gesamtheit der windschiefen Geraden umgewandelt (Fig. 2), welche jeden Punkt der reellen Fokallinie G_1H_1 mit jedem der virtuellen Fokallinie G_2H_2 verbinden. Von einer Abbildung durch den Spiegel allein kann also keine Rede sein (noch weniger, als durch einen zylindri-

schen Spiegel oder eine Linse). Durch die Gegenwart des leuchtenden Punktes werden in der reellen bzw. virtuellen Fokalebene gewisse Intensitätsverteilungen (vertikale bzw. horizontale Linien) hervorgebracht; allein schon die Dimensionen — und im allgemeinen auch die Form — von diesen sind lediglich durch die Form und Größe des Spiegels bestimmt. Eine Abbildung kommt erst durch Hinzunahme des Auges bzw. eines abbildenden Systems zustande. Um das gesehene Bild des leuchtenden Punktes zu bestimmen, muß man bedenken, daß die eben erwähnten Fokallinien keine selbstleuchtenden Objekte sind, welche Lichtstrahlen nach allen Richtungen aussenden, sondern daß aus jedem Punkte von G_1H_1 nur ein durch den betreffenden Punkt und durch G_2H_2 gelegtes ebenes Strahlenbündel herausgeht und vice versa. Akkommodiert also das Auge auf die reelle Fokallinie (Fig. 3), so wird als Bild des leuchtenden Punktes das Liniestück ab auf die Retina abgebildet, welches Stück durch den Schwinkel der Pupille — aus F_2 gesehen — begrenzt ist, wie es Fig. 3

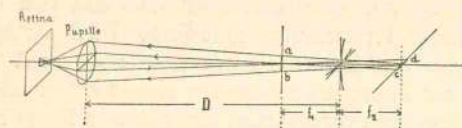


Fig. 3.

zeigt. Das auf G_2H_2 akkommodierende Auge sieht dagegen das horizontale Liniestück cd , und eigentlich mit ebensoviel Recht kann man irgendeinen vertikalen Schnitt des Tetraeders $abcd$ als Bild des leuchtenden Punktes betrachten. Für die Größe dieser zwei „Hauptbilder“ gilt, daß

$$\overline{ab} = p \cdot \frac{f_1 + f_2}{D + f_2}, \quad \overline{cd} = p \cdot \frac{f_1 + f_2}{D - f_1} \text{ ist,}$$

wobei p den Pupillendurchmesser, D den Augenabstand vom Spiegel bedeutet. Für einen durch den Institutsmechaniker verfertigten Spiegel, wo $\varrho_1 = \varrho_2 = 2f = 21 \text{ mm}$ beträgt (Fig. 4), findet man bei 30 cm Augendistanz $\overline{ab}$ oder $\overline{cd}$ gleich etwa $\frac{1}{5} \text{ mm}$. Dementsprechend ist der Astigmatismus mit bloßem Auge kaum zu konstatieren; umso leichter aber mit einem photographischen Objektiv von großer Öffnung.

3. Begnügt man sich mit der Annäherung, wo die Pupille als punktförmig angenommen wird, so ist es leicht, die allgemeine Regel anzugeben, wie das Bild eines beliebigen Gegenstandes zu finden ist. Man sucht für jeden Punkt des Gegenstandes den entsprechenden Hauptstrahl auf und konstruiert die zugehörigen

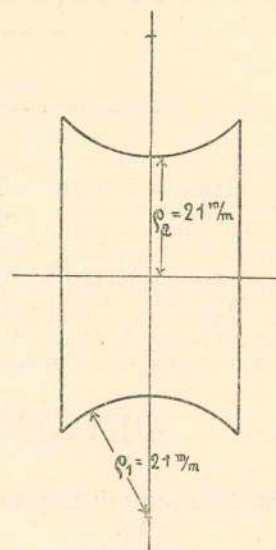


Fig. 4.

zwei Lichtlinien, welche zusammen gewisse lichterfüllte Flächen in den zwei Fokalebene ergeben. Da zu der Bilderzeugung im Auge nur solche Strahlen beitragen können, welche durch die Pupille und zugleich durch je einen Punkt dieser Lichtfläche gehen, so ist das Retinabild identisch mit dem Teile dieser zwei Lichtflächen, welcher aus dem Pupillenpunkt betrachtet, gemeinsam, sich gegenseitig deckend erscheint.

Als erstes Beispiel betrachten wir das Bild eines vertikalen, unendlich entfernten Geradenstückes $A_\infty B_\infty$ (Fig. 5) von der Winkelgröße α . Da die Verbindungslinie eines beliebigen Punk-

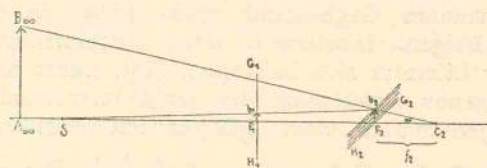


Fig. 5.

tes von $A_\infty B_\infty$ mit dem Zentrum der konvexen Krümmung C_2 zugleich der Hauptstrahl ist für diesen Punkt, so erhält man die zwei oben erwähnten Lichtflächen, wenn man den Strahl $A_\infty C_2$ mit den mit ihm fest verbundenen Linien G_1H_1 und G_2H_2 in der vertikalen Ebene nach oben um den Winkel α dreht. Bei dieser Drehung verschiebt sich G_1H_1 in sich selbst, während G_2H_2 ein Lichtband von der vertikalen Breite gleich $f_2 \cdot \alpha$ in der gleichen Richtung mit der Drehung durchstreift. Projiziert man jetzt — nach der oben angegebenen Regel — aus dem Augenpunkt S die zwei Lichtflächen

aufeinander, so erhält man $\overrightarrow{F_1 b_1}$ oder $\overrightarrow{F_2 b_2}$ als Bild von $A_\infty B_\infty$. Welches man von den beiden als „eigentliches“ Bild betrachten will, ist gleichgültig; man wäre geneigt das reelle zu nehmen; die Größe des Bildes, welche gleich $f_2 \cdot \alpha$ ist, ist aber durch den virtuellen Fokalabstand gegeben¹⁾. Das Bild ist dabei, wie zu erwarten, ein aufrechtes.

Für das zweite Beispiel nehmen wir dasselbe $\overrightarrow{A_\infty B_\infty}$ Geradenstück in horizontaler Lage an (Fig. 6). Die Hauptstrahlen gehen jetzt — wie man sich davon durch die Betrachtung der

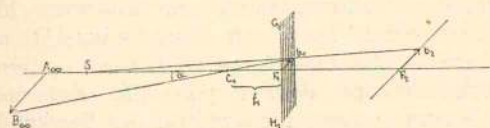


Fig. 6.

Fig. 2 leicht überzeugt — alle durch C_1 , durch den Mittelpunkt der konkaven Krümmung. Konstruiert man zu jedem Hauptstrahl die entsprechenden zwei Lichtlinien, so erhält man in der virtualen Fokalebene die Linie $G_2 H_2$ selbst, in den reellen dagegen ein Lichtband mit der horizontalen Breite gleich $f_1 \alpha$. Aus dem Augenspunkt S betrachtet erscheint also als Bild von $A_\infty B_\infty$ der Pfeil $\overrightarrow{F_1 b_1}$ oder $\overrightarrow{F_2 b_2}$. Wäre man hier wieder geneigt, den letzteren zu wählen, also das Bild als virtuell zu betrachten, so muß dazu bemerkt werden, daß dieses Bild die scheinbare Größe eines im reellen Brennpunkt vorhandenen Bildes von der Größe $f_1 \alpha$ hat und — unabhängig von der getroffenen Wahl — eine verkehrte Lage hat.

Aus den bisherigen Resultaten folgt u. a., daß auch in dem Falle, wo $f_1 = f_2$ gemacht wird, das Bild eines (unendlich entfernten) Kreises im allgemeinen eine Ellipse ist; diese wird erst dann in einen Kreis übergehen, wenn der Abstand Auge—Spiegel im Verhältnis zur Fokaldistanz groß gewählt ist.

4. Wichtiger ist die folgende Bemerkung: Bewegt sich der leuchtende Punkt entlang eines Kreises in bestimmtem Sinne, so beschreibt der Bildpunkt den Kreis in entgegengesetztem Sinne. Aus dem Vergleich von Fig. 5 und 6 folgt nämlich, daß das Parallelogramm $ABCD A$ (Fig. 7) in das im entgegengesetzten Sinne beschriebene Parallelogramm $abcd a$ abgebildet

¹⁾ Für die Wahl des virtuellen Bildes spricht auch der Umstand, daß bei der Lichtverteilung in der reellen Brennebene eigentlich gar nicht zu konstatieren ist, daß der Gegenstand jetzt nicht ein Punkt, sondern eine Gerade ist, denn sie ist geblieben, wie sie früher war.

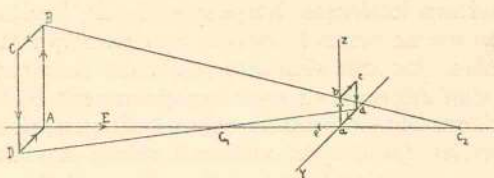


Fig. 7.

wird und diese Folgerung bleibt natürlich für jeden geschlossenen Linienzug auch gültig.

Von einer Richtung der Flächennormale wurde bisher absichtlich nichts erwähnt, um einen Fehler hervorzuheben, welchem man bei der Betrachtung des Verhältnisses Bild—Gegenstand öfters begegnet. Solange nämlich die Richtung der positiven Normale nicht festgesetzt ist, also der Gegenstand zweidimensional angenommen wird — wie es eben in der geometrischen Optik üblich ist — solange läßt es sich nicht entscheiden, ja hat sogar die Frage keinen Sinn, ob das Bild kongruent zu dem Gegenstand oder symmetrisch dazu ist. Im Falle der gewöhnlichen Spiegel lassen sich Eckpunkte und Pfeilrichtungen von Fig. 8

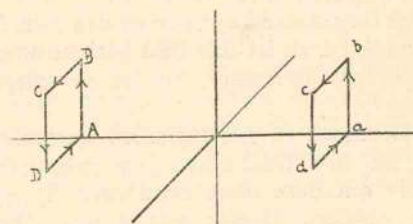


Fig. 8.

durch einfache Parallelverschiebung zu gegenseitiger Deckung bringen; hier muß dem Bilde zuerst eine Drehung von 180° um eine vertikale Achse erteilt werden. Bei den gewöhnlichen Spiegelbildern (man denke die Fig. 8 durch die Flächennormale des Parallelogramms ergänzt) weisen aber nach dieser Operation die Normalen des Gegenstandes und des Bildes nach entgegengesetzter Richtung; hier dagegen, wo die Nor-

male $\overrightarrow{AE}$ (Fig. 7) in die Normale $\overrightarrow{ae}$ abgebildet wird, stimmen auch die Normalrichtungen miteinander überein. Unser Spiegel bildet also ein (unendlich weit liegendes) rechtsgängiges Koordinatensystem in ein rechtsgängiges ab ; die gewöhnlichen Spiegel verwandeln es dagegen in ein linksgängiges und umgekehrt.

5. Um den Fall eines nicht im Unendlichen liegenden Gegenstandes zu erledigen, genügt die Bemerkung, daß — laut des bisher Gesagten — die vertikalen Linien immer wie

an einem konvexen Kugelspiegel, die horizontalen wie an einem konkaven Spiegel abgebildet werden. Es läßt sich also leicht die Änderung des (im allgemeinen stark verzeichneten) Bildes mit dem Objektabstande weiter verfolgen; überschreitet das Objekt während seiner Annäherung zum Spiegel den reellen Brennpunkt, so hören alle die sonderbaren Eigenschaften des Bildes auf: Es ist dann ein noch immerhin astigmatisches, aber aufrechtes und gewöhnlich-spiegelsymmetrisches Bild.

Der Vollständigkeit halber kann man auch nach der Gestaltung der Bilder von imaginären (hinter dem Spiegel liegenden) Objekten fragen; es stellt sich dann heraus, daß die Bilder eines Spiegels mit negativer Krümmung **spiegelsymmetrisch** sind, solange der Gegenstand **zwischen** den reellen und virtuellen Brennpunkten liegt; liegt er außerhalb dieser Strecke, so ist das Bild gleichsinnig mit dem Objekte.

Endlich soll noch die Bemerkung hier Platz finden, daß auch Spiegel mit positiver Krümmung gleichsinnige Bilder liefern können, aber nur dann, wenn die zwei Hauptkrümmungsradien ungleich sind. Liegt bei solchen Spiegeln der Gegenstand zwischen den zwei Hauptbrennpunkten, so ist das Bild gleichsinnig, liegt er außerhalb derselben, so ist es spiegelsymmetrisch¹⁾.

6. Die noch zu erübrigenden Betrachtungen sollen an die Beobachtungen geknüpft werden, die mit dem oben erwähnten Spiegel gemacht wurden. Dieser wurde aus Eisen gedreht, poliert und vernickelt; er hat einen tadellosen Hochglanz, aber längs herumlaufende feine Ritze stören manchmal merklich die Bilder. — Zuerst soll da bemerkt werden, daß von den Bildern nur das um die Hauptnormale liegende Stück ein getreues ist; nach dem Rande hin des Spiegels, wo der konvexe Krümmungsradius schnell zunimmt, werden sie immer stärker verzerrt.

Die Gleichsinnigkeit von Bild und Gegenstand beobachtet man am einfachsten am eigenen Spiegelbilde. Beim ersten Anblick ist es recht überraschend, daß wenn man z. B. die eine Hand bewegt, am Bilde nicht die gegenüberliegende, sondern die quer gegenüberliegende Hand die Bewegung nachmacht. Nicht weniger überraschend ist es — auch für den Laien —, daß man eine Schrift im Spiegel

richtig lesen kann; man nimmt zu diesem Versuch möglichst große Buchstaben (z. B. Titel eines Journals). — Trotzdem daß das eigene Spiegelbild recht plastisch ist, versucht man es vergeblich — obwohl dies einem etwas geübten Auge nicht schwer fällt — festzustellen, ob das Bild reell oder virtuell ist, ob es also vor oder hinter dem Spiegel liegt. In Wirklichkeit hat eben diese Frage hier keinen Sinn, wenigstens nicht in dieser Form. Ist man aber darüber noch nicht im klaren, so versucht man die Frage experimentell zu erledigen. Es existiert ein sehr einfaches experimentelles Kriterium, um reelle Bilder (des eigenen Gesichtes) von virtuellen unterscheiden zu können. Man nehme einen konkaven Kugelspiegel¹⁾, und nähere — das eine Auge schließend — einen Stecknadelkopf dem Pupillenbild des anderen Auges, so sieht man das Bild des Stecknadelkopfes sich ständig vergrößern, bis es das ganze Gesichtsbild bzw. den ganzen Spiegel verdeckt; ist aber das Gesichtsbild virtuell (geliefert von einem konvexen Spiegel), so existiert auch kein reelles Pupillenbild (welches hier die Rolle der Austrittspupille vertritt für das System Spiegel—Auge²⁾) und der Stecknadelkopf verdeckt vom Gesichtsbild immer nur ein Stück von der eigenen Größe. Wiederholt man denselben Versuch mit unserem Spiegel, so zieht sich das Stecknadelkopfbild bei der Annäherung zum Pupillenbilde nur in horizontaler Richtung auseinander und verdeckt einen solchen schmalen Streifen: Ein Beweis dafür, daß das Bild nur in dem konkaven Schnitt des Spiegels sich als reell verhält. — Dasselbe zeigt folgender einfache Versuch. Man bringt eine horizontale Millimeterskala in den konkaven Krümmungsmittelpunkt so an, daß das gleich große³⁾ Skalabild knapp darüber erscheint, so bleibt dieses relativ zur Skala unbeweglich bei einer horizontalen Bewegung des Auges — wie das ein reelles, mit der Skala in derselben Ebene liegendes reelles Bild tut —; bewegt man das Auge vertikal auf und ab, so verschiebt es sich, wie ein hinter dem Spiegel liegendes virtuelles Bild.

Ein eigentümliches Verhalten zeigen die von unserem Spiegel gelieferten Bilder bei einer Drehung des Gegenstandes bzw. des Spiegels selbst.

1) Ein gewöhnliches, auf der Rückseite mit schwarzem Papier beklebtes Uhrglas entspricht vollkommen diesem Zwecke.

2) Es kann daher dieser Versuch auch für die Erklärung der Eintritts- und Austrittspupille gut verwendet werden.

3) Gleichgroß, d. h. die Teilungen sind am Bilde auch ein Millimeter groß, die Teilstriche sind aber kürzer, wie die von der Skala.

1) Das einfachste Beispiel eines gleichsinnig abbildenden Spiegels mit positiver Krümmung ist der zylindrische Konkavspiegel, welcher — solange der Gegenstand zwischen dem reellen und dem (im Unendlichen liegenden) virtuellen Brennpunkt liegt — ein mit dem Objekte gleichsinniges Bild liefert.

Zuerst folgt aus dem früher Gesagten — und das wird durch die Beobachtung auch bestätigt, daß wenn man den Gegenstand um die Verbindungslinie Auge—Spiegel herumdreht, so dreht sich das Bild mit **gleich großer** Geschwindigkeit, aber in **entgegengesetzter** Richtung.

Dreht man dagegen den Spiegel um die erwähnte Achse herum, so dreht sich das Bild im **gleichen** Sinne, aber mit **doppelter** Geschwindigkeit. Um dieses Verhalten zu erklären, denke man die Verdrehung des Spiegels um den Winkel $+\alpha$ so ausgeführt, daß zuerst Spiegel und Gegenstand zusammen gleichzeitig um $+\alpha$ gedreht werden und der Gegenstand dann mit einer Drehung von $-\alpha$ in die frühere Lage gebracht wird. Bei der ersten Drehung dreht sich auch das Bild — relativ zum Beobachter — um $+\alpha$, während der zweiten Drehung (des Gegenstandes) dann wieder um $+\alpha$, was zusammen eine Drehung um $+2\alpha$ ergibt. — Dreht man also den Spiegel aus der bisher angenommenen Lage um 90° so, daß die konvexe Krümmung horizontal, die konkave vertikal liegt, so zeigt er ein um 180° gedrehtes, also ein verkehrtes Bild.

Bringt man einen kleinen Papierpfeil, auf eine Nadelspitze gesteckt, in die Nähe des Spiegels, so kann man auf diesem auch beobachten, wie der Drehungssinn des Bildes sich ändert und mit dem des Gegenstandes gleich wird, wenn der Gegenstand dem Spiegel genähert, den reellen Brennpunkt überschreitet.

Im Felde, August 1917.

Nachtrag.

Gelegentlich eines flüchtigen Durchblätterns der bekanntesten Handbücher konnte ich auch nirgends eine Erwähnung finden über die Spiegelung an Flächen mit negativem Krümmungsmaß.

In Winkelmanns Handbuch der Physik (Bd. VI, 1: Geometrische Optik von S. Czapski, S. 39) wird der Unterschied zwischen dem Fall, wo Bild und Gegenstand kongruent sind und wo sie symmetrisch sind, scharf betont; die Abbildung wird im ersten Fall als rechtwändige, im zweiten als rückwändige bezeichnet. Wenn aber ebendort bemerkt wird, daß ... „Brechungen oder eine gerade Zahl von Spiegelungen oder eine Kombination von beiden eine rechtwändige Abbildung bewirken, während die rückwändige durch eine ungerade Zahl von Spiegelungen oder durch Kombination von Brechungen mit einer ungeraden Zahl von Spiegelungen entsteht“, so muß die Richtigkeit dieser Regel auf stigmatisch abbildende

Systeme beschränkt werden. Werden auch astigmatische Abbildungen zugelassen, dann muß die Regel so präzisiert werden, daß in gewissen, im Punkt 5 angegebenen Fällen auch eine einzige oder allgemein eine ungerade Zahl von Spiegelungen eine rechtwändige Abbildung bewirken kann.

Der Spiegel kann — aber erst nach dem Kriege — von der Firma Max Kohl A.G. Chemnitz i. S. bezogen werden.

Budapest, II. phys. Inst. d. Universität, am 20. Januar 1918.

(Eingegangen 28. Januar 1918.)

Über die Verteilung radioaktiver Gase in der freien Atmosphäre.

Von Victor F. Hess und Wilhelm Schmidt.

I. Theorie.

Die in freier Luft durch den ständigen Austausch der Massen von Schicht zu Schicht vor sich gehenden Änderungen vollziehen sich größtenteils nach einem gemeinsamen Gesetz¹⁾, das sich etwa in folgender Form darstellen läßt: Angenommen sei eine mit der Masse verknüpfte Größe S ; der Gehalt der Masseneinheit Luft an S stelle eine Eigenschaft der Luft, s , dar. In der freien Atmosphäre ist s in jeder wagrechten Schicht im allgemeinen über weite Strecken genügend konstant, es ändert sich nur mit der Höhe h . Ist aber ein solches Gefälle von s vorhanden, dann bewirkt das eben erwähnte ständige Mischen ein unaufhörliches Fortwandern von S in der Richtung von höherem zu niedrigerem s . Es fließt dann ganz allgemein durch die Einheit wagrechter Fläche während der Zeiteinheit in der Richtung nach oben die Menge:

$$\mathfrak{S} = -A \cdot \frac{ds}{dh}.$$

Nimmt man als S die Bewegungsgröße in der Wagrechten, dann wird s proportional der Geschwindigkeit, $\mathfrak{S}$ gibt die an der Flächeneinheit angreifende Scherkraft; die Formel ist der Ansatz für die — „virtuelle“ — Reibung, A deren Koeffizient. Wählt man S als Wärmemenge, so wird s proportional einer Temperatur, A entspricht dann dem Koeffizienten der scheinbaren Wärmeleitung; ist S ein Zusatz zur Luft, die Menge eines ihrer Bestandteile, dann entspricht derselbe Wert des A dem Koeffizienten der Scheindiffusion usw. Da A die Stärke des Mischens angibt und nur von diesem abhängt,

¹⁾ Wilhelm Schmidt, Wien. Sitzungsber. math.-naturw. Kl., IIa, 126, 757, 1917; Ann. d. Hydrographie usw., 45, 367, 431, 1917.

werde es als „Größe des Austausches“ bezeichnet.

Tatsächliche Zahlenwerte des A in der freien Luft wurden vorderhand nur auf einem Umweg aus bekannten Paaren $\mathfrak{S}$ = Reibungskraft $-\frac{ds}{dh}$ =

Geschwindigkeitsgefälle erhalten. So fanden Th. Hesselberg und H. U. Sverdrup¹⁾ über Lindenberg im Durchschnitt eines Jahres

von 0–200 100–300 200–400 m Höhe
 $A = 40 \quad 50 \quad 50 \text{ cm}^{-1} \text{ g sec}^{-1}$,

von 300–500 0–500 0–3000 m Höhe
 $A = 60 \quad 50 \quad 50 \text{ cm}^{-1} \text{ g sec}^{-1}$,

Åkerblom²⁾ in der durch das Häusermeer stärker beunruhigten Luft über Paris im Mittel $A = 90$, H. U. Sverdrup³⁾ in der besonderen Verhältnissen unterliegenden Passatzzone des Atlantischen Ozeans Werte zwischen 90 und 260. Wo nicht — wie im letzterwähnten Fall — besondere Schichtungen vorkommen, wird man für meteorologische Zwecke vorläufig ein über die Höhe im allgemeinen genügend konstantes A mit einem zwischen 50 und 100 liegenden Mittelwert annehmen können. Bloß in den bodennahen Schichten sinkt es stark, nähert sich etwa dem Werte 1.

Wir stellen uns nun die Aufgabe: s sei der Gehalt eines Grammes Luft an einem radioaktiven Gas (Zerfallskonstante λ); dieses werde fortwährend von der Erdoberfläche nachgeliefert; welches ist dann die Verteilung des s im Gleichgewichtszustand, wenn man mit Bezug auf das oben Gesagte durchwegs den gleichen Austausch A annimmt?

Wir betrachten die Luftschicht zwischen den Höhen h und $h + \Delta h$, denken uns aus ihr eine Säule von 1 qcm Querschnitt herausgeschnitten und rechnen, um welchen Betrag sich die darin enthaltene Emanationsmenge S in der Zeit dt ändert.

An der unteren Grenzfläche tritt nach der Grundformel ein:

$$d\mathfrak{S} = -\frac{ds}{dh} A dt,$$

an der oberen aus:

$$d\mathfrak{S}' = d\mathfrak{S} + \frac{d\mathfrak{S}}{dh} \cdot \Delta h,$$

es bleibt der Säule erhalten:

$$d\mathfrak{S} - d\mathfrak{S}' = -\frac{d\mathfrak{S}}{dh} \cdot \Delta h = \frac{d^2 s}{dh^2} \cdot A \cdot \Delta h \cdot dt.$$

1) Veröffentl. d. Geophys. Inst. Leipzig (2) 1, 241, H. 10, 1915.

2) Nova Acta Upsala (4) 2, Nr. 2.

3) Veröffentl. d. Geophys. Inst. Leipzig (2) 2, 1, H. 1, 1917.

In der Säule selbst befindet sich die Emanationsmenge $s \cdot \Delta h \cdot \rho$ (ρ = Luftdichte). Durch radioaktiven Zerfall verschwindet in der Zeit dt der Betrag:

$$s \cdot \rho \cdot \lambda \cdot \Delta h \cdot dt.$$

Die gesamte Änderung des Emanationsgehalts in der Säule wird demnach:

$$dS = \left(\frac{d^2 s}{dh^2} \cdot A - s \rho \lambda \right) \Delta h \cdot dt.$$

Ist Gleichgewichtszustand erreicht, so wird $dS/dt = 0$; für s gilt dann die Gleichung:

$$\frac{d^2 s}{dh^2} \cdot A - s \rho \lambda = 0$$

mit der Lösung:

$$s = s_0 \cdot e^{-\sqrt{\frac{\rho \lambda}{A}} \cdot h}; \quad (1)$$

die andere Lösung mit positivem Exponenten kommt nicht in Betracht, da der Emanationsgehalt, der vom Boden her unterhalten wird, nicht mit wachsender Höhe ohne Grenzen zunehmen kann.

Der Emanationsgehalt s nimmt somit nach einem einfachen Exponentialgesetz mit der Höhe ab und für die Geschwindigkeit der Abnahme ist, wie man sieht, das Verhältnis λ/A maßgebend.

Demnach wird das Gefälle:

$$\frac{ds}{dh} = -\sqrt{\frac{\rho \lambda}{A}} \cdot s. \quad (2)$$

Ferner läßt sich der Emanationsfluß $\mathfrak{S}$, d. h. die Emanationsmenge, die in der betrachteten Höhe h durch jedes qcm in der Zeiteinheit nach oben wandert, rechnen:

$$\mathfrak{S} = -A \cdot \frac{ds}{dh} = \sqrt{\rho \lambda A} \cdot s. \quad (3)$$

Schließlich ergibt sich die gesamte in der Säule vom Querschnitt 1 oberhalb h bis an die Grenze der Atmosphäre enthaltene Emanationsmenge durch Integration von $s \cdot \rho$ (d. i. des Emanationsgehaltes eines ccm) zwischen den Grenzen h und ∞ , soweit durch die Annahme $\rho = \text{konst.}$ keine zu großen Fehler verursacht werden:

$$E = \int_h^\infty \rho s_0 e^{-\sqrt{\frac{\rho \lambda}{A}} \cdot h} dh = \sqrt{\frac{\rho A}{\lambda}} \cdot s. \quad (4a)$$

Da Gleichgewicht zwischen Zerfall und Nachlieferung schon der Ableitung für jede einzelne Schicht zugrunde gelegt ist, so ist es auch für die Gesamtmengen erfüllt, d. h. es ist streng

$$E = \frac{\mathfrak{S}}{\lambda}. \quad (4b)$$

II. Anwendungen.

a) Radiumemanation.

1. Höhenverteilung. Für Radiumemanation ist $\lambda = 2,082 \cdot 10^{-6} \text{ sec}^{-1}$, die Halbwertszeit 3,85 Tage. Bei der Ableitung der Formel (1) haben wir ρ als konstant angenommen, während es tatsächlich mit zunehmender Höhe abnimmt. Innerhalb einer Höhenstufe von je 1 km darf man ρ aber doch als genügend konstant betrachten, da die äußersten Abweichungen vom Mittel nur etwa 6 Proz.

betrugen. Wir haben daher den Ausdruck $\sqrt{\frac{\rho \lambda}{A}}$

für die Schichten 0–1 km, 1–2 km usw. gerechnet, daraus die Abhängigkeit des Emanationsgehaltes s von der Höhe graphisch dargestellt, und zwar unter Annahme zweier Grenzwerte des Austausches, $A = 50$ und $A = 100$. So ergab sich (s ausgedrückt in Prozenten des Emanationsgehaltes am Boden s_0):

Tabelle I.

h km	für $A = 50$ s (Prozente)	für $A = 100$ s (Prozente)
0	100	100
1	49,4	60,7
2	25,0	37,7
2,5	18,6	30,4
3	13,5	24,5
4	7,4	16,2
5	4,5	10,9
6	2,5	7,5
7	1,5	5,3
8	0,9	3,8

Übrigens würde die Annahme eines innerhalb der ersten 5 Höhenkilometer konstanten ρ (etwa $= 10^{-3}$) nichts wesentlich an den Zahlen ändern. Z. B. ergäben sich dann aus den Formeln:

$$\text{für } A = 50 \quad s = s_0 \cdot e^{-0,645 \cdot 10^{-6} h}$$

$$\text{für } A = 100 \quad s = s_0 \cdot e^{-0,456 \cdot 10^{-6} h}$$

z. B. die Werte

Tabelle II.

h km	für $A = 50$ s (in Prozenten)	für $A = 100$ s (in Prozenten)
2	27,3	39,2
4	7,4	15,5

Emanationsmessungen in der freien Atmosphäre sind bisher nicht vorhanden. Für einen Vergleich mit Beobachtungen müssen wir daher auf die einzigen auf einem Berggipfel ausgeführten Messungen von J. R. Wright und O. F. Smith¹⁾ zurückgehen. Diese fanden auf

1) Diese Zeitschr. 15, 31, 1914; Phys. Rev. (2) 5, 459, 1915.

dem Mount Pauai (Philippinen) in rund 2500 m Höhe $s = 20 \cdot 10^{-15}$ Curie/g, in Manila (5 m) $s_0 = 69 \cdot 10^{-15}$ Curie/g, oben also 29 Proz. des Emanationsgehalts am Boden. In freier Atmosphäre wäre wohl ein noch kleinerer Wert zu erwarten. Geht man trotzdem von den erwähnten Zahlen Wrights und Smiths aus, so würde diesen am besten der Wert des Austausches $A = 83 \text{ cm}^{-1} \text{ g sec}^{-1}$ entsprechen, der vollkommen innerhalb der zu erwartenden Grenzen liegt.

Es könnte vielleicht Bedenken erregen, daß wir die starke Abnahme des Austausches A gegen den Boden hin unberücksichtigt ließen. Streng genommen gelten die Formeln erst von der Höhe an, von der ab A genügend konstant vorausgesetzt werden darf. Jene Vernachlässigung fällt aber nicht ins Gewicht, denn wenn wir — die Verhältnisse arg übertreibend — bis $h = 50 \text{ m}$ $A = 2$ annehmen und von da an wie früher weiter gehen würden, so würden wir in 50 m $s = 81,7$ Proz. des Bodenwertes s_0 finden und in annähernd gleichem Verhältnis wären dann alle folgenden Angaben zu vermindern. Es ändert sich also bloß der Ausgangswert und selbst dieser nur innerhalb der Grenzen der stets vorhandenen Schwankungen.

2. Gefälle. Aus der Formel (2) folgt unter der Annahme eines mittleren $\rho = 10^{-3} \text{ g/ccm}$

$$\text{für } A = 50 \quad ds/dh = -4,56 \cdot 10^{-6} \cdot s$$

$$\text{für } A = 100 \quad ds/dh = -6,45 \cdot 10^{-6} \cdot s$$

Nimmt man für s_0 den Mittelwert sämtlicher Beobachtungen¹⁾ (Eve, Ashman, Satterly, Wright und Smith) $s_0 = 88 \cdot 10^{-18}$ Curie/ccm $= 73 \cdot 10^{-15}$ Curie/g, so folgt

$$\begin{array}{ll} \text{am Boden} & \text{in 1250 m Höhe} \\ \text{für } A = 50 \quad ds/dh = -3,33 \cdot 10^{-19} & ds/dh = \\ & -1,39 \cdot 10^{-19} \\ & \text{Curie/g. cm} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{für } A = 100 \quad ds/dh = -4,72 \cdot 10^{-19} & ds/dh = \\ & -2,55 \cdot 10^{-19} \\ & \text{Curie/g. cm.} \end{array}$$

Die Beobachtungen in Manila-Mount Pauai haben

$$ds/dh = -2,0 \cdot 10^{-19} \text{ Curie/g. cm}$$

geliefert, also einen Wert, der gut mit dem für 1250 m, die Mitte der beiden Höhenlagen, gerechneten stimmt.

3. Emanationsabgabe des Erdbodens. Formel (3) gestattet, aus dem bekannten Austausch A und Emanationsgehalt s_0 den Emanationsfluß $\mathcal{E}_0$ in Bodennähe zu rechnen und mit

1) Vgl. E. v. Schweidler und K. W. F. Kohlrausch, Atmosph. Elektrizität S. 223 in Graetz' Handbuch der Elektrizität, III. Bd. Leipzig, J. A. Barth 1915.

den Bestimmungen der Emanationsabgabe des Erdbodens zu vergleichen.

Nehmen wir den Mittelwert

$$s_0 = 73 \cdot 10^{-15} \text{ Curie/g,}$$

so wird

$$\text{für } A = 50 \quad \mathcal{E}_0 = 2,36 \cdot 10^{-17} \text{ Curie/qcm sec}$$

$$\text{für } A = 100 \quad \mathcal{E}_0 = 3,33 \cdot 10^{-17} \text{ Curie/qcm sec.}$$

Smyth¹⁾ fand in Dublin als Mittel aus etwa sechsmonatigen Beobachtungen (August bis Februar)

$$\mathcal{E}_0 = 7,4 \cdot 10^{-17} \text{ Curie/qcm sec.}$$

Also auch hier stimmen die Größenordnungen genügend überein.

4. Gesamte in der Erdatmosphäre enthaltene Emanationsmenge. Wir gehen von der Formel (4b) aus und erhalten mit den eben berechneten Werten von $\mathcal{E}$ über jedem qcm festen Bodens die Gesamtmenge an Radiumemanation E_0

$$\text{für } A = 50 \quad E_0 = 1,13 \cdot 10^{-11} \text{ Curie/qcm}$$

$$\text{für } A = 100 \quad E_0 = 1,60 \cdot 10^{-11} \text{ Curie/qcm.}$$

Die von den wasserbedeckten Teilen der Erdoberfläche abgegebenen Emanationsmengen können gegenüber denen vom Festlande vollständig vernachlässigt werden. Die eben erhaltenen Zahlen multipliziert mit dem Flächeninhalt der Festlandsfläche der Erde ($1,46 \cdot 10^{18}$ qcm) geben dann die Grenzwerte für die gesamte, in der Erdatmosphäre enthaltene Emanationsmenge Q :

$$\text{für } A = 50 \quad Q = 1,64 \cdot 10^7 \text{ Curie}$$

$$\text{für } A = 100 \quad Q = 2,34 \cdot 10^7 \text{ Curie.}$$

b) Thoriumemanation.

Für diese ist $\lambda = 1,27 \cdot 10^{-2} \text{ sec}^{-1}$, die Halbwertszeit 54,5 Sekunden. Mit $A = 100$ und $\rho = 1,2 \cdot 10^{-3}$ (bodennahe Schicht) wird:

$$s = s_0 \cdot e^{-3,94 \cdot h},$$

somit für $h = 1 \text{ m}$ $s = 96 \text{ Proz.}$ } des Emanationsgehalts s_0
 10 m $s = 67,5 \text{ „}$ } in der Höhe 0,
 100 m $s = 1,9 \text{ „}$ }

Wir sehen also, daß sich die Thoriumemanation, wie es nach ihrer geringen Lebensdauer von vornherein zu erwarten ist, in der freien Atmosphäre kaum vorfinden wird. In Wirklichkeit kann sie sich, wegen des niedrigen Wertes von A in bodennaher Schicht, noch weniger weit vom Erdboden entfernen.

Bei $A = 2$, einem für die untersten Meter der Atmosphäre ziemlich wahrscheinlichen Wert, würden sich nach der Formel $s = s_0 \cdot e^{-2,76 \cdot 10^{-2} \cdot h}$ die oben angeführten Prozentzahlen 96, 67,5 1,9 schon in 0,14, 1,4 und 14 m finden.

Ein Vergleich mit der Erfahrung ist mangels vorliegender Beobachtungen derzeit nicht möglich.

c) Actiniumemanation.

Für diese ist $\lambda = 1,77 \cdot 10^{-1} \text{ sec}^{-1}$, die Halbwertszeit 3,92 Sekunden. Da die Lebensdauer dieser Emanation noch kürzer ist als die der Thoriumemanation, so rechnen wir gleich mit dem für die bodennächsten Schichten angenommenen Werte $A = 2 \text{ cm}^{-1} \text{ g sec}^{-1}$ und erhalten:

$$s = s_0 \cdot e^{-9,9 \cdot 10^{-3} \cdot h}.$$

Es werden demnach in 1 bzw. 10 m 37 bzw. 0,05 Proz. des Gehaltes knapp am Erdboden zu erwarten sein.

d) Verteilung der festen Zerfallsprodukte.

Mit der Verteilung einer Emanation eng verknüpft ist die ihrer Zerfallsprodukte. Obwohl feste Körper, bewegen sie sich wegen ihrer feinen Zerteilung nur sehr langsam gegenüber der sie umgebenden Luft¹⁾; sie können deshalb im allgemeinen ebenso an deren Masse gebunden gedacht werden, wie eine gasförmige Beimengung, zumal sie sich häufig an Staubkerne oder an Langevinsche Ionen anlagern. Die Grundformel für den Austausch gilt dann auch für sie.

Ein Vergleich der für Ra -, Th - und Ac -Emanation gefundenen Verteilungen zeigt deutlich die bedeutend geringere Ausbreitungsfähigkeit der kurzlebigeren. Die vergänglicheren Zerfallsprodukte können sich demnach nicht weit vom Ort ihrer Entstehung entfernen, ihre Verteilung schließt sich eng an die der entsprechenden Emanation an.

Das ist z. B. bei den ersten drei Gliedern²⁾ der auf die Radiumemanation zurückgehenden Reihe der Fall. RaA — RaC zerfallen mindestens hundertmal schneller als die Emanation. Jede dieser Induktionen nimmt also mit zunehmender Höhe genügend genau nach dem unter a) 1. dargestellten Gesetz ab, jede ist auch im Mittel im Gleichgewicht mit der am selben Ort befindlichen Emanationsmenge.

Anders RaD . Seine Zerfallskonstante ist $\lambda = 1,37 \cdot 10^{-9}$, entsprechend einer Halbwertszeit von 16 Jahren. Wir wollen versuchsweise rechnen, wie sich die aus der Emanation der alleruntersten Luftschicht entstehende Menge von RaD für sich allein verbreitet. Es wird nach Formel (1) mit $\rho = 10^{-3}$ (zum Zwecke rohen Überschlags für alle Höhen gleich angenommen):

1) Die geladenen im elektrischen Feld der Erde mit Geschwindigkeiten von der Größenordnung 1—3 cm/sec. Das kommt gegenüber den Strömungsgeschwindigkeiten beim Austausch (etwa m/sec) gar nicht in Betracht.

2) Die Zerfallsprodukte RaC' und RaC'' kommen wegen ihres geringen Anteils nicht in Betracht.

$$\begin{aligned} \text{für } A = 50 \quad s &= s_0 \cdot e^{-1,66 \cdot 10^{-7} h} \\ \text{für } A = 100 \quad s &= s_0 \cdot e^{-1,17 \cdot 10^{-7} h} \end{aligned}$$

woraus folgt:

Tabelle III.

h km	für $A = 50$ s (in Prozenten)	für $A = 100$ s (in Prozenten)
2	96,4	97,4
6	90,2	93,0
10	84,7	89,0

Darüber müßten sich noch die aus den höheren Schichten entstandenen Mengen *RaD* überlagern, es käme also zu einer fast vollkommen gleichförmigen Verteilung. Dann steht aber *RaD* — alles gilt auch für die weiteren Zerfallsprodukte *RaE* und *RaF* (Polonium) — nicht mehr im Gleichgewicht mit der Emanation: in den hohen Schichten ist es im Überschuß vorhanden, in den unteren bleibt es hinter der Gleichgewichtsmenge zurück. Aus unmittelbaren Messungen seines Betrages könnte man sogar schließen, bis zu welchen Höhen die Atmosphäre in den Austausch der unteren Schichten mit einbezogen ist.

In der Thoriumreihe schließt sich *ThA* der Verteilung der Emanation vollkommen an. *ThB* ($\lambda = 1,82 \cdot 10^{-5}$, Halbwertszeit 10,6 Stunden) reicht aber höher hinauf. Gemäß den Ergebnissen unter b) setzen wir mit genügender Annäherung voraus, es entstände nur in den bodennächsten Schichten, rechnen also nach Formel (1) mit $\rho = 1,2 \cdot 10^{-3}$. Wir nehmen schon von vornherein eine Zweiteilung der Bewegungszustände der Luftschichten an wie in a) 1.: bis 50 m $A = 2$, weiter $A = 50$ bzw. 100.

Es wird

$$\begin{aligned} \text{für } A = 2 \quad s &= s_0 \cdot e^{-1,045 \cdot 10^{-4} h} \\ \text{für } A = 50 \quad s &= s_0 \cdot e^{-0,209 \cdot 10^{-4} h} \\ \text{für } A = 100 \quad s &= s_0 \cdot e^{-0,148 \cdot 10^{-4} h} \end{aligned}$$

daraus die Werte:

Tabelle IV.

h m	für $A = 50$ s (in Prozenten)	für $A = 100$ s (in Prozenten)
0	100	
50	58,0	
100	52,4	54,0
500	22,8	29,4
1000	8,0	13,7
1500	2,8	6,4
2000	1,0	3,0

Die weiteren Zerfallsprodukte *ThC*, *ThC'* und *ThC''* folgen wegen ihrer geringeren Lebensdauer (rund der zehnte Teil von *ThB*) der gleichen Höhenverteilung.

In der Actiniumreihe ist *AcB* ($\lambda = 3,20$

$\cdot 10^{-4}$, Halbwertszeit 36 Minuten) für die folgenden Zerfallsprodukte maßgebend. Wir dürfen es ebenfalls bloß in den alleruntersten Schichten entstanden denken — vgl. c) — und erhalten

$$\begin{aligned} \text{mit } A = 2 \quad s &= s_0 \cdot e^{-4,38 \cdot 10^{-4} h} \\ \text{mit } A = 50 \quad s &= s_0 \cdot e^{-8,76 \cdot 10^{-5} h} \\ \text{mit } A = 100 \quad s &= s_0 \cdot e^{-6,20 \cdot 10^{-5} h} \end{aligned}$$

daraus mit der gleichen Zweiteilung wie oben:

Tabelle V.

h m	für $A = 50$ s (in Prozenten)	für $A = 100$ s (in Prozenten)
0	100	
50	11,4	
100	7,2	8,3
200	3,0	4,8
300	1,2	3,2
400	0,5	1,7

AcC und *AcC''* werden sich nur unbedeutend weiter ausbreiten.

Alles das gilt natürlich nur unter den gleichen Voraussetzungen wie die anderen Ableitungen: für die Mittelwerte bei Fehlen besonderer Störungen.

Die Verteilung der Emanationen und ihrer Zerfallsprodukte durch reine Diffusion erfolgt nach denselben Formeln, wie die betrachtete Verteilung durch ungeordnete Luftströmungen; man müßte nur an Stelle von A/ρ den Diffusionskoeffizienten setzen¹⁾. Letzterer ist für Radiumemanation in Luft nach v. Hevesy²⁾ etwa 0,07 qcm/sec, also rund 10^6 mal kleiner als der Koeffizient A/ρ der „Scheindiffusion“. Neben den hier von uns behandelten Wirkungen des Austausches durch ungeordnete Bewegung spielt also die eigentliche Diffusion eine gänzlich zu vernachlässigende Rolle.

Zusammenfassung.

Auf Grund des gegenwärtigen Standes unserer Kenntnisse über den Austausch bei der ungeordneten Bewegung in freier Luft wurden Gesetze für die Höhenverteilung eines radioaktiven Gases in der Atmosphäre und für dessen Abgabe von seiten des Erdbodens gefunden. Die berechneten Werte stimmen mit den Beobachtungen, soweit solche vorliegen (Radiumemanation), befriedigend überein; Thorium- und Actiniumemanation könnten sich nur in den alleruntersten Schichten bemerkbar machen. Dieselben Betrachtungen wurden auch auf die festen Zerfallsprodukte der Emanationen ausgedehnt.

1) Tatsächlich hat ja E. Rutherford (Radioaktivität S. 285, 1906) auf entsprechende Weise den Diffusionskoeffizienten der Thoriumemanation bestimmt.

2) Jahrb. d. Rad. u. Elektron. 10, 213, 1913.

Die Halbwertshöhe, d. i. die Höhe, in der der Gehalt — auf ein Gramm Luft bezogen — auf die Hälfte des Betrages am Erdboden gesunken ist, wird danach für

<i>RaEm</i> und deren kurzlebige Zerfallsprodukte	rund 1200 m
<i>RaD</i> und Folgeprodukte	praktisch gleichförmig bis 10 km Höhe
<i>ThEm</i> und <i>ThA</i>	2—3 m
<i>ThB</i> und Folgeprodukte	100—150 m
<i>AcEm</i> und <i>AcA</i>	0,5—1 m
<i>AcB</i> und Folgeprodukte	10—20 m.

Wien, Institut für Radiumforschung der kaiserl. Akademie der Wissenschaften und k. k. Zentralanstalt für Meteorologie u. Geodynamik.

(Eingegangen 21. Januar 1918.)

Über die Ursache der Zunahme der Ionisation der Atmosphäre mit der Höhe.

Von A. Gockel.

Aus gleichzeitigen Messungen der Ionisation und der ultravioletten Sonnenstrahlung im Hochgebirge, die einen deutlichen Parallelismus zwischen diesen beiden Faktoren ergaben, glaubt Herr Dember¹⁾ schließen zu sollen, daß die Zunahme der Ionisation mit der Höhe durch die größere Intensität der Strahlung dort verursacht ist. Angesichts der Resultate Herrn Lenards, wonach nur äußerst kurzweilige Strahlen, die doch schon in den uns unzugänglichen Schichten der Atmosphäre absorbiert werden, merklich ionisierend wirken und des Nachhinkens des Maximums der Ionisation gegen das Maximum der Strahlungsintensität muß allerdings die Annahme eingeführt werden, daß ein beträchtlicher Teil der vom Licht erzeugten Ionen durch Luftströmungen und vom vertikalen Leitungsstrom aus höheren Schichten der Atmosphäre zum Beobachtungsort hingeführt wird. Mit Recht weist aber Herr Dember auf eine Schwierigkeit bei der Deutung seiner Messungsergebnisse hin. Die Zahl der gemessenen Ionen hängt nicht nur von der Zahl der in der Zeiteinheit erzeugten, sondern auch von der Zahl der in derselben Zeit molisierten ab, und die Molisierungsgeschwindigkeit wächst rasch, wenn die relative Feuchtigkeit über 80 Proz. hinausgeht. Da mit der Zunahme der Intensität der Sonnenstrahlung im Laufe des Tages die relative Feuchtigkeit abnimmt, kann leicht eine Zunahme der Ionisation auf Rechnung einer direkten Sonnenstrahlung gesetzt werden, wäh-

rend sie in Wirklichkeit nur eine Folge der Abnahme der relativen Feuchtigkeit ist. Herr Dember¹⁾ hat deshalb seine Messungen auf der Alta Vista am Pic von Teneriffa in einer Höhe von 3200 m wiederholt.

Auch an diesem äußerst trockenen Orte — die relative Feuchtigkeit schwankte nur zwischen 10 und 35 Proz. — fand Herr Dember, daß wenigstens die positive Ionisation 2—3 Stunden nach dem höchsten Stand der Sonne ihr Maximum erreicht; und daß die Änderung der relativen Feuchtigkeit nicht die Ursache dieser Erscheinung sein kann.

Nach Herrn Dember ist, wenn nicht ein anderer unberücksichtigter Faktor mitspielt, das ultraviolette Licht als Ursache der nachmittägigen Erhöhung der Ionisation anzusehen.

Ich kann mich dieser letzteren Ansicht nicht anschließen, sondern glaube, daß faktisch ein anderer Faktor mitspielt, nämlich die durchdringende Strahlung, und daß die sowohl im Ballon als auch überall im Hochgebirge beobachtete Zunahme der Ionisation mit der Höhe auf Rechnung der Zunahme dieser letzteren zu setzen ist. Selbst die tägliche Schwankung der Ionisation läßt sich durch den Gang der durchdringenden Strahlung erklären. Hess und Kofler²⁾ fanden auf dem Obir in den Tauern in einer Höhe von 2100 m, daß im Sommer, also in der Jahreszeit, in der auch Dember seine Messungen vornahm, die durchdringende Strahlung um 16 Uhr ihr Maximum erreichte. Die Amplitude der Tagesschwankung betrug 0,5 Ionen ccm/sec. In einer Höhe von 3200 m, in welcher der absolute Wert der durchdringenden Strahlung schon beträchtlich höher ist, kann auch die Amplitude der täglichen Schwankung größer sein. Der Gang dieser Schwankung darf aber, worauf auch Hess (l. c.) hinweist, keinesfalls der Änderung der Sonnenstrahlung zugeschrieben werden.

Gegen den direkten Einfluß der Sonnenstrahlung auf die Ionisation sprechen schon die Demberschen Messungen am Pic von Teneriffa selbst. Zunächst ist gar kein Einfluß dieser Strahlung auf die Zahl der negativen Ionen zu erkennen. Im Gegenteil, gerade wie es in der Ebene der Fall ist, hat die Zahl dieser Ionen ein Maximum in den ersten Morgenstunden und nimmt dann im Laufe des Tages ab. Das Minimum beobachtet man teils gegen 10 a teils gegen 3 p. Auch das Maximum der positiven Ionen wurde an den 6 Beobachtungstagen nur 4 mal nach-

1) Dember, Ann. d. Phys. 53, 198, 1917.

2) V. F. Hess u. M. Kofler, diese Zeitschr. 18, 585, 1917.

1) H. Dember, diese Zeitschr. 13, 207, 1912.

mittags, dagegen 2 mal vormittags beobachtet, und zwar dieses gerade zu windstillen Zeiten. Es ist ja auch klar, daß Windstille die Ansammlung positiver Ionen in der Nähe des Berggipfels begünstigt. Es dürften demnach die Demberschen Resultate viel mehr durch die wechselnde Windstärke als durch die Sonnenstrahlung beeinflusst sein.

Gegen einen direkten Einfluß der Sonnenstrahlung auf die Ionisation spricht, wie ich dieses schon an anderen Orten¹⁾ hervorgehoben habe, der Umstand, daß Dember auf dem Col de Bertol (3400 m) im Wallis eine weit aus stärkere Ionisation als in dem unmittelbar darunter (1900 m) gelegenen Arolla fand, während die Intensität der ultravioletten Sonnenstrahlung an beiden Orten keinen Unterschied aufwies.

Ebenso spricht gegen den direkten Einfluß der Sonnenstrahlung auf die Ionisation die von Dorno in dem sonnenreichen Davos durch Registrierung festgestellte Zunahme der Leitfähigkeit während der Nacht mit einem Höchstwert der 24 stündigen Periode vor Sonnenaufgang, ein Resultat, dem sich auch meine Einzelmessungen hier gut anpassen und mit dem auch das fast an allen Orten konstatierte Minimum des Potentialgefälles zwischen 3 und 4 a gut übereinstimmt. Angesichts dieser Beobachtungen und des oben schon erwähnten Umstandes, daß die bis zu einer Höhe von 3000 m herabkommenden kurzwelligen Lichtstrahlen gar nicht ionisierend wirken, wird man also wohl an der durchdringenden Strahlung als Quelle der Vermehrung der Ionisation in der Höhe festhalten müssen. Von großem Einfluß ist natürlich auch der Umstand, daß bei wolkenfreiem Himmel die Luft in der Höhe weitaus ärmer an Kondensationskernen ist als in der Niederung, die Molisierung der Ionen in der Höhe also langsamer vor sich geht als in der Tiefe.

Den Einfluß der Zahl der Kondensationskerne auf die der leicht beweglichen Ionen zeigen die großen Unterschiede in der Zahl der letzteren, die ich²⁾ in gleicher Höhe und bei ähnlicher Wetterlage auf der Nord- und Südseite der Berner Alpen in der reinen trockenen Luft des Wallis einerseits, und der von der Ebene her mit Kondensationskernen versehenen Luft im Lauterbrunner Tal andererseits gefunden habe; und ebenso die verhältnismäßig geringe Ionisation auf dem Weißenstein im

Jura, an dessen Fuß eine Papierfabrik und Eisenwerke liegen.

Freiburg (Schweiz), Januar 1918.

(Eingegangen 30. Januar 1918.)

Notiz zu E. Schrödingers Arbeit¹⁾ „Die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes“.

Von A. Einstein.

Herr Schrödinger hat durch Ausrechnung gezeigt, daß bei passender Wahl des Koordinatensystems alle Energiekomponenten t_{σ}^{α} des Gravitationsfeldes einer Kugel (außerhalb dieser verschwinden²⁾). Begreiflicherweise wundert sich Herr Schrödinger über dies Ergebnis, das auch mir anfänglich sehr wunderlich erschien. Insbesondere fragt er sich, ob die t_{σ}^{α} wirklich als die Energiekomponenten aufzufassen seien. Ich will zu dem von Herrn Schrödinger angeführten Bedenken noch zwei weitere fügen:

1. Während die Energiekomponenten T_{σ}^{α} der Materie einen Tensor bilden, ist dieses für die als „Energiekomponenten“ des Gravitationsfeldes erklärten Größen t_{σ}^{α} nicht der Fall.
2. Die Größen $T_{\sigma\tau} = \sum_{\alpha} T_{\sigma}^{\alpha} g_{\alpha\tau}$ sind in bezug auf die Indizes σ und τ symmetrisch, nicht aber die analogen $t_{\sigma\tau} = \sum_{\alpha} t_{\sigma}^{\alpha} g_{\alpha\tau}$.

Aus dem unter 1. genannten Grunde tragen auch H. A. Lorentz und Levi-Civita Bedenken, in den t_{σ}^{α} die Energiekomponenten der Gravitation anzuerkennen.

Wenn ich auch diese Bedenken mitempfinde, bin ich doch überzeugt, daß eine zweckmäßigere Festsetzung für die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes, als die von mir getroffene, nicht möglich ist. Die nach meiner Meinung überzeugendste formale Begründung für diese Wahl habe ich in der Arbeit „Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie“ (Berliner Sitz.-Ber. 42, 1111, 1916) gegeben.

Was das Schrödingersche Bedenken anbelangt, so liegt seine überzeugende Kraft in der Analogie zur Elektrodynamik, in welcher die Spannungen und die Energiedichte jedes Feldes von Null verschieden sind. Ich vermag aber keinen Grund dafür zu finden, daß dies auch für Gravitationsfelder zutreffen müsse. Es kann

1) Diese Zeitschr. 19, 4, 1918.

2) Auf das Verschwinden der Komponente t_4^4 in dem hier behandelten Falle hat mich vor wenigen Monaten bereits Herr G. Nordström aufmerksam gemacht.

1) A. Gockel, Neue Denkschriften der Schweizer Naturforsch. Gesellschaft 54, Abh. 1, S. 56.

2) l. c.

sehr wohl Gravitationsfelder ohne Spannungen und ohne Energiedichte geben. Die Bedeutung der t_σ^α liegt darin, daß sie mit den T_σ^α der Materie die Gleichungen

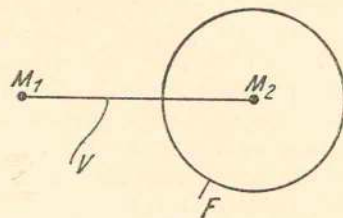
$$\sum_\alpha \frac{\partial (T_\sigma^\alpha + t_\sigma^\alpha)}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (1)$$

liefern, welche über ein dreidimensionales Volumen V integriert die Gestalt

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx_4} \left\{ \int (T_\sigma^4 + t_\sigma^4) dV \right\} \\ = & \int \left[(T_\sigma^1 + t_\sigma^1) \cos nx_1 + (T_\sigma^2 + t_\sigma^2) \cos nx_2 \right. \\ & \left. + (T_\sigma^3 + t_\sigma^3) \cos nx_3 \right] dS \end{aligned} \quad (1a)$$

der Erhaltungssätze des Impulses und der Energie annehmen, und zwar sind die t_μ^α die einzigen Größen dieser Eigenschaft, welche nur erste Ableitungen der $g_{\mu\nu}$ enthalten.

Es sei ferner darauf hingewiesen, daß die Spannungen t_σ^α bei solchen Gravitationsfeldern, welche zwischen mehreren Körpern Wechselwirkungen vermitteln, keineswegs verschwinden können. Dies ergibt sich aus folgender Überlegung: Es seien M_1 und M_2 zwei dauernd ruhende, durch einen starren Stab V miteinander verbundene Körper. F sei eine M_2 einschließende, M_1 ausschließende Fläche, welche also den Stab V schneidet. Dieser Stab ist wegen der Gravitationsanziehung der beiden Körper aufeinander in einem Spannungszustande. Ist der Stab geradlinig und parallel der X_1 -Achse



des Koordinatensystems, so liefert die erste der Gleichungen (1a)

$$0 = \int T_1^1 dS + \int (t_1^1 \cos nx_1 + t_1^2 \cos nx_2 + t_1^3 \cos nx_3) dS.$$

Da in unserem Falle das erste dieser Integrale nicht verschwindet, kann auch das zweite nicht verschwinden. Es können also nicht t_1^1, t_1^2, t_1^3 überall auf S verschwinden. Diese Betrachtung läßt sich mutatis mutandis in allen Fällen anwenden, wo das betrachtete Feld Wechselwirkungen zwischen Körpern vermittelt. Dies ist aber bei dem von Schrödinger betrachteten Felde nicht der Fall. —

Auch die formalen Bedenken 1. und 2. können nach meiner Meinung nicht dazu führen, die von mir vorgeschlagene Fassung des Impuls-Energiesatzes abzulehnen. Denn die den Satz ausdrückende Gleichung gilt für beliebige Wahl des Bezugssystems; weitere formale Forderungen zu stellen, erscheint nicht berechtigt. Gegenüber dem Bedenken 1. habe ich in einer demnächst in den Sitzungsber. d. Berl. Akademie erscheinenden Arbeit Stellung genommen.

(Eingegangen 5. Februar 1918.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Zum gegenwärtigen Stand der Quantentheorie.

Von Ludwig Flamm.

Der kühne Gedanke Plancks, daß Emission und Absorption nicht kontinuierlich, sondern in bestimmten endlichen Quanten vor sich gehe, führte nicht nur zu einer befriedigenden Theorie der Energieverteilung im Spektrum des schwarzen Körpers, sondern ließ sich auch sehr erfolgreich für eine Theorie der spezifischen Wärme verwerten. So sehr man auch die Erfolge der neuen Idee anerkennen mußte, so stieß zunächst besonders die Vorstellung einer quantenhaften

Strahlungsabsorption auf heftigen Widerspruch. Die Theorie der Hohlraumstrahlung konnte von Planck daraufhin in solcher Weise abgeändert werden, daß kontinuierliche Absorption und nur quantenhafte Emission vorausgesetzt waren und trotzdem dieselbe Schlußformel für die Energieverteilung im Spektrum des schwarzen Körpers resultierte. Anders verhält es sich in der Theorie der spezifischen Wärme. Hier führten die beiden Gestalten der Theorie zu etwas verschiedenen Endformeln, ohne daß zwischen diesen bisher eine endgültige Entscheidung gelungen wäre.

Mittlerweile erzielte die Quantentheorie auf einem ganz verschiedenen Gebiete bedeutende

Erfolge, nämlich in der Theorie der Serienspektren. Gerade hier erfuhr sie auch in der letzten Zeit eine strengere Formulierung und Weiterbildung. Es mag sein, daß auch jetzt noch keine sichere Entscheidung zwischen der ersten schärferen und zweiten gemäßigten Formulierung der Quantentheorie behauptet werden kann. Jedenfalls wurde diese jüngste Erweiterung der Quantentheorie auf Grund der ursprünglichen Fassung Plancks ausgebaut, da sich diese bedeutend einfacher erweist. Das Auftreten von Wirkungsquanten ist ja an und für sich unseren bisherigen Vorstellungen gegenüber ungewohnt und rätselhaft. Ob diese nur bei Emission oder auch bei Absorption eine Rolle spielen, ist demgegenüber von sekundärer Wichtigkeit; die Kernfrage wird durch die zweite, mildere Formulierung Plancks kaum dem Verständnis näher gebracht. In der Theorie der Serienspektren zeigte sich die ursprüngliche Fassung der Quantentheorie jedenfalls als die derzeit heuristisch wertvollere. Andererseits mag es von Wert sein, die durch den Ausbau der Theorie der Serienspektren gewonnenen genaueren Vorstellungen zurück auf die Theorie der spezifischen Wärme und der Hohlraumstrahlung anzuwenden und so das gesamte Gebiet der Quantentheorie nach einem einheitlichen Gesichtspunkte zu behandeln. Gerade die Theorie der spezifischen Wärme läßt bei der Verworrenheit, die hier in der Literatur zutage tritt, das Bedürfnis nach neuen leitenden Ideen besonders stark empfinden. Ob sich die so gewonnene einfachste Darstellung auch hier bewährt, muß der Erfolg zeigen. Zumindestens mag es erwünscht erscheinen, zu sehen, wie man aus möglichst wenigen, bewährten Grundvorstellungen heraus auf die einfachste Weise zu den Hauptergebnissen der Quantentheorie gelangt. Dies soll in den vorliegenden Zeilen zu erreichen versucht werden.

§ 1.

Die wesentliche Grundlage der Quantentheorie läßt sich heute auch in der folgenden einfachen Gestalt aussprechen: Für irgendein körperliches System, das aus einer großen Anzahl N gleichartiger Elemente besteht, ist jedes der N Elemente nur einer abzählbaren Menge von Zuständen¹⁾

$$Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n, \dots$$

fähig. Diesen Zuständen sollen die Energien

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n, \dots$$

entsprechen. In einem bestimmten Augenblick sind in jedem dieser Zustände eine gewisse Anzahl von Elementen, und zwar allgemein in dem

Zustande Z_n die Anzahl N_n . Es ist notwendigerweise, da jedes Element immer in einem und nur einem dieser Zustände zu einer bestimmten Zeit sich befindet,

$$\sum N_n = N.$$

Man pflegt die Bezeichnung

$$\frac{N_n}{N} = w_n$$

einzuführen; dann schreibt sich die obige Gleichung

$$\sum w_n = 1. \quad (1)$$

Wenn jeder der betrachteten Zustände der Elemente gleichwahrscheinlich ist, so berechnet sich die Entropie des Systems nach der bekannten Formel¹⁾

$$S = -Nk \sum w_n \ln w_n. \quad (2)$$

Die Gesamtenergie des Systems ist

$$E = \sum N_n \varepsilon_n = N \sum w_n \varepsilon_n. \quad (3)$$

Wir wollen den Zustand thermodynamischen Gleichgewichts näher untersuchen, der sich bei einem System von gegebener Teilchenzahl N für eine bestimmte Gesamtenergie E einstellt. Nach den Grundsätzen der Thermodynamik ist er durch den Maximalwert bestimmt, den die Entropie unter den vorgegebenen Bedingungen annehmen kann. Im thermodynamischen Gleichgewichtszustande ist demnach

$$\delta S = -Nk \sum (\ln w_n + 1) \delta w_n = 0,$$

wozu noch als Nebenbedingungen zufolge (3)

$$N \sum \varepsilon_n \delta w_n = 0$$

und zufolge (1)

$$\sum \delta w_n = 0$$

hinzukommen. Mit Hilfe zweier willkürlicher Konstanten α und β fassen wir die drei Variationsgleichungen in eine zusammen, indem wir die oberste Gleichung durch $-Nk$ dividieren, dagegen die zweite Gleichung mit β/N und die letzte Gleichung mit $(-\ln \alpha - 1)$ multiplizieren und alle drei addieren. Das gibt

$$\sum (\ln w_n + \beta \varepsilon_n - \ln \alpha) \delta w_n = 0,$$

woraus folgt

$$w_n = \alpha e^{-\beta \varepsilon_n} \quad (4)$$

als Verteilung im thermodynamischen Gleichgewichte. Die Konstanten α und β bestimmen sich aus den zwei Nebenbedingungen; es liefert durch Einsetzen von (4) Gleichung (1)

$$\alpha \sum e^{-\beta \varepsilon_n} = 1 \quad (5)$$

und Gleichung (3)

$$\alpha N \sum \varepsilon_n e^{-\beta \varepsilon_n} = E. \quad (6)$$

Aber die Auflösung dieses Gleichungssystems

¹⁾ Planck, Theorie der Wärmestrahlung, 2. Aufl., S. 123, Leipzig 1913.

¹⁾ Einstein, Verh. d. D. Phys. Ges. 18, 320, 1916.

wird im allgemeinen auf Schwierigkeiten stoßen. Dagegen bringt man mit Hilfe dessen den Ausdruck für die Entropie auf eine sehr einfache Gestalt. Man erhält durch Einsetzen von (4) in (2) zunächst

$$S = Nk \sum [\alpha e^{-\beta \epsilon_n} \cdot (\beta \epsilon_n - \ln \alpha)]$$

und weiter vermöge der Beziehungen (5) und (6)

$$S = k(\beta E - N \ln \alpha).$$

Zieht man noch die Gleichgewichtszustände des Körpers bei anderen Werten der Gesamtenergie E aber sonst ganz ungeänderten Verhältnissen in Betracht, so liefert die Differentiation dieser Gleichung

$$dS = k(\beta dE + E d\beta - N d \ln \alpha).$$

Andererseits gibt (6) durch (5) dividiert die Beziehung

$$E = N \frac{\sum \epsilon_n e^{-\beta \epsilon_n}}{\sum e^{-\beta \epsilon_n}} = -N \frac{d}{d\beta} \ln \sum e^{-\beta \epsilon_n}.$$

Durch Logarithmieren von (5) folgert man weiter

$$E = N \frac{d \ln \alpha}{d\beta}$$

oder

$$E d\beta = N d \ln \alpha.$$

Die Differentialgleichung für die Entropie reduziert sich somit auf

$$dS = k\beta dE.$$

Wenn keine äußere Arbeit geleistet wird (Volumenkonstanz), liefert die Thermodynamik die einfache Beziehung (zweiter Hauptsatz)

$$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{T},$$

wodurch die absolute Temperatur T in unsere Formeln eingeführt wird. Man erhält so

$$k\beta = \frac{1}{T},$$

also für die eine der beiden Konstanten

$$\beta = \frac{1}{kT}. \quad (7)$$

Die Konstante β ist demnach in einfachster Weise durch die absolute Temperatur bestimmt. Die Entropieformel lautet demnach

$$S = \frac{E}{T} - Nk \ln \alpha.$$

Aus Gleichung (5) erhält man durch Logarithmieren und Berücksichtigung von (7)

$$\ln \alpha + \ln \sum e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}} = 0.$$

Damit eliminiert man auch noch die andere Konstante α aus der Entropiegleichung und erhält

$$S = \frac{E}{T} + Nk \ln \sum e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}}. \quad (8)$$

Wir wollen noch die Größe

$$\Psi = Nk \ln \sum e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}} \quad (9)$$

als „charakteristische Funktion“ des Systems¹⁾ einführen. Man erhält durch Differentiation

$$\frac{d\Psi}{dT} = \frac{N \sum \epsilon_n e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}}}{T^2 \sum e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}}}.$$

Vermöge der Gleichungen (5), (6) und (7) schreibt sich dies einfach

$$\frac{d\Psi}{dT} = \frac{E}{T^2}.$$

Die Gesamtenergie des Systems berechnet sich somit nach der einfachen Formel

$$E = T^2 \frac{d\Psi}{dT}. \quad (10)$$

Damit erhält man auch für die Entropie zufolge Gleichung (8) die einfache Formel

$$S = T \frac{d\Psi}{dT} + \Psi = \frac{d(T\Psi)}{dT}. \quad (11)$$

Durch weitere Differentiation von Formel (10) erhält man auch noch die spezifische Wärme bei konstantem Volumen

$$C_v = \frac{dE}{dT} = \frac{d}{dT} \left(T^2 \frac{d\Psi}{dT} \right).$$

Praktischer für die tatsächliche Berechnung erweist sich die Umformung

$$C_v = \frac{1}{T^2} \frac{d^2\Psi}{\left(\frac{dT}{dT}\right)^2}. \quad (12a)$$

Mittels der Beziehung (zweiter Hauptsatz)

$$\frac{dE}{dT} = T \frac{dS}{dT}$$

kann man die in Betracht kommende spezifische Wärme vermöge (11) auch nach der Formel berechnen

$$C_v = T \frac{d^2(T\Psi)}{dT^2}. \quad (12b)$$

Auch diese Formel wird bei der numerischen Berechnung der spezifischen Wärme gute Dienste leisten können. Die Kenntnis der charakteristischen Funktion Ψ nach Gleichung (9) genügt somit, um durch einfache Operationen vermöge der Gleichungen (10), (11) und (12) die Größen E , S und C_v daraus herzuleiten.

Die ausgezeichneten Energiebeträge ϵ_n pflegen quantentheoretisch durch eine Anzahl ganzer

¹⁾ Massieu, C. R. 69, 859, 1869. Paris.

Zahlen, und zwar bei s Freiheitsgraden durch s ganze Zahlen

$$n_1, n_2, n_3, \dots, n_s$$

bestimmt zu sein, deren jede alle ganzzahligen Werte von Null bis Unendlich annehmen kann. Jede der unabhängigen Koordinaten q_i , welche den Zustand eines Elements des betrachteten Systems bestimmt, soll zusammen mit der zugehörigen Geschwindigkeit $\dot{q}_i$, bzw. dem Momente p_i , in unserer Bezeichnungsweise als ein Freiheitsgrad zählen. Die ausgezeichneten Energiewerte schreiben sich also bei Andeutung ihrer funktionellen Abhängigkeit

$$\varepsilon_n = \varepsilon(n_1, n_2, n_3, \dots, n_s). \quad (13)$$

Ein wichtiger Fall ist der, daß die ausgezeichneten Energiewerte ε_n sich darstellen lassen als Summe von s -Funktionen, deren jede nur von je einer der s ganzen Zahlen abhängig ist, nämlich

$$\begin{aligned} & \varepsilon(n_1, n_2, n_3, \dots, n_s) \\ &= \varepsilon^{(1)}(n_1) + \varepsilon^{(2)}(n_2) + \varepsilon^{(3)}(n_3) + \dots + \varepsilon^{(s)}(n_s). \end{aligned}$$

Wir wollen in diesem Falle sagen, das Element besitze s getrennte Freiheitsgrade. Für Systeme, welche aus solchen Elementen bestehen, schreibt sich die charakteristische Funktion

$$\begin{aligned} \Psi &= Nk \ln \Sigma e^{-\frac{\varepsilon^{(1)}(n_1) + \varepsilon^{(2)}(n_2) + \dots + \varepsilon^{(s)}(n_s)}{kT}} = \\ &= Nk \ln \left[\left(\Sigma e^{-\frac{\varepsilon^{(1)}(n_1)}{kT}} \right) \left(\Sigma e^{-\frac{\varepsilon^{(2)}(n_2)}{kT}} \right) \dots \left(\Sigma e^{-\frac{\varepsilon^{(s)}(n_s)}{kT}} \right) \right] = \\ &= Nk \ln \Sigma e^{-\frac{\varepsilon^{(1)}(n_1)}{kT}} + Nk \ln \Sigma e^{-\frac{\varepsilon^{(2)}(n_2)}{kT}} + \dots \\ &\quad \dots + Nk \ln \Sigma e^{-\frac{\varepsilon^{(s)}(n_s)}{kT}}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man also mit

$$\Psi^{(i)} = Nk \ln \Sigma e^{-\frac{\varepsilon^{(i)}(n_i)}{kT}}$$

die charakteristische Funktion des i ten Freiheitsgrades, so schreibt sich die erhaltene Relation einfach

$$\Psi = \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)} + \Psi^{(3)} + \dots + \Psi^{(s)}. \quad (14)$$

Für Systeme, die aus Elementen mit lauter getrennten Freiheitsgraden bestehen, ist die charakteristische Funktion somit gleich der Summe aus den charakteristischen Funktionen der einzelnen Freiheitsgrade. Nachdem die Größen E , S und C_v mit Ψ einfach durch lineare Differentialgleichungen verknüpft sind, gilt dieses additive Gesetz analog auch für die Gesamtenergie, die Entropie und die berechnete spezifische Wärme. Die Erfahrung lehrt, daß man es

praktisch fast immer mit diesem ausgezeichneten Falle zu tun hat.

§ 2.

Nunmehr müssen wir unser Augenmerk auch dem Energieaustausch zuwenden. Aus der Grundvoraussetzung, daß die einzelnen Elemente nur eine abzählbare Menge von Zuständen mit ganz bestimmten diskreten Energiewerten annehmen können, folgt auch notwendigerweise, daß der Energieaustausch im allgemeinen nur in endlichen Quanten sich vollziehen kann. Wir wollen den Übergang der Energie zwischen zwei Systemen einer allgemeinen Betrachtung unterziehen, ohne aber den Fall dabei ausschließen zu wollen, daß das zweite System allenfalls mit dem ersten identisch ist, wobei dann der Energieaustausch nur zwischen verschiedenen Elementen des gleichen Systems erfolgt. Greifen wir irgend zwei Zustände der Elemente des ersten Systems Z_{m_1}' und Z_{n_1}' heraus und sei für die zugehörigen Energien

$$\varepsilon_{m_1}' > \varepsilon_{n_1}',$$

so bedeutet die Zustandsänderung $Z_{m_1}' \rightarrow Z_{n_1}'$ Energieabgabe, dagegen die umgekehrte Zustandsänderung $Z_{n_1}' \leftarrow Z_{m_1}'$ Energieaufnahme. Sind Z_{m_2}'' und Z_{n_2}'' analog zwei Zustände der Elemente des zweiten Systems und gilt für die zugehörigen Energien entsprechend

$$\varepsilon_{m_2}'' > \varepsilon_{n_2}'',$$

so bedeutet auch hier die Zustandsänderung $Z_{m_2}'' \leftarrow Z_{n_2}''$ Energieaufnahme und die umgekehrte Zustandsänderung $Z_{n_2}'' \rightarrow Z_{m_2}''$ Energieabgabe. Der Energieaustausch zwischen den beiden Systemen kann nur dann in dem Prozeß

$$Z_{m_1}' \rightarrow Z_{n_1}', \quad Z_{m_2}'' \leftarrow Z_{n_2}'' \quad (15a)$$

oder dem gerade entgegengesetzten

$$Z_{m_1}' \leftarrow Z_{n_1}', \quad Z_{m_2}'' \rightarrow Z_{n_2}'' \quad (15b)$$

bestehen, wenn die Beziehung

$$\varepsilon_{m_1}' - \varepsilon_{n_1}' = \varepsilon_{m_2}'' - \varepsilon_{n_2}'' \quad (16)$$

erfüllt ist. Diese Bedingung ist notwendig und Systeme, für welche diese Beziehung nirgends erfüllt ist, können überhaupt nicht in Energieaustausch miteinander treten.

Offenbar muß auch die folgende Bedingung befriedigt sein: Systeme, die jedes für sich im thermodynamischen Gleichgewichtszustande sich befinden, dürfen, bei gleicher Temperatur in Energieaustausch miteinander gebracht, in ihren Verteilungszuständen einander nicht stören. Dieser Bedingung genügt man auf die einfachste Weise durch die folgenden weiteren Voraussetzungen: Die Wahrscheinlichkeit des Übergangs eines Elements aus dem Zustande Z_m in den Zustand Z_n ist ebenso groß wie die Wahrscheinlichkeit des Übergangs aus dem Zustande

Z_n in den Zustand Z_m . Dies ist die quantentheoretische Erweiterung des in der Strahlungstheorie so bewährten Satzes¹⁾, welcher zum Kirchhoffschen Gesetz führt. Dementsprechend soll für das erste System mit w' die Wahrscheinlichkeit dafür bezeichnet werden, daß ein Element aus dem Zustand Z_{m_1}' in den Zustand Z_{n_1}' überspringt oder umgekehrt aus dem Zustand Z_{n_1}' in den Zustand Z_{m_1}' . Für das zweite System bedeute analog w'' die Wahrscheinlichkeit, daß ein Element aus dem Zustand Z_{m_2}'' in den Zustand Z_{n_2}'' übergeht oder aus dem Zustand Z_{n_2}'' in den Zustand Z_{m_2}'' . Die Häufigkeit A des Prozesses (15a) wird aber auch noch proportional sein der Anzahl der Elemente, die sich in jedem der in Betracht kommenden Ausgangszustände befinden, nämlich der Anzahl N_{m_1}' der Elemente des ersten Systems im Zustande Z_{m_1}' und der Anzahl N_{n_2}'' der Elemente des zweiten Systems im Zustande Z_{n_2}'' . Man hat also zu setzen

$$A = \kappa w' w'' N_{m_1}' N_{n_2}'',$$

wenn wir mit κ die Proportionalitätskonstante bezeichnen, die um so größer sein wird, je leichter die beiden Systeme untereinander Energie austauschen können. Man wird die Konstante κ sinngemäß als Koppelungskoeffizient bezeichnen können. Ganz ebenso ist die Häufigkeit B des Prozesses (15b) noch proportional der Anzahl der Elemente, die sich hier in den in Betracht kommenden Anfangszuständen befinden, der Anzahl N_{n_1}' der Elemente im Zustande Z_{n_1}' und der Anzahl N_{m_2}'' der Elemente im Zustande Z_{m_2}'' . Die analoge Formel lautet

$$B = \kappa w' w'' N_{n_1}' N_{m_2}''.$$

Der Proportionalitätsfaktor κ ist der ihm zugeschriebenen physikalischen Bedeutung gemäß der gleiche wie oben.

Im thermodynamischen Gleichgewichtszustande hat man den Gleichungen (4) und (7) gemäß bei der Temperatur T für das erste System die Beziehung

$$\frac{N_{m_1}'}{N_{n_1}'} = e^{-\frac{\epsilon_{m_1}' - \epsilon_{n_1}'}{kT}}$$

und für das zweite System analog

$$\frac{N_{m_2}''}{N_{n_2}''} = e^{-\frac{\epsilon_{m_2}'' - \epsilon_{n_2}''}{kT}}.$$

Man folgert somit für die oben betrachteten Zustände gemäß (16) die Gleichung

$$\frac{N_{m_1}'}{N_{n_1}'} = \frac{N_{m_2}''}{N_{n_2}''}$$

als Beziehung zwischen den beiden Systemen bei

Temperaturgleichheit. Daraus läßt sich weiter folgern

$$N_{m_1}' N_{n_2}'' = N_{n_1}' N_{m_2}''$$

und schließlich

$$A = B.$$

Unter den gemachten Voraussetzungen stehen also die beiden Systeme bei Temperaturgleichheit auch im Gleichgewichte des Energieaustausches.

Ist umgekehrt von den beiden Systemen bekannt, daß sie im Gleichgewichte des Energieaustausches sich befinden, d. h. daß für jede Art von Energieübergang die Beziehung

$$A = B$$

besteht, und weiß man ferner vom ersten der beiden Systeme, daß es sich im Temperaturgleichgewichte befindet und demgemäß der Beziehung genügt

$$\frac{N_{m_1}'}{N_{n_1}'} = e^{-\frac{\epsilon_{m_1}' - \epsilon_{n_1}'}{kT}},$$

so liefern die gemachten Voraussetzungen auch für das zweite System in ganz analoger Weise die Beziehung

$$\frac{N_{m_2}''}{N_{n_2}''} = e^{-\frac{\epsilon_{m_2}'' - \epsilon_{n_2}''}{kT}};$$

es folgt also auch für das zweite System der thermodynamische Gleichgewichtszustand, und zwar bei der nämlichen Temperatur. Auf diese Weise ist es verständlich, wie Systeme, welche für sich abgeschlossen nicht dem Zustande maximaler Entropie zustreben, beim Zusammenwirken mit anderen Systemen dennoch thermodynamisches Gleichgewicht aufweisen. Die Energieverteilung der Hohlraumstrahlung liefert hierfür ein bekanntes Beispiel¹⁾, doch sind dazu vorher noch andere Betrachtungen nötig, die erst später durchgeführt werden sollen.

§ 3.

Die erhaltenen Formeln sollen zunächst auf den Fall des einfach periodischen geradlinigen Oszillators²⁾ angewendet werden. Ist μ seine Masse, ω die Frequenz und q die Elongation, so lautet die Formel für die Energie

$$\epsilon = \frac{\mu}{2} (\dot{q}^2 + \omega^2 q^2).$$

Die Bewegung ist also durch die Formel gegeben

$$q = a \sin \omega (t - t_0)$$

¹⁾ Planck, Theorie der Wärmestrahlung, S. 23. Leipzig 1906.

¹⁾ Debye, Ann. d. Phys. (4) 33, 1427, 1910.

²⁾ Planck, Ann. d. Phys. (4) 50, 390, 1916.

und stellt somit eine einfach harmonische Schwingung dar. Die Amplitude a ist hier jene Integrationskonstante, welche der Quantentheorie zufolge nur bestimmte diskrete Werte annehmen kann. Diese werden durch den einfachen Ansatz bestimmt¹⁾

$$\int p dq = nh, \quad (17)$$

wobei die Integration über eine ganze Periode zu erstrecken ist. Man findet somit

$$\int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega}} p dq = \mu \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega}} \dot{q}^2 dt = \frac{\mu a^2 \omega}{2} \cdot 2\pi.$$

Die ausgezeichneten Zustände sind also durch die Gleichung

$$\frac{\mu a_n^2 \omega}{2} = n \frac{h}{2\pi}$$

definiert, worin n alle ganzzahligen Werte von Null bis Unendlich annehmen kann. Für die Energie des Oszillators hat man die einfache Formel

$$\varepsilon = \frac{\mu a^2 \omega^2}{2}.$$

Die den ausgezeichneten Zuständen zukommenden Energiewerte sind demnach

$$\varepsilon_n = \frac{\mu a_n^2 \omega^2}{2} = n \frac{h \omega}{2\pi}.$$

Da

$$\frac{\omega}{2\pi} = \nu$$

die Schwingungszahl des Oszillators ist, so hat man schließlich

$$\varepsilon_n = n h \nu. \quad (18)$$

Wir sind nunmehr in der Lage, sogleich die charakteristische Funktion pro Oszillator zu berechnen. Nach Formel (9) erhält man für $N=1$ zufolge (18)

$$\Psi = k \ln \sum e^{-n \frac{h \nu}{kT}}.$$

Wir gebrauchen vorübergehend die Bezeichnung

$$e^{-\frac{h \nu}{kT}} = \gamma$$

und es ist

$$\gamma < 1,$$

wie man sieht. Es läßt sich weiter schreiben

$$\Psi = k \ln \sum \gamma^n = k \ln \frac{1}{1 - \gamma}.$$

Die charakteristische Funktion des Oszillators ist also durch die einfache Formel gegeben

$$\Psi = -k \ln \left(1 - e^{-\frac{h \nu}{kT}} \right), \quad (19)$$

und daraus erhält man mittels der Formeln (10), (11) und (12) auch ohne weiters die Ausdrücke für Energie, Entropie und spezifische Wärme pro Oszillator. Wir wollen uns mit der Berechnung der Energie begnügen; dann hat man nach Gleichung (10) zu bilden

$$\frac{E}{T^2} = \frac{d\Psi}{dT} = \frac{\frac{h\nu}{T^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}}}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}}.$$

Daraus folgt die bekannte Formel¹⁾:

$$E = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (20)$$

für die Energie des Oszillators.

Beim Überspringen des Oszillators aus einem Zustande in den nächstbenachbarten Zustand wird gemäß (18) die Energiemenge

$$\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = h\nu$$

aufgenommen bzw. abgegeben. Dieser Energiebetrag erweist sich für den einfach-periodischen geradlinigen Oszillator als völlig unabhängig von der Ordnungszahl n ; er hat für irgend zwei benachbarte Zustände immer genau den gleichen Wert. Durch diese Eigenschaft ist der hier betrachtete Oszillator besonders ausgezeichnet.

Erfolgt der schrittweise Übergang des Oszillators nicht nur zwischen zwei Zuständen, deren Ordnungszahl bloß um eine Einheit verschieden ist, sondern allenfalls um i -Einheiten, so wird der Energiebetrag

$$\varepsilon_{n+i} - \varepsilon_n = i \cdot h\nu$$

aufgenommen bzw. abgegeben. Ein anderer solcher Oszillator von der Schwingungszahl ν' könnte analog die Energiebeträge

$$\varepsilon'_{n'+i'} - \varepsilon'_{n'} = i' \cdot h\nu'$$

abgeben bzw. aufnehmen. Die beiden Oszillatoren könnten miteinander in Energieaustausch treten, wenn gemäß (16) die Beziehung

$$i\nu = i'\nu'$$

erfüllt ist. Die Möglichkeit für den Energieaustausch wäre demnach immer für Oszillatoren gegeben, deren Schwingungszahlen in rationalem Verhältnis stehen. Erfahrungsgemäß treten aber einfach periodische Oszillatoren nur dann in Energieaustausch oder es findet, wie man sagt, Resonanz statt, wenn ihre Schwingungszahlen gleich sind. Daraus muß man schließen, daß die einfach periodischen Oszillatoren offenbar weiterhin auch dadurch ausgezeichnet sind, daß sie aus jedem ihrer ausgezeichneten Zustände nur in einen der beiden Nachbarzustände schritt-

¹⁾ Planck, Theorie der Wärmestrahlung, S. 157, Leipzig 1906.

¹⁾ Sommerfeld, Ann. d. Phys. (4) 51, 9, 1916.

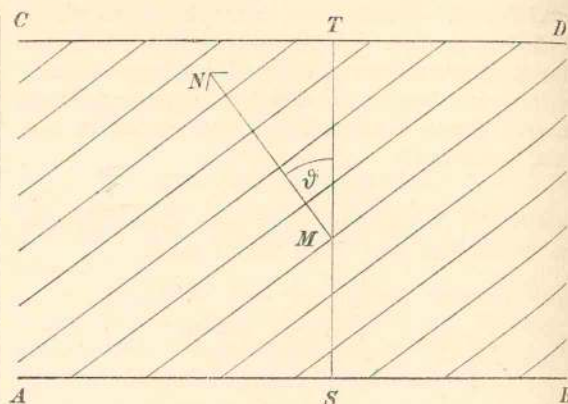
weise überzuspringen imstande sind. Die betrachteten Wahrscheinlichkeiten w sind hier wohl nur für Übergänge zwischen Nachbarzuständen von Null verschieden anzunehmen und offenbar unabhängig von der Ordnungszahl gleich einer Konstanten zu setzen, für Übergänge zwischen nicht benachbarten Zuständen dagegen muß w gleich Null sein. Unter dieser Voraussetzung kann der Oszillator von der Schwingungszahl r die Energie nur in Quanten von der Größe hr austauschen, der Oszillator von der Schwingungszahl r' nur in Quanten von der Größe hr' ; Energieaustausch zwischen beiden ist demnach nur für $r=r'$ möglich, wie es die Erfahrung verlangt. Bei anderen als rein periodischen Oszillatoren scheint aber der unmittelbare Übergang nicht bloß auf benachbarte Zustände beschränkt zu sein.

§ 4.

Die linearen einfach periodischen Oszillatoren haben große Bedeutung gewonnen bei Betrachtung des Energieinhaltes fester Körper. Die Gesamtenergie der Eigenschwingungen eines Körpers setzt sich als Summe aus den Energien der Einzelschwingungen zusammen, deren jede einzelne man einem linearen einfach periodischen Oszillator zuschreibt, der die Rolle eines getrennten Freiheitsgrades spielt. Dies ist die Grundlage der Theorie der spezifischen Wärme fester Körper, welche die Gesamtenergie als in den Eigenschwingungen aufgespeichert betrachtet. Jeder Eigenschwingung von der Schwingungszahl r kommt im thermodynamischen Gleichgewichtszustande der Energiebetrag (20) zu und die Summe dieser Ausdrücke für alle getrennten Eigenschwingungen ist nach der Theorie die Gesamtenergie des festen Körpers.

Da man die innere Energie eines festen Körpers als von seiner geometrischen Form unabhängig ansehen muß, zur Bestimmung der Eigenschwingungen aber das Ausgehen von einer bestimmten Gestalt erforderlich ist, geht man gewöhnlich von der hierfür am geeignetst erscheinenden Form aus. Rayleigh¹⁾ hat in dieser Hinsicht den Würfel eingeführt. Man hat demnach alle möglichen stehenden Wellen im Würfel abzuzählen.

In nebenstehender Figur ist ein Wellenzug gezeichnet, der zwischen zwei parallelen Wänden AB und CD verläuft. MN ist die Wellennormale, welche mit dem Perpendikel auf die Wände ST den Winkel ϑ einschließt. Soll dieser Wellenzug an der Ausbildung stehender Wellen beteiligt sein, so ist jedenfalls notwendig, daß an irgend zwei senkrecht gegenüberliegen-



den Stellen S und T der beiden Wände genau die gleiche oder gerade entgegengesetzte Phase herrscht. Nun schneiden aber zwei Wellenebenen, die eine halbe Wellenlänge λ voneinander entfernt sind, auf dem Perpendikel ST die Strecke

$$\frac{\lambda}{2 \cos \vartheta}$$

ab, wie ein Blick auf die Zeichnung sofort erkennen läßt. Bezeichnen wir die Distanz der Wände mit l , in der Zeichnung

$$\overline{ST} = l,$$

so ist notwendig

$$\frac{\lambda}{2 \cos \vartheta} = \frac{l}{n}, \quad (21)$$

worin n eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet. Zur Ausbildung der stehenden Welle ist ferner die Mitwirkung der reflektierten Welle und der entgegengesetzt laufenden Wellen erforderlich. Die Zahl der Wellenzüge eines Quadranten bezüglich des Winkels ϑ ,

$$0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2},$$

welche die obige Bedingungsgleichung (21) erfüllen, gibt bereits die Anzahl der möglichen stehenden Wellen.

Beim Würfel hat man drei Paare solcher paralleler Wände mit Abständen gleich der Würfelkante l . Sie stehen gegenseitig alle aufeinander senkrecht. Für jedes Paar gegenüberliegender Wände gilt dann die obige Relation (21), da auch die Reflexionen an den übrigen Wänden jeweils an dieser Bedingung nichts ändern. Die stehende Wellenbewegung im Würfel, welche in den drei zueinander senkrechten Kantenrichtungen eine Anzahl n_1 , n_2 und n_3 von Knoten oder Bäuchen aufweist, ist somit dem Wellenzuge zugeordnet, dessen Normale mit den drei Kantenrichtungen solche

1) Phil. Mag. (5) 49, 539, 1900.

Winkel ϑ_1 , ϑ_2 und ϑ_3 einschließt, welche den Formeln genügen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda}{2} n_1 &= l \cos \vartheta_1 \\ \frac{\lambda}{2} n_2 &= l \cos \vartheta_2 \\ \frac{\lambda}{2} n_3 &= l \cos \vartheta_3 \end{aligned} \right\} \quad (21')$$

Durch Quadrieren und Addieren dieser drei Gleichungen folgt für die ganzen Zahlen n_1 , n_2 und n_3 somit als notwendige Bedingung die Beziehung

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) = l^2,$$

welche nur von bestimmten Werten der Wellenlänge λ erfüllt ist. Mit Hilfe der Fortpflanzungsgeschwindigkeit v führen wir noch statt der Wellenlänge λ die Schwingungszahl r ein und erhalten

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \left(\frac{2l}{v} r\right)^2. \quad (22)$$

Die Abzählung der Anzahl von Schwingungen, welche in das Intervall r bis $r + dr$ hineinfällt, erfolgt weiter in der bekannten Weise¹⁾: Man denkt sich die Punkte $x=n_1$, $y=n_2$, $z=n_3$ für alle positiven ganzen Zahlen n_1 , n_2 und n_3 in ein rechtwinkliges Koordinatensystem eingezeichnet. Diese bilden ein kubisches Raumgitter, welches den einen Oktanten des Koordinatensystems erfüllt. Jeder Gitterpunkt bestimmt durch seinen Radiusvektor nach Gleichungssystem (21') zunächst einmal die Richtung eines ausgezeichneten Wellenzuges. Der Betrag R des Radiusvektors muß ferner nach (22) die Beziehung erfüllen

$$R = \frac{2l}{v} r$$

und bestimmt mithin die Schwingungszahl. Die Gitterpunkte mit den Radien

$$\frac{2l}{v} r < R < \frac{2l}{v} (r + dr) \quad (23)$$

entsprechen demnach allen Eigenschwingungen mit den Schwingungszahlen r bis $r + dr$. In einem kubischen Raumgitter von der betrachteten Art ist ferner die Zahl der Gitterpunkte gleich der Zahl der Elementarwürfel. Im vorliegenden Falle, wo der Elementarwürfel das Volumen 1 besitzt, ist die in einem genügend großen Volumen enthaltene Anzahl von Gitterpunkten somit gleich dem Betrage dieses Volumens. Der Rauminhalt des Kugelschalentanten, welcher durch die Ungleichung (23)

1) Rayleigh, Phil. Mag. (5) 49, 540, 1900.

definiert ist, liefert demnach die Zahl der Eigenschwingungen zwischen r und $r + dr$, für welche man somit erhält

$$\frac{1}{8} 4\pi \left(\frac{2l}{v} r\right)^2 \frac{2l}{v} dr = \frac{4\pi l^3}{v^3} r^2 dr.$$

Sie ist dem Volumen des Würfels l^3 einfach proportional; daher ist die Zahl der Schwingungen pro Volumseinheit

$$dZ = \frac{4\pi r^2 dr}{v^3} \quad (24)$$

von den Lineardimensionen des Ausgangskörpers ganz unabhängig. Wenn man die Eigenschwingungen eines Parallelepipedes statt eines Würfels betrachtet, wird der Gang der Rechnungen nur ganz unwesentlich modifiziert und für die Zahl der Schwingungen¹⁾ pro Volumseinheit erhält man wieder die Formel (24); man kann somit voraussetzen, daß die Zahl der Eigenschwingungen pro Volumseinheit für genügend große Werte von r auch von der Form des Körpers nicht abhängt, wie es vom Standpunkt der Theorie der spezifischen Wärme zu erwarten ist.

In einem isotropen festen Körper treten neben Longitudinalwellen von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit v_1 noch Transversalwellen mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit v_0 auf. Jede transversale Welle läßt sich außerdem in zwei getrennte senkrecht zueinander schwingende Wellenzüge zerlegen. Sowohl für die Longitudinalwellen als auch für beide Transversalwellen gilt die obige Abzählungsformel für sich. Die Gesamtzahl der Eigenschwingungen pro Volumseinheit eines isotropen festen Körpers ist somit durch die Formel²⁾

$$dZ = 4\pi \left(\frac{2}{v_0^3} + \frac{1}{v_1^3}\right) r^2 dr \quad (25)$$

gegeben. Dieser Ausdruck wurde zuerst von Debye³⁾ bei Aufstellung seiner Theorie der spezifischen Wärme entwickelt, und zwar durch strenge Behandlung des Problems der elastischen Eigenschwingungen einer Kugel. Die Zahl der Eigenschwingungen eines materiellen Körpers kann aber nicht größer sein als die Zahl der Freiheitsgrade seiner Atome, sondern kann höchstens vom gleichen Betrage sein. Ist N_0 die Anzahl der Atome pro Volumseinheit, so sind also bloß

1) Lorentz, Verh. d. Conseil Solvay 1911, Abh. d. Deutsch. Bunsen-Ges. f. angew. phys. Chemie Nr. 7, S. 12. Halle a. S. 1914; W. Wien, Vorl. üb. neuere Probleme d. theor. Physik, S. 13. Teubner 1913.

2) Eucken, Entwicklung der Quantentheorie vom Herbst 1911 bis zum Sommer 1913, Abh. d. Deutsch. Bunsen-Ges. f. angew. phys. Chemie Nr. 7, S. 377. Halle a. S. 1914.

3) Ann. d. Phys. (4) 39, 789, 1912.

$$Z = 3 N_0$$

Eigenschwingungen zu erwarten. Über r von 0 bis ∞ integriert, würde (25) aber eine unendliche Zahl von Eigenschwingungen liefern. Darum setzt Debye voraus, daß die Eigenschwingungen bei einer bestimmten oberen Grenze r_m aufhören, welche sich aus der Gleichung

$$3 N_0 = 4\pi \int_0^{r_m} \left(\frac{2}{v_0^3} + \frac{1}{v_1^3} \right) r^2 dr \quad (26)$$

berechnet. Für die Energiedichte des isotropen festen Körpers erhält man zufolge von (20)

$$\frac{E}{V} = 4\pi h \int_0^{r_m} \left(\frac{2}{v_0^3} + \frac{1}{v_1^3} \right) \frac{r^3 dr}{e^{\frac{hr}{kT}} - 1} \quad (27)$$

Debye vereinfacht die Formeln noch weiter, indem er von der Dispersion absieht, so daß auf der rechten Seite von (26) und (27) der Klammerausdruck als Konstante vor das Integralzeichen tritt. Für genügend niedrige Werte der absoluten Temperatur kann man weiter mit hinreichender Näherung

$$\frac{E}{V} = 4\pi h \left(\frac{2}{v_0^3} + \frac{1}{v_1^3} \right) \int_0^{r_m} \frac{r^3 dr}{e^{\frac{hr}{kT}} - 1}$$

setzen, da dann die e -Potenz im Nenner mit wachsendem r sehr rasch über alle Grenzen wächst, so daß das Integral von r_m bis ∞ keinen beträchtlichen Beitrag mehr liefert. Vermittels des bestimmten Integrals¹⁾

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

erhält man für den vereinfachten Ausdruck der Energiedichte schließlich

$$\frac{E}{V} = \frac{4\pi^5}{15} \left(\frac{2}{v_0^3} + \frac{1}{v_1^3} \right) \frac{k^4 T^4}{h^3} \quad (28)$$

Für Temperaturen, die hoch genug sind, daß man mit hinlänglicher Genauigkeit

$$\frac{1}{e^{\frac{hr}{kT}} - 1} = \frac{kT}{hr}$$

approximieren kann, liefern die Formeln (26) und (27) als anderen Grenzfall den Ausdruck

$$\frac{E}{V} = 3 N_0 k T,$$

also das Dulong- und Petitsche Gesetz. Tatsächlich wird durch die Ausdrücke Debyes der Temperaturverlauf der spezifischen Wärme für

1) Debye, Ann. d. Phys. (4) 39, 800, 1912.

viele Fälle mit guter Annäherung wiedergegeben. Bei strengerer Behandlung hat man das Schwingungsspektrum eines Punktgitters, welches ein fester Körper in seinem atomistischen Aufbau darstellt, der Rechnung zugrunde zu legen. Dies wird tatsächlich durchgeführt in der Theorie der spezifischen Wärme von Born und Kármán¹⁾, welche von Thirring²⁾ mit Erfolg weiter ausgebaut wurde.

§ 5.

Auf einen Fall lassen sich die Betrachtungen Debyes mit voller Strenge anwenden; es sind dies die elektromagnetischen Schwingungen des freien Äthers oder Vakuums. Longitudinalwellen gibt es im Äther (Vakuum) nicht, und man hat dort

$$\frac{1}{v_1^3} = 0$$

zu setzen. Die transversalen Wellen zeigen keine Dispersion im Äther (Vakuum), sondern pflanzen sich mit der universellen Lichtgeschwindigkeit

$$v_0 = c$$

fort. Der Klammerausdruck im Integranden reduziert sich somit; man erhält

$$\frac{2}{v_0^3} + \frac{1}{v_1^3} = \frac{2}{c^3} \quad (29)$$

und kann diesen Faktor als Konstante mit voller Strenge vor das Integralzeichen setzen. Für den Äther (Vakuum) als Kontinuum³⁾ gibt es keine solche Beschränkung der Zahl der Freiheitsgrade, wie es nach (26) für den festen Körper angenommen werden mußte, sondern die Integration im Ausdruck für die Energiedichte (27) ist immer bis ins Unendliche zu erstrecken, so daß Formel (28) strenge für jede Temperatur gültig ist. Man erhält auf diese Weise die Formel für die Dichte μ der Hohlraumstrahlung im Falle thermodynamischen Gleichgewichts durch bloßes Einsetzen des Ausdrucks (29) in Gleichung (28) zu

$$\mu = \frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3} T^4, \quad (30)$$

worin das Stefan-Boltzmannsche Gesetz enthalten ist. Für den Äther (Vakuum) ist die Zahl der Eigenschwingungen pro Volumeneinheit zwischen den Grenzen r und $r + dr$ gemäß (25) und (29)

$$dZ = \frac{8\pi r^2 dr}{c^3} \quad (31)$$

1) Diese Zeitschr. 13, 297, 1912; 14, 15, 1913.

2) Diese Zeitschr. 15, 127 u. 180, 1914.

3) Witte, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. 7, 212, 1910.

und die Energiedichte für die Schwingungen dieses Intervalls im thermodynamischen Gleichgewichtszustande demnach

$$\mu_r dr = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{r^3 dr}{e^{kr} - 1}, \quad (32)$$

der bekannte Ausdruck Plancks¹⁾ für die spektrale Energieverteilung der Hohlraumstrahlung. Die gute Übereinstimmung dieser Formel mit der Erfahrung²⁾ spricht schon sehr für die Richtigkeit der für den Äther (Vakuum) zu bildenden Vorstellung, wonach sein elektromagnetisches Verhalten einer Mannigfaltigkeit von einfach periodischen geradlinigen Oszillatoren zugeschrieben werden kann, deren Zahl pro Volumseinheit für eine Schwingungszahl zwischen r und $r + dr$ durch Formel (31) gegeben ist. Nunmehr hat noch außerdem vor kurzem Rubinowicz³⁾ zeigen können, daß dies sich auch mit voller Strenge auf Grund jener schärferen Fassung der Quantenhypothese beweisen läßt, die im Falle mehrerer Freiheitsgrade den Sommerfeldschen Quantenansatz für diejenigen kanonischen Variablen vorschreibt, welche die zugehörige Hamilton-Jacobische partielle Differentialgleichung durch Separation der Variablen zu integrieren gestattet⁴⁾.

Strahlungs-Emission und -Absorption kann zufolge der entwickelten Vorstellungen in nichts anderem bestehen, als dem Energieaustausch zwischen Materie und den einfach periodischen Oszillatoren des Äthers (Vakuums), die, wie alle rein periodischen Oszillatoren, die Energie nicht anders als in Quanten von der Größe hr abgeben oder aufnehmen können. Daraus folgt unmittelbar der bekannte Satz⁵⁾ der Strahlungstheorie: Strahlende Energie von der Schwingungszahl r kann von den ponderablen Körpern aufgenommen oder ausgestrahlt werden nur in Quanten von der Größe hr . Da die Materie im allgemeinen andere Oszillatoren enthält als rein periodische, ist sie ferner imstande, Strahlungsenergie einer Schwingungszahl durch Absorption und Wiederemission in solche anderer Schwingungszahl überzuführen.

Ein Element der Materie, welches Strahlung von der Schwingungszahl r aussendet und dabei seine Energie von ε_m auf ε_n vermindert, überträgt nach den entwickelten Vorstellungen die

abgegebene Energie einem linearen einfach periodischen Oszillator des Äthers (Vakuums) von der Schwingungszahl r . Es muß demnach zufolge (16) in Verknüpfung mit den für die idealen einfach periodischen Oszillatoren gefolgerten Eigenschaften die Beziehung bestehen

$$\varepsilon_m - \varepsilon_n = hr. \quad (33)$$

Dies ist aber nichts anderes als die bekannte „Bohrsche Frequenzbedingung“¹⁾, welche in der Theorie der Serienspektren sich so glänzend bewährt hat. Die in jüngster Zeit in Angriff genommenen Intensitätsfragen bei den Spektrallinien²⁾ dürften in engster Weise mit der betrachteten Wahrscheinlichkeit w von Zustandsänderungen in Zusammenhang stehen.

Die elektromagnetische Energie breitet sich im Äther (Vakuum) in ungedämpften Wellen fort. Angenähert ebenso verhalten sich noch die langsamen Schwingungen in der Materie, welche sich als elastische Wellen fortpflanzen. Aber die raschen Schwingungen, welche den maßgebenden Teil der Wärmeenergie des Körpers ausmachen, lassen von einer wellenartigen Ausbreitung im allgemeinen kaum mehr etwas erkennen. Man kann die Wärmeleitung durch Wellen von außerordentlich starker Absorption hervorgebracht sich vorstellen³⁾ oder genauer gesagt, die Wärmeenergie in Wellen von rasch wechselnder Richtung und wechselnder Schwingungszahl fortgepflanzt sich denken. Es ist naheliegend, anzunehmen, daß nur die ideal einfach periodischen Oszillatoren, wie sie im Äther (Vakuum) ausschließlich vorzustellen sind, die Energie in ungedämpften Wellen fortpflanzen. Je mehr die Oszillatoren aber vom rein periodischen Idealfall abweichen, desto weniger regelmäßig scheint sich der Energieaustausch zu gestalten, was in der Dämpfung der Wellen zum Ausdruck kommt. Vielleicht liefert die weitere Verfolgung dieser nur angedeuteten Gedanken den Weg zu einer quantentheoretischen Theorie der Energieausbreitung, wobei sich auch Betrachtungen über den Impuls nötig erweisen könnten, was von Einstein⁴⁾ bereits ganz allgemein für die Quantentheorie gefordert wurde.

§ 6.

Eine weitere Anwendung unserer allgemeinen Formeln soll sich auf die spezifische Wärme

1) Theorie der Wärmestrahlung, S. 157. Leipzig 1906.

2) Eucken, Entwicklung der Quantentheorie vom Herbst 1911 bis zum Sommer 1913. Abh. d. Deutsch. Bunsen-Ges. f. angew. physik. Chemie 7, 374. Halle a/S. 1914.

3) Diese Zeitschr. 18, 96, 1917.

4) Epstein, Ann. d. Phys. (4) 50, 489, 1916; Schwarzschild, Berl. Ber. S. 548, 1916.

5) Debye, Ann. d. Phys. (4) 33, 1430, 1910.

1) Sommerfeld, Ann. d. Phys. (4) 51, 14, 1916.

2) Sommerfeld, Münchner Ber. S. 83, 1917; Herzfeld, Ann. d. Phys. 51, 261, 1916 u. diese Zeitschr. 18, 389, 1917.

3) Vorträge über die kinetische Theorie der Materie und der Elektrizität, Debye S. 19, Sommerfeld S. 125, 1914.

4) Diese Zeitschr. 18, 121, 1917.

zweiatomiger Gase¹⁾ beziehen, und zwar wird es sich um den Beitrag $C_v^{(r)}$ zur spezifischen Wärme des Gases handeln, der von der Rotation der Moleküle herrührt und dessen Temperaturabhängigkeit durch Versuche von Eucken²⁾ für Wasserstoff in seinem ganzen Verlaufe experimentell gezeigt worden ist. Wenn man unter K das Trägheitsmoment des Moleküls um eine zur Verbindungslinie der beiden Atome senkrechte Achse versteht und mit ω die Winkelgeschwindigkeit der Rotation bezeichnet, so schreibt sich die Rotationsenergie allgemein

$$\varepsilon = \frac{K\omega^2}{2}.$$

Wieder hat man die ausgezeichneten Zustände nach Quantenansatz (17) zu bestimmen. Wie bei mehreren kreisenden Elektronen die Quantenbedingung jedem einzelnen Elektron³⁾ auferlegt werden muß, so hat dies konsequenterweise bei mehreren kreisenden Atomen ebenfalls für jedes einzelne der Atome⁴⁾ zu geschehen. Im vorliegenden Falle ist $\dot{q} = \omega$, somit zunächst allgemein bei einer Anzahl α gleicher Atome, welche im Moleküle kreisen, das Moment eines Atoms

$$p = \frac{1}{\alpha} K \omega.$$

Die Umdrehung erfolgt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit und die Koordinate $q = \varphi$, der Drehungswinkel, ist bei Integral (17) von 0 bis 2π zu erstrecken, so daß man die Bedingung

$$\frac{2\pi}{\alpha} K \omega = n h$$

erhält. Die Drehgeschwindigkeit kann somit nur die ausgezeichneten Werte

$$\omega_n = n \frac{\alpha h}{2\pi K}$$

annehmen, was für die Energie die zugehörigen Werte

$$\varepsilon_n = n^2 \frac{\alpha^2 h^2}{8\pi^2 K} \quad (34)$$

gibt.

Da die Rotation eines zweiatomigen Moleküls bezüglich einer zur Verbindungslinie der beiden Atome senkrechten Achse sich noch im allgemeinen in zwei Komponenten zerlegen läßt, welche als getrennte Freiheitsgrade betrachtet

werden können, so muß für N -Atome der Ausdruck (9) für die charakteristische Funktion im vorliegenden Falle verdoppelt werden, so daß die auf die gesamte Rotationsenergie bezügliche Formel lautet

$$\Psi = 2N k \ln \sum e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}.$$

Bei Einsetzen des Ausdruckes (34) empfiehlt es sich, mit Ehrenfest¹⁾ die Abkürzung

$$\sigma = \frac{\alpha^2 h^2}{8\pi^2 K k T} \quad (35)$$

einzuführen und die Bezeichnung

$$Q_{(\sigma)} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 \sigma}$$

zu verwenden. Die charakteristische Funktion schreibt sich dann

$$\Psi = 2N k \ln Q_{(\sigma)}$$

und für die in Betracht kommende spezifische Wärme läßt sich weiter gemäß Formel (12a) und unter Beachtung von (35)

$$C_v^{(r)} = \sigma^2 \frac{d^2 \Psi}{d\sigma^2} \quad (36)$$

folgern. Wie man die Berechnung von $Q_{(\sigma)}$ zufolge der Beziehung dieses Ausdrucks zu den Jacobischen Thetafunktionen praktisch am besten durchführt, wurde von Ehrenfest eingehend erörtert.

Bei Anschluß von $C_v^{(r)}$ an die Beobachtungen nach Formel (36) ist nur eine einzige Konstante verfügbar, nämlich die Größe

$$\sigma T = \frac{\alpha^2 h^2}{8\pi^2 K k} = \Theta.$$

Ehrenfest²⁾ findet, daß der Zahlenwert

$$\Theta = 570$$

für Wasserstoff die Messungen Euckens bei tiefen Temperaturen am besten darstellt. Man kann daraus das Trägheitsmoment K des Wasserstoffmoleküls nach der Formel

$$K = \frac{\alpha^2 h^2}{8\pi^2 k \Theta} \quad (37)$$

bestimmen. Mit den Werten³⁾

$$h = 6,545 \cdot 10^{-27}$$

$$k = 1,3723 \cdot 10^{-16}$$

erhält man für $\alpha = 2$ (zweiatomiges Molekül) die Zahl

$$K = 2,77 \cdot 10^{-41} \quad (37')$$

1) Ehrenfest, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 15, 451, 1913.

2) Berl. Ber. S. 141, 1912.

3) Bohr, Phil. Mag. (6) 26, 24, 1913; Debye, Münchner Ber. S. 3, 1915.

4) Epstein, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 18, 400, 1916.

1) Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 15, 455, 1913.

2) Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 15, 456, 1913.

3) Flamm, diese Zeitschr. 18, 515, 1917.

als Trägheitsmoment des Wasserstoffmoleküls. Ehrenfest rechnet unzulässigerweise mit $\alpha = 1$ und erhält darum nur den viermal so kleinen Wert $0,69 \cdot 10^{-41}$).

Andererseits kann man das Trägheitsmoment des Wasserstoffmoleküls aus dem Bohrschen Modell berechnen, welches sich in der Dispersionstheorie Debyes²⁾ so glänzend bewährt hat. Demnach ist im Wasserstoffmolekül³⁾ der Abstand jedes der beiden Atome vom gemeinsamen Schwerpunkt

$$b = \frac{1}{9 - \sqrt{3}} \frac{1}{m} \left(\frac{h}{\pi e} \right)^2,$$

wobei e und m Ladung und Masse eines Elektrons bedeuten. Bezeichnet man die Masse eines Wasserstoffkernes mit m_1 , so schreibt sich das Trägheitsmoment des Wasserstoffmoleküls

$$K = 2m_1 b^2$$

und seine Berechnung kann nach der Formel

$$K = \frac{1}{3(14 - 3\sqrt{3})} \frac{m_1 e^2}{m} \left(\frac{h}{\pi e} \right)^4 \quad (38)$$

durchgeführt werden. Wenn man für die neu hinzutretenden Konstanten⁴⁾ die Werte

$$\frac{m_1}{m} = 1845 \cdot 9$$

$$\frac{e}{m} = 5,304 \cdot 10^{17}$$

$$e = 4,774 \cdot 10^{-10}$$

wählt, so erhält man

$$K = 2,82 \cdot 10^{-41}.$$

Dieser Zahlenwert stimmt mit dem obigen (37') auf etwa 2 Proz. überein, so daß wir darin in den Genauigkeitsgrenzen der bei den tieferen Temperaturen gemessenen spezifischen Wärmen eine glänzende Bestätigung der Theorien zu erblicken haben. Man wird umgekehrt den Wert der für die betrachtete spezifische Wärme maßgebenden Konstanten Θ sicherer nach dem Bohrschen Molekülmodell berechnen, indem man die Gleichungen (37) und (38) nach dieser Größe auflöst. Es empfiehlt sich dabei, der Abkürzung halber die Rydbergsche Konstante⁵⁾

$$N_\infty = \frac{2\pi^2 m e^4}{ch^3}$$

und die Exponentialkonstante des Wien-Planckschen Strahlungsgesetzes

$$c_2 = \frac{ch}{k}$$

zu verwenden; man erhält dann

$$\Theta = \frac{3(14 - 3\sqrt{3})}{4} \frac{m}{m_1} c_2 N_\infty \quad (39)$$

als Formel für die gesuchte Größe. Da den neu eingeführten Konstanten die Werte¹⁾

$$N_\infty = 109737,11$$

$$c_2 = 1,4304$$

zukommen, rechnet man nach Formel (39)

$$\Theta = 561,5. \quad (39')$$

Diesen Wert hat man der von Ehrenfest rund mit 570 angenommenen Konstanten der Theorie gemäß zu erteilen. Es ist zu erwarten, daß bei den höheren Rotationsgeschwindigkeiten der Wasserstoffatome eine Deformation des Bohrschen Modells auftreten muß, welche eine Vermehrung des Trägheitsmoments zur Folge haben wird. Nur bei den tieferen Temperaturen wird man mit der Annahme eines konstanten Trägheitsmoments sein Auslangen finden können. Bei steigender Temperatur hat man Abweichungen der entwickelten Formel zu erwarten, wie sie auch tatsächlich beobachtet werden. Eine strengere Behandlung des ganzen Problems ist von Epstein²⁾ teilweise in Angriff genommen worden.

Zusammenfassung.

Alle bisherigen Ergebnisse der Quantentheorie in einheitlicher Weise mittels weniger, einfacher Grundvoraussetzungen zu entwickeln, war der Zweck der vorliegenden Zeilen. Wie in § 1 gezeigt wird, lassen sich die Grundformeln der Theorie der spezifischen Wärme aus der Vorstellung entwickeln, daß die Elemente jedes Körpersystems nur eine diskrete Zahl von Zuständen annehmen können, die untereinander gleich wahrscheinlich sind. In § 2 werden einfache Gesetzmäßigkeiten für den Energieaustausch entwickelt, auf Grund deren zwei Körper bei gleicher Temperatur sich in ihrem Gleichgewichte nicht stören. Im speziellen behandelt § 3 den Energieinhalt des einfach periodischen, geradlinigen Oszillators und zieht einen wichtigen Schluß über die Aufnahme und Abgabe der Energie in diesem besonderen Falle. Es folgt in § 4 die Entwicklung der Theorie der spezifischen Wärme fester Substanzen, wobei die Bestimmung der Eigenschwingungen auf eine besonders einfache und anschauliche Weise durchgeführt wird. In § 5 wird dargelegt, wie die Betrachtung des Äthers (Vakuums) als Kon-

1) Im Original hat sich außerdem ein Druckfehler in die Zehnerpotenz eingeschlichen. Weyssenhoff, Ann. d. Phys. (4) 51, 309, 1916.

2) Münchner Ber. 1, 1915.

3) Bohr, Phil. Mag. (6) 28, 863, 1913.

4) Flamm, l. c.

5) Flamm, l. c.

1) Flamm, l. c.

2) Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 18, 398, 1916.

tinuum mit idealen, einfach periodischen Eigenschwingungen alle Gesetze der Strahlung ohne weiteres ergibt; es folgt die Energieverteilung der Hohlraumstrahlung und die Bohrsche Frequenzbedingung mit einem Schlage und außerdem eröffnet diese Betrachtungsweise Ausblicke, die vielleicht weitere Erfolge versprechen. Der § 6

endlich befaßt sich mit dem Teil der spezifischen Wärme des Wasserstoffs, welche von der rotatorischen Energie der Moleküle herrührt und dessen Temperaturabhängigkeit sich ohne weiteres aus den Grundformeln ergibt.

Wien, Physikalisches Laboratorium der k. k. Technischen Hochschule.

(Eingegangen 8. Januar 1918.)

BESPRECHUNGEN.

V. Kohlschütter, Die Erscheinungsformen der Materie. Vorlesungen über Kolloidchemie. gr. 8°. 355 S. mit 4 Abbildungen. Leipzig, B. G. Teubner. 1917. M. 7.—, geb. M. 8.—

Der Titel ist in der vorliegenden Fassung nicht gerade glücklich gewählt, da die Kolloidchemie hier den Erscheinungsformen der Materie gewissermaßen gleichgesetzt ist. Auch ist das Eingehen auf die Theorien der allgemeinen physikalischen Chemie trotz der vom Verf. im Vorwort angeführten und sehr berechtigten didaktischen Gründe viel zu weit-schweifig, zumal das Buch, wenn auch allgemein-verständlich, doch für Angehörige verwandter Fachgruppen bestimmt sein soll. Im übrigen ist das Buch in gewisser Beziehung eine Bereicherung der kolloidchemischen Literatur, wenn es auch nichts wesentlich Neues bietet: Die bereits vorhandenen „Lehrbücher“ der Kolloidchemie bevorzugen mehr oder minder die Spezialgebiete des betreffenden Verfassers; Kohlschütters Darstellung dagegen — ein Lehrbuch ist es aber nicht und soll es auch nicht sein — betont besonders die ganz allgemeinen physikalisch-chemischen Grundlagen der Kolloidchemie. Recht geschickt sind einige Beispiele aus der angewandten Kolloidchemie verwertet. Daß Verf. die Einteilung der Kolloide in Suspensions- und Emulsionskolloide nach Höber — Wo. Ostwald statt z. B. der von Perrin in lyophobe und lyophile Kolloide (bei diesen wird von dem oft überhaupt nicht festzustellenden Aggregatzustand der dispersen Phase ganz abgesehen) übernimmt, ist nicht recht verständlich, zumal er selbst ihre Unzulänglichkeit betont, auf die Zsigmondy mehrfach eingehend mit Recht hingewiesen hat. Die spezielle Kolloidchemie wird in dem Buche überhaupt nicht behandelt.

R. Franz.

Felix Auerbach, Die Grundbegriffe der modernen Naturlehre. Einführung in die Physik. (Aus Natur und Geisteswelt, Band 40.) 4. Aufl. 146 S. mit 71 Figuren im Text. Leipzig, B. G. Teubner. 1917. Geh. M. 1.20, geb. M. 1.50.

Dieses kleine Buch kann man mit bestem Gewissen allen denen empfehlen, die neben ihrem „Interesse“ für Physik Fähigkeit und Willen haben beim Lesen etwas nachzudenken. Verf. versteht es meisterhaft, unter Vermeidung ermüdender definierender Einteilungen sofort das Wesen der Sache dem Leser klar und packend nahe zu bringen. Die Auswahl des Stoffes ist originell und auch dem Physiker wird die Lektüre Vergnügen bereiten.

H. Hörig.

Walther Deutsch, Metallphysik. Lex. 8°. VIII u. 76 S. mit 20 Abbildungen. Braunschweig, Friedr. Vieweg u. Sohn. 1916. Geb. M. 3.—

Die Schrift bezweckt, hauptsächlich Metalltechnikern einen Überblick über die physikalischen Eigenschaften der Metalle zu geben — in dieser Hinsicht mag sie einem zweifellos vorhandenen Bedürfnisse in gewissem Grade entsprechen. Bei dem Physiker dürfte die Arbeit wenig Anklang finden.

H. Hörig.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Berlin Dr. Erich Tiede und Dr. Karl W. Rosenmund für Chemie, an der Technischen Hochschule Zürich Schulrat Dr. Leopold Ruzicka für organische Chemie, speziell für Chemie der isozyklischen und heterozyklischen Verbindungen, sowie für die Theorien und Methoden der organischen Chemie.

Ernannt: Fräulein Dr. med. Lina Stern zum Professor für physiologische Chemie an der Universität Genf, der Observator am Geodätischen Institut bei Potsdam Dr. Gustav Förster zum Professor.

Vom Lehramt zurück: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Erlangen Geheimer Hofrat Dr. Max Noether.

Gestorben: Der ord. Professor der organischen und technischen Chemie an der Universität Bukarest Dr. Constantin I. Istrati, der ord. Professor für Gärungschemie und Photographie an der Böhmisches Technischen Hochschule in Prag Hofrat Dr. Karl Kruis, der ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität Rom Dr. Pietro Blaserna Senatore del regno, der frühere Privatdozent der Chemie an der Universität München Professor Dr. Otto Freiherr v. d. Pfordten in Straßburg.

Gesuche.

Physikerin

in Berlin promoviert, sucht wissenschaftliche Betätigung auf physikalischem oder physikalisch-chemischem Gebiet. Berlin bevorzugt. Angebote unter S. H. 514 an die Physikalische Zeitschrift, Leipzig, Königstraße 2.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 7.

1. April 1918.
Redaktionsschluß für No. 9 am 3. April 1918.

19. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

Cl. Schaefer, Eine einfache Herleitung der verallgemeinerten Lagrangeschen Gleichungen für nichtholonome Koordinaten. S. 129.
L. S. Ornstein u. F. Zernike, Die linearen Dimensionen der Dichteschwankungen. S. 134.

A. Smekal, Adiabatenhypothese und Boltzmannsches Prinzip. S. 137.
H. Witte, Über den Sehraum. S. 142.

Besprechungen:

A. Sommerfeld, Goethes Farbenlehre im Urteile der Zeit. S. 151.
J. A. Möllinger, Wirkungsweise

der Motorzähler und Meßwandler. S. 152.

A. Einstein, Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie. S. 152.

K. Schwarzschild, Über das System der Fixsterne. S. 152.

Personalien. S. 152.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Eine einfache Herleitung der verallgemeinerten Lagrangeschen Gleichungen für nichtholonome Koordinaten.

Von Clemens Schaefer.

§ 1.

Unter „wahren Koordinaten“ eines mechanischen Systems versteht man eine Anzahl von Größen, die geeignet sind, den augenblicklichen Zustand des Systems eindeutig zu definieren; wir wollen sie im folgenden mit q_k ($k = 1, 2, \dots, n$) bezeichnen, wenn n die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems ist; die Ableitungen derselben nach der Zeit, $\frac{dq_k}{dt}$, die allgemeinen Geschwindigkeiten bezeichnen wir durch $\dot{q}_k$; eine virtuelle Änderung einer Koordinate q_k durch δq_k , wie üblich. Es können dann lineare Differentialausdrücke mit den δq_k und gewissen Funktionen α_{kr} der q_k gebildet werden von der Form:

$$\delta \pi_r = \sum_k \alpha_{kr} \delta q_k \quad (k, r = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

und diese Ausdrücke können integrabel sein oder nicht. Im ersteren Falle müssen bekanntlich die Gleichungen bestehen:

$$\frac{\partial \alpha_{kr}}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial \alpha_{lr}}{\partial q_k} = 0, \quad (2)$$

und dann läßt sich aus (1) sofort π_r als Funktion der q_k gewinnen; in diesem Falle sind, wie die q_k , auch die Größen π_r wahre Koordinaten.

Sind dagegen die Integrabilitätsbedingungen (2) nicht erfüllt, so sind die Größen $\delta \pi_r$ unexakte Differentiale, und man nennt sie dann Differentiale von „nichtholonomen“ Koordinaten oder von „Quasikoordinaten“.

Es scheint die Physiker die Tatsache bisher wenig interessiert zu haben, daß für nichtholonome Koordinaten die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art der Dynamik nicht gelten, sondern man scheint die ganze Frage ziemlich

allgemein als physikalisch uninteressant betrachtet zu haben.

In Wirklichkeit jedoch gibt es einen Fall von fundamentaler Wichtigkeit, in dem der Unterschied zwischen holonomen und nichtholonomen Koordinaten von ausschlaggebender Bedeutung wird, nämlich bei der Ableitung der Eulerschen Gleichungen des starren Körpers, der in einem Punkte festgehalten wird, aus den Lagrangeschen. Und gerade auf diesem Beispiele beruht meine Überzeugung von der Notwendigkeit, diese ganze Frage auch in der Anfangsvorlesung der Mechanik zu erörtern. Deshalb mag manchem Fachgenossen eine etwas eingehendere Darstellung und eine einfache systematische Ableitung der für nichtholonome Koordinaten geltenden Gleichungen nicht unwillkommen sein, obwohl die folgenden Darlegungen natürlich nichts wesentlich Neues bieten können und wollen.

§ 2.

Wir wollen zunächst das erwähnte Beispiel des starren Körpers besprechen, der in einem Punkte festgehalten wird. Diesen machen wir zum Anfangspunkt O eines raumfesten Koordinatensystems xyz , und eines zweiten $\xi\eta\zeta$, das im Körper fest ist. Die Lage des starren Körpers kann dann durch Angabe der 9 Richtungskosinusse charakterisiert werden, zwischen denen aber 6 Relationen bestehen, die also, wie bekannt, nur drei unabhängigen Koordinaten äquivalent sind. Als solche wählt man seit alter Zeit die sog. Eulerschen Winkel, ϑ (Pendelungswinkel), φ (Präzessionswinkel), ψ (Eigendrehungswinkel)¹⁾, die also wahre Koordinaten sind. Eine infinitesimale Drehung des starren Körpers ist durch die drei Inkremente $\delta\vartheta, \delta\varphi, \delta\psi$ bestimmt. Andererseits kann sie charakterisiert werden durch die Komponenten $\delta\pi, \delta\chi, \delta\rho$ (nach

¹⁾ Wegen der Bezeichnungen vgl. meine Einführung in die theoretische Physik, Bd. I, S. 334 ff.

den Achsen ξ, η, ζ des bewegten Koord.-Systems) des infinitesimalen Drehungswinkels um die instantane Rotationsachse. Und diese Größen $\delta\pi, \delta\chi, \delta\varrho$ hängen bekanntlich mit den Eulerschen Winkeln folgendermaßen zusammen:¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \delta\pi &= \sin\psi \sin\vartheta \cdot \delta\varphi + \cos\psi \cdot \delta\vartheta + 0 \cdot \delta\psi \\ \delta\chi &= \cos\psi \sin\vartheta \cdot \delta\varphi - \sin\psi \cdot \delta\vartheta + 0 \cdot \delta\psi \\ \delta\varrho &= \cos\vartheta \cdot \delta\varphi + 0 \cdot \delta\vartheta + 1 \cdot \delta\psi \end{aligned} \right\} (3)$$

Das sind unexakte Differentiale, also sind die Größen $\delta\pi, \delta\chi, \delta\varrho$ als Differentiale nichtholonomer Koordinaten zu bezeichnen.

Werden die Gleichungen (3) auf beiden Seiten durch das Zeitelement δt , in dem wir die betrachtete Verrückung des starren Körpers vor sich gehend denken können, dividiert, und geht man zur Grenze $\delta t = 0$ über, so treten

rechts die Größen $\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \frac{d\vartheta}{dt} = \dot{\vartheta}, \frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}$

auf, d. h. die Ableitungen der Größen φ, ϑ, ψ nach der Zeit, die demgemäß durch darübergesetzte Punkte bezeichnet werden. Auf der linken Seite würde die analoge Schreibweise,

z. B. $\frac{d\pi}{dt} = \dot{\pi}$ mißverständlich sein, weil sie die

Auffassung nahelegen könnte, daß diese Größen zeitliche Ableitungen von Funktionen π, χ, ϱ wären, was ja nur der Fall sein könnte, wenn die Gleichungen (3) integrabel, π, χ, ϱ also wahre Koordinaten wären. Ich schlage deshalb dafür die Bezeichnung $\dot{\pi}, \dot{\chi}, \dot{\varrho}$ vor, die ich im folgenden anwenden werde. Wir haben also:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\pi} &= \sin\psi \sin\vartheta \dot{\varphi} + \cos\psi \dot{\vartheta} + 0 \cdot \dot{\psi} \\ \dot{\chi} &= \cos\psi \sin\vartheta \dot{\varphi} - \sin\psi \dot{\vartheta} + 0 \cdot \dot{\psi} \\ \dot{\varrho} &= \cos\vartheta \dot{\varphi} + 0 \cdot \dot{\vartheta} + 1 \cdot \dot{\psi} \end{aligned} \right\} (4)$$

Die kinetische Energie L unseres starren Körpers läßt sich in bekannter Weise durch die drei Hauptträgheitsmomente A, B, C und die $\dot{\pi}, \dot{\chi}, \dot{\varrho}$, die „Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit nach den bewegten Achsen“ ausdrücken:

$$2L = A\dot{\pi}^2 + B\dot{\chi}^2 + C\dot{\varrho}^2. \quad (5)$$

Nehmen wir der Einfachheit halber den Körper als kräftefrei an, so wird die potentielle Energie $\Phi = 0$, und wenn wir jetzt unbedenklich die Lagrangeschen Gleichungen anwenden, so haben wir hier:

$$\frac{dL}{d\pi_r} - \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{\pi}_r} = 0,$$

wenn wir mit $\delta\pi_r$ eine der drei Größen $\delta\pi, \delta\chi, \delta\varrho$ bezeichnen.

Das liefert aber hier, da L nur von den Größen $\dot{\pi}_r$ abhängt:

1) Z. B. Schaefer, a. a. O. S. 338.

$$\left. \begin{aligned} A \frac{d\dot{\pi}}{dt} &= 0 \\ B \frac{d\dot{\chi}}{dt} &= 0 \\ C \frac{d\dot{\varrho}}{dt} &= 0, \end{aligned} \right\} (6)$$

im Widerspruch zu den Eulerschen Gleichungen für den kräftefreien Körper:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{d\dot{\pi}}{dt} + (C-B)\dot{\chi}\dot{\varrho} &= 0 \\ B \frac{d\dot{\chi}}{dt} + (A-C)\dot{\varrho}\dot{\pi} &= 0 \\ C \frac{d\dot{\varrho}}{dt} + (B-A)\dot{\pi}\dot{\chi} &= 0. \end{aligned} \right\} (7)$$

Die schon von Lagrange erkannte Unmöglichkeit, die Eulerschen Gleichungen (7) mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen aus dem Ausdruck (5) der kinetischen Energie herzuleiten, ist so eklatant, daß sie regelmäßig den intelligenteren Studenten aufzufallen pflegt, auch ohne daß sie darauf aufmerksam gemacht werden.

Um so merkwürdiger ist es, daß die Aufstellung der verallgemeinerten Lagrangeschen Gleichungen, die auch für nichtholonome Koordinaten gelten, einerseits so spät erfolgt ist — Boltzmann¹⁾ 1902 —, andererseits, daß nicht etwa das obige Beispiel Boltzmann dazu geführt hat, sondern ein ziemlich komplizierter Fall von zyklischer Bewegung. Auch in dem bekannten Buche von Klein und Sommerfeld über den Kreisel findet sich zwar ein besonderer Paragraph über das Verhältnis der Eulerschen Gleichungen zu den Lagrangeschen, aber es wird kein Versuch gemacht, die allgemeinen Gleichungen zu gewinnen. Von allen mir bekannten Lehrbüchern in deutscher Sprache geht nur dasjenige von Boltzmann (Die Prinzipien der Mechanik S. 104 ff.), von den englischen nur das von Whittaker auf unsern Gegenstand ein²⁾.

Nun hat aber Kirchhoff in seiner Mechanik³⁾ die Eulerschen Gleichungen aus (5) abgeleitet, zwar ohne den Begriff der nichtholonomen Koordinaten einzuführen und ohne auch nur zu erwähnen, daß hier eine Schwierigkeit vorliegt. Darauf machte mich Herr A. Kneser aufmerksam, als ich mit ihm diese Frage besprach. Es muß also möglich sein, aus der Kirchhoffschen Deduktion die gewünschte Ver-

1) L. Boltzmann, Ges. Abhandl., Bd. 3, S. 682.

2) Eine gute Darstellung findet sich noch in der math. Enzyklopädie, Bd. IV (Mechanik), Art. 6 (P. Stäckel) S. 589; hervorgehoben von der Literatur sei noch die Arbeit von G. Hamel, Zeitschr. f. Math. u. Physik 50, 1, 1904. (Anmerkung bei der Korrektur.)

3) G. Kirchhoffs Vorl. über Mechanik, 4. Aufl., S. 56 ff.

den Achsen ξ, η, ζ des bewegten Koord.-Systems) des infinitesimalen Drehungswinkels um die instantane Rotationsachse. Und diese Größen $\delta\pi, \delta\chi, \delta\varrho$ hängen bekanntlich mit den Eulerschen Winkeln folgendermaßen zusammen:¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \delta\pi &= \sin\psi \sin\vartheta \cdot \delta\varphi + \cos\psi \cdot \delta\vartheta + 0 \cdot \delta\psi \\ \delta\chi &= \cos\psi \sin\vartheta \cdot \delta\varphi - \sin\psi \cdot \delta\vartheta + 0 \cdot \delta\psi \\ \delta\varrho &= \cos\vartheta \cdot \delta\varphi + 0 \cdot \delta\vartheta + 1 \cdot \delta\psi \end{aligned} \right\} (3)$$

Das sind unexakte Differentiale, also sind die Größen $\delta\pi, \delta\chi, \delta\varrho$ als Differentiale nichtholonomer Koordinaten zu bezeichnen.

Werden die Gleichungen (3) auf beiden Seiten durch das Zeitelement δt , in dem wir die betrachtete Verrückung des starren Körpers vor sich gehend denken können, dividiert, und geht man zur Grenze $\delta t = 0$ über, so treten

rechts die Größen $\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \frac{d\vartheta}{dt} = \dot{\vartheta}, \frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}$

auf, d. h. die Ableitungen der Größen φ, ϑ, ψ nach der Zeit, die demgemäß durch darübergesetzte Punkte bezeichnet werden. Auf der linken Seite würde die analoge Schreibweise,

z. B. $\frac{d\pi}{dt} = \dot{\pi}$ mißverständlich sein, weil sie die

Auffassung nahelegen könnte, daß diese Größen zeitliche Ableitungen von Funktionen π, χ, ϱ wären, was ja nur der Fall sein könnte, wenn die Gleichungen (3) integrabel, π, χ, ϱ also wahre Koordinaten wären. Ich schlage deshalb dafür die Bezeichnung $\dot{\pi}, \dot{\chi}, \dot{\varrho}$ vor, die ich im folgenden anwenden werde. Wir haben also:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\pi} &= \sin\psi \sin\vartheta \dot{\varphi} + \cos\psi \dot{\vartheta} + 0 \cdot \dot{\psi} \\ \dot{\chi} &= \cos\psi \sin\vartheta \dot{\varphi} - \sin\psi \dot{\vartheta} + 0 \cdot \dot{\psi} \\ \dot{\varrho} &= \cos\vartheta \dot{\varphi} + 0 \cdot \dot{\vartheta} + 1 \cdot \dot{\psi} \end{aligned} \right\} (4)$$

Die kinetische Energie L unseres starren Körpers läßt sich in bekannter Weise durch die drei Hauptträgheitsmomente A, B, C und die $\dot{\pi}, \dot{\chi}, \dot{\varrho}$, die „Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit nach den bewegten Achsen“ ausdrücken:

$$2L = A\dot{\pi}^2 + B\dot{\chi}^2 + C\dot{\varrho}^2. \quad (5)$$

Nehmen wir der Einfachheit halber den Körper als kräftefrei an, so wird die potentielle Energie $\Phi = 0$, und wenn wir jetzt unbedenklich die Lagrangeschen Gleichungen anwenden, so haben wir hier:

$$\frac{dL}{d\pi_r} - \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{\pi}_r} = 0,$$

wenn wir mit $\delta\pi_r$ eine der drei Größen $\delta\pi, \delta\chi, \delta\varrho$ bezeichnen.

Das liefert aber hier, da L nur von den Größen $\dot{\pi}_r$ abhängt:

1) Z. B. Schaefer, a. a. O. S. 338.

$$\left. \begin{aligned} A \frac{d\dot{\pi}}{dt} &= 0 \\ B \frac{d\dot{\chi}}{dt} &= 0 \\ C \frac{d\dot{\varrho}}{dt} &= 0, \end{aligned} \right\} (6)$$

im Widerspruch zu den Eulerschen Gleichungen für den kräftefreien Körper:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{d\dot{\pi}}{dt} + (C-B) \dot{\chi} \dot{\varrho} &= 0 \\ B \frac{d\dot{\chi}}{dt} + (A-C) \dot{\varrho} \dot{\pi} &= 0 \\ C \frac{d\dot{\varrho}}{dt} + (B-A) \dot{\pi} \dot{\chi} &= 0. \end{aligned} \right\} (7)$$

Die schon von Lagrange erkannte Unmöglichkeit, die Eulerschen Gleichungen (7) mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen aus dem Ausdruck (5) der kinetischen Energie herzuleiten, ist so eklatant, daß sie regelmäßig den intelligenteren Studenten aufzufallen pflegt, auch ohne daß sie darauf aufmerksam gemacht werden.

Um so merkwürdiger ist es, daß die Aufstellung der verallgemeinerten Lagrangeschen Gleichungen, die auch für nichtholonome Koordinaten gelten, einerseits so spät erfolgt ist — Boltzmann¹⁾ 1902 —, andererseits, daß nicht etwa das obige Beispiel Boltzmann dazu geführt hat, sondern ein ziemlich komplizierter Fall von zyklischer Bewegung. Auch in dem bekannten Buche von Klein und Sommerfeld über den Kreisel findet sich zwar ein besonderer Paragraph über das Verhältnis der Eulerschen Gleichungen zu den Lagrangeschen, aber es wird kein Versuch gemacht, die allgemeinen Gleichungen zu gewinnen. Von allen mir bekannten Lehrbüchern in deutscher Sprache geht nur dasjenige von Boltzmann (Die Prinzipien der Mechanik S. 104 ff.), von den englischen nur das von Whittaker auf unsern Gegenstand ein²⁾.

Nun hat aber Kirchhoff in seiner Mechanik³⁾ die Eulerschen Gleichungen aus (5) abgeleitet, zwar ohne den Begriff der nichtholonomen Koordinaten einzuführen und ohne auch nur zu erwähnen, daß hier eine Schwierigkeit vorliegt. Darauf machte mich Herr A. Kneser aufmerksam, als ich mit ihm diese Frage besprach. Es muß also möglich sein, aus der Kirchhoffschen Deduktion die gewünschte Ver-

1) L. Boltzmann, Ges. Abhandl., Bd. 3, S. 682.

2) Eine gute Darstellung findet sich noch in der math. Enzyklopädie, Bd. IV (Mechanik), Art. 6 (P. Stäckel) S. 589; hervorgehoben von der Literatur sei noch die Arbeit von G. Hamel, Zeitschr. f. Math. u. Physik 50, 1, 1904. (Anmerkung bei der Korrektur.)

3) G. Kirchhoffs Vorl. über Mechanik, 4. Aufl., S. 56 ff.

allgemeinerung zu gewinnen. Das ist in der Tat ein einfacher Weg, um zum Ziele zu gelangen, wie ich im folgenden auseinandersetzen will. Eine gleichfalls sehr einfache Herleitung findet sich in dem eben genannten Buche von Whittaker¹⁾, an dessen Bezeichnungsweise und Darstellung ich mich anlehne, indem ich sie nur mit der Kirchhoffschen verbinde.

§ 3.

Kirchhoff geht vom Hamiltonschen Prinzip aus, das wir schreiben:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta L + \sum Q_k \delta q_k) dt = 0. \quad (8)$$

Die kinetische Energie wird dabei als Funktion der wahren, voneinander unabhängigen Koordinaten q_k und der Geschwindigkeiten $\dot{q}_k$ betrachtet; Q_k ist die verallgemeinerte Kraftkomponente, die q_k zu verändern bestrebt ist. Also folgt in bekannter Weise:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \left[\sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + Q_k \right) \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d \delta q_k}{dt} \right] = 0, \quad (9)$$

($k = 1, 2, \dots, n$)

wobei $\delta \dot{q}_k = \frac{d \delta q_k}{dt}$ gesetzt werden darf, da beim Hamiltonschen Prinzip die Zeit nicht mit variiert wird.

Jetzt führen wir n gleichfalls unabhängige lineare Aggregate $\delta \pi_r$ ein durch folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \delta \pi_r &= \sum_k \alpha_{kr} \delta q_k, \\ \dot{\pi}_r &= \sum_k \alpha_{kr} \dot{q}_k, \end{aligned} \right\} \quad (r, k = 1, 2, \dots, n), \quad (10)$$

welche nach den q_k bzw. den $\dot{q}_k$ aufgelöst lauten:

$$\left. \begin{aligned} \delta q_k &= \sum_r \beta_{rk} \delta \pi_r, \\ \dot{q}_k &= \sum_r \beta_{rk} \dot{\pi}_r; \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

die β_{rk} sind leicht zu berechnende Ausdrücke.

Jetzt setzen wir δq_k aus der ersten Gleichung (11), und ebenso $\frac{d \delta q_k}{dt}$, das durch Differentiation derselben Gleichung erhalten wird, in die Kirchhoffsche Gleichung (9) ein und erhalten:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \left[\sum_r \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + Q_k \right) \beta_{rk} \delta \pi_r + \sum_r \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} (\beta_{rk} \delta \pi_r) \right] = 0,$$

was ausgerechnet ergibt:

1) Whittaker, Analytical Dynamics, S. 41 ff.

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \left[\sum_r \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + Q_k \right) \beta_{rk} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d \beta_{rk}}{dt} \right] \delta \pi_r + \sum_r \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \beta_{rk} \frac{d \delta \pi_r}{dt} = 0.$$

Setzen wir mit Kirchhoff (es ist dies eine etwas verschleierte partielle Integration):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \beta_{rk} \frac{d \delta \pi_r}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \beta_{rk} \delta \pi_r \right] - \delta \pi_r \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \beta_{rk} \right),$$

so folgt aus der letzten Gleichung:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \left[\sum_r \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + Q_k \right) \beta_{rk} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d \beta_{rk}}{dt} \right] \delta \pi_r + \sum_r \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \beta_{rk} \delta \pi_r = 0,$$

und da an den Grenzen des Hamiltonschen Integrals für t_0 und t_1 die Variationen $\delta \pi_r$ verschwinden, annulliert sich das letzte, aus dem Integral herausgetretene Glied, so daß übrig bleibt:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \sum_r \sum_k \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + Q_k \right) \beta_{rk} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d \beta_{rk}}{dt} \right] \delta \pi_r = 0,$$

und daraus folgt in bekannter Weise:

$$\sum_k \beta_{rk} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + Q_k - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right) \right] = 0, \quad (12)$$

eine Gleichung, die implizite das gesuchte Resultat schon enthält. Man hat jetzt nur noch nötig, die Ableitungen nach q_k und $\dot{q}_k$ durch solche nach π_r und $\dot{\pi}_r$, sowie die Kräfte Q_k durch den neuen Koordinaten entsprechende Π_r zu ersetzen. Dabei schließen wir uns von jetzt ab im wesentlichen an Whittakers Ableitung an.

Zunächst hat der Ausdruck $\sum_k Q_k \beta_{rk}$ eine einfache Bedeutung, die man am besten erkennt, wenn man die Arbeit δA auf doppelte Weise darstellt;

$$\delta A = \sum_k Q_k \delta q_k = \sum_r \Pi_r \delta \pi_r. \quad (13)$$

Dabei bedeutet Π_r die verallgemeinerte Kraftkomponente, die die Verrückung $\delta \pi_r$ hervorbringt, während alle andern $\delta \pi$ gleich Null bleiben. Aus (13) folgt unter Berücksichtigung der ersten Gl. (11):

$$\sum_r \sum_k Q_k \beta_{rk} \delta \pi_r = \sum_r \left(\sum_k Q_k \beta_{rk} \right) \delta \pi_r,$$

also schließlich:

$$\sum_k Q_k \beta_{rk} = \Pi_r.$$

Damit geht (12) über in:

$$\sum_k \beta_{rk} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \sum_k \beta_{rk} \frac{\partial L}{\partial q_k} = \Pi_r, \quad (14)$$

womit die rechte Seite schon die endgültige Form angenommen hat. In $L(q_k, \dot{q}_k)$ ersetzen wir nun die Geschwindigkeiten $\dot{q}_k$ durch ihren Ausdruck gemäß der zweiten Gleichung (11), wodurch L in L' übergehen möge. Wir haben also:

$$L(q_k, \dot{q}_k) = L'(q_k, \pi_r). \quad (15)$$

Daraus folgt sofort, da L' die $\dot{q}_k$ nur vermittle der π_r enthält:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_\sigma \frac{\partial L'}{\partial \pi_\sigma} \frac{\partial \pi_\sigma}{\partial \dot{q}_k}$$

und das ist nach der zweiten Gleichung (10):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_\sigma \frac{\partial L'}{\partial \pi_\sigma} \alpha_{k\sigma}.$$

Diesen Ausdruck haben wir gemäß (14) nach t zu differenzieren; es folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_\sigma \frac{\partial L'}{\partial \pi_\sigma} \alpha_{k\sigma} \right\} = \sum_\sigma \alpha_{k\sigma} \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \pi_\sigma} \\ &\quad + \sum_\sigma \frac{\partial L'}{\partial \pi_\sigma} \frac{d \alpha_{k\sigma}}{dt}, \end{aligned}$$

und da die $\alpha_{k\sigma}$ von der Zeit nur insofern abhängen, als sie Funktionen von den q_k sind,

haben wir weiter, da $\frac{d \alpha_{k\sigma}}{dt} = \sum_\lambda \frac{\partial \alpha_{k\sigma}}{\partial q_\lambda} \dot{q}_\lambda$ ist:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \sum_\sigma \alpha_{k\sigma} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \pi_\sigma} \right) + \sum_\sigma \sum_\lambda \frac{\partial L'}{\partial \pi_\sigma} \frac{\partial \alpha_{k\sigma}}{\partial q_\lambda} \dot{q}_\lambda.$$

Damit wird (14):

$$\begin{aligned} \sum_k \sum_\sigma \beta_{rk} \alpha_{k\sigma} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \pi_\sigma} \right) + \sum_k \sum_\sigma \sum_\lambda \beta_{rk} \frac{\partial L'}{\partial \pi_\sigma} \frac{\partial \alpha_{k\sigma}}{\partial q_\lambda} \dot{q}_\lambda \\ - \sum_k \beta_{rk} \frac{\partial L}{\partial q_k} = \Pi_r. \end{aligned} \quad (16)$$

Nach bekannten Determinantensätzen ist nun $\sum_k \beta_{rk} \alpha_{k\sigma} = 0$, wenn $\sigma \neq r$, und $= 1$, wenn $\sigma = r$.

Also wird (16) einfacher:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \pi_r} \right) + \sum_k \sum_\sigma \sum_\lambda \beta_{rk} \frac{\partial L'}{\partial \pi_\sigma} \frac{\partial \alpha_{k\sigma}}{\partial q_\lambda} \dot{q}_\lambda \\ - \sum_k \beta_{rk} \frac{\partial L}{\partial q_k} = \Pi_r. \end{aligned} \quad (17)$$

In dieser Gleichung hat auch das erste Glied links bereits die gewünschte Form angenommen. Wenn wir schließlich unter Berücksichtigung

von (15) $\frac{\partial L}{\partial q_k}$ bilden, so ist zu beachten, daß L' die die q_k an zwei Stellen enthält, erstens an den Stellen, wo sie auch in L vorkommen, zweitens aber vermöge der π_r , die nach der zweiten Gleichung (10) Funktionen von α_{kr} , also von den q_k sind. Wir haben also:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_k} &= \frac{\partial L'}{\partial q_k} + \sum_\mu \frac{\partial L'}{\partial \pi_\mu} \frac{\partial \pi_\mu}{\partial q_k} = \frac{\partial L'}{\partial q_k} + \sum_\mu \frac{\partial L'}{\partial \pi_\mu} \frac{\partial \alpha_{l\mu}}{\partial q_k} \dot{q}_l \\ &= \frac{\partial L'}{\partial q_k} + \sum_\mu \sum_l \frac{\partial L'}{\partial \pi_\mu} \frac{\partial \alpha_{l\mu}}{\partial q_k} \dot{q}_l. \end{aligned} \quad (18)$$

Eingesetzt in (17) liefert das:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \pi_r} \right) - \sum_k \beta_{rk} \frac{\partial L'}{\partial q_k} &= \sum_k \sum_\sigma \sum_\lambda \beta_{rk} \frac{\partial L'}{\partial \pi_\sigma} \frac{\partial \alpha_{k\sigma}}{\partial q_\lambda} \dot{q}_\lambda \\ &\quad - \sum_k \sum_\mu \sum_l \beta_{rk} \frac{\partial L'}{\partial \pi_\mu} \frac{\partial \alpha_{l\mu}}{\partial q_k} \dot{q}_l = \Pi_r. \end{aligned} \quad (19)$$

Nun ist unter Berücksichtigung der ersten Gleichung (11):

$$\frac{\partial L'}{\partial \pi_r} = \sum_k \frac{\partial L'}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \pi_r} = \sum_k \frac{\partial L'}{\partial q_k} \beta_{rk};$$

also kann (19) geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \pi_r} \right) - \frac{\partial L'}{\partial \pi_r} + \sum_k \sum_\sigma \sum_\lambda \beta_{rk} \frac{\partial L'}{\partial \pi_\sigma} \frac{\partial \alpha_{k\sigma}}{\partial q_\lambda} \dot{q}_\lambda \\ - \sum_k \sum_\mu \sum_l \beta_{rk} \frac{\partial L'}{\partial \pi_\mu} \frac{\partial \alpha_{l\mu}}{\partial q_k} \dot{q}_l = \Pi_r, \end{aligned} \quad (20)$$

worin nunmehr auch das zweite Glied die vorgeschriebene Form hat; gleichzeitig erkennt man, daß das Auftreten des dritten und vierten Gliedes die Abweichung von den gewöhnlichen Lagrangeschen Gleichungen bedingt. Um den Zusammenhang mit den Integrabilitätsbedingungen (2) in Evidenz zu setzen, kann man, was natürlich stets gestattet ist, die Bezeichnung der Summationsbuchstaben im vierten Gliede so wählen, daß sie mit denen des dritten übereinstimmen, d. h., wir können im vierten Gliede den Buchstaben μ durch σ , den Buchstaben l durch λ ersetzen und finden dann durch geeignete Zusammenfassung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \pi_r} \right) - \frac{\partial L'}{\partial \pi_r} \\ + \sum_k \sum_\sigma \sum_\lambda \beta_{rk} \frac{\partial L'}{\partial \pi_\sigma} \left(\frac{\partial \alpha_{k\sigma}}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial \alpha_{\lambda\sigma}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_\lambda = \Pi_r, \end{aligned}$$

oder endlich, wenn wir nach (11) $\dot{q}_\lambda$ durch $\sum_q \beta_{q\lambda} \pi_q$ ersetzen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \pi_r} \right) - \frac{\partial L'}{\partial \pi_r} \\ + \sum_k \sum_\sigma \sum_\lambda \sum_q \beta_{rk} \beta_{q\lambda} \pi_q \frac{\partial L'}{\partial \pi_\sigma} \left(\frac{\partial \alpha_{k\sigma}}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial \alpha_{\lambda\sigma}}{\partial q_k} \right) = \Pi_r, \end{aligned} \quad (21)$$

die das gewünschte Resultat darstellt: Sind die durch (11) definierten $\delta \pi_r$ Differentiale wahrer Koordinaten, so sind die Integrabilitätsbedingungen (2) erfüllt, und (21) reduziert sich auf die gewöhnliche Lagrangesche Gleichung. Sind dagegen die $\delta \pi_r$ Differentiale nichtholonome Koordinaten, so gibt das dritte Glied der linken Seite von (21) die dann notwendige Korrektur der Lagrangeschen Gleichungen an.

§ 4.

Wenden wir zum Schlusse die Gl. (21) auf das eingangs erwähnte Problem des kräftefreien Kreisels an, wobei wir den Ausdruck (5) für die kinetische Energie zugrunde legen wollen, der jetzt mit L' zu bezeichnen ist, da er als Funktion der π_r dargestellt ist.

Wir haben dann die vierfache Summe

$$\sum_{k \sigma} \sum_{\lambda} \sum_{\rho} \beta_{rk} \beta_{\rho\lambda} \pi_{\rho} \left(\frac{\partial \alpha_{k\sigma}}{\partial q_{\lambda}} - \frac{\partial \alpha_{\lambda\sigma}}{\partial q_k} \right) \text{ zu berechnen.}$$

Dabei hängt der Ausdruck

$$\sum_{k \lambda} \sum_{\rho} \beta_{rk} \beta_{\rho\lambda} \left(\frac{\partial \alpha_{k\sigma}}{\partial q_{\lambda}} - \frac{\partial \alpha_{\lambda\sigma}}{\partial q_k} \right) = \gamma_{r\rho\sigma}$$

nur von dem Zusammenhange zwischen den δq_k und den $\delta \pi_r$ ab; er ist mit den drei Indizes bezeichnet, die in ihm nicht als Summationsbuchstaben auftreten. Alle Indizes laufen von 1 bis 3. Es gibt also je 9 Koeffizienten α_{kr} und β_{rk} , und 27 Koeffizienten $\gamma_{r\rho\sigma}$. Man findet leicht aus Gl. (3):

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= \sin \psi \sin \vartheta, \alpha_{21} = \cos \psi, \alpha_{31} = 0, \\ \alpha_{12} &= \cos \psi \sin \vartheta, \alpha_{22} = -\sin \psi, \alpha_{32} = 0, \\ \alpha_{13} &= \cos \vartheta, \alpha_{23} = 0, \alpha_{33} = 1, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

sowie:

$$\left. \begin{aligned} \beta_{11} &= \frac{\sin \psi}{\sin \vartheta}, \quad \beta_{21} = \frac{\cos \psi}{\sin \vartheta}, \quad \beta_{31} = 0, \\ \beta_{12} &= \cos \psi, \quad \beta_{22} = -\sin \psi, \quad \beta_{32} = 0, \\ \beta_{13} &= -\frac{\sin \psi \cos \vartheta}{\sin \vartheta}, \quad \beta_{23} = -\frac{\cos \psi \cos \vartheta}{\sin \vartheta}, \quad \beta_{33} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Die Integrabilitätsbedingungen (2) sind nicht erfüllt, denn man erhält:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{11}}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \alpha_{21}}{\partial \varphi} &= \sin \psi \cos \vartheta, \\ \frac{\partial \alpha_{11}}{\partial \psi} - \frac{\partial \alpha_{31}}{\partial \varphi} &= \cos \psi \sin \vartheta, \\ \frac{\partial \alpha_{21}}{\partial \psi} - \frac{\partial \alpha_{31}}{\partial \vartheta} &= -\sin \psi \\ \frac{\partial \alpha_{12}}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \alpha_{22}}{\partial \varphi} &= \cos \psi \cos \vartheta, \\ \frac{\partial \alpha_{12}}{\partial \psi} - \frac{\partial \alpha_{32}}{\partial \varphi} &= -\sin \psi \sin \vartheta, \\ \frac{\partial \alpha_{22}}{\partial \psi} - \frac{\partial \alpha_{32}}{\partial \vartheta} &= -\cos \psi \\ \frac{\partial \alpha_{13}}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \alpha_{23}}{\partial \varphi} &= -\sin \vartheta, \\ \frac{\partial \alpha_{13}}{\partial \psi} - \frac{\partial \alpha_{33}}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial \alpha_{23}}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \alpha_{33}}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Aus (23) und (24) erhält man in leichter Rechnung die $\gamma_{r\rho\sigma}$:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{111} &= 0, \gamma_{211} = 0, \gamma_{311} = 0, \\ \gamma_{121} &= 0, \gamma_{212} = 0, \gamma_{321} = -1, \\ \gamma_{131} &= 0, \gamma_{231} = +1, \gamma_{331} = 0, \\ \gamma_{112} &= 0, \gamma_{212} = 0, \gamma_{312} = +1, \\ \gamma_{122} &= 0, \gamma_{222} = 0, \gamma_{322} = 0, \\ \gamma_{132} &= -1, \gamma_{232} = 0, \gamma_{332} = 0, \\ \gamma_{113} &= 0, \gamma_{213} = -1, \gamma_{313} = 0, \\ \gamma_{123} &= +1, \gamma_{223} = 0, \gamma_{323} = 0, \\ \gamma_{133} &= 0, \gamma_{233} = 0, \gamma_{333} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Man sieht, daß alle Größen $\gamma_{r\rho\sigma}$ mit zwei bzw. drei gleichen Indizes verschwinden, während diejenigen mit drei ungleichen Indizes abwechselnd gleich $+1$ oder -1 sind.

Nun sind für jeden Wert von $r = 1, 2, 3$ die neungliedrigen Summen

$$\sum_{\sigma \rho} \pi_{\rho} \frac{\partial L'}{\partial \pi_{\sigma}} \gamma_{r\rho\sigma}$$

zu bilden; die einzelnen Summanden sind z. B. für $r = 1$ folgende:

$$\begin{aligned} \pi_1 \frac{\partial L'}{\partial \pi_1} \gamma_{111} &= 0, \quad \pi_2 \frac{\partial L'}{\partial \pi_1} \gamma_{121} = 0, \\ &\quad \pi_3 \frac{\partial L'}{\partial \pi_1} \gamma_{131} = 0, \\ \pi_1 \frac{\partial L'}{\partial \pi_2} \gamma_{112} &= 0, \quad \pi_2 \frac{\partial L'}{\partial \pi_2} \gamma_{122} = 0, \\ &\quad \pi_3 \frac{\partial L'}{\partial \pi_2} \gamma_{132} = -\pi_3 \frac{\partial L'}{\partial \pi_2}, \\ \pi_1 \frac{\partial L'}{\partial \pi_3} \gamma_{113} &= 0, \quad \pi_2 \frac{\partial L'}{\partial \pi_3} \gamma_{123} = \pi_2 \frac{\partial L'}{\partial \pi_3}, \\ &\quad \pi_3 \frac{\partial L'}{\partial \pi_3} \gamma_{133} = 0. \end{aligned}$$

Damit wird für $r = 1$, d. h. für die erste Eulersche Gleichung, die zu berechnende vierfache Summe einfach gleich:

$$\pi_2 \frac{\partial L'}{\partial \pi_3} - \pi_3 \frac{\partial L'}{\partial \pi_2},$$

und wir erhalten, wenn wir wegen der vorausgesetzten — übrigens offenbar durchaus unwesentlichen — Kräftefreiheit $\Pi_1 = 0$ setzen, aus (21):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \pi_1} \right) - \frac{\partial L'}{\partial \pi_1} + \pi_2 \frac{\partial L'}{\partial \pi_3} - \pi_3 \frac{\partial L'}{\partial \pi_2} = 0, \quad (26)$$

woraus die beiden andern durch zyklische Ver-

tauschung der Indizes 1, 2, 3 folgen. Da $\frac{\partial L'}{\partial \pi_i} = 0$, ist jetzt in der Tat richtig:

$$A \frac{d\pi}{dt} + (C-B) \dot{\chi} \dot{\varphi} = 0,$$

und zwei entsprechende.

Die Gleichung (26) hat genau die Form, in der sie auch Kirchhoff erhält.

Breslau, im Februar 1918.

(Eingegangen 9. Februar 1918.)

Die linearen Dimensionen der Dichteschwankungen.

Von L. S. Ornstein und F. Zernike.

Vor kurzem hat Herr v. Laue in dieser Zeitschrift¹⁾ einen Aufsatz „Temperatur und Dichteschwankungen“ veröffentlicht, in welchem sich am Schluß folgende Bemerkung findet: . . . „es ist eine völlige Verkennung des Sachverhalts, wenn sich in der Literatur der Wunsch nach einer Berechnung der linearen Dimensionen der Dichteschwankungen findet.“ Da wir diese Berechnung schon in früheren, offenbar noch wenig bekannten, Arbeiten²⁾ angegeben haben, scheint es uns nützlich an dieser Stelle eine Übersicht unserer theoretischen Betrachtungen und eine abgekürzte Herleitung unserer Formeln zu geben.

Es herrsche in einer Flüssigkeit in irgendeinem Volumenelement eine Dichte, die zufällig größer als die mittlere ist. Die gegenseitige Anziehung der Moleküle wird dann in der unmittelbaren Umgebung eine größere Dichte als die mittlere begünstigen, und zwar bis in eine Entfernung gleich dem Wirkungsradius. In dieser Umgebung wird eine positive Dichteabweichung also wahrscheinlicher sein, als eine negative, d. h. es besteht eine Korrelation im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung zwischen den Dichteschwankungen in Volumenelementen, die innerhalb ihrer gegenseitigen Wirkungssphäre liegen.

Der Einfluß erstreckt sich aber noch weiter, indem die wahrscheinlich positive Abweichung der genannten Umgebung des Volumenelements wieder in derselben Weise eine neue Umgebung

beeinflusst, und diese eine noch weitere, usw. Es gibt also auch eine indirekte Beeinflussung der Dichteabweichungen, die mit der Entfernung zwar abnehmen wird, sich aber sehr viel weiter als der Wirkungsradius erstrecken kann. Letzteres wird ganz besonders der Fall sein in der Nähe des kritischen Zustandes, weil dann bekanntlich schon geringe Kräfte einen großen Einfluß auf die Dichte gewinnen. Durch unsere Rechnungen haben wir dieses qualitative Resultat genau bestätigen können.

Man wird nun fragen, woher es kommt, daß eine solche Abhängigkeit der Schwankungen in Einsteins Arbeit¹⁾ und in den Arbeiten, die sich daran anschließen (Frank, Fürth, v. Laue), nicht zutage tritt. Die genannten Arbeiten benutzen das Boltzmannsche Prinzip, um aus der Entropie die Wahrscheinlichkeit zu berechnen. Dabei wird die Gesamtentropie thermodynamisch berechnet unter der Voraussetzung, daß dieselbe sich additiv aus den Entropien der Volumelemente zusammensetzt. Es ist aber einleuchtend, daß dieser Ansatz die Unabhängigkeit der Schwankungswahrscheinlichkeiten der verschiedenen Volumelemente voraussetzt. Nach unseren Arbeiten gilt eine solche Unabhängigkeit aber nur für Volumelemente, die groß gegen die Dimensionen der Dichteschwankungen sind.

Es ist bei Einsteins Anwendung des Boltzmannschen Prinzips wohl kaum möglich, eine Nichtadditivität der Teilentropien zu berücksichtigen. Allein die Gibbssche Methode der kanonischen Gesamtheiten hat uns in den Stand gesetzt, gleichzeitig mit dem Gesetz der Dichteschwankungen die Entropie aufzufinden²⁾.

Obige Wahrscheinlichkeitsüberlegungen sollen jetzt unter Formeln gebracht werden. Es befinde sich ein Überschuß an Substanz dm in irgendeinem Punkte, den wir zum Ursprung der Koordinaten wählen. In einem nahen Punkt (x, y, z) wird die direkte Einwirkung von dm eine mittlere Dichte $s + \sigma$ verursachen, wo s die allgemeine mittlere Dichte, σ die mittlere Abweichung vorstelle. σ wird proportional dm und eine Funktion der Entfernung sein. Wir setzen $\sigma = f(x, y, z) dm$. Man kann sich dabei eine indirekte Einwirkung etwa dadurch beseitigt denken, daß man in allen übrigen Punkten eine Dichte gleich s vorschreibt. Aber auch wenn abweichende Dichten in der Umgebung vorgeschrieben sind, wird man die Funktion f gebrauchen.

Es seien einmal überall um einen willkürlichen Ursprung die Dichteabweichungen $\sigma(x, y, z)$ bekannt, und die mittlere Abweichung σ_0 im

¹⁾ Diese Zeitschr. 18, 542, 1917.

²⁾ L. S. Ornstein und F. Zernike, „Accidental deviations of density and opalescence at the critical point of a single substance“. Amsterdam Proceedings 17, 793, 1914. Zitiert als A. F. Zernike, „The clustering-tendency of the molecules in the critical state and the extinction of light caused thereby“. Amsterdam Proc. 18, 1520, 1916. Zitiert als B.

¹⁾ A. Einstein, Ann. d. Phys. (4) 33, 1285, 1910.

²⁾ A., § 3.

Ursprung daraus zu bestimmen. Im Volumenelement $dx dy dz$ findet sich ein Überschuß $\sigma dx dy dz$ und dieser bewirkt im Ursprung eine mittlere Abweichung $f(xyz) \sigma dx dy dz$. Die ganze Umgebung ergibt also

$$\sigma_0 = \int f(xyz) \sigma(xyz) dx dy dz. \quad (1)$$

Ihrer Bedeutung nach ist die Funktion f nur innerhalb der Wirkungssphäre von Null verschieden, und hängt direkt mit den molekularen Anziehungskräften zusammen.

Jetzt betrachten wir von neuem einen Überschuß dm im Ursprung, schließen aber die indirekte Wirkung nicht aus. Die mittlere Dichte im Punkt (xyz) werden wir jetzt durch $s + f g(xyz) dm$ darstellen. Man hat die Funktion g zu benutzen, wenn die Dichte in der Umgebung unbekannt ist. Berechnen wir zum Beispiel den Mittelwert des Produkts $\sigma_0 \cdot \sigma(xyz)$ wo σ_0 im Volumenelement $d\tau_0$, σ in $d\tau$ gelte, welche Elemente klein im Vergleich zur Wirkungssphäre sind. Für jeden bestimmten Wert von σ_0 ist:

$$\sigma = g(xyz) \sigma_0 d\tau_0$$

also

$$\overline{\sigma_0 \sigma} = g(xyz) \overline{\sigma_0^2} d\tau_0.$$

Aber auch umgekehrt

$$\overline{\sigma_0 \sigma} = g(xyz) \overline{\sigma^2} d\tau.$$

Aus beiden Gleichungen folgt, daß $\overline{\sigma^2} d\tau$ unabhängig von der Größe des kleinen Volumenelements $d\tau$ sein muß, so daß wir es gleich a setzen können, einer Größe, die nur von dem molaren Zustand der Flüssigkeit abhängt¹⁾. Die Korrelation der Dichteabweichungen wird also durch g bestimmt nach der Gleichung

$$\overline{\sigma_0 \sigma} = a g(xyz). \quad (2)$$

Wir leiten jetzt eine Differentialgleichung für g ab, wodurch diese Funktion berechnet werden kann, wenn die Funktion f bekannt ist²⁾.

Wir bestimmen durch $(x+x', y+y', z+z')$ einen Punkt innerhalb der Wirkungssphäre um (xyz) und denken uns den Ursprung mit der Abweichung dm viel weiter entfernt. In diesem Punkt ist die mittlere Schwankung der Dichte gleich

$$\sigma = g(x+x', y+y', z+z') dm = dm \left\{ g(xyz) + \frac{\partial g}{\partial x} x' + \frac{\partial g}{\partial y} y' + \frac{\partial g}{\partial z} z' + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} x'^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} x' y' + \text{usw.} \right\}.$$

Auf die Umgebung des Punktes (xyz) wenden wir nun Gleichung (1) an:

$$g(xyz) dm = \int f(x'y'z') \sigma \cdot dx' dy' dz'.$$

Führt man hier den Wert von σ ein, so können g und seine Ableitungen vor das Integralzeichen gebracht werden. Beachtet man weiter, daß f nur eine Funktion des Radiusvektors $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ sein kann, so erhält man, wenn man bedenkt, daß wie man leicht einsieht,

$$\int x f d\tau = 0$$

und

$$\int x^2 f d\tau = \frac{1}{3} \int r^2 f d\tau$$

ist,

$$g(xyz) = g(xyz) \int f d\tau + \frac{1}{6} \Delta g \int z^2 f d\tau.$$

Oder wenn wir die Integrale respektive mit F und ε^2 bezeichnen:

$$\Delta g - \frac{6(1-F)}{\varepsilon^2} g = 0.$$

Über die Bedeutung der Größen F und ε sei hier schon gleich bemerkt, daß $F=1$ einen Grenzwert darstellt, der im kritischen Punkt erreicht wird¹⁾, während sonst $F < 1$, und daß das Verhältnis ε^2/F das Quadrat einer Art „mittlerer Reichweite der Funktion F “ angibt. Für Betrachtungen, welche sich auf die kritische Gegend beziehen, wird man also ε selbst mit dieser Reichweite oder dem „mittleren Wirkungsradius“ identifizieren können.

Die Lösung der Differentialgleichung, die im Unendlichen verschwindet, ist:

$$g = A r^{-1} e^{-kr},$$

wenn

$$k^2 = \frac{6(1-F)}{\varepsilon^2}.$$

Hiermit ist g außerhalb der Wirkungssphäre bis auf einen konstanten Faktor, der für das Folgende ohne Belang ist, bestimmt²⁾. Für die mittlere Reichweite von g wird man

1) Unter gewissen Einschränkungen kann man zeigen, daß $a = \frac{s}{N}$ ist. Man vgl. A, Gleichung (9). Der Wert von a ist übrigens für das Folgende ohne Bedeutung (N Avogadro'sche Zahl).

2) Die Integralgleichung, die in voller Strenge den Zusammenhang von f und g angibt, haben wir in A hergeleitet und diskutiert. Zur expliziten Berechnung von g wurde sie in B näherungsweise in die hier gegebene Differentialgleichung verwandelt.

1) L. S. Ornstein, The clustering tendency of the molecules at the critical point. Proc. Amsterdam 19, 1321, 1916. Vgl. L. S. Ornstein und F. Zernike, The influence of accidental deviations of density on the equation of state. Proc. Amsterdam 19, 1312, 1916.

2) In B wurde dieser Faktor bestimmt zu $3F/2\pi\varepsilon^2$. Diesen Wert benutzen wir im folgenden, weil die Formeln sich dadurch vereinfachen. So wird damit $\int g d\tau = F/1-F$, wie auch in A aus der Integralgleichung gefunden wurde.

$$\gamma = \frac{\sqrt{\sigma}}{\alpha} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-F}}$$

finden.

Weiter führen wir analog F für das Integral über g ein:

$$G = \int g d\tau = \int_0^{\infty} 4\pi r^2 g(r) dr = \frac{2\pi}{3} \frac{\varepsilon^2}{1-F}.$$

Auch die mittlere Dichteschwankung in einem gegebenen Volumen V können wir jetzt berechnen. Die Schwankung selbst ist

$$\Sigma = \frac{1}{V} \int \sigma d\tau,$$

und das mittlere Quadrat also

$$\overline{\Sigma^2} = \frac{1}{V^2} \int \sigma^2 d\tau d\tau' + \frac{1}{V^2} \int \int \sigma \sigma' d\tau d\tau'.$$

Die erste Form ist gleich a/V ; in der zweiten wird man (2) anwenden. Es ist leicht zu sehen, daß für ein großes Volumen annähernd gefunden wird

$$\overline{\Sigma^2} = \frac{a}{V} (1+G) = \frac{a}{V} \frac{1}{1-F}.$$

Für ein nicht so großes Volumen werden wir zur Durchführung der Berechnung eine bestimmte Gestalt wählen müssen, z. B. eine Kugel mit Radius R . Wir finden für diesen Fall unter der Voraussetzung $R \gg \varepsilon$ (sonst würde der Verlauf der Funktion f eingehen)

$$\overline{\Sigma^2} = \frac{a}{V^2} \left[\frac{V}{1-F} - \frac{24\pi F}{\varepsilon^2 \alpha^5} (\alpha R + 1) e^{-\alpha R} (\alpha R \cosh \alpha R - \sinh \alpha R) \right].$$

Dieser etwas verwickelte Ausdruck zeigt einen einfachen Verlauf. Der letzte nur von αR abhängige Teil ist nämlich für $\alpha R \gg 1$ gleich $\frac{1}{2} (\alpha R)^2$, für $\alpha R \ll 1$ gleich $\frac{1}{3} (\alpha R^3 - \frac{2}{15} (\alpha R)^5)$.

Diese asymptotischen Werte kann man mit guter Annäherung für $\alpha R > 1$, bzw. $\alpha R < \frac{1}{2}$ benutzen. Das mittlere Schwankungsquadrat wird, für $\alpha R > 1$ ($R > \frac{1}{2} \gamma$)

$$\overline{\Sigma^2} = \frac{a}{V^2} \left[\frac{V}{1-F} - \frac{F}{1-F} \cdot \frac{O}{2\alpha} \right], \quad (3)$$

wo O die Oberfläche der Kugel ist. Man kann leicht zeigen, daß obige Formel auch für ein willkürlich gestaltetes großes Volumen die zweite Näherung darstellt.

Für $\alpha R < \frac{1}{2}$ ($R < \frac{1}{5} \gamma$) wird

$$\overline{\Sigma^2} = \frac{a}{V^2} \left[V + \frac{16\pi F}{5\varepsilon^2} R^5 \right]. \quad (4)$$

Hierin überwiegt das zweite Glied, solange $R \gg \varepsilon$ ist. Selbst für $R \ll \varepsilon$ ist diese Formel richtig, liefert nämlich $\frac{a}{V} = \overline{\Sigma^2}$. Unsere

Betrachtungen gelten aber für den Fall $R \gg \varepsilon$. Für diesen Fall aber wird $\overline{\Sigma^2}$ umgekehrt proportional R , nimmt also mit abnehmender Größe des betrachteten Volums weit langsamer zu als für größere Volume. Aus (3) und (4) sieht man, daß die Proportionalität von $\overline{\Sigma^2}$ und $1/V$ gänzlich aufhört, wenn die Dimensionen von V mit γ vergleichbar werden. (Für $R = \gamma$ hat $\overline{\Sigma^2}$ nur die Hälfte des daraus berechneten Wertes.) Das Abweichen von dieser Proportionalität wäre ohne Korrelation unmöglich. Die Länge γ kann als ein Maß für die linearen Dimensionen der Dichteschwankungen aufgefaßt werden. Es ist wichtig zu bemerken, daß in diesen Formeln α nicht mehr auftritt. Der Wert von $\overline{\Sigma^2}$ ist daher unabhängig von der Entfernung vom kritischen Punkt. Aber das Volumen, auf welches es gestattet ist, die Formel anzuwenden, wächst bei Annäherung an den kritischen Punkt.

Übrigens sind die Dichteschwankungen so wechselnder Natur, daß es gefährlich ist damit eine Vorstellung einer bestimmten Dimension zu verbinden. Man meine also nicht etwa, daß sie Schwärme von der Größe γ oder von bestimmter Struktur bilden. Jedoch hat die Größe γ einen beobachtbaren physikalischen Sinn, wie z. B. aus unserer Theorie der Opaleszenz in unmittelbarer Nähe des kritischen Punktes hervortritt. Wir fanden nämlich, daß die bekannte Opaleszenzformel durch

$$1 + \frac{8\pi^2 \gamma^2}{3\mu^2 \lambda^2}$$

zu dividieren ist, wie es auch für Teilchen einer bestimmten Größe der Fall wäre. (μ Brechungsindex, λ Wellenlänge.) Dadurch wird die Opaleszenz um die Hälfte verkleinert, wenn $\gamma = 0,2 \lambda$ ist, und wird im kritischen Punkt proportional λ^{-2} , aber nicht unendlich groß. —

Es erübrigt sich, die eingeführten Größen ε und F mit meßbaren Größen in Beziehung zu setzen. Die Gibbs'sche statistische Mechanik würde das ohne weiteres leisten. In unserem Falle braucht man nur eines der Resultate obiger Betrachtungen mit einer auf anderem Wege gefundenen Formel zu vergleichen. Natürlich wird man dazu Gleichungen (4) wählen, weil die frü-

heren Herleitungen für genügend große Volumina ihre Gültigkeit behalten. Also

$$\Sigma^2 V = \frac{a}{1-F} = -\frac{RT}{N} \frac{1}{v^3} \frac{dp}{dv}$$

und mit $\frac{s}{N} = \frac{1}{VN}$:

$$1-F = -\frac{V^2}{RT} \frac{dp}{dv}, \quad \gamma = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-F}}.$$

Eine Vorstellung über wirkliche Werte von $1-F$ bekommt man in einfacher Weise mittels der van der Waalsschen Gleichung. Diese gibt für die kritische Dichte:

$$1-F = \frac{9}{4} \frac{T-T_k}{T}.$$

Z. B. ist für $T_k = 300$ die Größe $1-F$ gleich 0,01 bei 1,3 oberhalb der kritischen Temperatur, gleich 10^{-4} ; bei 0,013 Grad, die Länge γ bzw. gleich 10 und 100 Wirkungsradien.

Die Anwendung des Boltzmannschen Prinzips muß beschränkt werden auf Volumelemente, deren Dimensionen groß gegen γ sind. Im kritischen Punkt ist das unmöglich. Es ist also eine völlige Verkennung des Sachverhalts, wenn man den unendlichen Wert der Dichteschwankungen im kritischen Punkt, den die frühere Formel ergibt, dadurch zu verbessern sucht, daß man in der Entwicklung der Entropie höhere Glieder berücksichtigt.

Instituut voor Theoretische Physica der Universiteit Utrecht. Jan. 1918.

Groningen.

(Eingegangen 6. Februar 1918.)

Adiabatenhypothese und Boltzmannsches Prinzip.

Von Adolf Smekal.

Die Beziehungen der Adiabatenhypothese zu den statistischen Grundlagen des II. Hauptsatzes der Thermodynamik konnten von Ehrenfest¹⁾ bisher nur für Gesamtheiten von Molekülen mit einem Freiheitsgrade aufgedeckt werden. Im folgenden wird nun gezeigt, daß die Annahme adiabatisch-invarianter Quantenansätze auch bei Gesamtheiten stabiler Systeme beliebig vieler Freiheitsgrade für die Gültigkeit des Boltzmannschen Prinzips notwendig und hinreichend ist.

¹⁾ P. Ehrenfest, Ann. d. Phys. 51, 327, 1916 (zitiert als II).

§ 1. Die Bedingung dafür, daß das Boltzmannsche Prinzip bei der allgemeinen (zunächst noch stetigen) Gewichtswahl

$$G(q, p, a)$$

im μ -Raum (Phasenraum des Moleküls, allgemeiner des Teilsystems) richtig ist, wurde von Ehrenfest¹⁾ in der Form

$$\int d\tau e^{-\frac{\varepsilon}{\Theta}} \delta G = 0 \quad (1)$$

angegeben. Dabei bedeutet

$$d\tau = dq_1 \dots dq_r dp_1 \dots dp_r \quad (2)$$

das Phaselement des $2r$ -dimensionalen μ -Raumes, ε die Energie eines der gleichbeschaffenen Teilsysteme, Θ eine Konstante (das Temperaturanalogon) und

$$\delta G(q, p, a) = \sum \frac{\partial G}{\partial a} \delta a.$$

Da die Parameter a und ihre Verschiebungen voneinander völlig unabhängig sein sollen, kann man (1) auch durch die Gleichung

$$\int d\tau e^{-\frac{\varepsilon}{\Theta}} \frac{\partial G}{\partial a} = 0 \quad (3)$$

ersetzen, die nun für alle a erfüllt sein muß. Die vorkommenden Integrationen sind über den ganzen unendlichen μ -Raum zu erstrecken.

Der Ehrenfestschen Überlegung liegt die stillschweigend gemachte, aber doch sehr wesentliche Voraussetzung zugrunde, daß das ebenfalls über den ganzen unendlichen μ -Raum erstreckte Integral („Zustandsintegral“)

$$Z = \int d\tau e^{-\frac{\varepsilon}{\Theta}} G \quad (4)$$

einen endlichen Wert besitzt. Wenn G , wie im folgenden festgehalten werden soll, für unendlich große Phasen p, q nicht unendlich von unendlich hoher Ordnung wird, so ist dies nur möglich, wenn alle jene Systeme ausgeschlossen werden, deren Energie für unendliche Phasen endlich bleibt oder gegen Null konvergiert. Die Ehrenfestschen Resultate sind also unmittelbar nur auf Systeme anwendbar, deren Energieflächen im μ -Raum endlich und geschlossen sind.

Um auch die übrigen, weitaus zahlreicheren stabilen Systeme in den Kreis der Betrachtung ziehen zu können, ist es nötig, den μ -Raum durch gewisse Bedingungsungleichungen abzugrenzen, wozu der übrigens stets vorhandene

¹⁾ P. Ehrenfest, diese Zeitschr. 15, 657, 1914 (zitiert als I); § 2, Gl. (35 a). An Stelle von Θ wird dort $\frac{1}{\mu}$ geschrieben.

Einfluß von Gefäßwänden und Nachbarsystemen¹⁾ heranzuziehen ist. Wenn man, wie dies bei den Anwendungen des Boltzmannschen Prinzips gewöhnlich der Fall ist, die translatorische Bewegung außer acht läßt und sich auf die Betrachtung der „inneren“ Freiheitsgrade der Teilsysteme beschränkt²⁾, so wird man auch wieder mit praktisch völlig ausreichender Annäherung voraussetzen können, daß die Bewegung, die diesen „inneren“ Freiheitsgraden angehört, an den erwähnten Grenzen des μ -Raumes keine Störung erleidet. Die Bedingungsungleichungen werden dann also Beschränkungen für die Werte der willkürlichen Konstanten gewisser zeitfreier Integrale der Teilsysteme darstellen, wenn auch die Wechselwirkung der Teilsysteme nur die Werte dieser willkürlichen Konstanten beeinflußt.

Diese letztere Annahme würde erlauben, die Bedingungsungleichungen als Positiv-Unendlichwerden der potentiellen Energie aufzufassen, wie dies sonst in der statistischen Mechanik üblich ist³⁾. Im Hinblick auf die erwähnte Beschränkung auf „innere“ Freiheitsgrade wird man aber diese Grenzen vorteilhafter durch Nullsetzen der Gewichtsfunktion charakterisieren, wodurch zugleich das Verschwinden aller jener Glieder erreicht wird, die bei einer beliebigen reversiblen Beeinflussung der Gesamtheit der Teilsysteme aus der Abhängigkeit des Integrales (4) von seinen Grenzen resultieren. Wie man nämlich unmittelbar aus der Anwendung der Gibbsschen Betrachtungsweise auf die von Ehrenfest zugrunde gelegte „wahrscheinlichste“ Verteilung⁴⁾ ersehen kann, muß im Falle endlicher Grenzen des μ -Raumes außer der Ehrenfestschen Bedingung (3) auch das Verschwinden dieser Glieder gefordert werden, wenn das Boltzmannsche Prinzip richtig sein soll. Bei der Quantentheorie kommen diese Glieder aber ganz von selbst nicht in Frage, weil sich zeigen wird, daß sich die Konstanten der dort zur Begrenzung verwendeten zeitfreien Integrale einer infinitesimalen reversiblen Beeinflussung gegenüber überhaupt invariant verhalten.

Es bleibt also auch im allgemeineren Falle ungeschlossener Energieflächen nur die Ehrenfestsche Bedingung (3) zu diskutieren übrig.

1) Der Einfluß der Nachbarsysteme, bzw. der der Veränderlichkeit der Dichte, wird bereits bei N. Bohr, Phil. Mag. 26, 1, 1913; K. F. Herzfeld, Ann. d. Phys. 51, 261, 1916 und A. Sommerfeld, Münchn. Ber. 1917, S. 83 berücksichtigt.

2) Diese Annahme wird natürlich auch schon bei Ehrenfest zugrunde gelegt.

3) Vgl. z. B. P. Hertz, 8. Buch „Statistische Mechanik“ in Weber-Gans, Repertorium der Physik, Bd. I, 2, Leipzig 1916, S. 447, Anm. 1.

4) Vgl. A. Smekal, diese Zeitschr. 19, 7, 1918.

§ 2. Es werde nun zunächst angenommen, daß die der Energiegleichung eines Teilsystems von r „inneren“ Freiheitsgraden im μ -Raume entsprechende $(2r-1)$ -dimensionale Hyperfläche endlich, geschlossen und singularitätenfrei ist; dann ist es nach dem Obigen noch möglich, über den ganzen unendlichen μ -Raum zu integrieren. Unter diesen Bedingungen existiert auch die der Energiefunktion der Teilsysteme zugehörige mikrokanonische Verteilung sowie die zu ihr und zu einem beliebigen Modul θ gehörige kanonische Verteilung.

Offenbar kann man (3), abgesehen von dem konstanten endlichen Faktor $(\int e^{-\frac{\epsilon}{\theta}} d\tau)^{-1}$, als Mittelwert der Größe $\frac{\partial G}{\partial a}$ in einer kanonischen Gesamtheit auffassen¹⁾. Wie Gibbs mehrfach hervorhebt, kann man sich eine kanonische Gesamtheit vorstellen als zusammengesetzt aus unendlich vielen mikrokanonischen Gesamtheiten verschiedener Energien. Es besteht somit der Satz: Wenn der Mittelwert einer Phasenfunktion in allen mikrokanonischen Gesamtheiten verschwindet, so verschwindet er auch in allen kanonischen Gesamtheiten²⁾. Das Verschwinden des mikrokanonischen Mittelwertes von $\frac{\partial G}{\partial a}$ ist daher hinreichend für das Erfülltsein der Bedingung (3) für die Gültigkeit des Boltzmannschen Prinzips; aus einem von Ehrenfest angeführten Hilfssatz³⁾ schließt man, daß es dafür auch notwendig ist. Es stellt nichts anderes dar als die Ehrenfestsche „ δG -Bedingung“, genommen zwischen infinitesimal benachbarten Energiegrenzen. —

Damit die von Ehrenfest berechnete „wahrscheinlichste“ Verteilung stationär ist, muß G eine Funktion zeitfreier Integrale des Teilsystems, also selbst ein zeitfreies Integral sein. Man kann daher für G eine adiabatische Invariante annehmen. Nun ist die Bedingung dafür, daß ein zeitfreies Integral G adiabatisch-invariant ist durch

1) Prof. Ehrenfest reserviert die Bezeichnungen „mikrokanonische“ und „kanonische“ Gesamtheit für den γ -Raum. Indessen unterscheiden sich die beiden Räume formal nur durch die Größenordnung ihrer Dimensionszahlen.

2) Daraus folgt z. B., daß die kanonischen Mittelwerte der Koordinaten- und Impulsgeschwindigkeiten Null sind, weil dies für die entsprechenden mikrokanonischen Mittelwerte der Fall ist; vgl. A. Smekal, Wien. Ber. 126, (IIa), § 2, 1917. Vielleicht läßt sich der oben ausgesprochene Satz noch in folgender Form verallgemeinern: Wenn ein kanonischer Mittelwert vom Modul unabhängig ist, so ist er gleich dem entsprechenden mikrokanonischen Mittelwerte.

3) P. Ehrenfest, I, § 3, Anm. 2 auf S. 659.

$$\frac{\partial \overline{G}}{\partial a} = 0 \quad (5)$$

gegeben¹⁾, wenn G darin (wie in § 1) als Funktion der q , p und a angesehen wird und diese Gleichung für alle a Gültigkeit besitzt. Für stabile Systeme, die im folgenden allein in Frage kommen sollen, kann für den in (5) auftretenden Mittelwert auf Grund des Poincaré-Carathéodoryschen Wiederkehrrsatzes der Zeitmittelwert angenommen werden; dies trifft also insbesondere auch für jene Systeme zu, deren Energiefunktion eine mikrokanonische Verteilung zugeordnet werden kann.

Nun ist der Zeitmittelwert einer Phasenfunktion gleich dem Mittelwert über alle Punkte der auf der Energiefläche liegenden Phasenbahn des Teilsystems; der mikrokanonische Mittelwert umfaßt aber nicht nur diese Punkte, sondern auch alle $(2r-2)$ -fach unendlich vielen Phasenbahnen der Energiefläche, d. h. alle Punkte der Energiefläche. Der mikrokanonische Mittelwert des Zeitmittelwertes einer Phasenfunktion ist daher gleich dem mikrokanonischen Mittelwert der Phasenfunktion selbst²⁾.

Daraus und aus dem Obigen ergibt sich also, daß die adiabatische Invarianz von G (5), für das Verschwinden des mikrokanonischen Mittelwertes von $\frac{\partial G}{\partial a}$ und daher auch für das Erfülltsein der Bedingung (3) hinreichend ist.

Wenn die Energiefläche der betrachteten Teilsysteme nicht geschlossen ist, wird wie oben vorausgesetzt, daß das Einzelsystem entweder stets stabil ist, oder daß man seine Anfangsbedingungen, d. h. die Werte der willkürlichen Konstanten seiner zeitfreien Integrale nur so wählt, daß sie Stabilität zur Folge haben, wie dies z. B. beim n -Körperproblem möglich ist. Dann werden sich die obigen Schlüsse unverändert wiederholen lassen³⁾, wenn die Grenzen des μ -Raumes (vgl. § 1) nur solche stabile Lösungen umschließen und sich in den durch sie aus den Energieflächen herausgeschnittenen Bereichen keine singulären Punkte vorfinden, in denen sich zwei Bahnkurven schneiden könnten.

§ 3. Der Reduktion der Bedingung (3), auf die Forderung nach dem Verschwinden eines Energieflächen-Mittelwertes von $\frac{\partial G}{\partial a}$, entspricht

physikalisch die Bedingung, daß das erhaltene Resultat für alle Temperaturen, also für alle Werte von θ richtig sein muß¹⁾. In ähnlicher Weise läßt sich durch Berücksichtigung der Veränderlichkeit von Dichte oder Volumen die schon als hinreichend erkannte Bedingung (5) als notwendig erweisen.

Infolge der stets vorhandenen Gefäßwände und Nachbarsysteme hat man in Wirklichkeit auch im Falle geschlossener Energieflächen nur einen endlich begrenzten Teil des μ -Raumes zu betrachten. Durch Veränderung des Volumens oder der Dichte kann man den (realen) mittleren Abstand zweier Nachbarsysteme und dadurch jenen Raum verändern, der zu ihrer Ausbildung und ungestörten „inneren“ Bewegung zur Verfügung steht; dem entspricht eine Änderung der willkürlichen Konstanten der das μ -Raum-Volumen begrenzenden zeitfreien Integrale und somit eine Änderung der Zahl der darin enthaltenen Phasenbahnen, während die Gültigkeit des Boltzmannschen Prinzips und daher auch der für (3) notwendigen Bedingung davon unberührt bleiben muß. Diese Bedingung kann also nicht das Verschwinden des Mittel-

wertes von $\frac{\partial G}{\partial a}$ über ein bestimmt definiertes Kontinuum von Phasenbahnen sein, sondern muß für jede beliebige Zusammenfassung von Phasenbahnen gelten. Das Verschwinden des Mittelwertes von $\frac{\partial G}{\partial a}$ über jede einzelne Phasenbahn, d. h. das Verschwinden des Zeitmittelwertes (5) ist daher auch notwendig für das Erfülltsein von (3), bei offen gelassenen endlichen Grenzen. Bei der Quantentheorie, wo innerhalb eines endlichen μ -Raum-Volumens überhaupt nur eine endliche Zahl diskreter Systemzustände möglich ist, ist dieses Resultat jetzt unmittelbar evident.

§ 4. Für periodische und bedingt periodische Teilsysteme läßt sich die hinreichende Eigenschaft der Bedingung (5) auch ohne Benutzung der Zusammenhänge zwischen den drei fundamentalen Gesamtheiten der Statistik: Zeitgesamtheit, mikrokanonischer und kanonischer Gesamtheit, dartun.

Wie Burgers gezeigt hat²⁾, läßt sich der Zeitmittelwert einer beliebigen Phasenfunktion u eines „nicht entarteten“, bedingt periodischen Systems durch den Mittelwert über eine „Periodenzelle“ des Systems ersetzen. Bezeichnet man nämlich die Konstanten der beiden Gruppen

1) Vgl. J. M. Burgers, Versl. Amsterdam, 25. Nov. 1916, S. 849, Gl. (6). Ann. d. Phys. 52, 193, 1917.

2) Dieser Satz ist implizite bereits bei J. Kroo, Bull. Acad. Cracovie 1913, S. 418, in § 4, Gl. (29') enthalten.

3) Bis auf die „Notwendigkeit“ der Bedingung, daß der Energieflächen-Mittelwert von $\frac{\partial G}{\partial a}$ verschwinden soll.

1) θ ist nämlich das Temperaturanalogon in der Ehrenfestschen „wahrscheinlichsten“ stationären Gesamtheit, und zwar dann und nur dann, wenn das Boltzmannsche Prinzip gilt.

2) J. M. Burgers, l. c. Gl. (20).

der Integrale des bedingt periodischen Systems in der „Hamiltonschen Form“ mit $\alpha_1 = \varepsilon$, $\alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_1 = t - t_0, \beta_2, \dots, \beta_r$, so sind die Phasen q, p r -fach periodische Funktionen der β und der Zeitmittelwert $\bar{u}$ erscheint in der Form

$$\bar{u} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} u dt d\beta_2 \dots d\beta_r,$$

wobei die Integration über das Volumen Ω einer Periodenzelle zu erstrecken ist.

Die Bedingung dafür, daß G eine adiabatische Invariante ist (5), läßt sich also hier in der Form schreiben

$$\int_{\Omega} \frac{\partial G}{\partial \alpha} dt d\beta_2 \dots d\beta_r = 0. \quad (6)$$

Führt man nun auch in (3) an Stelle der q, p die Integrale in der Hamiltonschen Form ein, so folgt auf Grund eines Satzes von Hasenöhr1) für $d\tau$ (2)

$$d\tau = \pm d\alpha_1 \dots d\alpha_r dt d\beta_2 \dots d\beta_r$$

und daher für die Bedingung (3)

$$\int e^{-\frac{\alpha_1}{\theta}} \frac{\partial G}{\partial \alpha} d\alpha_1 \dots d\alpha_r dt d\beta_2 \dots d\beta_r = 0. \quad (7)$$

Da die Integration über jeden die Bedingungsungleichungen befriedigenden Punkt des μ -Raumes nur einmal zu erstrecken ist, hat man wegen der r -fachen Periodizität der q und p nach $dt d\beta_2 \dots d\beta_r$ nur über eine Periodenzelle zu integrieren, während die Integration nach den α bis an die Grenzen des μ -Raumes zu erfolgen hat, die hier allein von Funktionen der α -Integrale gebildet werden. Die Gleichung (7) ist also nach (6) für jede adiabatisch-invariante Gewichtsfunktion G erfüllt.

Für den Fall, daß das System „entartet“ ist²⁾, hat man ganz ähnlich zu verfahren und den Zeitmittelwert (5) durch einen Mittelwert über einen nunmehr weniger als r -dimensionalen Bereich zu ersetzen. Wenn das Teilsystem periodisch ist, was unter Umständen den äußersten Fall der Entartung darstellen kann, wird der Zeitmittelwert (5) direkt in der Form

$$\frac{1}{P} \int_0^P \frac{\partial G}{\partial \alpha} dt = 0$$

verwendet, die unmittelbar das Verschwinden

1) F. Hasenöhr, Wien. Ber. 120, (IIa), 923, 1911, § 2.

2) Bei dieser Gelegenheit sei übrigens hervorgehoben, daß nach dem Inhalte der Adiabatenhypothese für ein „entartetes“ System dieselben Quantenansätze zu gelten haben, wie für ein „nicht entartetes“, wenn die „Entartung“ durch Nullsetzen eines willkürlich veränderlichen Parameters zustande kommt.

von (7) erkennen läßt, da die Integration nach dt jetzt nur über die Periode P zu erstrecken ist.

Die besondere Eigentümlichkeit der bedingt periodischen Systeme, daß man ihre Zeitmittelwerte durch Mittelwerte über ein mehrdimensionales Gebiet ersetzen kann, rührt daher, daß alle ihre Zeitmittelwerte nur Funktionen der Konstanten der ersten Gruppe der Integrale in der „Hamiltonschen Form“, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sind. Es wäre nun ganz gut denkbar, daß es noch andere stabile, nichtperiodische Systeme gibt, deren Zeitmittelwerte auch nur von einer beschränkten Zahl von zeitfreien Integralen abhängig sind; sie könnten dann in ähnlicher Weise verwendet werden, sofern sie adiabatische Invarianten besitzen. Die Zeitmittelwerte gewisser quasiergodischer Systeme, nämlich die mikrokanonischen Mittelwerte, haben diese besondere Eigenschaft; sie sind Funktionen der Energiekonstanten α_1 allein. Doch ist bis jetzt noch nicht einmal festgestellt worden, ob solche Systeme, die also hier als Teilsysteme auftreten würden, überhaupt ohne logischen Widerspruch denkbar sind¹⁾. —

§ 5. Nach dem Vorangehenden ist also die adiabatische Invarianz der Gewichtsfunktion G notwendig und hinreichend für die Anwendbarkeit des Boltzmannschen Prinzips auf in endliche Volumina eingeschlossene Gesamtheiten stabiler Systeme von beliebig vielen Freiheitsgraden. Damit ist unter den hier angenommenen, weitesten Voraussetzungen die allgemeine Lösung des von Ehrenfest aufgeworfenen Problems erbracht.

Die von Ehrenfest — unter engeren Voraussetzungen (vgl. § 1) — angegebene Partiallösung besagt, daß jede für G angenommene „reine“ Funktion des einem Systeme mit geschlossener Energiefläche zugehörigen Phasen volumens i der Bedingung (3) Genüge leistet. Dieser, sowie der daraus gefolgerte Satz, daß $\Gamma(i)$ zugleich die allgemeinste Gewichtsfunktion darstellt, in der die q, p nur in der Verbindung $\varepsilon(q, p, a)$ auftreten, ist aber in der ausgesprochenen Allgemeinheit nicht zutreffend, wenn man eine beliebige endliche Begrenzung des μ -Raumes auch unter Beibehaltung der übrigen Ehrenfestischen Voraussetzungen annimmt, um den realen Verhältnissen Rechnung zu tragen. Vielmehr muß dann i unbedingt eine adiabatische Invariante sein, was aber für periodische Systeme von einem Freiheitsgrade (den von

1) P. Hertz, l. c. Nr. 250, insbes. Anm. 4 auf S. 484. Für die Quantentheorie dürften solche Systeme kaum in Betracht kommen. Vgl. dazu M. Planck, Berl. Ber. 1916, S. 653, § 4—6, wo schon von dem Boltzmannschen Prinzip Gebrauch gemacht wird.

Ehrenfest allein behandelten Fällen) stets zutrifft¹⁾.

Der (l. c. nicht veröffentlichte) Beweis der Ehrenfestschen Lösung ergibt sich auch auf folgendem einfachen Wege²⁾, der die Beziehung zu dem Obigen klar hervortreten läßt. Wie in § 2 gezeigt wurde, ist bei Berücksichtigung der Integration über den ganzen unendlichen μ -Raum das Verschwinden des mikrokanonischen Mittel-

wertes von $\frac{\partial G}{\partial a}$ notwendig und hinreichend für das Erfülltsein von (3) und das Boltzmannsche Prinzip. Andererseits ist von P. Hertz gezeigt worden³⁾, daß das Phasenvolumen i adiabatisch-invariant ist, wenn man an Stelle des Zeitmittelwertes einen mikrokanonischen Mittelwert verwendet. Dies bedeutet also (vgl. (5)), daß der mikrokanonische Mittelwert von

$$\frac{\partial i(q, p, a)}{\partial a} = \frac{\partial i(\varepsilon, a)}{\partial a} = \frac{\partial i}{\partial a} + \frac{\partial i}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial a}$$

verschwindet, womit der Beweis, daß G gleich $I(i)$ sein kann, bereits erbracht ist.

Die erwähnte Folgerung, die Ehrenfest aus diesem Resultat für die allgemeinste, nur von der Energie $\varepsilon(q, p, a)$ und den a abhängige Gewichtsfunktion gezogen hat, läßt sich — nun wieder unter der Voraussetzung endlicher Begrenzungen des μ -Raumes — in folgender Weise verallgemeinern: Es sei

$$\psi(q, p, a)$$

ein zeitfreies Integral der Bewegungsgleichungen des Teilsystems und $J(\psi, a)$ eine adiabatische Invariante, welche die Phasen q, p nur in der Verbindung $\psi(q, p, a)$ enthält. Dann ist jede weitere adiabatische Invariante, die auch diese Eigenschaft besitzt, eine „reine“ Funktion von J . Da J offenbar längs der „ ψ -Flächen“ im μ -Raume konstant ist, läßt sich die adiabatische Invariante $K(\psi, a)$ auf die Form $K_1(J, a)$ bringen. Nach (5) muß aber sein

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0$$

und gleichzeitig

$$\frac{\partial K_1}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial a} + \frac{\partial K_1}{\partial a} = 0.$$

Es folgt also, daß die zeitlich konstante Größe

$$\frac{\partial K_1}{\partial a} \text{ Null sein muß, oder daß}$$

$$K(\psi, a) = K_1(J)$$

ist, wie zu beweisen war.

§ 6. Es ist nun leicht, die Bedeutung der gewonnenen Resultate für die Adiabatenhypothese zu erkennen. Wenn die Quantenansätze, wie die Adiabatenhypothese verlangt, auf Grund adiabatisch-invarianter Größen vorgenommen wurden, sind auch die „Quantengewichte“ ϕ als Funktionen der Elementargebiete, d. h. allein der Quantenzahlen, die den einzelnen Elementargebieten zugeordnet sind, adiabatische Invarianten. Die Quantengewichte sind aber nichts anderes als die jetzt diskontinuierliche Gewichtsfunktion G , die somit adiabatisch-invariant ist, wenn es die Quantenansätze waren.

Die Quantenansätze von Sommerfeld für periodische Systeme und von Epstein und Schwarzschild für bedingt periodische Systeme sind, wie Ehrenfest und Burgers gezeigt haben, in der Tat adiabatisch-invariant. Die Abgrenzung des μ -Raumes wird hier durch gewisse ganzzahlige Grenzwerte bewirkt, welche von den einzelnen Quantenzahlen nicht überschritten werden können. Aus der adiabatischen Invarianz der Quantenansätze folgt, daß diese Grenzwerte bei einer adiabatisch-reversiblen Beeinflussung unverändert bleiben, dasselbe folgt aus der Quantenhypothese für eine infinitesimale Wärmezufuhr; die Grenzen von (4) verhalten sich daher, wie oben bereits vorweggenommen wurde, gegen eine infinitesimale, reversible Beeinflussung überhaupt invariant. Nach dem Obigen läßt sich also das thermodynamische Verhalten einer begrenzten Gesamtheit periodischer oder bedingt periodischer Teilsysteme (Moleküle) mit Hilfe des Boltzmannschen Prinzips berechnen und das gleiche gilt notwendig-hinreichend von Gesamtheiten beliebiger stabiler Teilsysteme beliebig vieler Freiheitsgrade, deren Quantenansätze auf Grund adiabatisch-invarianter Größen vorgenommen wurden.

Die Ausdehnung der Quantentheorie auf Systeme von mehreren Freiheitsgraden ist merkwürdigerweise ganz ohne Rücksicht auf den II. Hauptsatz der Thermodynamik erfolgt. Die außerordentlich bedeutsame, prinzipielle Ableitung des Strahlungsgesetzes, die von Einstein für Moleküle beliebig vieler Freiheitsgrade gegeben worden ist¹⁾, berücksichtigt zwar (abgesehen von der Verwendung einer verallgemeinerten kanonischen Verteilung) den II. Hauptsatz in der Gestalt des Wienschen Verschiebungsgesetzes, gestattet aber nicht, die

1) P. Ehrenfest, II, § 5.

2) Die Kenntnis des ursprünglichen Beweises erhielt der Verfasser durch eine gütige, briefliche Mitteilung Herrn Professors Ehrenfest, wofür er ihm zu großem Danke verpflichtet ist.

3) P. Hertz, l. c. Nr. 270, S. 534; P. Ehrenfest II, § 5, Anm. 1 auf S. 335.

1) A. Einstein, diese Zeitschr. 18, 121, 1917.

Tragweite dieser Einschränkung für die quantentheoretisch ausgezeichneten Zustände zu ermessen. Diese Lücke wird von der Adiabatenhypothese ausgefüllt. Eine wichtige Seite ihrer sonst noch ungeklärten physikalischen Bedeutung besteht also darin, daß sie die Verträglichkeit der auf Systeme von mehreren Freiheitsgraden erweiterten Quantentheorie mit dem II. Hauptsatz der Thermodynamik garantiert, in der Form, in der dieser durch das Boltzmannsche Prinzip zum Ausdruck gebracht wird.

Berlin, Januar 1918.

(Eingegangen 5. Februar 1918.)

Über den Sehraum.

Von H. Witte.

(Vorläufige Mitteilung über eine gemeinsam mit Herrn E. Laqueur unternommene Arbeit.)

Mit Tafel II.

I.

Ein Gegenstand werde ins Auge gefaßt. Etwa der Federhalter, das Papierblatt, der Schreibtisch, das Fenster, draußen ein Weg, ein Haus, ein Baum, ein Wald, ein Berg. Eine seiner wahren Längenabmessungen („Größe“) senkrecht zur Blickrichtung betrage L , sein wahrer Abstand vom Auge R wahre Längeneinheiten. Dann ist der zugehörige Schwinkel φ gegeben durch $2 \arctan L/2R$, in erster Näherung

$$\varphi = \frac{L}{R}. \quad (1)$$

Diesen Winkel φ nennt man in der Physik die „scheinbare Größe“. Man sagt etwa: Die scheinbare Größe des Mondes beträgt $1/2$ Grad; die scheinbare Größe der Venus schwankt zwischen 10 und einigen 60 Sekunden; vollständige Sonnenfinsternisse sind möglich, weil die scheinbare Größe von Sonne und Mond nahezu gleich ist; ein Fernrohr vergrößert den Schwinkel und damit die scheinbare Größe.

Die scheinbare Größe eines Gegenstandes entspricht danach dem Schwinkel oder auch dem Netzhautbild und nimmt umgekehrt proportional mit der Entfernung ab.

II.

Hiergegen wendet sich die psychologisch-physiologische Wissenschaft. Sie sagt etwa folgendermaßen:

Wäre die physikalische Begriffsbestimmung richtig, so müßte man die Vorstellung haben: Der Stuhl im Nebenzimmer ist für dich vielmals zu klein; wenn du dich hinten an die Wand

stellst, rennst du die Zimmerdecke ein und trittst ein Loch in den Fußboden; das Konversationslexikon im Bücherbord kannst du in die Tasche stecken; das Haus drüben ist eine Zwergenwohnung; Nachbars rechteckiger Garten ist schief; und so weiter. Diese Vorstellungen hat man aber nicht. Man zweifelt keinen Augenblick, daß der Garten ein gleichmäßiges Viereck ist; man empfindet das Haus als dem eignen vergleichbar, die entfernte Zimmerwand als gleich großen Teil des Wohnraums; beim Blick auf das dicke Lexikon spannt sich die Hand im Gefühl des breiten Umfangs des Buches; der Stuhl ladet zum Sitzen ein. Wird zum Beispiel der Stuhl von mir weg bis in die fernste sichtbare Ecke des langen Nebenzimmers getragen, so bleibt er für mein Auge immer der Stuhl, auf den ich mich setzen kann. Ich sehe ihn immer gleich groß, obwohl sein Schwinkel φ schließlich weniger als den zwanzigsten Teil des Anfangswertes beträgt.

Die Erklärung dafür: Zwar wird das Netzhautbild, der Schwinkel φ mit wachsender Entfernung immer kleiner. Genau im selben Verhältnis wächst aber eben die Entfernung R und dies Wachstum rechnen wir unbewußt ein. Wir sagen uns: In R -facher Streckenentfernung gehört zu jeder Schwinkel-Einheit der R -fache Größenwert; wir vervielfachen also das Netzhautbild unbewußt mit der Entfernung R . Das heißt, wir bilden

$$l = \varphi \cdot R \quad (2)$$

oder, eingesetzt

$$l = \frac{L}{R} \cdot R.$$

So hebt sich die Entfernung R wieder heraus, und wir erleben

$$l = L. \quad (3)$$

Die „scheinbare Größe“ l ist nicht der Schwinkel φ , sondern die wahre Größe L .

III.

Diese Lehre spielt in psychologischen und physiologischen Schriften eine große Rolle. Als Belege werden hauptsächlich angeführt:

A. Das Erlebnis selbst, wie soeben geschildert. Bei abnehmendem Schwinkel wird derselbe Gegenstand durch Anrechnen der zunehmenden Entfernung gleich groß gesehen.

B. Eine Art von Umkehrung. Bei gleichem Schwinkel (Netzhautbild) wird größerer Entfernung ein proportional größerer Gegenstand zugeordnet. Einfachstes Beispiel der bekannte Nachbildversuch. Man erzeuge, etwa aus deutlicher Sehweite, ein (negatives) Nachbild im Auge; nähert sich die Bezugsfläche, z. B. Hand,

so wird das Nachbild kleiner und kleiner gesehen, entfernt sie sich, größer; letzteres sehr auffallend beim Hinwerfen auf die Zimmerwand.

Der Satz selber — also das Aufheben der Verkleinerung des Schwinkels φ durch unbewußtes Multiplizieren mit der Entfernung R — heißt der „Schwinkelsatz“ (besser, „Schwinkel-Aufhebungssatz“) und wird mit Entschiedenheit der physikalischen Begriffsbestimmung entgegengehalten¹⁾.

IV.

Endgültig gefaßt wird er allerdings erst durch eine kleine Einbesserung. Es ist den Vertretern dieser Lehre nicht entgangen, daß eine solche nötig ist. Sie weisen selber auf mannigfache Beispiele hin. Das einfachste ist die scheinbare Konvergenz paralleler Linien. Wäre der Satz streng richtig, so müßten etwa parallele Eisenbahngleise dem entlang blickenden Auge streng parallel erscheinen. Das tun sie jedoch nicht, sie laufen in sehr großer Entfernung zusammen. Ein anderes Beispiel: Beim Hinausblicken aus dem fahrenden Wagen dürften sich, wegen der Parallelität, die zur Fahrtrichtung senkrechten Landschaftslinien nicht drehen. Sie drehen sich aber doch. Und so fort.

Diese und ähnliche Abweichungen erklärt die psychologisch-physiologische Wissenschaft so: Wir machen bei jenem unbewußten Einrechnen der Entfernung einen ebenso unbewußten Fehler. Wir unterschätzen die wahre Entfernung R , das heißt jenes R , mit dem wir unbewußt multiplizieren, das R im Zähler. Nennen wir die wahre Entfernung nach wie vor R , die geglaubte r , so kommt statt (2) jetzt:

$$l = \varphi \cdot r = \frac{L}{R} \cdot r, \quad (4)$$

es wird nicht

$$l = L,$$

sondern

$$l = \frac{r}{R} \cdot L. \quad (5)$$

Also in der Tat weniger als L .

V.

Wieviel weniger, das hängt von dem Zahlenwert des Unterschätzungsfaktors oder Verkleinerungsfaktors

$$\frac{r}{R}$$

¹⁾ Also auch der etwaigen Behauptung, man sehe „perspektivisch“. Gemäß den obigen Beispielen sieht man eben nicht perspektivisch. Perspektivisches Zeichnen ist in diesem Sinne die Kunst, entgegen dem naturgewohnten Eindruck dennoch schwinkeltreu zu zeichnen.

ab. Derselbe ist naturgemäß wieder eine Funktion von R . Es fragt sich bloß, welche. Zunächst kann man, im Sinne der psychologisch-physiologischen Auffassung, nur sagen: Die Funktion muß die Grundforderung erfüllen, daß der „Sehraum“ dem wahren Raum bis auf sehr beträchtliche Entfernungen hin sehr nahe bleibt. Denn grundsätzlich sollen durchaus die Ausführungen des § 2 zu Recht bestehen. Eigentlich sehen wir gemäß dem strengen Schwinkel-Aufhebungsgesetz die Gegenstände mit beliebig wachsender Entfernung R dauernd ganz gleich groß. Es darf sich lediglich um eine Korrektur handeln, hauptsächlich für große Entfernungen. Diese Korrektur soll dann solche Erscheinungen wie das Zusammenlaufen der Schienen usw. erklären.

VI.

Es hat sich nun schließlich ein Mathematiker, Herr v. Sterneck¹⁾, der außerordentlichen Mühe unterzogen, auf Grund zahlreicher Messungen eine einfache Funktion r/R zu bestimmen, die das leistet, was die Psychologen und Physiologen — immer im Gegensatz zu den Physikern — wollen.

Sein Verfahren ist dieses.

Zunächst werden im Gelände Entfernungen geschätzt. Von einem festen Standpunkte O aus gibt man die relativen Maßzahlen an für die scheinbaren Entfernungen $r_1 = OP_1$, $r_2 = OP_2$ usw. einer Anzahl von Geländepunkten P_1 , P_2 usw. Setzt man die scheinbare Entfernung r_1 des nächstbenachbarten Punktes gleich 100, so erscheinen etwa Zahlen wie 120, 150, 200 usw. Mit diesen Zahlen vergleicht man die bekannten wirklichen Entfernungen R_1, R_2 usw. Bildet man die Verhältnisse $r_1:r_2:r_3$ usw. einerseits, $R_1:R_2:R_3$ andererseits, so zeigt sich bereits, daß die beiden Reihen nicht übereinstimmen. Die erste (r) steigt verhältnismäßig nicht so schnell an wie die zweite (R). Allerdings fehlen nun noch die absoluten Zahlenwerte für die r . Sie können aber offenbar gewonnen werden auf Grund der Ausgangsvoraussetzung, daß in der Nähe Sehraum und wahrer Raum übereinstimmen, $r = R$ sein muß. Herr v. Sterneck verfährt etwas anders. Er führt noch eine zweite unbezweifelbare Grundtatsache ein. Bei außerordentlich weiten Entfernungen sind wir überhaupt außerstande, Entfernungsunterschiede zu behaupten; die Beispiele ferner Berge und Wolken, der Himmelskörper zeigen das deutlich. Von einer gewissen weiten Entfernung R an erscheinen alle noch weiteren R gleich groß, die geschätzte Entfernung r erreicht einen Grenzwert

¹⁾ R. v. Sterneck, Der Sehraum auf Grund der Erfahrung. Leipzig, J. A. Barth, 1907.

$$r_{\max} = (r)_{R=\infty} = \varrho,$$

der nicht überschritten werden kann. Es gelingt Herrn v. Sterneck nun, eine äußerst einfache Funktion¹⁾ anzugeben, die mit einem Griffe beide Bedingungen, diese wie die vorgenannte, erfüllt und die sämtlichen relativen Maßergebnisse in befriedigender Weise zusammenfaßt.

VII.

Kennt man die r in absoluten Einheiten, so kann man auch die Quotienten r/R angeben und damit auch die Verkleinerung l/L . Auf die letztere kommt es uns an. Ich habe in der folgenden Tafel die Werte ausgerechnet, wie sie sich aus der Sterneckschen Funktion für Durchschnittsgelände und hellen Tag ergeben²⁾. Um das Bild zu vervollständigen, sind auch die absoluten Zahlenwerte für die scheinbaren, zu klein geschätzten Entfernungen r eingesetzt.

Wahre Entfernung R	Scheinbare Entfernung r	Unterschied $R-r$	Verkleinerungsverhältnis		Sehwinkel φ
			auf $\frac{l}{L}$	um $\frac{L-l}{L}$	
0 m	0 m	0	100 Proz.	0 Proz.	—
1 m	0,9999	0,1 mm	99,99 "	0,01 "	1
10	9,99	1 cm	99,9 "	0,1 "	10 Proz.
100	99	1 m	99 "	1 "	1 Proz. = 10^{-2}
1 km	0,909 km	91 m	90,9 "	9,1 "	10^{-3}
10 km	5 km	5 km	50 Proz.	50 Proz.	10^{-4}
100 km	9,09 km	90,91 km	rund 9 Proz.	91 Proz.	10^{-5}
1000	9,9	↓	1 Proz. = 10^{-2}	↓	10^{-6}
10000	9,99	↓	10^{-3}	↓	10^{-7}
100000	9,999	↓	10^{-4}	↓	10^{-8}
1 Million km	9,9999	↓	10^{-5}	↓	10^{-9}
↓	↓	↓	↓	↓	↓
∞	10 km	∞	0	100 Proz.	0

Herrn v. Sternecks Formel leistet demnach genau das, was die Psychologen und Physiologen mit ihrem korrigierten Sehwinkel-Aufhebungssatz behaupten.

Als anschaulichstes Beispiel betrachte man einen Menschen, der sich vom Beobachter aus geradlinig bis ins Unendliche entfernt. Eigentlich, wenn der Sehwinkel-Aufhebungssatz genau gälte, sollte er dauernd gleich groß aussehen, l/L dauernd = 100 Proz. Nun die gewünschte Korrektur. Innerhalb eines sehr beträchtlichen Nahraums, bis 1 km, bleibt die scheinbare Entfernung r der wahren Entfernung R fast gleich. Infolgedessen wird nach dem Sehwinkel-Auf-

hebungssatz der Mensch bis dahin fast in voller Größe gesehen. Bis 100 m wird er einen Finger breit (1 Proz.) kleiner, innerhalb der dann folgenden 900 m noch lange nicht einen Kopf kleiner (9 Proz.). Erst von hier ab fängt die Verkleinerung richtig an. Bei 10 km liegt ein Scheidewert. Hier erscheint der Mensch genau halb so groß wie er ist, also so groß wie ein halbwüchsiges Kind, wohlverstanden dieses in nächster Nähe. Wird die wahre Entfernung R noch größer, 100 km und mehr, so nähert sich die scheinbare Entfernung r merklich dem Grenzwert 10 km. Der ganze unendliche Rest des wahren Raums rückt in den schmalen Gürtel des letzten Schein-Kilometers unsres Sehraumes zusammen. Die Unterschätzung der wahren Entfernung wird daher jetzt immer stärker und stärker, ebenso die Verkleinerung der scheinbaren Größe. Trotzdem aber bleibt immer noch auf beträchtliche Entfernungen hin eine

ansehnliche Größenwertung bestehen. Bohrt man ein Loch durch die Erde oder blickt mit Hilfe von Spiegeln im Erdhalbkreis, 20000 km, herum, so sieht unser Auge unsre Gegenfüßler immerhin ungefähr so groß wie ein Millimeter in der Nähe; beim Blick auf eine kleine Stadt in jener Ferne recken sich die Arme, um etwa ein Meter als Vergleichsgröße in der Luft abzugreifen.

VIII.

Die letzte Spalte zeigt aufs deutlichste den großen Unterschied gegenüber der physikalischen Begriffsbestimmung. Hier habe ich (unter Vernachlässigung der Tangensfunktion) die wirkliche Sehwinkelabnahme eingetragen. In der Entfernung 1 m habe ich den Sehwinkel gleich 1 gesetzt, so können die Zahlen unmittelbar mit

1) $\frac{\varrho}{\varrho + R}$.

2) Bei anderen Gelände- und Lichtverhältnissen ändert sich der Parameter $\varrho = r_{\max}$.

denen für die psychologisch-physiologische Verkleinerung verglichen werden.

Die psychologischen Zahlen nehmen in der Tat außerordentlich viel langsamer ab. Auf 10 m ist der psychologische Wert rund 10 mal größer, auf 100 m fast 100 mal (Psychologengröße um 1 Proz., Sehwinkel auf 1 Proz. verkleinert), in Entfernungen von der Größenordnung des Erdhalbkreises 20000 km hat das Wertverhältnis längst den festen Betrag 10000 zu 1 erreicht, auf dem es dann stehen bleibt.

Der Unterschied ist eben ein grundsätzlicher. Der psychologisch-physiologische „Sehraum“ ist und bleibt grundsätzlich der wahre Raum, nur mangels zutreffender Schätzung der Entfernungen nicht genügend weit in die unendliche Umwelt hinausgestreckt. Der physikalische „Sehwinkel“ besagt grundsätzlich ganz etwas anderes und hat mit dem räumlichen Erfassen der Umwelt zunächst nicht das geringste zu tun.

Es ist nötig, diesen grundsätzlichen Unterschied, sowie die dadurch bedingte außerordentliche Wertedifferenz streng festzuhalten. Zur Veranschaulichung gebe ich noch ein graphisches Bild. Abszisse ist die wahre Entfernung R ,

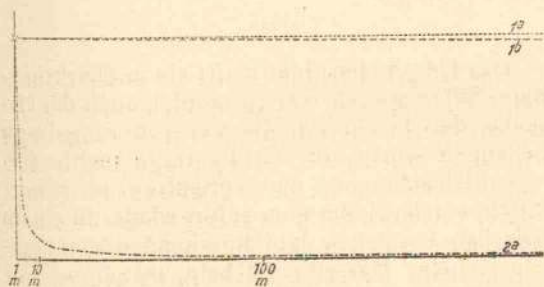


Fig. 1.

Ordinate die scheinbare Größe bzw. der Sehwinkel, beide in der Entfernung 1 m gleichgesetzt. Kurve 1a vertritt den unverkürzten, grundsätzlichen psychologisch-physiologischen Sehraum, in dem die scheinbare Größe dauernd gleich der wirklichen bleibt (wahrer Raum). Kurve 1b gehört zu dem berichtigten, einwärts geschobenen Psychologen-Sehraum. In weitestem Abstand von ihr läuft die physikalische Sehwinkelkurve 2a. Für große R nähert sich allerdings auch die Psychologenkurve der Abszissenachse, aber das Ordinatenvverhältnis bleibt dann dauernd $10^4:1$.

IX.

Besonders aufmerksam machen möchte ich noch auf den Endwert der scheinbaren Entfernung $r=10$ km. Er ist ja derjenige Parameter, der die Maße des Scheinraums festlegt. Man wird gern zugeben: Wenn die ganze

psychologisch-physiologische Auffassung überhaupt zu Recht bestehen soll, dann sind jedenfalls diese 10 km ein durchaus vernünftiger und angemessener Wert. Würden kleinere Zahlen angegeben, so könnte man nicht mehr denjenigen Eindruck der Ausgedehtheit und Weite des Raumes haben, den man tatsächlich hat.

Die Zahlenangaben Herrn v. Sternecks liegen also in jeder Weise durchaus in der Sache selber begründet, sie sind der wirkliche richtige zahlenmäßige Ausdruck derjenigen Erlebnistatsachen, die die Psychologen und Physiologen erleben und erlebt haben und zum Ausdruck bringen wollen.

Wenn ich mir daher im folgenden gestatte, diesen Sehraum der Psychologen nach seinem Errechner den Sterneckschen Sehraum zu nennen, so stelle ich damit die Tatsache fest, daß Herr v. Sterneck genau das ausgeführt hat, was die psychologischen und physiologischen Theoretiker wünschen. Die tragenden Grundvoraussetzungen sind diese: 1. Die scheinbare Entfernung r wird gegenüber der wahren zunächst wenig, weiterhin mehr unterschätzt, 2. der Sehwinkel-Aufhebungssatz: auf diese scheinbare Entfernung r hin wird jeder Körper innerhalb seines starren Sehwinkel-Kegels verlegt und in derjenigen Größe erlebt, die er an dieser Stelle hat. — Auf Grund dieser Voraussetzungen kommt man mit Notwendigkeit zum Sterneckschen Sehraum.

X.

Physikalisch bemerkenswert ist besonders die Erklärung, die sich aus dem psychologisch-physiologischen Sehraumgesetz für die scheinbare Gestalt des Wolkenhimmels ergibt. Im Sterneckschen Sehraum ist der Wolkenhimmel eine Kuppel von (im Mittel) folgenden scheinbaren Abmessungen: Durchmesser 20 km, Höhe 2 km.

Würde man die oft gemachte¹⁾ Annahme wiederholen, die scheinbare Wölbung des unbewölkten Himmels sei auf die des Wolkenhimmels zurückzuführen, so käme man nach Herrn v. Sterneck auf ähnliche Ziffern, nur würde die Höhe der Kuppel etwas größer sein.

Zugleich würde man damit in bekannter Weise eine erneute, nunmehr quantitativ belegte Antwort gefunden haben auf die uralte berühmte Frage nach der scheinbaren Vergrößerung der Sonne, des Mondes, der Sternbilder usw. am Horizont; Mond usw. usw. bei gleichem Sehwinkel, innerhalb ihres starren Sehwinkel-Kegels auf entferntere Teile der Kuppel verlegt, deshalb größer gesehen.

¹⁾ Helmholtz, Handbuch der physiologischen Optik, S. 631. Leipzig, Voß, 1867.

Herr v. Sterneck macht das allerdings so nicht, aus Gründen, die sogleich hervortreten werden.

XI.

Die Frage nach der Vergrößerung des Mondes usw. am Horizont ist seit dem Altertum sehr oft behandelt worden, auf die verschiedenste Weise, von den erlauchtsten Geistern. Aber sie ist durchweg, über die ganzen Jahrhunderte hin, merkwürdig einseitig aufgestellt. Man hat immer nur gefragt: Warum sieht der Mond unten, am Horizont, größer als oben — oder oben kleiner als unten — aus? aber niemals: Warum sieht er — sei es oben, sei es unten — so groß aus, wie er aussieht?

XII.

Er sieht nämlich irgendwie groß aus. Es läßt sich auch unmittelbar einsehen, daß er irgendwie groß aussehen muß. Sähe er nicht irgendwie groß aus, dann könnte er nicht oben kleiner als unten, oder unten größer als oben aussehen.

Das feste Größenmaß beträgt für Durchschnittsmenschen und Durchschnittsumstände etwa einen Teller. Wenn der Mond groß aussieht, also tief steht, dann sieht er aus wie ein mittelgroßer bis großer Teller; wenn er klein aussieht, hoch steht, wie ein kleiner Teller bis etwa Dauerwarenbüchsendeckel. Die Sonne¹⁾ oben, klein, wie ein Teller; unten, groß, wie eine Schüssel oder ein Waschbecken. Man neigt von Kindheit her dazu, diese Größen mit beiden Händen, als ob man eine unsichtbare Scheibe hielte, nachzubilden; man kann unschwer genauere Maße festlegen und mit Versuchspersonen bestätigen. Genau so Abstand von Sternen: Beim Anblick der drei Gürtelsterne des kulminierenden Orion greifen die Hände einen unsichtbaren Leibriemen von etwa 60 cm Querdurchmesser nach; Sirius und sein Nachbarstern β des großen Hundes treiben, wenn sie sehr tief stehen, die Hände über halbklafterweit auseinander; Procyon und β Canis minoris je nach Höhe vielleicht eine Spanne weniger; Jupiter und Venus sah man bei der Konjunktion von 1916 fast eine Handbreit einander nahe kommen; usw.

XIII.

Man sieht nun unmittelbar, daß diese Größenmaße mit den obigen Sehraumlehren ganz und gar nicht in Einklang zu bringen sind.

Nach dem „Schwinkel-Aufhebungsgesetz“ müßte folgendes stattfinden:

1) Mit Irradiation.

1. Nach dem strengen Gesetz müßte der Mond innerhalb seines Schwinkel-Kegels an diejenige Stelle verlegt werden, wo er sich wirklich befindet und demgemäß so groß gesehen werden wie er ist, also rund 3500 km groß.

2. Nach dem eingebesserten Gesetz, also im Sterneckschen Sehraum, dies zwar nicht, sondern soviel kleiner, wie die Entfernungs-Unterschätzung ergibt. Die scheinbare Entfernung r beträgt am Horizont 10 km (Maximalausdehnung des Sehraums), die wahre Entfernung R durchschnittlich 385 000 km, so ergibt sich eine scheinbare Größe l von etwa 90 m. So groß müßte der tiefstehende Mond gewertet werden, d. h. wohlverstanden wie 90 m in nächster Nähe; wie ein Turm im nächsten Vordergrund. Der hochstehende Mond zwar etwas weniger groß, aber von gleicher Größenordnung, über hausgroß.

Das sind ganz gehörig große Zahlen. Ganz anders als jene Tellergrößen, jene 20 oder gar 10 cm. Die Abweichung beträgt mehr als 40000 Proz. Es ist kein Gedanke daran, die Theorie jenes „Sehraums“, turmhoher Mond usw., und diese Teller-Erlebnisse unter einen Hut zu bringen.

XIV.

Das Empfinden: hier klappt ein unüberbrückbarer Widerspruch, war vermutlich auch die Ursache, daß bisher nur die Vergrößerungsfrage behandelt wurde, die Größenfrage nicht. Gelegentlich schimmert die Größenfrage allerdings durch, verschwindet aber sofort wieder in einem zwischen den Zeilen dahinhuschenden Verlegenheitslächeln. Dasselbe Lächeln, manchmal mit leiser Entrüstung vermischt, daß man der Versuchsperson so kindliche Anschauungen zumute, begegnet einem übrigens fast täglich, wenn man gebildete Laien vornimmt und ihnen die obigen Tellergrößen usw. nach mehr oder minder lebhaftem Sträuben entlockt.

Besonders anschaulich wird das Mißverhältnis, wenn man sich folgende Frage vorlegt:

Gegeben der feste wahre Mond-Schwinkel von durchschnittlich 30 Minuten. An welcher Stelle dieses Raumkegels, der sich vom Beobachter fast 400 000 km hin bis zum Monde erstreckt und dort 3500 km auseinandersperrt, ist eine ideale Ersatz-Mondscheibe befestigt zu denken, und wie groß muß dieselbe sein, wenn sie nach dem Schwinkel-Aufhebungssatz wirklich so groß wie ein Teller aussehen soll?

Rechnet man zunächst ohne Rücksicht auf die Sternecksche Einbesserung im unverkürzten Raum, so kommt, Tellergröße = 20 cm gesetzt:

$$\frac{x}{20 \text{ cm}} = \frac{385\,000}{3480},$$

also rund

$$x = 22 \text{ m.}$$

Da in dieser Entfernung die Sternecksche Sehraumverkürzung unter 1 Proz. bleibt ($r=R$), so ist dieses mit genügender Genauigkeit der gesuchte Wert R , und ebenso ist der angesetzte Scheinteller demjenigen wahren Teller gleich, der in diesem Abstand befestigt zu denken ist. Mit zunehmender Erhebung des Mondes wird der Ersatzteller noch kleiner, also die Entfernung $R=r$ ebenfalls. Ähnlich Sonne, Sterne, Sternenhimmel.

Diese Himmelsgebilde fallen daher aus dem übrigen „Sehraum“ völlig heraus. Oder vielmehr, sie fallen in ihn an die denkbar unmöglichste Stelle mitten hinein: sie, die allerfernsten, in die allernächste Beobachtungsnähe.

XV.

Man muß in den Mondarbeiten usw. außerordentlich lange suchen, bis man auf ein bestimmtes Erfassen dieser Größenfrage stößt. Wir fanden sie, als wir schon alle Hoffnung aufgegeben hatten, klar aufgestellt in eben jenem bahnbrechenden Buche von Sterneck¹⁾. Hier wird schlicht und klar gesagt: Der Mond usw. sieht so und so groß aus; er wird also in seinem Sehwinkel-Kegel auf die und die außerordentlich nahe Entfernung verlegt; es besteht eine Bezugsfläche („Referenzfläche“), auf die wir den Mond verlegen. Entsprechend Sonne usw.

Herr v. Sterneck teilt umfassende und sorgfältige Berechnungen mit. Der ganze Abschnitt ist aber in seinem Buche eigentlich eine einzige große Frage.

Wir haben einerseits den Sehraum, so wie ihn die obige Zahlentafel (S. 144) oder das graphische Bild darstellen. Also jenes ausgedehnte große Raumgebilde wie oben geschildert, in seinen scheinbaren Maßen nach allen Richtungen hin viele Kilometer groß, praktisch abgeschlossen etwa durch jene Wolkenkuppel von 20 km Durchmesser und 2 km Höhe. Nun sollten dort und dorthinter die himmlischen Gebilde kommen, aber sie kommen da nicht. Sondern ihre „Bezugsflächen“ stehen in Gestalt winziger Schalen von der Größenordnung $r=20$ Meter lächerlich klein und eng in der innersten Mitte. Auf ihnen in glänzender Einsamkeit die silbernen Teller und goldenen Becken für Sonne und

Mond, die greifbar zusammengedrückten blitzenden Leuchtpunkte der Sterne, die „Schwerter“, „Drachen“, „Schlangen“ usw. der Kometen, die „Sichel“ des Mondes, die kopfgroßen Feuerkugeln, usw. usw.

Zwischen beiden aber, dem großen Sehraum¹⁾ bis zu seiner gewaltigen Wolkenkuppel hin und den merkwürdigen Schälchen mitten drinnen nicht die geringste sachliche Beziehung oder Zusammenhang. Die Referenzflächen haben mit dem Sehraum objektiv und subjektiv nicht das geringste zu tun.

Und zu dem allen hinzu noch jenes eigentümliche Gefühl, das man nicht loswerden kann: Eigentlich siehst du den Mond, namentlich wenn er hoch am Himmel steht, in dieser seiner kalten blanken Scheibengröße durchaus nicht nah, sondern weit, weit fern; und so die andern Himmelskörper auch.

XVI.

Wenn man die Frage nach allen Richtungen durchdenkt, kommt man zu allerhand Ergebnissen, deren Mitteilung ich uns auf später versparen muß. Hier will ich nur den einen grundsätzlichen Gedankengang andeuten, der in der Sehraum-Auffassung weiterführt.

Es drängt sich unabweisbar der Gedanke auf: Das Tellersehen des Mondes usw. muß doch mit „Sehraum“ irgend etwas zu tun haben. Sonne, Mond und Sterne usw. sind Sehdinge, Sehgegenstände. Sie müssen also vernünftigerweise in einem Sehraum unterzubringen sein. Es muß möglich sein, diese himmlischen Gebilde aus ihrer glänzenden Vereinsamung zu befreien und irgendwie anderen Sehdingen, oder die anderen Sehdinge ihnen, zu einem stetigen und sinnvollen Gesamtbilde zuzugesellen.

XVII.

Es scheint nun die folgende Lösung möglich zu sein.

Der Psychologen-Sehraum (Sterneckscher Sehraum) werde nicht angezweifelt. Er möge, zumal er so lange und so entschieden von den psychologischen und physiologischen Fachgelehrten auf Grund eingehender Erwägungen behauptet worden ist, unangetastet bleiben²⁾.

1) Die Maximalkonstante ϕ ändert sich allerdings mit den Lichtverhältnissen. Aber das hilft nichts. Man sieht den Mond ja auch bei Tage. Und die Sonne immer.

2) Wiewohl die Frage nicht von der Hand gewiesen werden kann, ob die oben wiedergegebenen Auffassungen nicht in sich selber schon Schwierigkeiten enthalten. So will mir scheinen, als ob im Psychologen-Sehraum Sehgegenstände bei noch recht beträchtlicher scheinbarer Größe in gewisser Entfernung unetig verschwinden müßten. Den Gegenfüßler von § 7, den man 1 mm groß sehen sollte, kann man tatsächlich längst nicht mehr sehen, denn

1) a. a. O. S. 43–90. In der mir nicht zugänglichen dritten Auflage (1910) von Helmholtz' Physiologischer Optik hat der Bearbeiter, v. Kries, ebenfalls die Größenfrage gewürdigt, wie ich einer soeben erschienenen Arbeit von R. H. Goldschmidt entnehme (Mitt. d. Ver. v. Freunden d. Astron. 27, Heft 9, S. 97). Sehr eingehend auch Höfler, vgl. Didaktik der Himmelskunde. Teubner 1913, S. 195. (Anm. bei der Korrektur.)

Wenn dieser Sehraum (Sterneckscher Sehraum) bestehen bleibt, dann gibt es noch einen zweiten Größen-Sehraum bzw. eine zweite Art des Größen-Sehens.

In diesem zweiten Sehraum bzw. nach dieser zweiten Art des Sehens sehen wir Sonne, Mond und Sterne usw. Aber nicht nur diese, die einsam glänzenden Himmelsbilder, sondern alle Sehdinge überhaupt. Alle Sehdinge überhaupt sehen wir — oder können sie wenigstens sehen — noch auf eine zweite Weise.

Diese zweite Art des Sehens bleibt nicht der psychologischen Auffassung nahe, welche, von ihrem Sehwinkel-Aufhebungssatz ausgehend, eigentlich die Gegenstände immer in wahrer Größe sehen will, sondern gerade umgekehrt der physikalischen Begriffsbestimmung, welche unter scheinbarer Größe den Sehwinkel selber versteht.

XVIII.

Am anschaulichsten läßt sich, was damit gemeint ist, an solchen Gegenständen auseinander setzen, die unseren Greifmaßen oder sonstigen unmittelbaren Erlebnismaßen zugänglich sind. Für größere Gegenstände ist der Gedanke sinn gemäß zu übertragen.

Nehmen wir etwa wieder den Stuhl des § 2, der von uns weggetragen wird. In unmittelbarer Nähe (volle Erlebnishöhe, „Greifhöhe“) hat der Stuhl eine unmittelbare Erlebnisgröße, „Greifgröße“. Das ist die wahre Größe L . Die physikalische Begriffsbestimmung¹⁾ würde dann nach dem Gesetze

$$\varphi = \frac{L}{R}$$

fordern: in doppelter Entfernung wird er halb so groß gesehen, in dreifacher ein Drittel, in zehnfacher ein Zehntel usw. Gesehen und auch nachgreifend empfunden.

Oder wieder das Schulbeispiel des fortmarschierenden Menschen: Auch er müßte bei strenger Gültigkeit der physikalischen Formel umgekehrt proportional der Entfernung kleiner gesehen werden. Setzen wir für die „Greifentfernung“ bis auf weiteres der Einfachheit wegen den obigen (anfechtbaren) Wert 1 (vgl. letzte Spalte der Zahlentafel in § 7), so müßte der Mensch auf 1 km nicht wie bei den Psychologen nur einen Kopf kleiner aussehen, sondern der ganze Mensch fast so klein wie ein Stecknadelkopf usw.

sein Sehwinkel beträgt einen Bruchteil einer Bogensekunde. Der Sehwinkel erreicht schon bei 10 km Entfernung die Zäpfchengrenze, und hier sollte der Mensch nach dem Sehwinkel-Aufhebungssatz noch in halber Größe erscheinen.

¹⁾ Von der Abweichung der Tangensfunktion vom Winkel (§ 1) sehe ich ab.

Ich behaupte, es gibt in der Tat ein Sehen, das dieser Art des Sehens nahesteht¹⁾.

XIX.

Folgende Prüfungen und Messungen empfehlen sich hauptsächlich (vgl. § 3).

A. Das unmittelbare Sehen des Erlebnisses selbst, wie soeben behauptet. Wer's sieht, sieht's. Man muß sich aber erst etwas darauf einstellen. Denn man ist gewöhnt, auf ziemliche Entfernungen hin z. B. Menschen menschlich zu sehen.

In etwas weiteren Entfernungen kann man sehr wohl schätzen und messen. (Unwillkürliches) Nachgreifen mit den Händen, Vergleiche mit Bleistift, Finger, Stecknadel usw. Man findet als Durchschnitt bei verschiedenen Versuchspersonen eine Kurve 2b, die in der Tat der Physikerkurve 2a, scheinbare Größe = Sehwinkel, des § 8 nahebleibt.

Ich gebe eine einzige unausgeglichene Versuchsreihe:

Wahre Entfernung R	Scheinbare Größe im	
	Sterneck-Raum (berechnet)	Sehraum II (geschätzt)
40 m	1,79 m ↓ 1,78 m	1,30 m
60		0,80
80		0,55
100		0,40
120		0,25
140		0,15

Soweit sich bei diesem Verfahren Genauigkeit erreichen läßt, ergibt sich, daß die Kurve 2b etwas höher verläuft als 2a, ein Ergebnis, das durch die beiden folgenden Meßweisen bestätigt wird. Das Größenerlebnis nimmt nicht ganz im selben Maße wie der Sehwinkel ab. Was man auch so ausdrücken kann: Mit zunehmender Entfernung findet im Verhältnis zum Sehwinkel betrage eine geringe relative Überschätzung statt.

B. Umkehrung, insbesondere Nachbildverfahren. Nachbilder, namentlich solche von unverbindlicher Form, folgen auf mittlere und weitere Entfernungen hin ganz offenbar nicht dem Sehwinkel-Aufhebungssatz. Sie sollten ja nach dem unverkürzten Psychologen-Gesetze einfach proportional der Entfernung an Größenwert zunehmen bis ins Unendliche, weil der Sehwinkel fest bleibt. Im Sterneck-Raum müßten sie bis auf Bezugsentfernungen von 100 m praktisch genau so wachsen, also von 1 m ab bis auf den 100fachen Wert, bis 1 km auf den 900fachen, mit noch weiter zunehmender Entfernung müßten

¹⁾ Bei dem man also Größen angenähert „perspektivisch“ sieht. Das perspektivische Bild bedeutet nicht nur ein zeichnerisches Als ob, sondern in gewissen Beziehungen ein angenähertes Wirklichkeitserlebnis.

sie schließlich den 1000fachen Größen-Erlebniswert erreichen wie bei der Bezugsfläche 1 m. Das tun sie nicht.

Gälte anderseits die physikalische Begriffsbestimmung genau, so sollte der zu empfindende Größenwert immer der gleiche bleiben wie aus einer Normalentfernung, etwa deutliche Sehweite, oder wie oben „Greifnähe“, o. ä. Das ist in der Tat in gewisser Weise erfüllt; vollkommen natürlich nicht infolge der schon unter A festgestellten geringen Größerbewertung der Ferne. Der erlebte Größenwert wächst zunächst etwas an (jedoch bei weitem nicht so stark wie bei dem psychologischen Sehen), dann erreicht er verhältnismäßig bald einen verhältnismäßig kleinen Grenzwert, auf dem er stehen bleibt.

Erzeugt man z. B. ein Nachbild, dessen Sehwinkel 30 Minuten beträgt, etwa mittels einer pfenniggroßen hellen Scheibe aus 2 m Entfernung, und läßt es über das Gelände hinlaufen, so wird es schnell so groß wie ein Markstück, Taler, Fünfstück usw. und dann so groß wie ein Teller. Nicht größer.

Hätte man die Nachbildversuche im Gelände gemacht, so hätte man sich dieser Einsicht kaum entziehen können.

C. Bei Verfahren A war die wahre Größe (L) gleich, es änderte sich erlebte scheinbare Größe und Sehwinkel (φ). Bei B blieb der wahre Sehwinkel (φ) fest, es änderte sich wahre (L) und scheinbare Größe. Besonders empfiehlt sich für Messungen ein Verfahren, welches den subjektiven Bestandteil, nämlich die scheinbare Größe, konstant zu halten versucht.

Man fasse nahe dem Horizont, sagen wir auf 5 km wahre Entfernung R , eine Länge L ins Auge, z. B. den wagerechten Abstand zweier Schornsteine auf den Ecken einer dort befindlichen Fabrik. Dann frage man sich: Wieviel siehst du anderswo im Raume, auf nähere und immer nähere Entfernungen, als „ebensoviel“?

Zweckmäßigerweise legt man die Bezugsstellen nicht gerade in dieselbe Blickrichtung. Das Ermitteln des „ebensoviel“ machen die Versuchspersonen meist von selber durch Abgreifen mittels der Finger bei ausgestrecktem Arm, mit beiden Händen zugleich usw. Man kann ihnen auch unmittelbar einen Maßstab in die Hand geben und so Zahlen gewinnen. Liegt die Bezugsstelle in merklich gleicher Entfernung, so greift man wirklich ebensoviel ab; sagen wir zwei Finger breit. Je näher man nun die Bezugsstelle wählt, um so mehr ordnet man zu. Aber wieder nur sehr wenig mehr. Drei Finger breit, vier Finger breit; geht's mit dem Daumen und Zeigefinger einer Hand nicht mehr, dann nimmt man beide und endet schließlich in Greif-

nähe mit Zuordnen von vielleicht einem halben Klafter.

Sähe man hier psychologisch, so müßte man die Fabrik grundsätzlich als fast gleich große Fabrik erleben und daher geneigt sein, häuserweit zu greifen. Träfe der physikalische Begriff ganz genau zu, so müßte man auf nähere und nächste Entfernungen genau soviel abwinkeln wie auf weite. Tatsächlich greift man, je näher, etwas mehr ab. Man empfindet wieder nicht ganz genau nach dem physikalischen Gesetz, bleibt ihm aber wie bei A und B nahe.

Abbildung 2¹⁾ deutet das Verfahren C für den in der Ferne sichtbaren Schloßurm an.

In einfachster Weise kann so stetig der ganze Raum ausgewertet werden. Man kann alles zahlenmäßig bestimmen. Auch für verschiedenen großen Sehwinkel der ursprünglichen Fernobjekte, in anderen als wagerechten Richtungen, usw.

XX.

Besonders wichtig ist bei C diejenige Größe, die man beim Abgreifen in nächster Nähe dem Fernobjekt, im Beispiel Schornsteinabstand, zuordnet. Sie vermittelt den Anschluß an die Verfahren B und A und an die Ausgangsfrage. So groß „sieht“ das Objekt „aus“. Die Fabrik sieht einhalbklafterbreit aus.

Die Frage nach der Scheingröße des Mondes und der anderen Himmelsgebilde wird damit allgemeinen Sehgesetzen eingeordnet.

Beim Horizont-Monde spielt sich das Verfahren C so ab: Wird die Bezugsstelle in großer Entfernung vom Beobachter gewählt, am Horizont, so wird wieder wirklich ebensoviel abgegriffen, d. h. nahezu ein solcher Fingerabstand, in den man auch den Mond selber einklemmen kann. Mit zunehmender Annäherung der Bezugsstelle greift man allmählich mehr ab, schließlich nimmt man die zweite Hand zu Hilfe und endet vorn beim „Teller“²⁾ (vgl. Fig. 3).

Bei Verfahren B, Nachbild, reiht sich der Tellermond ebenso an den Schluß des Versuchs mit 30 Minuten Sehinkel; der zuletzt empfundene „Teller“ kann, auf den Himmel verlegt,

1) Die Figuren 2 und 3 befinden sich auf Tafel II.

2) Die beiden Grenzwerte hat wohl jeder einmal erfahren. Einerseits den Teller in Greifnähe, zu dem unwillkürlich die Hände sich formen, anderseits aber auch den kaum 1 cm weiten Fingerabstand, der sich ergibt, wenn man bei ausgestrecktem Arm „probiert“, wie breit der Mond „eigentlich“ aussieht. Aber man hat die beiden nicht in Beziehung bringen können. Dies leistet das Verfahren C. Hier wird die Zentimeter-Messung (Ferne) mit der Tellerschätzung (Nähe) durch die stetig wachsenden Zwischenschätzungen gesetzmäßig verbunden. Und zugleich nicht nur für den Mond, nicht nur für die Himmelskörper, sondern für alle Sehdinge überhaupt. Als Sonderfall kann, mit einem gewissen Vorbehalt, die Hillebrand'sche „Allee“ gelten. Fig. 3 deutet das an.

ohne weiteres als dunkler „Mond“ empfunden werden (passend auch als farbiger, heller).

Bei A lasse man im Gedankenexperiment den Mond von vorn in die Ferne marschieren, er wird dann so, wie es unser neues Schwinkel-Gesetz fordert, kleiner und kleiner und sieht zuletzt, wenn er da ankommt, wo er hingehört, nach diesem Gesetz notwendigerweise wirklich so groß aus wie der Teller.

Weshalb erscheint der Mond wie ein Teller?

Weshalb sehen überhaupt ferne Gegenstände jeder Art, himmlische wie irdische, „so groß aus, wie sie aussehen“?

Weil und sofern sie nicht nach dem psychologischen „Schwinkel-Aufhebungssatz“ gewertet werden — unter Kleinerschätzung weiterer Entfernungen —; sondern — unter geringer Größerbewertung¹⁾ der Ferne — nach dem physikalischen Schwinkel selber.

XXI.

Physikalisch wertvoll erscheint die Tatsache, daß die bekannten, viel belächelten volkstümlichen Angaben über Größen von Kometen, Art und Größe von Meteoren usw. danach doch verständlichen, den Durchschnittswerten nach ermittelbaren Gesetzen gehorchen und in dieser Weise wohl verwertbar sind.

Allerdings stecken eben auch persönliche Konstanten darin, die noch erforscht werden müssen. Überhaupt werden durch die neue Auffassung die Fragen eher vermehrt als vermindert. Aber sie bringt, wenn sie sich als richtig herausstellt, grundsätzlich Sinn, Ordnung und Zusammenhang in das Gebiet.

Von besonderem Interesse ist die Frage, was aus dem Problem der Vergrößerung des Mondes usw. wird, wenn man mit den hier gewonnenen zahlenmäßigen Ergebnissen über die Größe erneut an dasselbe herantritt. Es liegen eine große Anzahl physikalischer, physiologischer, psychologischer Erklärungsversuche vor, zu denen man Stellung nehmen muß. Ich hoffe, demnächst auf diese Frage zurückkommen zu können.

XXII.

Grundsätzlich noch eine Bemerkung.

Ich habe bei dieser zweiten Art des Sehens

¹⁾ Damit stimmt überein, daß man mit wachsender Blickferne unwillkürlich einen kleineren Gesamt-Bildwinkel ins Auge zu fassen pflegt. Beim Zeichnen von Durchblicken kommt man, wenn man mit der Ferne anfängt, leicht mit dem Zeichenblatt nicht aus; die Neigung zum Überhöhen ferner Berge mag zum Teil damit zusammenhängen. Sehr häufig ist der Mond usw. in Gemälden „zu groß“.

ausdrücklich das Wort „ein neuer, zweiter Sehraum“ gebraucht („Sehraum II“).

Damit behaupte ich zunächst nicht, daß dieser Raum seinem metrischen (oder unmittelbar sinnlichen) Ausdehnungseindruck nach, d. h. bezüglich der erlebten scheinbaren Punktentfernungen r , notwendigerweise ein anderer sein müsse als der Sternecksche Sehraum.

Er könnte weiter sein, sehr wohl. Er könnte meinerwegen auch etwas enger sein. Er könnte aber auch durchaus derselbe sein, seiner scheinbaren, erlebten Längenerstreckung nach, wie ihn Herr v. Sterneck errechnet hat.

Er ist nicht notwendigerweise ein anderer Raum: Er ist ein anders gearteter Raum.

Im Sterneck-Raum (Psychologen-Raum) gilt der Schwinkel-Aufhebungssatz. Der ist recht eigentlich das Paßwort für den Sehraum der Psychologen. Jeder Körper wird innerhalb des starren Schwinkel-Kegels an diejenige Stelle verlegt, welche die scheinbare Entfernung vorschreibt, und in demjenigen beträchtlichen Ausmaß wirklich erlebt, welches er an dieser Stelle hat.

In dem neuen Raum ist diese Verbindung zwischen scheinbarer Entfernung und scheinbarer Größe gelöst. Die scheinbaren Entfernungen mögen dieselben sein wie im Sterneck-Raum, die scheinbaren Größen sind es nicht. Die scheinbaren Größen sind viel, viel kleiner als dort. Sie werden eben nicht durch jenen „Schwinkel-Aufhebungssatz“ zu einer 1000fachen Höhe emporgetrieben, sondern sie bleiben fort und fort dem abnehmenden Schwinkel selber nah. —

Eine ganz andere Frage wäre, ob man dies Sehen zweiter Art nicht zuletzt und nachträglich wieder als ein Sehen erster Art deuten könnte. Das käme dann auf einen außerordentlich engen Sehraum hinaus, nämlich einen durch die „Referenzflächen“ begrenzten, vielleicht den Rest eines ursprünglichen kindlichen Sehraums („Sehraum III“). Auch hierüber möchte ich uns ein Urteil noch vorbehalten. Mathematische Gründe sprechen dafür. Physiologische Tatsachen, wie mir scheint, zum wenigsten nicht dagegen. Das psychische Erlebnis drängt sich allerdings nicht so unmittelbar auf wie das Erleben der kleinen Gegenstandsgrößen.

Der neue Sehraum II wäre dann ein Durcheinander eines Sehraums I und eines Sehraums III: Entfernungen im Raume I, Gegenstandsgrößen im Raume III¹⁾.

¹⁾ Ob ich Helmholtz' bekannten Vergleich des Sehraums mit einem Reliefbild für diesen engen Sehraum III in Anspruch nehmen darf, wage ich nicht zu entscheiden (Physiol. Optik, 1. Aufl., S. 660). Herings Ausführungen scheinen einerseits einen engen Sehraum zu fordern, die Äußerungen über Sehferne u. a. m. lassen aber auf

XXIII.

Für die neue Art des Sehens selber und den neuen Sehraum möchte ich, falls diese Anschauungen Zustimmung finden, den Namen Laqueurscher Sehraum vorschlagen.

Herr Ernst Laqueur, o. Prof. der Physiologie an der flämischen Universität Gent, 1914 bis Mitte 1916 in Wolfenbüttel Abteilungsarzt, hat mich zu der Untersuchung über die scheinbare Mondgröße angeregt. Er hat in unseren gemeinsamen Überlegungen bereits die entscheidende Ansicht durchgeführt: Das Sehen, wobei etwas „so groß aussieht, wie . . .“, bedeute grundsätzlich etwas anderes, als wenn man sieht, etwas „ist“ das und das oder „ist so groß wie“ das und das. Ich habe die Untersuchung nach seinem Weggang im selben Jahre 1916 zu Ende gebracht und meine Ergebnisse durch ausgedehnte Beobachtungen und Messungen mit Versuchspersonen bestätigt. Ich konnte sie bisher nicht veröffentlichen, weil mir infolge von schwerer Verwundung die Fähigkeit zum Darstellen fehlte, ich denke baldmöglichst an anderem Orte ausführlich zu berichten.

Meinem verehrten Freunde, der als Arzt des Körpers wie des Geistes in fast täglichem Be-

einen weiten Sehraum schließen (Physiol. Optik, Leipzig 1879, S. 343, 542, 552, 578, 582). — Während der Korrektur finde ich eine enge Zahlenschätzung (30 m) bei Mach, Erkenntnis und Irrtum, Leipzig 1905, S. 332, mit einer allerdings unklaren Berufung auf einen Nachbildversuch Plateaus.

mühen meinen am Boden liegenden Fähigkeiten aufgeholfen hat, heute, wo ich die erste Frucht gemeinsamer Arbeit vorlege, zu danken, ist mir Herzensbedürfnis.

XXIV.

Zusammenfassung.

Psychologie und Physiologie lehren auf Grund eines „Schwinkel-Aufhebungssatzes“ einen „Sehraum“, der dem wahren Raum nahebleibt. In diesem Sehraum werden die Gegenstände bis auf erhebliche Entfernungen hin in ihrer wahren natürlichen Größe gesehen, erst allmählich und langsam nimmt die scheinbare Größe infolge Unterschätzens weiterer Entfernungen einigermaßen ab.

Es gibt außerdem eine ganz andere Art des räumlichen Größen-Sehens. Sie steht dem physikalischen Begriff der scheinbaren Größe nahe: Schwinkel, Netzhautbild. Hier nimmt der Größeneindruck zwar nicht vollkommen, aber doch nahe ebenso schnell wie der Schwinkel ab.

Zu dieser zweiten Art des Sehens gehören unter anderem gewisse volkstümliche Angaben über Himmelserscheinungen, die danach sehr wohl zahlenmäßig gedeutet und benutzt werden können.

Wolfenbüttel (Techn. Hochschule Braunschweig), Januar 1918.

(Eingegangen 6. Februar 1918.)

BESPRECHUNGEN.

A. Sommerfeld, Goethes Farbenlehre im Urteile der Zeit. Deutsche Revue, Juliheft 1917. 7 S.

Im 9. Heft des 18. Jahrganges dieser Zeitschrift (S. 206) habe ich über den Aufsatz berichtet, den der kürzlich verstorbene Raehlmann im Jahrbuch der Goethe-Gesellschaft über Goethes Farbenlehre hat erscheinen lassen. Inzwischen ist die kriegsmäßige Neuausgabe der beiden Goethe-Vorträge von Helmholtz hier (18, 468, 1917) angezeigt worden. Jetzt liegt als Drittes ein Aufsatz von Sommerfeld über Goethes Farbenlehre vor, und der Leser der Zeitschrift wird am Ende ausrufen: Goethe und kein Ende! In der Tat — so erfreulich das Interesse an Goethe ist, so könnte man doch dieses Wort Du Bois-Reymonds wenigstens auf die Bewegung anwenden, die den Anlaß zu dem Aufsatz Sommerfelds gegeben hat, und die, wie ich nachträglich bemerken kann, auch Raehlmann zur Veröffentlichung seiner Abhandlung bewogen hat, wenn auch dieser Anlaß im Rahmen seiner Schrift nicht ausdrücklich erwähnt wird. Verf. berichtet, daß seit drei Jahren in Münchner Künstler-

kreisen eine Bewegung besteht, die darauf ausgeht, Goethes Farbenlehre gegenüber den Physikern, die sie verwerfen, wieder zu vollster Anerkennung zu bringen. Die Ursache dieser Bewegung scheint aber nicht bloß ein gänzlicher Mangel an Verständnis für das Wesen und die Ergebnisse der Naturforschung zu sein, sondern daneben oder vielleicht gar darüber hinaus der unselige Nationalitätenhaß dieser Kriegszeit, der das deutsche Volk scharf machen möchte gegen den „Engländer“ Newton. Wir haben gewiß allen Grund, uns gegen die Verunglimpfung der deutschen Wissenschaft durch unsere Gegner auf das schärfste und mit allen Mitteln zu wehren. Aber die Wissenschaft deswegen auf den Kopf stellen, das geht doch wirklich nicht. Es ist sehr verdienstlich von Herrn Sommerfeld, das er in einer angesehenen und viel gelesenen Zeitschrift dieses Treiben einmal beleuchtet. Das geschieht mit knappen Worten zu Beginn des Aufsatzes. Dann bespricht er in kurzen Abschnitten die Beurteilung von Goethes Farbenlehre durch Helmholtz und durch Bezold, das Verhältnis der physikalischen und der physiologischen Seite des Problems, Goethes Stellung als Naturforscher, Goethe als Phänomenologe und schließt mit

einer schönen Auswahl von Proben aus dem „reichen und mannigfaltigen Beobachtungsmaterial, welches Goethe mit soviel Liebe in seiner Farbenlehre zusammengetragen hat“. Von besonderem Interesse sind die Ausführungen über Goethe als Phänomenologen, in denen Verf. sehr geschickt und treffend den Standpunkt Goethes und den Standpunkt Machs in Parallele stellt.

W. König.

J. A. Möllinger, Wirkungsweise der Motorzähler und Meßwandler. gr. 8°. VI u. 186 S. mit 87 Abbildungen. Berlin, Julius Springer. 1917. Geb. M. 5.80.

Verf. hat in seinem Buche eine Klasse von Apparaten behandelt, die dem Physiker in der Regel etwas fern liegen. Immerhin bieten die Drehfeld-Meßgeräte und Meßwandler auch so viele interessante, theoretische Fragen, daß sie größere Beachtung verdienen. Das Buch von Möllinger ist geeignet, in diese Fragen einzuführen und hinreichenden Aufschluß über den augenblicklichen Stand der Forschung auf diesem Gebiete zu geben. Es zeichnet sich vor Büchern, die denselben Gegenstand behandeln, dadurch aus, daß es eine große Menge von Zahlenbeispielen bringt, die der Praxis entnommen sind und einen guten anschaulichen Begriff von der Leistungsfähigkeit dieser Apparate geben.

In einem besonderen Kapitel werden die Grundlagen der Wechselstromtechnik behandelt. Dieses Kapitel hätte nur dann eine Berechtigung, wenn diese Darstellung sich in irgendeiner Weise vor den üblichen nach Form oder Inhalt auszeichnete. Das ist aber nicht der Fall. Es wäre wohl daher besser weggeblieben. Bei der Darstellung der Wechselströme durch Vektoren ist bedauerlicherweise ein Drehsinn gewählt, der dem durch internationale Abmachung angenommenen entgegengerichtet ist. Alles in allem kann das Buch demjenigen, der sich für diese Spezialfragen interessiert, nur aufs wärmste empfohlen werden.

E. Orlich.

A. Einstein, Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie. Gemeinverständlich. (Sammlung Tagesfragen Heft 38. Herausgegeben von Karl Scheel.) 8°. IV u. 70 S. mit 3 Figuren. Braunschweig, Friedr. Vieweg u. Sohn. 1917. M. 2.80.

Verf. sagt im Vorwort: „Das vorliegende Büchlein soll solchen eine möglichst exakte Einsicht in die Relativitätstheorie vermitteln, die sich vom allgemein wissenschaftlichen, philosophischen Standpunkte für die Theorie interessieren, ohne den mathematischen Apparat der theoretischen Physik zu beherrschen. Die Lektüre setzt etwas Maturitätsbildung und — trotz der Kürze des Büchleins — ziemlich viel Geduld und Willenskraft beim Leser voraus. Der Verf. hat sich die größte Mühe gegeben, die Hauptgedanken möglichst deutlich und einfach vorzubringen, im ganzen

in solcher Reihenfolge und in solchem Zusammenhange, wie sie tatsächlich entstanden sind.“

In dieser Zeitschrift bedarf eine Schrift von Einstein keiner Empfehlung. Ich glaube aber, es wäre von hohem Interesse, mit dieser Schrift ein Experiment zu machen: sie einer größeren Anzahl von Lesern, für welche Einstein sie geschrieben hat, in die Hand zu geben und sie aufzufordern nach der Lektüre anzugeben, was ihren Widerspruch geweckt, beziehentlich was sie nicht verstanden haben. Ohne an die Diskussion der Theorie irgendwie rühren zu wollen, muß ich offen bekennen: Ich glaube nicht, daß Einstein mit dieser Darstellung bei den mit bestem Willen nachdenkenden, nicht physikalisch gebildeten Durchschnittslesern im obigen Sinne das erstrebte klare Verständnis der Sache erreichen wird. —

H. Hörig.

K. Schwarzschild, Über das System der Fixsterne. Aus populären Vorträgen. (Naturwissenschaftliche Vorträge und Schriften, herausgegeben von der Berliner Urania. 1. Heft.) 8°. 44 S. mit 13 Figuren im Text. 2. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner. 1916. M. 1.20.

Daß dieses kleine Heftchen, welches vier vom Verf. in den Jahren 1907 und 1908 gehaltene Vorträge kurz wiedergibt und zum erstenmal im Jahre 1909 als Gabe zu Geheimgabe von Seeligers sechzigstem Geburtstage gedruckt wurde, einen Neudruck notwendig machte, dürfte schon ein Beweis für den Wert seines Inhalts sein. Der erste, ganz populäre Vortrag behandelt das Fernrohr und die Grenze seiner Leistungsfähigkeit und bietet dem Physiker nichts Neues. Um so mehr ist dies aber der Fall in den drei weiteren Vorträgen „Über Lamberts kosmologische Briefe“, „Über das System der Fixsterne“ und „Vom Universum“, in denen unsere jetzigen Kenntnisse von der räumlichen Verteilung, den Bewegungen und dem physischen Zustande der Fixsterne in einer allgemein verständlichen Form sehr geschickt dargestellt werden.

J. Hartmann.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Das wissenschaftliche Mitglied des Georg-Speyer-Hauses in Frankfurt a. M. Dr. Paul Karrer zum a. o. Professor für aromatische Chemie an der Universität Zürich, der frühere Konservator des Physikalischen Instituts der Universität Leiden und derzeitige Dozent an der Reichstierarzneischule Utrecht Dr. W. H. Keesom zum ord. Professor der Physik und physikalischen Chemie an der neuerrichteten Tierärztlichen Hochschule Utrecht.

Verliehen: Dem Privatdozenten für theoretische Physik an der Universität Göttingen Dr. Paul Hertz der Titel Professor.

Gestorben: Der frühere ord. Professor der Elektrotechnik an der Deutschen Technischen Hochschule Prag Hofrat Dr. Johann Puluj.

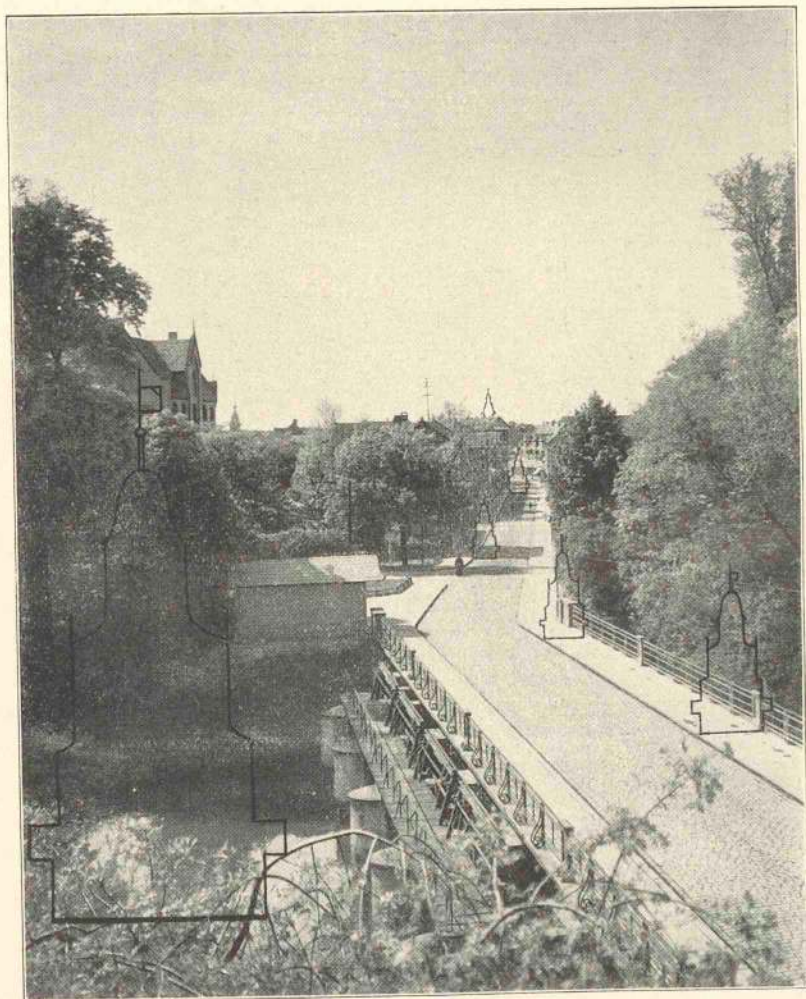


Fig. 2.

Stadtbibliothek
Hamburg

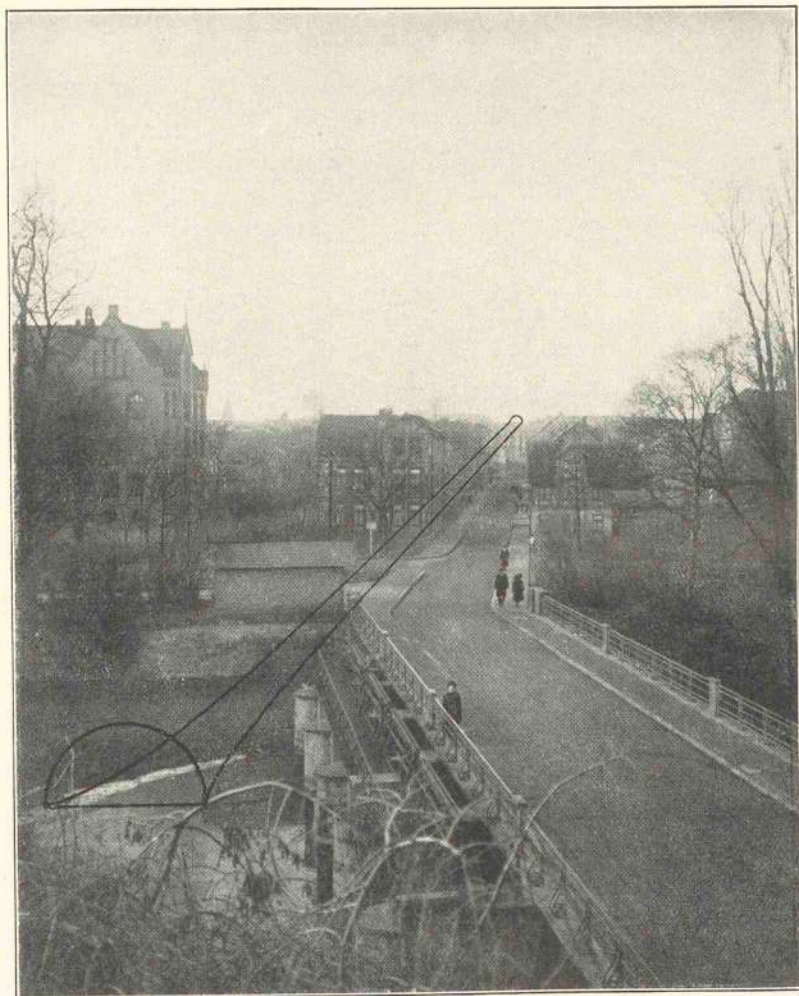


Fig. 3.

Stadtbibliothek
Hamburg.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 8.

15. April 1918.

Redaktionsschluß für No. 10 am 17. April 1918.

19. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

R. Malmström, Versuch zur Erweiterung des Riemannschen Elementargesetzes. S. 153.

J. Lense u. H. Thirring, Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der

Einsteinschen Gravitationstheorie. S. 156.

H. Bauer, Über die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes. S. 163.

A. Einstein, Bemerkung zu Herrn Schrödingers Notiz „Über ein Lösungssystem der allgemein kova-

rianten Gravitationsgleichungen“. S. 165.

L. Flamm, Bemerkungen zu den statistischen Grundlagen der Quantentheorie. S. 166.

Vorlesungsverzeichnis f. das Sommersemester 1918. S. 168.

Tagesereignisse. S. 176.

Personalien. S. 176.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Versuch zur Erweiterung des Riemannschen Elementargesetzes¹⁾.

Von R. Malmström.

In der vorliegenden Mitteilung soll ein Versuch beschrieben werden, das von B. Riemann aufgestellte Elementargesetz so zu erweitern, daß es, mit Beibehaltung der Relativgeschwindigkeit, auf die Versuche von Kaufmann und Bucherer angewandt, dasselbe Resultat gibt, wie die Theorie von Lorentz²⁾.

Um diese Erweiterung vorzunehmen, könnte man, wie schon in dem zuletzt zitierten Aufsatz²⁾ auseinandergesetzt wurde, entweder unter Beibehaltung des Hamiltonschen Prinzips, den Ausdruck $\left(1 + \frac{u^2}{2c^2}\right)$, wo u die Relativgeschwindigkeit zweier Elektronen, durch eine andere Funktion von $\frac{u^2}{2c^2}$ ersetzen, oder,

mit Aufgabe des Hamiltonschen Prinzips in dem durch Ausführung der Differentiationen erhaltenen Ausdruck, die einzelnen Glieder, in Analogie mit dem von W. Ritz in seiner Theorie angewandten Verfahren, mit Funktionen der Relativgeschwindigkeit multiplizieren.

Bei dem ersten Verfahren entstehen Komplikationen, die davon herrühren, daß bei der Differentiation nach der Zeit Glieder erhalten werden, welche, wenn es sich um die Bewegung eines Elektrons in elektrischen und magnetischen Feldern handelt, das Potential der ruhenden Elektrizität und die Komponenten des Vektorpotentials der elektrischen Ströme enthalten, multipliziert mit den Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponenten des Elektrons

und ihrer Produkte. Wir werden deshalb und auch aus anderen, später angeführten Gründen den zweiten Weg einschlagen und schreiben also für die X -Komponente der vom Elektron e auf das Elektron e' ausgeübten Kraft

$$e'F_x = \frac{ee'}{r^2} \cos(r, x) \varphi\left(\frac{u^2}{2c^2}\right) - \frac{ee'}{r^2} \psi\left(\frac{u^2}{2c^2}\right) \frac{(v_x' - v_x)(v_r' - v_r)}{c^2} - \frac{ee'}{r} \chi\left(\frac{u^2}{2c^2}\right) \frac{a_x}{c^2}, \quad (1)$$

wo v und v' die Geschwindigkeiten der Elektronen relativ zu einem Koordinatensystem, welches selbst eine beliebige, gleichförmige, geradlinige Translationsbewegung haben kann, a und a' ihre Beschleunigungen sind. Die Funktion φ muß in zweiter Annäherung $= 1 + \frac{u^2}{2c^2}$ sein, ψ und χ in erster Annäherung $= 1$. Schließlich ist noch in dem letzten Glied a_x' fortgelassen.

Für die Anwendung dieser Formel auf die Versuche mit β -Strahlen können wir die Funktionen φ , ψ und χ nach Potenzen von $\frac{v_x}{c}$, $\frac{v_y}{c}$,

$\frac{v_z}{c}$ entwickeln und nur die Glieder erster Ordnung beibehalten, weil v die Geschwindigkeit der Leitungselektronen relativ zum Leiter ist. Wir erhalten so

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi\left(\frac{\beta^2}{2}\right) - \varphi'\left(\frac{\beta^2}{2}\right) \frac{v_x'v_x + v_y'v_y + v_z'v_z}{c^2} \\ \psi &= \psi\left(\frac{\beta^2}{2}\right) - \psi'\left(\frac{\beta^2}{2}\right) \frac{v_x'v_x + v_y'v_y + v_z'v_z}{c^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{wo} \quad \frac{\beta^2}{2} = \frac{v'^2}{2c^2}$$

und φ' , ψ' die Ableitungen nach $\frac{\beta^2}{2}$ bzw.

$\frac{u^2}{2c^2}$ bedeuten.

¹⁾ Auszug aus einer in „Öfversigt af Finska Vetenskapssocietets Förhandlingar“, Bd. LX, 1917—1918, Afd. A, No. 6, erscheinenden Arbeit.

²⁾ Vgl. R. Malmström, Zur Theorie der Versuche über β -Strahlen, diese Zeitschr. 19, 43, 1918, wo dasselbe mit Einführung der Absolutgeschwindigkeit geschieht.

Führt man diese Werte in die Gl. (1) ein, läßt alle Glieder, die noch Potenzen und Produkte von v_x, v_y, v_z enthalten, fort und beachtet, daß bei den Versuchen mit β -Strahlen $a=0$ ist, so erhält man

$$\begin{aligned} e'F_x = & \varphi \left(\frac{\beta^2}{2} \right) \frac{ee'}{r^2} \cos(r, x) - \varphi' \left(\frac{\beta^2}{2} \right) \frac{e'e}{r^2} \\ & \cos(r, x) \frac{v_x'v_x + v_y'v_y + v_z'v_z}{c^2} \\ & - \psi \left(\frac{\beta^2}{2} \right) \frac{ee'}{r^2} \frac{v_x'v_r' - v_r'v_x - v_x'v_r}{c^2} \\ & + \psi' \left(\frac{\beta^2}{2} \right) \frac{ee'}{r^2} \frac{v_x'v_r'(v_x'v_x + v_y'v_y + v_z'v_z)}{c^4} \end{aligned} \quad (3)$$

und entsprechende Formeln für F_y und F_z .

Da die Anwendung dieser Formeln auf die Versuche von Kaufmann und Bucherer dasselbe Resultat ergibt, wollen wir uns der Kürze halber mit den ersteren begnügen. Es werden hierbei parallele, homogene elektrische und magnetische Felder benutzt. Ein homogenes elektrisches Feld erhalten wir theoretisch, indem wir uns eine Ebene (YZ) mit positiver Ladung von konstanter Dichte ρ be-

legt denken. Wir haben dann in den Gl. (3) $v=0$ zu setzen, e durch $\rho d_y d_z$ zu ersetzen und über die YZ-Ebene zu integrieren. Die Kraftkomponenten werden dann

$$\begin{aligned} e'F_x = & \varphi \left(\frac{\beta^2}{2} \right) e'E_x - \psi \left(\frac{\beta^2}{2} \right) e'E_x \frac{v_x'^2}{c^2} \\ e'F_y = & -\psi \left(\frac{\beta^2}{2} \right) e'E_x \frac{v_x'v_y'}{c^2} \\ e'F_z = & -\psi \left(\frac{\beta^2}{2} \right) e'E_x \frac{v_x'v_z'}{c^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

wo E_x die elektrische Feldstärke.

Ein homogenes magnetisches Feld mit der Richtung der X-Achse wird theoretisch am einfachsten erhalten, indem man sich die XY-Ebene von Flächenströmen konstanter Dichte (i_y) und Richtung der Y-Achse durchflossen denkt. Die Kraftkomponenten erhält man aus den Gl. (3), indem man $v_x=v_z=0$ setzt, ev_y mit $i_y dxdy$ ersetzt und über die XY-Ebene integriert. Außerdem fallen noch die Glieder fort, wo e nicht mit einer Komponente von v multipliziert ist, weil die Ladung $=0$ ist. Die Kraftkomponenten werden für diesen Fall

$$\begin{aligned} e'F_x = & \psi' \left(\frac{\beta^2}{2} \right) \frac{e'v_x'v_y'v_z'2\pi i_y}{c^4}, \\ e'F_y = & \psi \left(\frac{\beta^2}{2} \right) \frac{e'v_z'2\pi i_y}{c^2} + \psi' \left(\frac{\beta^2}{2} \right) \frac{e'v_y'v_z'v_z'2\pi i_y}{c^4}, \\ e'F_z = & -\varphi \left(\frac{\beta^2}{2} \right) \frac{e'v_y'2\pi i_y}{c^2} + \psi' \left(\frac{\beta^2}{2} \right) \frac{e'v_z'v_y'v_z'2\pi i_y}{c^4}. \end{aligned} \quad (5)$$

Die Kraft hat eine in die Richtung von v' (das mit ψ' multiplizierte Glied) und eine senkrecht zum magnetischen Felde wirkende Komponente. Die letztere ist aber nicht einmal proportional dem Vektorprodukt von Geschwindigkeit und magnetischer Feldstärke, sondern verschieden in der Richtung des Stromfeldes und senkrecht dazu, was ja a priori auch möglich sein kann. Von einer speziellen Wirkung des magnetischen Feldes auf das Elektron kann man also in dem betrachteten Falle nicht reden. Nur wenn $\varphi'=\psi$ angenommen wird und die von ψ' abhängigen Glieder vernachlässigt werden können, wird die von diesem Stromsystem ausgeübte Kraft dem Vektorprodukt von Geschwindigkeit und magnetischer

Feldstärke proportional sein. Wir wollen diesen Fall am Schluß mit einigen Worten berühren und jetzt untersuchen, ob es nicht möglich ist, auf dem Boden der vorliegenden Theorie ein homogenes magnetisches Feld herzustellen, welches die genannte Bedingung streng erfüllt. Das ist in der Tat der Fall. Denken wir uns noch die XZ-Ebene von Flächenströmen konstanter Dichte in der Richtung der negativen Z-Achse durchflossen, so hat das magnetische Feld die Richtung der positiven X-Achse. Um die Kraftkomponenten zu berechnen, hat man in den Gl. (3) jetzt $v_x=v_y=0$ zu setzen, ev_z mit $-i_z dxdz$ zu ersetzen und über die XZ-Ebene zu integrieren. Das Resultat wird

$$\begin{aligned} e'F_x = & -\psi' \left(\frac{\beta^2}{2} \right) \frac{e'v_x'v_y'v_z'2\pi i_z}{c^4}, \\ e'F_y = & \varphi' \left(\frac{\beta^2}{2} \right) \frac{e'v_z'2\pi i_z}{c^2} - \psi' \left(\frac{\beta^2}{2} \right) \frac{e'v_y'v_z'v_z'2\pi i_z}{c^4}, \\ e'F_z = & -\psi \left(\frac{\beta^2}{2} \right) \frac{e'v_y'2\pi i_z}{c^2} - \psi' \left(\frac{\beta^2}{2} \right) \frac{e'v_z'v_y'v_z'2\pi i_z}{c^4}. \end{aligned} \quad (6)$$

Wirken beide Felder zusammen und sind die Stromdichten gleich $i_y = i_z = i$, so werden die Kraftkomponenten

$$\begin{aligned} e' F_x &= 0, \\ e' F_y &= (\varphi' + \psi) \frac{e' v_z' 2\pi i}{c^2} = \frac{\varphi' + \psi}{2} \frac{e' v_z' \cdot 2 \cdot 2\pi i}{c^2}, \\ e' F_z &= -(\varphi' + \psi) \frac{e' v_y' 2\pi i}{c^2} = -\frac{\varphi' + \psi}{2} \frac{e' v_y' \cdot 2 \cdot 2\pi i}{c^2}. \end{aligned}$$

In diesen Formeln ist $2 \cdot 2\pi i$ gleich der gesamten magnetischen Feldstärke. Werden elektromagnetische Einheiten eingeführt und die magnetische Feldstärke mit H_x bezeichnet, ergibt sich

$$\begin{aligned} e' F_x &= 0, \\ e' F_y &= \frac{\varphi' + \psi}{2} e' v_z' H_x, \\ e' F_z &= -\frac{\varphi' + \psi}{2} e' v_y' H_x. \end{aligned} \quad (7)$$

Wenn wir hier noch $\frac{\varphi' + \psi}{2} = 1$ setzen würden, so würden die Formeln für das Elektron ganz dieselbe Bewegung in diesem Felde ergeben, wie die ursprüngliche Lorentzsche Theorie. Zunächst wollen wir aber die Formeln in dieser Gestalt behalten und sie auf die Versuche von Kaufmann anwenden.

Ein Stromsystem, wie das eben angewendete, ist zwar nicht praktisch ausführbar. Man findet aber durch eine einfache, nur etwas umständliche Rechnung, die deshalb hier nicht angeführt werden soll, daß dieselben Formeln ganz streng gelten für die Bewegung eines Elektrons in einer unendlich langen, stromdurchflossenen Spule mit kreisförmigem Querschnitt, und infolgedessen mit großer Annäherung auch für eine im Verhältnis zum Durchmesser lange Spule. Es ist somit die Anwendung dieser Formeln auf die Versuche mit β -Strahlen nicht unberechtigt.

Für die Versuche von Kaufmann erhalten wir die Formeln durch Kombination der Gl. (4) und (7) und wählen zur Bewegungsrichtung der Elektronen die Z-Achse. Nehmen wir die Ablenkungen und Ablenkungsgeschwindigkeiten als klein an, so sind in den Formeln (4) die Glieder mit Produkten und Potenzen von v_x' und v_y' zu vernachlässigen. Wird noch $v_z' = v' = \text{konstant}$ angenommen, so lauten die Gleichungen zur Bestimmung der Ablenkungen

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= \varphi \left(\frac{\beta^2}{2} \right) e' E_x, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{\varphi' + \psi}{2} e' \beta c H_x, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dz^2} &= \frac{e' E_x}{m c^2} \frac{\varphi \left(\frac{\beta^2}{2} \right)}{\beta^2}, \\ \frac{d^2 y}{dz^2} &= \frac{e' H_x}{m c} \frac{\varphi' + \psi}{2 \beta}. \end{aligned} \quad (8)$$

Nach der Theorie von Lorentz lauten die entsprechenden Gleichungen, wenn wir für diesen

Fall $\frac{v'}{c}$ mit α bezeichnen,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dz^2} &= \frac{e' E_x}{m c^2} \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha^2}, \\ \frac{d^2 y}{dz^2} &= \frac{e' H_x}{m c} \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha}. \end{aligned} \quad (9)$$

Die Funktionen φ und ψ können jetzt so bestimmt werden, daß die vorliegende Theorie dasselbe Resultat ergibt wie die von Lorentz, indem man die rechten Seiten der Gl. (8) und (9) gleich setzt

$$\begin{aligned} \frac{\varphi}{\beta^2} &= \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha^2}, \\ \frac{\varphi' + \psi}{2 \beta} &= \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha}, \end{aligned} \quad (10)$$

und zwischen diesen Gleichungen α eliminiert. Das Resultat wird

$$\left(\frac{\varphi' + \psi}{2} \right)^4 + \beta^2 \left(\frac{\varphi' + \psi}{2} \right)^2 = \varphi^2. \quad (11)$$

Die einfachste Annahme, die wir jetzt über die Funktionen φ und ψ machen können, ist

$$\frac{\varphi' + \psi}{2} = 1, \quad (12)$$

wobei aber die Bewegung eines Elektrons im Inneren einer unendlich langen stromdurchflossenen Spule mit kreisförmigem Querschnitt ganz nach denselben Gesetzen erfolgt, wie nach der ursprünglichen Lorentzschen Theorie (konst. Masse).

Aus der Gl. (11) folgt dann

$$\varphi = \sqrt{1 + \beta^2}. \quad (13)$$

φ ist also für kleine Geschwindigkeiten $= 1 + \frac{\beta^2}{2}$. Es wird ferner

$$\beta = \sqrt{1 - \alpha^2}, \quad \alpha = \sqrt{1 + \beta^2}.$$

Es entsprechen sich also die Werte $\alpha = 1$ und $\beta = \infty$.

Der gefundene Wert von φ ist also derselbe wie derjenige in einer früheren Arbeit¹⁾ mit dem Unterschied, daß jetzt nur die Relativgeschwindigkeit in den Gleichungen vorkommt, und es gelten auch alle dort über die Versuche von Bucherer angestellten Betrachtungen.

Zum Schluß sei noch mit einigen Worten der Fall $\varphi' = \psi$ berührt²⁾. Setzt man in der Gl. (11) $\psi = \varphi'$ und $\frac{\beta^2}{2} = \alpha$, so erhält man zur Bestimmung von φ

$$\left(\frac{d\varphi}{da}\right)^4 + 2a\left(\frac{d\varphi}{da}\right)^2 - \varphi^2 = 0, \quad (14)$$

oder, wenn β als unabhängige Variable eingeführt wird

$$\frac{1}{\beta^4} \left(\frac{d\varphi}{d\beta}\right)^4 + \left(\frac{d\varphi}{d\beta}\right)^2 - \varphi^2 = 0. \quad (15)$$

Es möge hierbei erwähnt werden, daß man für φ dieselbe Differentialgleichung erhält, falls man die anfangs erwähnte Methode zur Erweiterung des Riemannschen Gesetzes mit Beibehaltung des Hamiltonschen Prinzips anwendet.

Die Lösungen dieser Gleichungen lassen sich nicht in geschlossener Form darstellen. Zeichnet man aber mit Hilfe der Isoklinen die Integralkurven, so findet man, daß die im Punkte $\varphi = 1$, $\beta = 0$ beginnende Integralkurve nicht die ganze, sondern nur einen Teil der bei dem Versuch von Kaufmann entstehenden Kurve gibt. Man müßte, um die ganze Ablenkungskurve zu erhalten, noch eine andere Integralkurve zu Hilfe nehmen und somit eine Diskontinuität in dem Kraftgesetz annehmen, was ja nicht gestattet ist³⁾. Hiermit ist aber nicht völlig ausgeschlossen, daß man eine andere empirische Formel für die Kaufmannsche Kurve aufstellen könnte, welche einen besseren Wert für φ zu berechnen gestatten würde.

1) Vgl. S. 153. Note 2.

2) In der in der Note 1 (S. 153) angeführten Arbeit ist dieser Fall etwas ausführlicher behandelt.

3) Dieses ist eben die andere, oben angedeutete Ursache, weshalb wir den anfangs erwähnten Weg zur Erweiterung des Riemannschen Gesetzes mit Beibehaltung des Hamiltonschen Prinzips nicht eingeschlagen haben.

(Eingegangen 19. Februar 1918.)

Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie.

Von J. Lense und H. Thirring.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit¹⁾ hat der eine von uns das Feld im Inneren einer rotierenden Hohlkugel nach der Einsteinschen Gravitationstheorie angenähert berechnet. Dieses Beispiel schien von prinzipiellem Interesse für die Beantwortung der Frage, ob die Rotation ferner Massen nach der Einsteinschen Theorie tatsächlich ein Gravitationsfeld erzeugt, das einem „Zentrifugalfelde“ äquivalent ist. In einer anderen Hinsicht interessant scheint nun die mit denselben Mitteln leicht durchführbare Integration der Feldgleichungen für eine rotierende Vollkugel zu sein. Denn solange man auf dem Boden der Newtonschen Theorie stand, konnte man das Feld im Außenraume einer mit konstanter Raumdichte geladenen (ruhenden oder rotierenden) Kugel exakt durch das Feld eines materiellen Punktes gleicher Masse ersetzen. Auch nach der Einsteinschen Theorie ist das Feld einer ruhenden Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit äquivalent dem eines Massenpunktes²⁾, das gilt aber nicht mehr für rotierende Kugeln. Hier treten, wie im nachfolgenden gezeigt wird, Zusatzglieder auf, welche Zentrifugal- und Corioliskräften entsprechen. Da sich nun die Planeten im Felde der selbst rotierenden Sonne und die Monde wiederum im Felde der rotierenden Planeten bewegen, erschien es von vornherein nicht ausgeschlossen, durch Beobachtung der Störungen, welche sich aus diesen Zusatzgliedern ergeben, eine neuerliche astronomische Bestätigung der Einsteinschen Theorie zu erhalten. Die im folgenden durchgeführte numerische Berechnung liefert für die Bahnelemente der Planeten Störungen, die jenseits der Beobachtbarkeitsgrenze liegen. Für die Jupitermonde ergeben sich allerdings relativ große säkulare Störungen, die aber noch innerhalb der Meßfehler liegen dürften.

§ 1. Die Berechnung der $g_{\mu\nu}$ für das Feld der rotierenden Vollkugel.

Bezeichnungen:

l Radius der Kugel,

M ihre Masse,

ω ihre Winkelgeschwindigkeit,

$x' y' z'$ rechtwinkelige Koordinaten eines Punktes des Integrationsraumes,

1) Hans Thirring, diese Zeitschr. 19, 33, 1918; im folgenden als a. a. O. zitiert.

2) K. Schwarzschild, Berl. Ber. 1916, S. 424.

x, y, z Koordinaten des Aufpunktes,
 k Gravitationskonstante,
 ρ_0 natürlich gemessene Raumdichte der Materie.

Die Berechnung vollzieht sich ganz analog wie in der eingangs zitierten Arbeit: Es wird die Einsteinsche Methode der näherungsweisen Integration¹⁾ verwendet, nur wird diesmal bei der Bildung des Energietensors der Materie die Geschwindigkeit der felderregenden Massen als so klein gegen 1 (Lichtgeschwindigkeit) angesehen, daß man die Quadrate und Produkte der Geschwindigkeitskomponenten vernachlässigen kann. (Das ergibt gegenüber dem in der früheren Arbeit behandelten Beispiel den Unterschied, daß die Zentrifugalkraftglieder, welche w^2 proportional sind, wegfallen und nur die Coriolisglieder auftreten.) Diese Vernachlässigung ist mit Rücksicht darauf vollkommen gerechtfertigt, daß $l\omega$ für die Sonne und alle Planeten, in jenem Maßsystem gemessen, für das die Lichtgeschwindigkeit = 1 wird, sehr klein ist. Außerdem betrachten wir in dem hier behandelten Falle das Feld in größerer Entfernung von der Kugeloberfläche; wenn also r den Abstand Aufpunkt—Kugelmittelpunkt bezeichnet, r' den Abstand Mittelpunkt—Integrationselement und R den Abstand Aufpunkt—Integrationselement, so entwickeln wir $1/R$ in eine Reihe nach r'/r , die wir nach dem quadratischen Gliede abbrechen werden.

Wir gehen dann genau so wie a. a. O. von der von Einstein angegebenen Näherungslösung aus²⁾:

$$\left. \begin{aligned} g_{\mu\nu} &= -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} & \delta_{\mu\nu} &= \begin{matrix} 1 & \mu=\nu \\ 0 & \mu \neq \nu \end{matrix} \\ \gamma_{\mu\nu} &= \gamma'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \sum_a \gamma'_{aa} \\ \gamma'_{\mu\nu} &= -\frac{k}{2\pi} \int \frac{T_{\mu\nu}(x', y', z', t-R)}{R} dV_0 \end{aligned} \right\} (1)$$

Hierauf bilden wir den Energietensor der spannungsfreien Materie

$$T_{\mu\nu} = T^{\mu\nu} = \rho_0 \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = \rho_0 \frac{dx_\mu}{dx_4} \frac{dx_\nu}{dx_4} \left(\frac{dx_4}{ds} \right)^2 \quad (2)$$

mit den Ausdrücken für die Geschwindigkeitskomponenten:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dx_4} &= -i \frac{dx'}{dt} = i r' \omega \sin \vartheta' \sin \varphi' \\ \frac{dx_2}{dx_4} &= -i \frac{dy'}{dt} = -i r' \omega \sin \vartheta' \cos \varphi' \\ \frac{dx_3}{dx_4} &= 0 \end{aligned} \right\} (3)$$

$(r', \vartheta', \varphi')$ Polarkoordinaten eines Punktes der Kugel; Rotation findet um die Z -Achse statt und erhalten bei Vernachlässigung der Glieder mit ω^2 :

$$T_{\mu\nu} = \rho_0 \left(\frac{dx_4}{ds} \right)^2 \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & i r' \omega \sin \vartheta' \sin \varphi' \\ 0, & 0, & 0, & -i r' \omega \sin \vartheta' \cos \varphi' \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ i r' \omega \sin \vartheta' \sin \varphi', & -i r' \omega \sin \vartheta' \cos \varphi', & 0, & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Für dV_0 haben wir gemäß Gleichungen (7) und (8) a. a. O. zu setzen:

$$dV_0 = i \frac{dx_4}{ds} r'^2 dr' \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi'. \quad (5)$$

Um $1/R$ durch die Integrationsvariablen auszudrücken, wählen wir wieder das Koordinatensystem so, daß der Aufpunkt in die Z - X -Ebene zu liegen kommt. Dann gilt bei Einführung von Polarkoordinaten

$$x = r \sin \vartheta, \quad y = 0, \quad z = r \cos \vartheta$$

und es wird:

$$\begin{aligned} R^2 &= (r' \sin \vartheta' \cos \varphi' - r \sin \vartheta)^2 + \\ &+ r'^2 \sin^2 \vartheta' \sin^2 \varphi' + (r' \cos \vartheta' - r \cos \vartheta)^2 = \\ &= r^2 \left[1 - \frac{2r'}{r} (\sin \vartheta' \cos \varphi' \sin \vartheta + \right. \\ &\quad \left. + \cos \vartheta' \cos \vartheta) + \frac{r'^2}{r^2} \right]. \end{aligned}$$

Wir entwickeln in die binomische Reihe und brechen nach dem zweiten Gliede ab:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{r'}{r} (\sin \vartheta' \cos \varphi' \sin \vartheta + \cos \vartheta' \cos \vartheta) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{r'^2}{r^2} (\sin \vartheta' \cos \varphi' \sin \vartheta + \cos \vartheta' \cos \vartheta)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Wir bezeichnen wieder den Ausdruck in der geschlungenen Klammer mit K und schreiben

$$\frac{1}{R} = \frac{K}{r}. \quad (6a)$$

Setzen wir nun (4), (5) und (6a) in die letzte Gleichung (1) ein, so ergibt sich

1) A. Einstein, Berl. Ber. 1916, S. 688.

2) In der entsprechenden Gl. (2) a. a. O. ist versehentlich der Faktor $\delta_{\mu\nu}$ weggelassen worden.

$$\begin{aligned}\gamma'_{44} &= -\frac{i\kappa Q_0}{2\pi r} \int_0^l r'^2 dr' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi d\vartheta' \left(\frac{dx_4}{ds}\right)^3 \sin \vartheta' K \\ \gamma'_{14} &= \frac{\kappa Q_0}{2\pi r} \omega \int_0^l r'^3 dr' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi d\vartheta' \left(\frac{dx_4}{ds}\right)^3 \sin^2 \vartheta' \sin \varphi' K \\ \gamma'_{24} &= -\frac{\kappa Q_0}{2\pi r} \omega \int_0^l r'^3 dr' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi d\vartheta' \left(\frac{dx_4}{ds}\right)^3 \sin^2 \vartheta' \cos \varphi' K \\ \gamma'_{11} &= \gamma'_{22} = \gamma'_{33} = \gamma'_{12} = \gamma'_{13} = \gamma'_{23} = \gamma'_{34} = 0.\end{aligned}\quad (7)$$

Bei Vernachlässigung der Glieder mit ω^2 und Benutzung des ersten Gesichtspunktes der Approximation gilt:

$$\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^3 = i \quad (\text{vgl. Gl. [11] a. a. O.}).$$

Setzt man diesen Wert für $\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^3$, sowie den Ausdruck für K aus (6) und (6a) in (7) ein, so erhält man nach Auswertung der Integrale

$$\left. \begin{aligned}\gamma'_{44} &= \frac{\kappa M}{2\pi r} \\ \gamma'_{14} &= 0 \\ \gamma'_{24} &= -i \frac{\kappa M l}{2\pi r 5r} \omega l \sin \vartheta \\ \gamma'_{11} &= \gamma'_{22} = \gamma'_{33} = \gamma'_{12} = \gamma'_{13} = \gamma'_{23} = \gamma'_{34} = 0.\end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Daraus folgt weiter gemäß (1), wenn man wieder rechtwinkelige Koordinaten einführt und an Stelle der Einsteinschen die Newtonsche

Gravitationskonstante $k = \frac{\kappa}{8\pi}$ setzt

$$\begin{aligned}g_{11} &= g_{22} = g_{33} = -1 - \frac{2kM}{r} \\ g_{44} &= -1 + \frac{2kM}{r} \\ g_{24} &= -i \frac{4kM}{r} \frac{lx}{5r^2} \omega l \\ g_{12} &= g_{13} = g_{23} = g_{14} = g_{34} = 0.\end{aligned}\quad (9)$$

Macht man sich nun von der speziellen Wahl des Koordinatensystems, bei welcher der Aufpunkt in die Z - X -Ebene fällt, durch eine Drehung des Systems frei, so erhält man das endgültige Koeffizientenschema:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 - \frac{2kM}{r} & 0 & 0 & i \frac{4kM}{5r} \frac{ly}{r^2} \omega l \\ 0 & -1 - \frac{2kM}{r} & 0 & -i \frac{4kM}{5r} \frac{lx}{r^2} \omega l \\ 0 & 0 & -1 - \frac{2kM}{r} & 0 \\ i \frac{4kM}{5r} \frac{ly}{r^2} \omega l & -i \frac{4kM}{5r} \frac{lx}{r^2} \omega l & 0 & -1 + \frac{2kM}{r} \end{pmatrix} \quad (10)$$

§ 2. Die Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes im Felde der rotierenden Vollkugel.

Es sollen im folgenden die Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes im Felde der rotierenden Vollkugel aufgestellt werden, wobei wir voraussetzen, daß seine Geschwindigkeit so klein sei, daß wir die Quadrate und Produkte der Geschwindigkeitskomponenten gegen 1 vernachlässigen können. Es sei dabei von vornherein betont, daß es uns hier nur darum zu tun ist, jene Störungsglieder der Planetenbewegung zu finden, welche von der Rotation der Zentralkörper herrühren. Um eine im Sinne der Einsteinschen Theorie genügend exakte Lösung des Planetenproblems zu erhalten, muß

man diesen hier berechneten Störungsgliedern noch jene hinzufügen, welche auf die bekannte Perihelbewegung führen¹⁾. Denn, obwohl die Glieder, welche von der Eigenrotation der Zentralkörper herrühren, schon aus der ersten Näherung der Einsteinschen Theorie hervorgehen, während die eben erwähnte Perihelstörung erst aus der zweiten Näherung gewonnen wurde, ist es doch nicht etwa angängig die ersteren zu berücksichtigen und die letzteren zu vernachlässigen. Warum man das nicht tun darf, geht aus folgenden Erwägungen hervor: Jene Zusatzglieder, durch welche sich der weiter unten entwickelte Kraftansatz von dem Newtonschen unterscheidet, sind proportional $\omega l v$, wobei v

1) A. Einstein, Berl. Ber. 1915, S. 831.

die Geschwindigkeit des Planeten, bzw. Mondes darstellt, während ωl die Geschwindigkeit eines Punktes am Äquator des Zentralkörpers darstellt. Nun gilt aber sowohl für das System Sonne-Planeten, als auch für die in Betracht kommenden Systeme Planeten-Monde die Ungleichung:

$$v > \omega l. \quad (11)$$

Wenn wir also die Glieder mit $\omega l v$ in Rechnung ziehen, so müssen wir erst recht auch jene Glieder in den Bewegungsgleichungen berücksichtigen, welche die Quadrate und Produkte der Geschwindigkeitskomponenten des Massenpunktes enthalten. Tun wir das aber, dann dürfen wir überhaupt nicht mehr mit der ersten Näherung allein rechnen, denn jene Glieder, welche in der zweiten Näherung zu den Newtonschen Gliedern hinzutreten, verhalten sich zu ihnen wie $\frac{\alpha}{r} : 1$, ($\alpha = 2 k M$). Das Geschwindigkeitsquadrat eines Planeten ist aber ebenfalls von der Größenordnung α/r ; die Berücksichtigung der quadratischen Glieder in den Geschwindigkeiten bedingt also logisch auch die Berücksichtigung der aus der zweiten Näherung hervorgehenden Glieder. Daraus folgt nun, daß wegen der Gültigkeit der Ungleichung (11) die hier an-

gestellten Rechnungen an und für sich keinen Sinn hätten. Man wird sie aber doch praktisch verwenden können, wenn man bedenkt, daß alle hier in Betracht kommenden Störungen ja so klein sind, daß man sie einander linear überlagern darf. Man gelangt also zu dem gewünschten Resultat einer Bahnberechnung mit Berücksichtigung aller Relativitätseinflüsse, wenn man der Rechnung die von Einstein in seiner Merkur-Arbeit angegebenen Bewegungsgleichungen zugrunde legt und ihnen noch die im folgenden berechneten Störungsglieder hinzufügt.

Wie a. a. O. gezeigt wurde, gehen unter Verwendung der oben angegebenen Vernachlässigung und mit den Koordinaten $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = it$ die allgemeinen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2 x_\tau}{ds^2} = \Gamma_{\mu\nu}^\tau \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}$$

über in

$$\frac{d^2 x_\tau}{dt^2} = 2i \left(\Gamma_{14}^\tau \frac{dx_1}{dt} + \Gamma_{24}^\tau \frac{dx_2}{dt} + \Gamma_{34}^\tau \frac{dx_3}{dt} \right) - \Gamma_{44}^\tau. \quad (12)$$

Die hier auftretenden 16 Größen $\Gamma_{\sigma\tau}^\tau$ lauten nach dem ersten Gesichtspunkte der Approximation für ein stationäres Feld:

$$\begin{aligned} \Gamma_{14}^1 &= 0, & \Gamma_{24}^1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{14}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{24}}{\partial x_1} \right), & \Gamma_{34}^1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{14}}{\partial x_3} - \frac{\partial g_{34}}{\partial x_1} \right), & \Gamma_{44}^1 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_1}, \\ \Gamma_{14}^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{24}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{14}}{\partial x_2} \right), & \Gamma_{24}^2 &= 0, & \Gamma_{34}^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{24}}{\partial x_3} - \frac{\partial g_{34}}{\partial x_2} \right), & \Gamma_{44}^2 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_2}, \\ \Gamma_{14}^3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{34}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{14}}{\partial x_3} \right), & \Gamma_{24}^3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{34}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{24}}{\partial x_3} \right), & \Gamma_{34}^3 &= 0, & \Gamma_{44}^3 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_3}, \\ \Gamma_{14}^4 &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_1}, & \Gamma_{24}^4 &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_2}, & \Gamma_{34}^4 &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_3}, & \Gamma_{44}^4 &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Für unser Feld, das durch Gleichungen (10) gegeben ist, geht dieses Schema über in:

$$\begin{aligned} 0, & & -i \frac{2 k M \omega l^2 x^2 + y^2 - 2 z^2}{5 r^2}, & & -i \frac{6 k M \omega l^2 y z}{5 r^2}, & & \frac{k M x}{r^2} \\ + i \frac{2 k M \omega l^2 x^2 + y^2 - 2 z^2}{5 r^2}, & & 0, & & + i \frac{6 k M \omega l^2 x z}{5 r^2}, & & \frac{k M y}{r^2} \\ + i \frac{6 k M \omega l^2 y z}{5 r^2}, & & -i \frac{6 k M \omega l^2 x z}{5 r^2}, & & 0, & & \frac{k M z}{r^2} \\ - \frac{k M x}{r^2}, & & - \frac{k M y}{r^2}, & & - \frac{k M z}{r^2}, & & 0, \end{aligned} \quad (14)$$

Durch Einsetzen dieser Werte für die $\Gamma_{\sigma\tau}^\tau$ in (12) erhalten wir die gesuchten Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{k M \omega l^2}{r^2} \left[\frac{4 x^2 + y^2 - 2 z^2}{5} + \frac{12 y z}{5 r^2} \dot{z} \right] - \frac{k M x}{r^2}, \\ \ddot{y} &= - \frac{k M \omega l^2}{r^2} \left[\frac{4 x^2 + y^2 - 2 z^2}{5} \dot{x} + \frac{12 z}{5 r^2} \dot{z} \right] - \frac{k M y}{r^2}, \\ \ddot{z} &= \frac{k M \omega l^2}{r^2} \frac{12}{5} \frac{z}{r} \frac{x \dot{y} - y \dot{x}}{r} - \frac{k M z}{r^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Die letzten Glieder der rechten Seite stellen die Newtonsche Kraft dar; an ihre Stelle hat man, wie oben auseinandergesetzt, die Kraftkomponenten gemäß der Einsteinschen Merkur-Arbeit zu setzen. Die ersten Glieder auf der rechten Seite sind die uns interessierenden Störungsglieder, welche von der Eigenrotation der Zentralkörper herrühren.

§ 3. Berechnung der durch die Eigenrotation des Zentralkörpers hervorgerufenen Störungen.

Die in den Gleichungen (15) auftretenden Störungsglieder sind als Komponenten X, Y, Z der durch die Eigenrotation des Zentralkörpers verursachten störenden Kraft anzusehen. Wir zerlegen sie in drei andere, aufeinander senkrecht stehende Komponenten S, T, W , wobei S die radiale, T die transversale und W die orthogonale (normal zur Planetenbahnebene) bedeuten möge, und führen folgende in der Astronomie übliche Bezeichnungen ein:

- a große Halbachse,
- e Exzentrizität,
- $p = a(1 - e^2)$ Halbparameter,
- $i = \angle XO\Pi$ Neigung,
- $\Omega = \angle XO\Omega$ Länge des Knotens,
- $\tilde{\omega} =$ gebrochener $\angle XO\Pi$,
Länge des Perizentrums,
- L_0 mittlere Länge der Epoche
= mittlere Länge des Planeten oder Trabanten zur Zeit $t = 0$
(ebenfalls ein gebrochener Winkel, gezählt von der X -Achse an),
- $v = \angle HOP$ wahre Anomalie,
- $u = \angle QOP = v + \tilde{\omega} - \Omega$ Argument der Breite,
- U Umlaufzeit des Planeten oder Trabanten in Tagen,
- $n = \frac{2\pi}{U} = \sqrt{\frac{kM}{a^3}}$ mittlere tägliche Bewegung,
- $C = r^2 \dot{v} = na^2 \sqrt{1 - e^2}$ doppelte Flächengeschwindigkeit.

Ferner werde noch zur Abkürzung die in den Gleichungen (15) auftretende Konstante $\frac{4kM\omega l^2}{5} = K$ gesetzt.

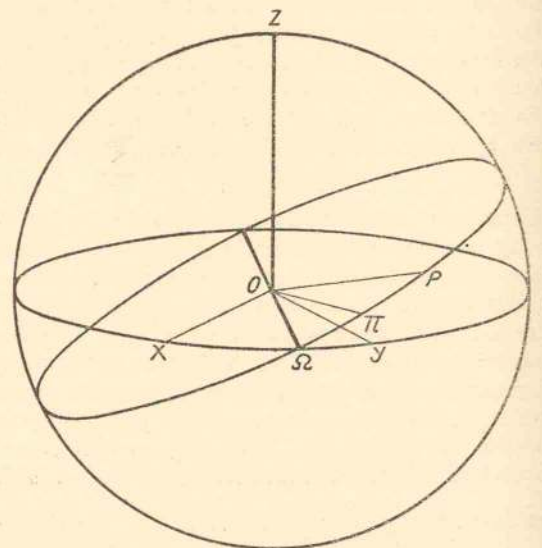
Es ist nun

$$\begin{aligned} x &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) \\ y &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) \\ z &= r \sin u \sin i \end{aligned}$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}$$

$$x\dot{y} - y\dot{x} = C \cos i,$$

ferner



Π und P bedeuten die vom Mittelpunkt O des Zentralkörpers auf die Sphäre projizierten Orte des Perizentrums und des Planeten oder Trabanten.

$$\begin{aligned} S &= X(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) + \\ &+ Y(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) + Z \sin u \sin i \\ T &= -X(\sin u \cos \Omega + \cos u \sin \Omega \cos i) - \\ &- Y(\sin u \sin \Omega - \cos u \cos \Omega \cos i) + Z \cos u \sin i \\ W &= X \sin \Omega \sin i - Y \cos \Omega \sin i + Z \cos i. \end{aligned}$$

Setzt man die durch die Gleichungen (15) gelieferten Werte von X, Y, Z unter Benutzung der angegebenen Beziehungen und Bezeichnungen in diese Formeln für S, T, W ein, so erhält man nach längerer Zwischenrechnung

$$\begin{aligned} S &= \frac{KC \cos i}{r^4} \\ T &= -\frac{K \dot{r} \cos i}{r^3} = -\frac{KCe \cos i \sin v}{p r^3} \\ W &= \frac{K \sin i}{r^4} (2C \sin u + r \dot{r} \cos u) = \\ &= \frac{KC \sin i}{r^4} \left(\frac{re \sin v \cos u}{p} + 2 \sin u \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Die Änderungen der Bahnelemente durch die störende Kraft sind gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{n \sqrt{1 - e^2}} \left(Se \sin v + T \frac{p}{r} \right) \\ \frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na} \left[S \sin v + T \left(e + \frac{r+a}{a} \cos v \right) \right] \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{C} W r \cos u \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{C \sin i} W r \sin u \end{aligned}$$

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[-S \cos v + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin v \right] + 2 \sin^2 \frac{i}{2} \frac{d\Omega}{dt}$$

$$\frac{dL_0}{dt} = -\frac{2}{na^2} S r + \frac{e^2}{1 + \sqrt{1-e^2}} \frac{d\tilde{\omega}}{dt} + 2 \sqrt{1-e^2} \sin^2 \frac{i}{2} \frac{d\Omega}{dt},$$

die sich nach Einsetzung der Werte (16) in folgender Form darstellen lassen:

$$\frac{da}{dt} = 0$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{K \cos i}{Ca} \sin v \cdot \dot{v}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{K \sin i}{Cp} \cos u [e \sin v \cos u + 2(1 + e \cos v) \sin u] \dot{v}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{K}{Cp} \sin u [e \sin v \cos u + 2(1 + e \cos v) \sin u] \dot{v}$$

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = -\frac{K \cos i}{Ca} \left(2 + \frac{1+e^2}{e} \cos v \right) \dot{v} + 2 \sin^2 \frac{i}{2} \frac{d\Omega}{dt}$$

$$\frac{dL_0}{dt} = -\frac{2K \cos i}{na^2 p} (1 + e \cos v) \dot{v} + \frac{e^2}{1 + \sqrt{1-e^2}} \frac{d\tilde{\omega}}{dt} + 2 \sqrt{1-e^2} \sin^2 \frac{i}{2} \frac{d\Omega}{dt}.$$

Im Sinne der Störungstheorie betrachten wir die auf der rechten Seite stehenden Bahnelemente wegen des außerordentlich kleinen Faktors K als konstant und integrieren nur über v , wobei zu beachten ist, daß $u = v + \tilde{\omega} - \Omega$, berechnen also die Störungen erster Ordnung bezüglich K . Wir erhalten somit, wenn wir noch

$$K_1 = \frac{K}{na^3} \text{ einführen,}$$

$$\Delta a = 0$$

$$\Delta e = -\frac{K_1 \cos i}{\sqrt{1-e^2}} \cos v$$

$$\Delta i = -\frac{K_1 \sin i}{2(1-e^2)^{3/2}} (\cos 2u + 2e \cos v \cos^2 u)$$

$$\Delta \Omega = \frac{K_1}{(1-e^2)^{3/2}} \left[v - \frac{1}{2} \sin 2u + e \left(\sin v - \frac{1}{2} \sin 2u \cos v \right) \right]$$

$$\Delta \tilde{\omega} = -\frac{K_1 \cos i}{(1-e^2)^{3/2}} \left(2v + \frac{1+e^2}{e} \sin v \right) +$$

$$+ 2 \sin^2 \frac{i}{2} \Delta \Omega$$

$$\Delta L_0 = -\frac{2K_1 \cos i}{1-e^2} (v + e \sin v) + \frac{e^2}{1 + \sqrt{1-e^2}} \Delta \tilde{\omega} + 2 \sqrt{1-e^2} \sin^2 \frac{i}{2} \Delta \Omega.$$

Es folgt das interessante Resultat, daß die Störungen der großen Halbachse exakt verschwinden. Während in Δe und Δi nur periodische Glieder auftreten, kommen in den übrigen Elementenstörungen auch säkulare vor, nämlich wegen $v = nt + \text{period. Glieder}$

$$\Delta \Omega = \frac{K_1}{(1-e^2)^{3/2}} nt \quad (17)$$

$$\Delta \tilde{\omega} = \Delta L_0 = -\frac{2K_1}{(1-e^2)^{3/2}} \left(1 - 3 \sin^2 \frac{i}{2} \right) nt.$$

§ 4. Numerische Resultate.

Die numerische Auswertung zeigt, daß im System Sonne—Planeten diese säkularen Störungen, selbst für den Zeitraum eines Jahrhunderts, unterhalb jeder Beobachtungsmöglichkeit bleiben; denn sie erreichen im Maximum 0,01" (beim Merkurperihel). Anders steht die Sache in den Systemen Planet—Monde. Hier kommen etwas größere Zahlen vor. Für die numerische Rechnung ist es besser, die gewonnenen Formeln (17) zu transformieren. Es möge dabei folgende Bezeichnungsweise gelten:

- l Radius des Planeten in cm,
- τ Rotationsdauer des Planeten in Tagen,
- a große Halbachse der Trabantenbahn in cm,
- a_1 " " " Planetenbahn " cm,
- U Umlaufszeit des Trabanten in Tagen,
- U_1 " " " Planeten " " "
- J Anzahl der Tage im Jahr,
- c Lichtgeschwindigkeit in cm sec⁻¹.

Dann liefern uns die aus (17) resultierenden Formeln

$$2\Delta \Omega = -\Delta \tilde{\omega} = -\Delta L_0 = \frac{\pi^2 J l^2}{9c^2 \tau U^2} \quad (18)$$

die infolge der Rotation des Planeten in den Elementen der Satellitenbahn hervorgerufenen Störungen in Bogensekunden pro Jahrhundert. Dabei wurde $e^2 = i^2 = 0$ gesetzt, was für die in Betracht kommenden Monde bei der angestrebten Genauigkeit erlaubt ist.

Darüber lagern sich additiv im Sinne von § 2 die von Einstein in seiner Merkur-Arbeit besprochenen Störungen, die teils von der direkten Wirkung des Planeten, teils von der störenden Wirkung der Sonne herrühren. Jene sind gegeben durch

$$\Delta\Omega = 0, \quad \Delta\tilde{\omega} = \Delta L_0 = \frac{5\pi^2 J}{24c^2} \frac{a^2}{U^3(1-e^2)}, \quad (19)$$

diese¹⁾ durch

$$4\Delta\Omega = \Delta\tilde{\omega} = \Delta L_0 = \frac{5\pi^2 J}{12c^2} \frac{a_1^2}{U_1^3}, \quad (20)$$

alle in Bogensekunden pro Jahrhundert. Bei letzteren wurden wieder Exzentrizität und Neigung der Planeten- und Trabantenbahn vernachlässigt, was durch die außerordentliche Kleinheit dieser Glieder gerechtfertigt ist, wie Tabelle I zeigt:

Tabelle I.

	$\Delta\Omega$	$\Delta\tilde{\omega} = \Delta L_0$
Erdmond	+1,9"	+7,7"
Beide Marsmonde . . .	+0,7"	+2,7"

Bei allen übrigen Monden sind sie bedeutend kleiner.

Die Störungen durch die Eigenrotation des Planeten sind in Tabelle II enthalten.

Tabelle II.

	Jupiter			Saturn				
	V	I	II	I	2	3	4	5
$\Delta\Omega$	+1'53"	+9"	+2"	+20"	+10"	+5"	+2"	+1"
$\Delta\tilde{\omega} = \Delta L_0$	-3'46"	-18"	-4"	-41"	-19"	-10"	-5"	-2"

Bei allen andern Satelliten bleiben sie unterhalb 0,5".

Am größten sind die der Einsteinschen Merkurperihelbewegung analogen Glieder (Formeln [19]), wie aus Tabelle III hervorgeht.

Tabelle III.
($\Delta\Omega = 0$)

	$\Delta\tilde{\omega} = \Delta L_0$		$\Delta\tilde{\omega} = \Delta L_0$
Mars 1	22"	Jupiter I	4' 28
2	2	II	1 24
Saturn 1	5' 46"	III	26
2	3 03	IV	6
3	1 47	V	36 37
4	59	Uranus I	22
5	25	2	10
6	3	3	3
7	2	4	1
10	2	Neptunmond	5

Bei den nicht angeführten Monden sind sie kleiner als 0,5".

Wenn wir nun alle drei Gattungen von

1) W. de Sitter, Planetary motion and the motion of the moon according to Einstein's theory. Amsterdam Proc. Bd. 19, 1916. In den Formeln (20) ist anschließend an de Sitter die Bahnebene des Planeten als XY-Ebene verwendet. In der de Sitterschen Abhandlung fehlt auf S. 379 Formel (38) vor $\delta\tilde{\omega}$ der Faktor $1/4$.

Gliedern addieren, um sämtliche Relativitätseinflüsse zu erhalten, haben wir folgendes zu berücksichtigen: Die in Einsteins Merkur-Arbeit behandelte Korrektur des Newtonschen Gesetzes wird durch eine längs des Radiusvektors wirkende Störungskraft bedingt, deren Komponenten sich aus der zitierten Abhandlung zu

$$S = -\frac{3n^2 a^3 C}{2c^2} \frac{\dot{r}}{r^2}, \quad T = W = 0,$$

also unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems ergeben. Infolgedessen können die entsprechenden Störungen (Formeln [19] und Tabelle III) auf eine beliebige XY-Ebene bezogen werden. Die in den Formeln (20) enthaltenen Elementenänderungen, hervorgerufen durch die von der klassischen Form abweichende störende Wirkung der Sonne, sind dagegen, wie schon erwähnt, auf die Bahnebene des Planeten bezogen, also auch die aus ihnen gerechneten Zahlen der Tabelle I, während sich in Tabelle II, welche die von der Rotation der Planeten herrührenden Störungsglieder enthält, alles gemäß der in der vorliegenden Abhandlung getroffenen Wahl des Koordinatensystems auf die Äquatorebene des Zentralkörpers bezieht. Es gilt demnach für die alle Relativitätseinflüsse zusammenfassende Tabelle IV folgendes: Beim Erdmond und den beiden Marsmonden treten nur Glieder (19) und (20) auf, die Referenzebene ist sonach die Bahnebene des Planeten, bei den Jupiter- und Saturntrabanten dagegen die Äquatorebene des betreffenden Zentralkörpers, weil hier wiederum nur Glieder (18) und (19) vorkommen; die Störungen der Uranusmonde und des Neptunmondes enthalten nur Glieder (19), folglich kann die Bezugsebene beliebig gewählt werden.

Tabelle IV.

	$\Delta\Omega$	$\Delta\tilde{\omega} = \Delta L_0$	Δt
Erdmond	2"	8"	13,9 ^s
Mars 1. Phobos . .	1	25	0,5
2. Deimos . .	1	5	0,4
Jupiter I	9	4' 10"	29,5
II	2	1 20	18,9
III	0	26	12,5
IV	0	6	7,1
V	1' 53"	32 51	1m 5,4 ^s
Saturn 1. Mimas .	20	5 05	19,2
2. Enceladus	10	2 44	15,0
3. Tethys .	5	1 37	12,2
4. Dione .	2	54	9,2
5. Rhea .	1	23	6,9
6. Titan .	0	3	3,3
7. Hyperion	0	2	2,7
10. Themis .	0	2	2,9
Uranus 1. Ariel .	0	22	3,7
2. Umbriel .	0	10	2,7
3. Titania .	0	3	1,5
4. Oberon .	0	1	1,0
Neptunmond . .	0	5	2,1

Zu der mit Δt überschriebenen Spalte ist folgendes zu sagen: Die säkulare Störung in der mittleren Länge bewirkt eine Änderung der mittleren täglichen Bewegung, d. h. an der zwischen zwei bestimmten Ereignissen, z. B. Verfinsterung der Jupitermonde, verflossenen Zeit wäre eine gewisse Korrektur anzubringen, wenn es keine Relativitätseinflüsse gäbe. Diese Korrektur ist für eine Zwischenzeit von hundert Jahren in der letzten Spalte der Tabelle IV angegeben und wird durch die Formel

$$\Delta t = \frac{1}{15} U \Delta L_0$$

erhalten.

Zusammenfassung.

Die Störungsglieder der Planeten- und Mondbahnen, welche nach der Einsteinschen Theorie von der Eigenrotation der Zentralkörper herühren, sind kleiner als jene, welche aus der zweiten Näherung der Theorie hervorgehen und die auf die Perihelbewegung des Merkur führen. Sie kommen gegenüber diesen Gliedern bei den Planetenbahnen gar nicht in Betracht, müssen aber bei den Bahnen der Jupiter- und Saturnmonde mit in Rechnung gezogen werden. Es wurden die säkularen Störungen, die von sämtlichen in Betracht kommenden Relativitätseinflüssen herrühren, für die Monde der äußeren Planeten berechnet. Obwohl sie teilweise — z. B. beim 5. Jupitermond — eine beträchtliche Größe erreichen, dürften die bis heute vorliegenden Beobachtungen nicht genau genug sein, um eine Prüfung der Theorie aus den Störungen der Mondbahnen zu gestatten.

Wien, Februar 1918. Institut für theoretische Physik der Universität.

(Eingegangen 21. Februar 1918.)

Über die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes.

Von Hans Bauer.

E. Schrödinger hat in seiner Untersuchung¹⁾ über die von A. Einstein als Energiekomponenten des Gravitationsfeldes bezeichneten Ausdrücke t_{α}^{α} nachgewiesen, daß diese Größen, die selbst nicht Tensorkovarianz besitzen, bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems auch bei Vorhandensein eines Gravitationsfeldes verschwinden können, was sicherlich dazu angetan ist, das Vertrauen in

die physikalische Bedeutung dieser Ausdrücke, wie sie Einstein ihnen beilegt, zu erschüttern. Die folgenden Ausführungen werden dieses Mißtrauen noch verstärken, indem durch sie das Umgekehrte gezeigt werden wird, daß die Größen t_{α}^{α} , bezogen auf ein passendes Koordinatensystem, bei nicht vorhandenem Gravitationsfeld nicht verschwinden.

Die Einsteinschen Energiekomponenten t_{α}^{α} des Gravitationsfeldes¹⁾ sind durch die folgende Beziehung definiert:

$$\kappa t_{\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{2} \delta_{\alpha}^{\alpha} g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\beta}^{\lambda} \Gamma_{\nu\lambda}^{\beta} - g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\sigma}^{\beta}; \quad (1)$$

dabei ist

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = -\frac{1}{2} g^{\lambda\beta} \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}} \right) \quad (2)$$

— über zweimal auftretende allgemeine Indizes ist von 1 bis 4 zu summieren —

$$\delta_{\sigma}^{\alpha} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \text{ für } \begin{cases} \sigma \neq \alpha \\ \sigma = \alpha \end{cases} \quad (3)$$

und κ im wesentlichen die Gravitationskonstante. Der vorstehende Ausdruck für die Energiekomponenten wurde jedoch von Einstein unter der Voraussetzung abgeleitet, daß die Determinante der $g_{\mu\nu}$

$$g = |g_{\mu\nu}| = -1 \quad (4)$$

ist, einer Beschränkung, der wir bei der Berechnung desselben das zu wählende Koordinatensystem unterwerfen müssen.

In hinreichend großer Entfernung von aller Materie lautet das Quadrat des Bogenelements in Polarkoordinaten:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (5)$$

und wir erkennen sogleich, daß diese Koordinaten der Bedingung (4) nicht entsprechen. Wir wählen deshalb an ihrer Statt die von Schwarzschild²⁾ verwendeten Polarkoordinaten

$$x_1 = \frac{r^3}{3}, \quad x_2 = -\cos \vartheta, \quad x_3 = \varphi, \quad x_4 = t, \quad (6)$$

wo x_1, x_2, x_3 die räumlichen Koordinaten sind und x_4 die Zeit bedeutet. Das Quadrat des Bogenelements nimmt bei Einführung dieser Koordinaten die Gestalt an:

$$ds^2 = dx_4^2 - \frac{dx_1^2}{(3x_1)^{1/3}} - (3x_1)^{2/3} \left[\frac{dx_2^2}{1-x_2^2} + (1-x_2^2) dx_3^2 \right], \quad (7)$$

aus der wir das folgende Schema der Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ ablesen:

1) A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Leipzig, J. A. Barth, 1916, S. 45 ff.

2) K. Schwarzschild, Berl. Ber. 1916, S. 189 ff.

1) E. Schrödinger, diese Zeitschr. 19, 4-7, 1918.

$$\begin{array}{cccc}
-\frac{1}{(3x_1)^{1/2}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{(3x_1)^{1/2}}{1-x_2^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -(3x_1)^{1/2}(1-x_2^2) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1.
\end{array} \quad (8)$$

Wir überzeugen uns leicht, daß die Forderung (4) jetzt erfüllt wird. Die zu den $g_{\mu\nu}$ adjungierten, normierten Unterdeterminanten 1. Ordnung $g^{\mu\nu}$ zeigt die folgende Anordnung:

$$\begin{array}{cccc}
-(3x_1)^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1-x_2^2}{(3x_1)^{1/2}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{(3x_1)^{1/2}(1-x_2^2)} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1.
\end{array} \quad (9)$$

Für ein Gravitationsfeld von Kugelsymmetrie schreibt Schwarzschild l. c. das Bogenelement in seinen Polarkoordinaten ganz allgemein in der Form:

$$ds^2 = f_4 dx_4^2 - f_1 dx_1^2 - f_2 \left[\frac{dx_2^2}{1-x_2^2} + (1-x_2^2) dx_3^2 \right], \quad (10)$$

wobei die Größen f_1, f_2, f_4 nur von x_1 abhängen. Von dieser Gestalt ist auch der Ausdruck (7) und es wird insbesondere

$$f_1 = (3x_1)^{-1/2}, \quad f_2 = (3x_1)^{1/2}, \quad f_4 = 1. \quad (11)$$

Schwarzschild findet ferner l. c. für die Ausdrücke $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ die folgenden Werte:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= -\frac{1}{2f_1} \frac{df_1}{dx_1}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{x_2}{1-x_2^2}, \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2f_1} \frac{df_2}{dx_1} \frac{1}{1-x_2^2}, & \Gamma_{33}^2 &= -x_2(1-x_2^2), \\
\Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2f_1} \frac{df_2}{dx_1} (1-x_2^2), & \Gamma_{13}^3 &= -\frac{1}{2f_2} \frac{df_2}{dx_1}, \\
\Gamma_{44}^1 &= -\frac{1}{2f_1} \frac{df_4}{dx_1}, & \Gamma_{23}^3 &= \frac{x_2}{1-x_2^2}, \\
\Gamma_{12}^2 &= -\frac{1}{2f_2} \frac{df_2}{dx_1}, & \Gamma_{14}^4 &= -\frac{1}{2f_4} \frac{df_4}{dx_1};
\end{aligned} \quad (12)$$

alle übrigen Komponenten verschwinden. Wir vereinfachen die Berechnung dieser Ausdrücke noch dadurch, daß wir uns auf den Äquatorialschnitt des Raumes beschränken:

$$x_2 = 0, \quad (13)$$

was mit Rücksicht auf die Kugelsymmetrie desselben ohne weiteres gestattet ist. In diesem Falle wird noch

$$\Gamma_{22}^2 = \Gamma_{33}^2 = \Gamma_{23}^3 = 0.$$

Setzen wir nun gemäß (11) die für f_1, f_2, f_4 ge-

fundenen Werte ein, so erhalten wir schließlich, da sich jetzt auch

$$\Gamma_{44}^1 = \Gamma_{14}^4 = 0$$

ergibt, die folgenden allein nicht verschwindenden Komponenten:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= -\frac{2}{3x_1}, & \Gamma_{22}^1 &= \Gamma_{33}^1 = 3x_1; \\
\Gamma_{12}^2 &= -\frac{1}{3x_1}; \\
\Gamma_{13}^3 &= -\frac{1}{3x_1};
\end{aligned} \quad (14)$$

sonst

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0.$$

Auch die Größen $g_{\mu\nu}$ und $g^{\mu\nu}$ der Schemata (8) und (9) nehmen für den Äquatorialschnitt eine einfachere Gestalt an:

$$\begin{aligned}
g_{11} &= -\frac{1}{(3x_1)^{1/2}}, & g_{22} &= g_{33} = -(3x_1)^{1/2}, & g_{44} &= 1; \\
g^{11} &= -(3x_1)^{1/2}, & g^{22} &= g^{33} = -\frac{1}{(3x_1)^{1/2}}, & g^{44} &= 1; \\
g_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} = 0 & \text{für } \mu \neq \nu.
\end{aligned} \quad (15)$$

Die Berechnung der Energiekomponenten t_{α}^{α} gelingt nunmehr ohne Schwierigkeit. Wir haben dabei zwei Fälle zu unterscheiden:

I. $\sigma = \alpha$.

$$\begin{aligned}
\kappa t_{\alpha}^{\alpha} &= \frac{1}{2} \left[\sum_{\nu, \beta} g^{\nu\nu} \Gamma_{\nu\beta}^1 \Gamma_{\nu 1}^{\beta} + \right. \\
&\quad + \sum_{\nu, \beta} g^{\nu\nu} \Gamma_{\nu\beta}^2 \Gamma_{\nu 2}^{\beta} + \\
&\quad + \sum_{\nu, \beta} g^{\nu\nu} \Gamma_{\nu\beta}^3 \Gamma_{\nu 3}^{\beta} + \\
&\quad + \sum_{\nu, \beta} g^{\nu\nu} \Gamma_{\nu\beta}^4 \Gamma_{\nu 4}^{\beta} \left. \right] - \\
&\quad - \sum_{\nu, \beta} g^{\nu\nu} \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}.
\end{aligned} \quad (16)$$

Die Auswertung der ersten vier Summen ergibt mit Rücksicht auf (14) und (15):

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu, \beta} g^{\nu\nu} \Gamma_{\nu\beta}^1 \Gamma_{\nu 1}^{\beta} &= \\
&= g^{11} (\Gamma_{11}^1)^2 + g^{22} \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + g^{33} \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 = \\
&= -\frac{4}{(3x_1)^{1/2}} + \frac{1}{(3x_1)^{1/2}} + \frac{1}{(3x_1)^{1/2}} = -\frac{2}{(3x_1)^{1/2}}; \\
\sum_{\nu, \beta} g^{\nu\nu} \Gamma_{\nu\beta}^2 \Gamma_{\nu 2}^{\beta} &= \\
&= g^{11} (\Gamma_{12}^2)^2 + g^{22} \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 = \\
&= -\frac{1}{(3x_1)^{1/2}} + \frac{1}{(3x_1)^{1/2}} = 0; \\
\sum_{\nu, \beta} g^{\nu\nu} \Gamma_{\nu\beta}^3 \Gamma_{\nu 3}^{\beta} &= \\
&= g^{11} (\Gamma_{13}^3)^2 + g^{33} \Gamma_{13}^3 \Gamma_{33}^1 = \\
&= -\frac{1}{(3x_1)^{1/2}} + \frac{1}{(3x_1)^{1/2}} = 0; \\
\sum_{\nu, \beta} g^{\nu\nu} \Gamma_{\nu\beta}^4 \Gamma_{\nu 4}^{\beta} &= 0.
\end{aligned} \quad (17)$$

Mithin wird

$$\kappa t_{\alpha}^{\alpha} = -\frac{1}{(3x_1)^{1/2}} - \sum_{\nu, \beta} g^{\nu\nu} \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}, \quad (18)$$

woraus unmittelbar

$$t_1^1 = +\frac{1}{\kappa(3x_1)^{1/2}}, \quad (19)$$

$$t_2^2 = t_3^3 = t_4^4 = -\frac{1}{\kappa(3x_1)^{1/2}}$$

folgt.

II. $\sigma \neq \alpha$.

$$\kappa t_{\sigma}^{\alpha} = -\sum_{\nu, \beta} g^{\nu\nu} \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\sigma}^{\beta}. \quad (20)$$

Man überzeugt sich leicht im Hinblick auf (14), daß sämtliche Komponenten verschwinden:

$$t_{\sigma}^{\alpha} = 0 \text{ für } \sigma \neq \alpha. \quad (21)$$

Zusammenfassend erhalten wir im Falle des von gravitierender Materie freien Raumes das folgende Schema der Energiekomponenten, wenn wir zugleich wieder gemäß (6) zu den ursprünglichen gewöhnlichen Polarkoordinaten zurückkehren:

$$\begin{array}{cccc} +\frac{1}{\kappa r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\kappa r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\kappa r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\kappa r^2} \end{array} \quad (22)$$

Die obige Rechnung läßt sich analog auch für die Umgebung einer ruhenden, inkompressiblen, gravitierenden Flüssigkeitskugel sowie für das Gravitationsfeld eines Massenpunktes durchführen, wenn man für die Größen f_1, f_2, f_4 an Stelle der unter (11) angegebenen Werte die folgenden¹⁾ einsetzt:

$$f_1 = \frac{1}{R^3(R-a)}, f_2 = R^2, f_4 = 1 - \frac{a}{R}, \quad (23)$$

wo

$$R = (3x_1 + \varrho)^{1/2} \quad (24)$$

ist und die Integrationskonstanten a^2 und ϱ von der Dichte und dem Radius der Flüssigkeitskugel abhängen. Im Falle des Massenpunktes ist

$$\varrho = a^3 \quad (25)$$

zu setzen und es wird

$$a = \frac{2k^2 M}{c^2}, \quad (26)$$

¹⁾ K. Schwarzschild, Berl. Ber. 1916, I. c. u. S. 424.

²⁾ Bei Schwarzschild mit α bezeichnet.

wobei M die Punktmasse, k^2 die Gaußsche Gravitationskonstante und c die Lichtgeschwindigkeit bedeuten. Für die Energiekomponenten ergeben sich dann die Werte:

$$\begin{array}{cccc} +\frac{1}{\kappa R^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\kappa R^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\kappa R^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\kappa R^2} \end{array} \quad (27)$$

E. Schrödinger findet l. c. im gleichen Falle, daß sämtliche Energiekomponenten verschwinden. Hierbei ist jedoch hervorzuheben, daß das teilweise Nichtverschwinden derselben, wie es die obigen Ausführungen ergaben, nichts mit dem Vorhandensein eines Gravitationsfeldes zu tun hat, sondern lediglich der Wahl des Koordinatensystems zuzuschreiben ist, das sich von dem Kartesischen, welches Schrödinger verwendet, unterscheidet. Da die Größen t_{σ}^{α} keine Tensoren sind, kann ein derartiges Verhalten derselben auch nicht überraschen.

Zusammenfassung.

Abschließend können wir also feststellen, daß die „Energiekomponenten“ t_{σ}^{α} nicht mit dem Vorhandensein eines Gravitationsfeldes in Zusammenhang stehen, sondern nur von der Koordinatenwahl abhängen: sie können bei vorhandenem Felde verschwinden, wie Schrödinger l. c. gezeigt hat, und bei nicht vorhandenem Felde nicht verschwinden, wie aus der obigen Untersuchung hervorgeht. Ihre physikalische Bedeutung erscheint somit mehr als zweifelhaft¹⁾.

¹⁾ Anmerkung bei der Korrektur am 19. März 1918: Mittlerweile ist zu diesem Gegenstande eine Äußerung A. Einsteins erschienen: diese Zeitschr. 19, 115, 1918.

Wien, Physikalisches Laboratorium der k. k. Technischen Hochschule.

(Eingegangen 2. März 1918.)

Bemerkung zu Herrn Schrödingers Notiz „Über ein Lösungssystem der allgemein kovarianten Gravitationsgleichungen“.

Von A. Einstein.

Die von Herrn Schrödinger angegebene¹⁾ Variante zu meiner Darstellung für das kosmische

¹⁾ Diese Zeitschr. 19, 20–22, 1918.

Gravitationsfeld hatte auch ich als die am nächsten liegende Möglichkeit bei Abfassung meiner Arbeit natürlich in Betracht gezogen. Aber ich muß gestehen, daß mir diese mögliche Auffassung einer Erwähnung nicht wert erschien.

In der Sprache der Newtonschen Theorie kann das zu lösende Problem etwa so formuliert werden. Eine räumlich geschlossene Welt ist nur dann denkbar, wenn die Kraftlinien der Gravitation, welche in den ponderablen Körpern (Sternen) endigen, im leeren Raume anfangen. Es bedarf also einer Modifikation der Theorie, in welcher der „leere Raum“ die Rolle einer über die interstellaren Räume verteilten negativen gravitierenden Masse übernimmt. Herr Schrödinger nimmt nun die Existenz von Materie mit negativer Massendichte an und repräsentiert sie durch den Skalar ϕ . Dieser Skalar ϕ hat mit dem im Innern der ponderablen Massen vorhandenen Druck der „wirklichen“, d. h. der wahrnehmbaren, in den Sternen kondensierten Materie von der Dichte ρ nichts zu tun; ρ verschwindet in den interstellaren Räumen, nicht aber ϕ .

Über das Gesetz, nach welchem ϕ als Funktion der Koordinaten bestimmt sein soll, schweigt der Autor; wir wollen nur zwei Möglichkeiten ins Auge fassen:

1. ϕ ist eine universelle Konstante. In diesem Falle stimmt Herrn Schrödingers Ansatz genau mit dem meinigen überein. Um dies zu sehen, braucht man nur statt ϕ den Buchstaben λ zu setzen und das betreffende Glied auf die linke Seite der Feldgleichungen zu bringen. Diesen Fall kann der Autor also nicht im Auge gehabt haben.
2. ϕ ist veränderlich. Dann bedarf es einer Differentialgleichung, welche ϕ als Funktion von $x_1 \dots x_4$ bestimmt. Man hat also nicht nur die Hypothese von der Existenz einer nicht beobachteten negativen materiellen Dichte in den interstellaren Räumen zugrunde gelegt, sondern auch noch ein hypothetisches Gesetz für die räumlich-zeitliche Verteilung dieser Massendichte zu postulieren.

Der von Herrn Schrödinger eingeschlagene Weg scheint mir nicht gangbar, weil er zu tief ins Gestrüpp der Hypothesen hineinführt.

(Eingegangen 3. März 1918.)

Bemerkungen zu den statistischen Grundlagen der Quantentheorie.

Von Ludwig Flamm.

Im Anschluß an eine Idee von Einstein¹⁾ konnte der Verfasser die Quantentheorie in besonders einfacher und konsequenter Weise²⁾ entwickeln, indem er von der folgenden Grundvoraussetzung ausging: Die gleichartigen Elementarbestandteile (Moleküle, Atome) eines Körpers nehmen in diskontinuierlicher Weise nur eine diskrete Reihe bestimmter Zustände $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ an, wobei ihnen die zugehörigen Energiewerte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ zukommen. Die quantenhafte Abgabe und Aufnahme der Energie von seiten eines solchen Körpers ergibt sich daraus als eine unmittelbare Folgerung. Auf Grund statistischer Überlegungen ließ sich dann das thermodynamische Verhalten eines derartigen Körpers ohne weiteres ableiten. Man kommt für die derzeit behandelten Fälle zu den richtigen Endformeln, wenn man die möglichen Zustände Z_n alle als untereinander gleichwahrscheinlich betrachtet. Die allgemeinen Formeln für die thermodynamisch wichtigen Funktionen lassen sich aber ganz ebenso einfach ohne diese Voraussetzung berechnen, wie im folgenden gezeigt werden soll.

Die Grundlage der statistischen Überlegungen bildet wie bei Planck³⁾ das Boltzmannsche Prinzip, wonach die Entropie S eines Körpers aus der Wahrscheinlichkeit W seines Zustandes nach der Formel

$$S = k \ln W \quad (1)$$

sich berechnet. Die Konstante k ist universell und ergibt sich numerisch aus der allgemeinen Gaskonstante durch Division mit der molaren Loschmidtschen Zahl⁴⁾. Es kommt nunmehr bloß auf die Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür an, daß in einem bestimmten Augenblick von den N gleichartigen Elementarbestandteilen des betrachteten Körpers gerade die Anzahlen $N_1, N_2, N_3, \dots$ bzw. die Zustände $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ besitzen, wobei

$$N_1 + N_2 + N_3 + \dots = \sum N_n = N \quad (2)$$

ist. Schreibt man für den einzelnen aus der Gesamtheit herausgegriffenen Elementarbestandteil den Zuständen $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ die bezüglichen Wahrscheinlichkeiten $a_1, a_2, a_3, \dots$ zu, so berechnet sich für den betrachteten Körper die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu

1) Verh. d. D. Phys. Ges. 18, 318, 1916.

2) Zum gegenwärtigen Stand der Quantentheorie; diese Zeitschr. 19, 116—128, 1918.

3) Theorie der Wärmestrahlung, 2. Aufl., S. 117, Leipzig 1913.

4) Flamm, diese Zeitschr. 18, 519, 1917.

$$W = \frac{N!}{\prod (N_n!)} \prod a_n^{N_n};$$

daraus folgt

$$\ln W = \ln(N!) - \sum \ln(N_n!) + \sum N_n \ln a_n. \quad (3)$$

Da N und auch die in Betracht kommenden N_n im allgemeinen sehr große Zahlen bedeuten, genügt es, die Stirlingsche Formel in der abgekürzten Gestalt

$$\ln(n!) = n \ln n - n$$

zu verwenden. Unter Beachtung von (2) vereinfacht sich (3) dadurch zu

$$\ln W = \sum N_n \ln \frac{N a_n}{N_n}.$$

Führt man noch die übliche Bezeichnung

$$\frac{N_n}{N} = w_n$$

ein, in welcher die Bedingung (2) sich

$$\sum w_n = 1 \quad (2')$$

schreibt, so erhält man schließlich nach Formel (1)

$$S = Nk \sum w_n \ln \frac{a_n}{w_n} \quad (4)$$

als Ausdruck für die Entropie des Körpers in ihrer Abhängigkeit von der gegebenen Zustandsverteilung der Elementarbestandteile. Setzt man alle a_n gleich 1, so nimmt diese Formel die bekannte Form¹⁾ an.

Die weitere Rechnung erfolgt auf die übliche Weise. Man betrachtet den Körper als abgeschlossen, so daß er neben der bestimmten Zahl von Elementarbestandteilen auch eine vorgegebene Energie

$$E = N \sum \varepsilon_n w_n \quad (5)$$

besitzt. Für den Fall thermodynamischen Gleichgewichts muß die Variation der Entropie nach Gleichung (4) verschwinden unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen (2') und (5). Dies führt auf eine Verteilung nach der Formel

$$w_n = \alpha a_n e^{-\beta \varepsilon_n}, \quad (6)$$

deren Konstanten α und β die beiden Nebenbedingungen

$$\alpha \sum a_n e^{-\beta \varepsilon_n} = 1 \quad (6a)$$

$$\alpha N \sum a_n \varepsilon_n e^{-\beta \varepsilon_n} = E \quad (6b)$$

befriedigen müssen. Dadurch reduziert sich die Gleichung (4) für diesen ausgezeichneten Wert der Entropie auf

$$S = k(\beta E - N \ln \alpha). \quad (7)$$

Der zweite Hauptsatz führt darauf angewendet

die Größe β auf die absolute Temperatur T zurück durch die Beziehung

$$\beta = \frac{1}{kT}. \quad (8)$$

Die Formel (6) für die Zustandsverteilung im Falle thermodynamischen Gleichgewichts lautet somit schließlich

$$w_n = \alpha a_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}. \quad (6')$$

Diese Formel benutzt Einstein¹⁾ als Ausgangspunkt zu einer neuartigen Ableitung für die Energiedichte der Hohlraumstrahlung, wobei er die Abkürzung

$$\phi_n = \alpha a_n$$

gebraucht und als das statistische „Gewicht“ des Zustandes Z_n bezeichnet.

Für die Entropie des Körpers bei der bestimmten absoluten Temperatur T folgt nach (7) und (8)

$$S = \frac{E}{T} + \Psi, \quad (9)$$

wobei die Bezeichnung

$$\Psi = -Nk \ln \alpha$$

eingeführt wurde. Vermöge der Gleichung (6a) mit Rücksicht auf (8) erhält man für diesen Ausdruck weiter

$$\Psi = Nk \ln \sum a_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}. \quad (10)$$

Die Größe Ψ ist wieder nichts anderes als die „charakteristische Funktion“ des Körpers, aus der sich nach den bekannten Formeln²⁾ Energie, Entropie und spezifische Wärme bei konstantem Volumen ohne weiteres berechnen lassen. Die Größe α hängt in einfacher Weise direkt mit der „charakteristischen Funktion“ zusammen, wie die vorletzte Gleichung erkennen läßt.

Die Kenntnis des thermodynamischen Verhaltens des Körpers ist somit auch in diesem verallgemeinerten Falle auf die Berechnung der „charakteristischen Funktion“ zurückgeführt, welche durch Gleichung (10) gegeben ist. Hierzu ist also noch die Verwendung der Wahrscheinlichkeiten a_n für die Einzelzustände Z_n der Elementarbestandteile erforderlich. Diese dürften wohl in engem Zusammenhange stehen mit den Wahrscheinlichkeiten des Überganges aus dem einen Zustande in die anderen Zustände, welche in neuester Zeit Interesse erregt haben. Bisher jedenfalls aber sind unsere diesbezüglichen Kenntnisse noch recht mangelhaft.

1) l. c. S. 320.

2) Zum gegenw. Stand der Quantentheorie, l. c. S. 118.

1) Zum gegenw. Stand der Quantentheorie, l. c. S. 117.

Zusammenfassung.

Die quantentheoretischen Grundformeln zur Berechnung der Energie, Entropie und spezifischen Wärme eines Körpers bei konstantem Volumen werden auf Grund einer geringsten Zahl spezieller Voraussetzungen in möglichst allgemeiner Weise entwickelt.

Wien, Physikalisches Laboratorium der k. k. Technischen Hochschule.

(Eingegangen 5. Februar 1918.)

Vorlesungsverzeichnis für das Sommersemester 1918.

Technische Hochschule Aachen.

Starke: Experimentalphysik II, 4; Übungen im physikalischen Laboratorium: a) Praktikum, b) Anleitung zu selbständigen physikalischen Untersuchungen, tägl. — **Seitz:** Theoretische Physik, 2; Experimentalphysik, enzyklopädischer Kurs, 2. — **Steubing:** Photographie I und II, 1, Übungen, 3; Theorie der Wärmestrahlung, 1. — **Polis:** Klimatologie, 2; Ausgewählte Kapitel der Meteorologie, 1; Meteorologische Technik, 1, Übungen, 2—4. — **Schreiber:** Technische Thermodynamik, 2; Besprechungen neuerer Arbeiten auf dem Gebiete der Wärmekraftmaschinen, 1. — **Grotian:** Allgemeine Elektrotechnik, 5; Theoretische Elektrotechnik, 2; Elektrotechnisches Praktikum, für Elektroingenieure, 8, für Maschineningenieure, 5. — **N.N.:** Ausgewählte Kapitel der praktischen Elektrotechnik, 1; Einleitung in die Elektrotechnik, 2; Konstruktionslehre der Elektrotechnik, 3; Elektrotechnische Konstruktionsübungen, 2. — **Finzi:** Elektrische Zentralanlagen und Leitungen, 2, Übungen, 2; Elektromotorische Antriebe in Berg- und Hüttenwerken, 2. —

Bredt: Organische Experimentalchemie I, 4; Allgemeine Übersicht über die organische Chemie, 2; Organisches Praktikum, tägl. — **Classen:** Allgemeine und anorganische Experimentalchemie, 4; Anorganisches Praktikum für Chemiker, Hüttenleute und Bergleute, tägl. außer Sonnabend; Elektroanalytisches und elektrochemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend. — **Rau:** Chemische Technologie II, 2, IV, 2; Entwerfen von chemischen Apparaten und Fabrikanlagen, 4; Chemisch-technisches Praktikum, tägl., für Bergleute, Halbpraktikum, 12. — **Ruer:** Physikalische Chemie II, 2; Ausgewählte Kapitel der physikalischen Chemie, 1; Übungen in physikalischer Chemie für Hüttenleute, 3, für Chemiker, 1 Vormittag, für Fortgeschrittene, ganz- und halbtägl., tägl. außer Sonnabend; Allgemeines hüttenmännisches Praktikum, 3. — **v. Kapff:** Chemische Technologie der Gespinnstfasern: Färberei, Bleicherei usw., 2, Übungen, 4. —

Blumenthal: Höhere Mathematik III, 3; Elemente der Differential- und Integralrechnung, 5, Übungen, 1. — **Hamel:** Höhere Mathematik I, 6, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel der Mathematik, 2 g. — **v. Kármán:** Mechanik I, 4, Übungen, 1, II, 3, Übungen, 1; Flugtechnische Aerodynamik, 2 g. — **Kötter:** Darstellende Geometrie II, 2, Übungen, 2; Elemente der darstellenden Geometrie, 2, Übungen, 2. — **Treffitz:** Praxis der Differentialgleichungen, 2. — **Wilski:** Markscheiden und Feldmessen II, 3, Übungen, 1 Tag; Abriß der Markscheiden- und Feldmeßkunde, 2. — **Wandhoff:** Markscheiden und Feldmessen II, 3, Übungen, 1 Tag; Markscheiderische Zeichen- und Rechenübungen, 2. — **Gast:** Praktische Geometrie I, 2, II, 1; Geodätisches Praktikum I, 1 Tag, II, 4; Geodätische Ausarbeitungen, 4; Geographische Ortsbestimmung, 2, Übungen, 2; Höhere Geodäsie, 2. —

Universität Basel.

Hagenbach: Experimentalphysik I, 6; Physikalisches Praktikum für Vorgerücktere, ganztägl., für Anfänger (mit Veillon und Zickendraht), 8; Probleme der modernen Physik in elementarer Darstellung, 1; Physikalisches Kolloquium, 14-tägl., 2 g. — **Veillon:** Elektrische Messungen, mit Demonstrationen, 2. — **Matthies:** Wärmetheorie, 4, Übungen, 1 g; Theorie der physikalischen Meßinstrumente und der Ausgleichung von Beobachtungen, 2; Mathematisch-physikalisches Seminar, 2 g. — **Zickendraht:** Hochfrequenzpraktikum, Anleitung zu Experimenten über elektromagnetische Schwingungen, 3; Repetitorium der Elektrizitätslehre, 1. —

Rupe: Die Methoden der organischen Synthese, 2 $\frac{1}{2}$; Chemisches Vollpraktikum: Organische Chemie, tägl.; Chemisches Kolloquium (mit Fichter und Bernoulli), 1 g. — **Fichter:** Anorganische Experimentalchemie, 6; Analytisches Halbpraktikum für Anfänger (für Mediziner: Übungen in der qualitativen Analyse), 9; Chemisches Vollpraktikum: Anorganische und elektrochemische Übungen und Arbeiten, tägl. — **Bernoulli:** Allgemeine physikalische Chemie, 2; Thermochemische und elektrochemische Übungen, 2; Physikalisch-chemische Übungen und Arbeiten, tägl. — **Zörnig:** Pharmakognosie, 3; Mikroskopische Untersuchung von Arzneidrogen bez. Nahrungs- und Genußmitteln I und III, 3; Mikroskopische Untersuchung der Drogenpulver I und III, 2; Pharmazeutische Chemie und chemische Toxikologie, 4; Harnanalyse, 1; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum, tägl.; Pharmakognostische Übungen für Fortgeschrittene, tägl.; Kolloquium, 1. — **Kreis:** Chemie der Nahrungs- und Genußmittel I, 2; Übungen in der Untersuchung von Lebensmitteln, 4; Arbeiten im Laboratorium für angewandte Chemie, tägl. —

Hecke: Differential- und Integralrechnung II, 4, Übungen, 1; Einführung in die höhere Geometrie, 2; Theorie der algebraischen Zahlen, 2; Seminar, für Fortgeschrittene (mit Spieß), 1 g. — **Spieß:** Elementargeometrie (vom höheren Standpunkt), 3; Wahrscheinlichkeitsrechnung, 4. — **Flatt:** Pädagogisches Seminar, mathematisch-naturwissenschaftliche Abteilung II, 2; Repetitorium der Algebra, 2; Geschichte und Methodik der Leibnizübungen, 1. — **Knapp:** Stellar-Astronomie, 2; Astronomisches und geodätisches Messen für Anfänger, 2; Meteorologie, 1; Astronomisches Praktikum für Vorgerücktere, 3; Astronomische Übungen für Anfänger, 2. —

Universität Berlin.

Rubens: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärmelehre, 5, Mathematische Ergänzungen, 1 g; Physikalisches Kolloquium, 1 $\frac{1}{2}$ g; Arbeiten im Physikalischen Laboratorium, für Geübtere (mit Wehnelt), tägl. — **Planck:** System der theoretischen Physik, 4; Mathematisch-physikalische Übungen, 1 g. — **Wehnelt:** Mathematische Ergänzungen zum physikalischen Praktikum, 1 g; Praktische Übungen für Anfänger I und II (mit Blasius), 7; Physikalisches Praktikum für Pharmazeuten, 3; Praktikum zur Erlangung von Handfertigkeit für das physikalische Arbeiten, 3. — **Hellmann:** Theoretische Meteorologie, 1; Meteorologisches Kolloquium, 1 g. — **Warburg:** Wärmeleitung und andere ausgleichende Vorgänge, 2. — **Ad. Schmidt:** Gezeiten und Meeresströmungen, 2; Kollektivmaßlehre, 1 g. — **Neessen:** Atmosphärische Elektrizität, Blitzableiter, 2. — **Blasius:** Übungen im Anschluß an das Praktikum, 1 g. — **E. Meyer:** Ausgewählte Kapitel der technischen Mechanik, 2. — **Born:** Atomistik, 1 g; Dynamik der Kristallgitter, 3. — **Krigar-Menzel:** Theorie des Lichtes, 4. — **Less:** Praktische Wetter- und Klimakunde, 1; Über die jeweiligen Witterungsvorgänge, 1 g. — **Byk:** Absolutes Maßsystem und physikalischer Dimensionsbegriff, 1. — **Henning:** Einführung in die Vektorenanalyse, 1. — **Reiche:** Potentialtheorie mit Anwendungen in verschiedenen Gebieten der Physik, 2 $\frac{1}{2}$. — **Seeliger:** Grundlagen der

Hydrodynamik, 1. — **Scheffer**: Angewandte wissenschaftliche Photographie, 1; Wissenschaftliche Grundlagen der Mikroskopie, 1. —

Fischer: Praktische Arbeiten im chemischen Universitätslaboratorium (mit Gabriel, Traube, Leuchs, Schoeller), tägl.; Kursus für Mediziner und Zahnärzte, 3. — **Nernst**: Anorganische Experimentalchemie, 5; Anorganisch-chemisches Praktikum (mit Marckwald), tägl.; Physiko-chemische Arbeiten, tägl.; Physiko-chemisches Kolloquium, 1 g. — **Beckmann**: Chemische Untersuchungen im Kaiser-Wilhelm-Institut für Chemie, tägl. g. — **Wichelhaus**: Technologie für Chemiker, anorganische Stoffe, 4; Übungen im Institut (mit Großmann und Houben), tägl.; Anleitung im Institut (mit Großmann und Houben), tägl. — **Gabriel**: Organische Experimentalchemie, 5. — **Thoms**: Pharmazeutische Chemie, organischer Teil, 4; Praktische Übungen und Arbeiten in pharmazeutischer, toxikologischer, physiologischer und Nahrungsmittel-Chemie, tägl.; Nahrungsmitteluntersuchung mit besonderer Bezugnahme auf den Weltkrieg, 1 1/2. — **Traube**: Qualitative chemische Analyse, 1 1/2. — **Stock**: Anorganisch-chemische Arbeiten, tägl. — **Biedermann**: Explosivstoffe, 2. — **Neuberg**: Arbeiten auf dem Gebiete der Biochemie, tägl.; Organisch-chemische Arbeiten, tägl. — **Pschorr**: Organische Chemie II: Aromatische Reihe, zyklische Verbindungen, Farbstoffe, Alkaloide usw., 4; Praktische Arbeiten im Organischen Laboratorium, tägl. — **Fock**: Physikalische Chemie, 1; Kristalchemie, 1. — **Rosenheim**: Anorganisch-chemisches Praktikum (mit R. J. Meyer), tägl.; Übungen in der Experimentalchemie, besonders für Lehrer und Lehrerinnen (mit R. J. Meyer), 8; Praktische Übungen in der Gas- und Maßanalyse, 4. — **Sachs**: Konstitutionsbestimmungen organischer Verbindungen, 1. — **Jacobson**: Besprechung chemischer Tagesfragen, 1. — **Houben**: Arbeitsmethoden der organischen und unorganischen Chemie, 1. — **Koppel**: Das chemische Gleichgewicht, 1 g. — **Spiegel**: Anorganische Chemie, 3. — **Meisenheimer**: Überblick der organischen Experimentalchemie, 3, Ergänzungen, 2; Anorganisch- und organisch-chemisches Praktikum, tägl. — **Großmann**: Warenkunde und Weltwirtschaft, mit Demonstrationen und Exkursionen, 1. — **Leuchs**: Einführung in die organische Chemie II, 1. — **Pringsheim**: Alkoholische Gärung, 1. — **Anselmino**: Arzneimittelgesetzgebung, 1. —

Schwarz: Über den Hauptsatz der projektiven Geometrie, 2 g; Mathematisches Seminar (mit Schottky), 2 g. — **Foerster**: Geschichte der Astronomie, 2 g; Grundlegenden der Orts- und Zeitbestimmung, 1 g; Polarlicht und Zodiakallicht, 1 g. — **Schottky**: Lineare Differentialgleichungen, 4; Probleme der analytischen Mechanik, 2. — **E. Schmidt**: Determinanten, 4; Funktionentheorie II, 4; Mathematisches Seminar, 2 g. — **Struve**: Einleitung in die Himmelsmechanik, 3; Übungen an den Instrumenten der Sternwarte, nach Vereinbarung, g. — **Cohn**: Bahnbestimmung der Himmelskörper, 4; Seminar für wissenschaftliches Rechnen: Übungen zur Bahnbestimmung, 2 g. — **Kohlschütter**: Mathematische Geographie, 1. — **Rothe**: Analytische Geometrie des Raumes und Einführung in die Differentialgeometrie, 4. — **Knopp**: Einführung in die höhere Mathematik, 2; Differential- und Integralrechnung II: Integralrechnung, 4, Übungen, 1 g; Algebra II, 4; Mathematisches Proseminar (mit Schur), 14 tägl., 2 g. — **Guthnick**: Spektralanalyse der Gestirne, 2. — **Schur**: Differentialrechnung, 4, Übungen, 1 g; Elliptische Funktionen, 4. — **Marcuse**: Astronomie in allgemeiner Darstellung, mit Lichtbildern, 1 1/2; Geographische Ortsbestimmung auf Land-, See- und Luftreisen, mit Übungen, 1 1/2; Neuere Ergebnisse von Naturwissenschaft und Technik, mit Lichtbildern, 1. — **Witt**: Wissenschaftliches Rechnen, 2; Astronomische Übungen, 6 g. — **Schweydar**: Kapitel aus der Geophysik, für Geographen und Geologen, 1. —

Technische Hochschule Berlin.

Kurlbaum: Experimentalphysik: Wärme, Optik, 4; Physikalische Übungen, 16. — **Grunmach**: Magnetische und elektrische Maßeinheiten und Meßmethoden, 2; Physikalische Maßbestimmungen und Meßinstrumente (Physikalische Übungen), 10. — **Kalischer**: Die physikalischen Grundlagen der Elektrotechnik I, 2; Elektromagnetismus und Induktion mit besonderer Berücksichtigung der Elektrotechnik, 4; Grundzüge der Elektrochemie, 2. — **Korn**: Ausgewählte Kapitel der Elastizitätstheorie, 2. — **Krigarmenzel**: Allgemeine Mechanik II: Gleichgewicht und Bewegung von elastischen, festen und flüssigen Körpern, 4; Einführung in die kinetische Gastheorie, 2. — **Berndt**: Luftelektrizität, 1. — **Felgentraeger**: Maß- und Gewichtswesen II, 2; Die Meßinstrumente des Chemikers, 2. — **Gehlhoff**: Elektronentheorie der Metalle, 1. — **Kaliner**: Der Wind nach Entstehung, Messung und Ausnutzung für Hoch- und Hafenbau, See- und Luftschiffahrt, sowie für Windmotorenbau, 1. — **Kock**: Methoden zur Aufnahme von schnell verlaufenden elektrischen und magnetischen Erscheinungen: Oszillographen usw., 2; Meßmethoden der drahtlosen Telegraphie, 2. — **Lichtenstein**: Randwertaufgaben der Potentialtheorie II, 2. — **Möller**: Beleuchtungstechnik, 1. — **Petzoldt**: Die Relativitätstheorie, 1 g. — **Pirani**: Anwendungen der graphischen Darstellung und des graphischen Rechnens auf physikalische Fragen, 1. — **Orlich**: Theoretische Elektrotechnik I, 2, Übungen, 1; Elektrotechnische Meßkunde I und II, 2; Elektrotechnisches Laboratorium I, II und III, 4; Elektrotechnisches Laboratorium für Fortgeschrittene, tägl. — **Wedding**: Elektromaschinenbau I und II, 2; Beleuchtungstechnik, 2; Beleuchtungstechnisches Laboratorium, 3, für Fortgeschrittene, tägl.; Elektrotechnik für Bergleute, 2, Übungen, 1. — **Franke**: Elektrische Fernmeldetechnik einschließlich drahtlose Telegraphie II: Anlagen, 4, Übungen, 1; Entwerfen von Instrumenten und Apparaten der Meß- und Fernmeldetechnik, Übungen, 2; Entwerfen von Anlagen der Fernmeldetechnik, Übungen, 2; Laboratorium für Fernmeldetechnik, 6, für Fortgeschrittene, tägl. — **Kloß**: Elektromaschinenbau I, 4, Übungen, 1, III, 2; Entwerfen elektrischer Maschinen I, Übungen, 4, III, Übungen, 8; Elektrotechnisches Versuchsfeld, 4, für Fortgeschrittene, tägl. — **v. Parseval**: Flugzeuge, 2. — **W. Reichel**: Elektrische Kraftanlagen und Bahnen II, 2; Entwerfen elektrischer Kraftanlagen und Bahnen, 4. — **Becker**: Flugmotoren und Luftschiffmotoren, 2. — **Benischke**: Allgemeine Wechselstromtechnik, 4. — **Breslauer**: Berechnung und Prüfung elektrischer Maschinen nach den in der Praxis herrschenden Gepflogenheiten, 2. — **Everling**: Mechanik des Frei- und Lenkballons, 1. — **Fabender**: Elektrische Messungen und Meßmethoden in Hochfrequenzkreisen und ihre praktische Anwendung in der drahtlosen Telegraphie, 2; Demonstrationen im Laboratorium, Übungen, 14 tägl., 2; Technische Grundlagen der Elektromedizin, mit Demonstrationen, 2. — **Philippi**: Über elektrisches Förder- und Signalwesen. — **Rüdenberg**: Selbstinduktion und Streuung in elektrischen Maschinen, 2. — **Wagner**: Ausgewählte Kapitel aus der Hochspannungstechnik, 2. — **Zehme**: Elektrische Stadtschnellbahnen und Vorortbahnen, 2. — **Krell**: Schiffselektrotechnik, 2. — **Dietz**: Luftschiffbau und Luftschiffahrt, 1. — **Schaffran**: Luft- und Wasserpropeller-Versuche, 1. — **Günther**: Anwendung der Photographie zum Messen in der Technik: Photogrammetrie, mit Lichtbildern und Demonstrationen, 2. —

Hofmann: Experimentalchemie, 4; Experimentalchemie: Chemie der Metalle mit Einführung, 4; Gasanalyse, 2. — **Dolezalek**: Angewandte Elektrochemie, 2; Kleines physikalisch-chemisches und elektrochemisches Praktikum, 2 halbe Tage; Praktische Arbeiten im physikalisch-chemischen und elektrochemischen Institut, tägl. — **Holde**: Untersuchung der Kohlenwasserstoffe und verwandte Produkte: Schmieröle, Treiböle, Leuchtöle, Paraffin, Ceresin, Asphalt usw., 2. — **Juckenack**: Chemie der Nahrungsmittel mit Berücksichtigung der Nahrungs-

mittelanalyse und Bakteriologie, 4; Chemisch-technische Analyse, 2. — **Miethe**: Spektralanalyse, mit Übungen, 2; Photochemie und photomechanische Prozesse, 2; Konstruktionstypen photographisch-optischer Instrumente, 1; Praktische Arbeiten im photochemischen Laboratorium, speziell für Photochemiker, tägl.; Photographische Übungen in den gebräuchlichen Prozessen, 16. — **Pschorr**: Organische Chemie II: Aromatische Reihe, zyklische Verbindungen, Farbstoffe, Alkaloide usw., 4; Praktische Arbeiten im organischen Laboratorium, tägl. — **Reisenegger**: Chemische Technologie II: Organische Verbindungen, Faserstoffe, Papier, Leder, Fette, Öle, Seifen, Farbstoffe, Beleuchtung, Trockene Destillation, Gasbereitung, Kokerei, Teerdestillation, Holzwirtschaft, Braunkohle, Erdöl, mit Exkursionen, 4; Praktische Arbeiten im technisch-chemischen Institut, tägl. — **Traube**: Thermochemie, 2; Physikalisch-chemische Übungen, 3; Physikalische Chemie und Beziehung zur Biologie, 1. — **Stavenhagen**: Anorganische Experimentalchemie, für Bergleute, 4; Praktische Arbeiten im Chemischen Laboratorium der Bergbau-Abteilung, tägl.; Einführung in die Experimentalchemie, 2. — **Wölbling**: Analytische Chemie, für Bergleute, 2; Chemisches Kolloquium, für Bergleute, 1. — **Arndt**: Anwendungen der physikalischen Chemie auf technische Vorgänge, 1. — **Börnstein**: Verbrennung und Heizung, 1. — **Bucherer**: Die Grundzüge der Färberei und Druckerei, 1. — **Byk**: Chemie der photographischen Prozesse, 1. — **Endell**: Ausgewählte Kapitel der Mineralchemie nebst technischen Anwendungen, 1. — **v. Girsowald**: Praktische Kalorimetrie, mit Übungen, 2. — **Grüttner**: Stereochemie anorganischer Verbindungen II, 1. — **Guertler**: Metallographie II, spezielle Konstitutionslehre, Messing-, Bronze-, Kupfer-, Aluminium-, Zink- usw. Legierungen, 2. — **Hanemann**: Ausgewählte Abschnitte aus der Metallographie, 1. — **Herrmann**: Radioaktive Prozesse, 1. — **Just**: Chemische Elektronenlehre, 1. — **Lehmann**: Die Farbenphotographie, 1. — **Liebermann**: Methoden zur Konstitutionsbestimmung organischer Verbindungen, 1. — **Loewenherz**: Erläuternde Vorträge zu den Führungen durch das Chemische Museum, organischer Teil, 1 g; Die Produkte der chemischen Industrie, ausgewählte Kapitel, im Anschluß an die Sammlungen des Chemischen Museums, organischer Teil, 1 g. — **Schaarschmidt**: Die Rohprodukte der Teerfarbenindustrie, 2; Färbekursus, Übungen, 4. — **Scheibler**: Über heterozyklische Verbindungen, 1. — **Seegert**: Spektroskopische Untersuchungsmethoden, 1. — **Simonis**: Organische Analyse und Arbeitsmethoden, 2. — **Ullmann**: Arbeitsmethoden der Farbenindustrie, 1. — **Voswinkel**: Terpene und Kampfer, 1. — **Wirth**: Analytische Chemie, 1. — **Wolffenstein**: Die neueren Arzneimittel und ihre Fabrikation, 2. —

Scheffers: Darstellende Geometrie II, 5, Übungen, 5. — **Dziobek**: Höhere Mathematik: Differential- und Integralrechnung, Analytische Geometrie, 6, Übungen, 2. — **Haentzschel**: Elemente der Mechanik, 4. — **Jolles**: Darstellende Geometrie II, 4, Übungen, 4. — **Lampe**: Höhere Mathematik: Differential- und Integralrechnung, Analytische Geometrie, 6, Übungen, 2; Bestimmte Integrale und Differentialgleichungen, 2. — **Rothe**: Höhere Mathematik: Differential- und Integralrechnung, Analytische Geometrie, 6, Übungen, 2; Differentialgleichungen, 2. — **Wallenberg**: Ausgewählte Kapitel der Elementarmathematik, 2; Funktionentheorie II, 2; Variationsrechnung, 2. — **Schuberg**: Mechanische Technologie, für Chemiker, 2; Maschinenelemente, mit Übungen im Maschinzeichnen, für Chemiker, 1, Übungen, 3; Baukonstruktionslehre, 2, Übungen, 4; Die technischen Einrichtungen chemischer Fabriken I, 1, Übungen, 3. — **Jahnke**: Analytische Geometrie und algebraische Analysis, für Bergleute, 3; Höhere Mathematik und technische Mechanik I und II, 7, Übungen, 2; Ausgleichungsrechnung, für Bergleute, 4. — **Haußmann**: Vermessungskunde II und Meßübungen II, 4, Übungen, 4; Planzeichnen zugleich Bearbeitung der Aufnahmen, nach Vereinbarung. — **Reißner**: Mechanik und graphische Statik I,

4, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel der Mechanik, 2 g. — **Wolff**: Niedere Geodäsie im Abriß, Aufnahme und Bearbeitung eines Höhen- und Lageplanes, 1, Übungen, 1 Nachmittag. — **W. Hartmann**: Kinematische Geometrie und theoretische Kinematik, 2; Maschinengetriebe: Anwendungen der Kinematik, 2. — **E. Meyer**: Mechanik I, 4, Übungen und Festigkeits-Laboratorium, 3; Ausgewählte Kapitel der Technischen Mechanik, 2. — **Jacobsthal**: Mathematischer Kursus für Kriegsteilnehmer, 2. —

Universität Bern.

Forster: Experimentalphysik I: Allgemeine Physik, Akustik, Optik, 6; Wärmelehre (Schluß), 1 g; Theoretisch-praktischer Kurs der Photographie, 2; Repetitorium der Physik, 2; Physikalisches Praktikum, 4; Arbeiten im physikalischen Institut für Vorgerückte, nach Vereinbarung. — **Gruner**: Thermodynamik, mit Übungen, 4; Geometrische Optik, 2; Elektronentheorie bewegter Körper: Relativitätstheorie, 2; Seminar für theoretische Physik, nach Vereinbarung. — **Blattner**: Theorie der Wechselströme (Fortsetzung); Lösung von Aufgaben aus dem Gebiete der Elektrotechnik. — **Luterbacher**: Meteorologie, 1; Mechanik, 1. — **Koestler**: Wissenschaftliche Grundlagen der Elektrotechnik, 1-2; Statik starrer und nachgiebiger Körper, 1-2; Graphische Statik, 1-2. —

Kohlschütter: Spezielle Chemie und Elektrochemie der nichtmetallischen Elemente, 3; Kolloidchemie, 1; Kolloquium über anorganische Chemie, nach Vereinbarung; Anorganisch-chemisches Praktikum, tägl.; Chemisches Praktikum für Mediziner, 4. — **Ephraim**: Analytische Chemie, 3; Theoretische Elektrochemie, 2; Gasanalytisches Praktikum, 3. — **Mai**: Repetitorium der anorganischen Chemie für Mediziner und Lehramtskandidaten, 2. — **Tambor**: Organische Chemie I, 6, Repetitorium, 1; Organisch-chemisches Vollpraktikum, tägl. — **Frl. Woker**: Arbeiten im Laboratorium für physikalisch-chemische Biologie, ganz- oder halbtägig; Kurs für die Untersuchung der Körperflüssigkeiten: Harn, Blut, Magensaft, Milch, 4; Physikalisch-chemische Biologie, 2; Die Wirkungen der Fermente in Theorie und Praxis, 1, Übungen, 1; Immunochemie, 2. — **Abelin**: Die chemischen Grundlagen der Wirkung von organischen Stoffen auf den menschlichen und tierischen Körper, 1. — **Schaffer**: Chemie der Nahrungs- und Genußmittel II, 2; Chemische Technologie der Lebensmittelgewerbe, nach Vereinbarung. —

Graf: Kugelfunktionen II, mit Repetitorium, 4; Besselsche Funktionen I, mit Repetitorium, 4; Integralrechnung, mit Repetitorium (eventl.: Differential- und Integralrechnung), 3; Funktionentheorie II, 2; Differentialgleichungen I, 2; Renten- und Versicherungsrechnung, 2; Mathematisches Seminar (mit Huber), 1 1/2. — **Huber**: Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, 2; Theorie der Raumkurven und abwickelbaren Flächen, 3; Theorie und Anwendung der elliptischen Integrale, 2; Mathematisches Seminar, geometrische Richtung (mit Graf), 1. — **N.N.**: Algebraische Analysis I, 2; Differentialrechnung, 2; Analytische Geometrie I, 2; Elemente der darstellenden Geometrie, 4; Goniometrie und ebene Trigonometrie, 2; Mathematische Übungen, 1. — **Crelier**: Synthetische Geometrie: Einleitung, 2, Übungen, 1; Mehrdimensionale Geometrie, 2. — **Berliner**: Elemente der Zahlentheorie, 1-2; Theorie der algebraischen Gleichungen (elementare Behandlung), 1. — **Huber**: Differentialgeometrie der Kurven, 2. — **Mauderli**: Unterrichtsfragen aus dem Gebiete der Astronomie und der mathematischen Geographie II, 1, Übungen, nach Vereinbarung; Astronomische und topographische Ortsbestimmung für Geologen und Forschungsreisende II, mit Übungen; Die Probleme der modernen Astronomie, 1-2. — **Moser**: Mathematische Grundlagen der Lebensversicherung, nach Vereinbarung; Die Zahl π und das Fehlergesetz, 1-2; Mathematisch-versicherungswissenschaftliches Seminar, 1-2. — **Bohren**: Methode der kleinsten Quadrate, 2; Grundlagen der Sozialversicherung, 2. —

Universität Bonn.

Kayser: Experimentalphysik I: Mechanik, Allgemeine Physik, Wärme, Akustik, 5; Laboratorium für Anfänger, 8, für Vorgeschr. tgl. — **Eversheim:** Übungen für Lehramtskandidaten im Experimentalvortrag, mit Handfertigkeitspraktikum, 2; Physikalisches Praktikum für Mediziner, 2; Grundzüge der Elektrotechnik (technische Vorlesung), 1 g. — **Pfäfer:** Wärmetheorie, 4, Übungen, 1. — **Bucherer:** Neuere Elektrizitätslehre, 1 g. —

Anschütz: Experimentalchemie I: Anorganische Chemie, 6; Kolloquium über neuere Arbeiten auf dem Gebiete der Chemie, 1 g; Chemisches Praktikum für Anfänger und Vorgeschr. sowie für Nahrungsmittelchemiker (mit Benrath, Frerichs und Kippenberger), tgl., für Mediziner (mit Benrath), tgl. außer Sonnabend. — **Rimbach:** Physikalische Chemie II: Thermochemie und Elektrochemie, 3; Chemisches Rechenseminar: Unterstufe: Stöchiometrische und chemisch-analytische Aufgaben, 2 g; Oberstufe: Physikalisch-chemische Aufgaben, 2 g, Übungen in den wichtigsten physikalisch-chemischen Meßmethoden, 3. — **Benrath:** Jakob Berzelius und seine Zeit, 1 g; Quantitative Analyse, 2; Übungen in der Gasanalyse, 3 g. — **Frerichs:** Toxikologische Analyse, 1; Pharmazeutische Chemie II (organisch), 3, III: Zyklische Verbindungen, 1 g. — **Mannheim:** Einführung in das chemische Praktikum, für Pharmazeuten, 1; Sterilisieren von Arzneimitteln, 1. — **Kippenberger:** Grundzüge der Nahrungsmittelchemie, 2; Chemische Technologie, organischer Teil (ausschließlich der Farbstoffchemie), mit Exkursionen, 2; Einführung in die chemische Großtechnik II: Organisch-chemische Betriebe, mit Exkursionen, 1; Besprechung technisch-chemischer Betriebskontrollen, 1 g. — **Laar:** Grundlagen der Photographie I: Negativverfahren, 1; Photographische Übungen, tgl. — **Gewecke:** Mikrochemische Analyse, 1; Einführung in das chemische Praktikum, 1. —

Beck: Differential- und Integralrechnung I, 4; Kurven und Flächen zweiter Ordnung, 3; Perspektive und Photogrammetrie, 2; Mathematisches Seminar: Unterstufe: Übungen zur Differentialrechnung, 1 g. — **Hahn:** Elementare Zahlentheorie, 4; Mehrfache Integrale und Grundzüge der Potentialtheorie, 4; Mathematisches Seminar: Oberstufe: Besprechung von W. Blaschke: Kreis und Kugel, 14 tgl., 2 g. — **Study:** Invariantentheorie, 4, Übungen, 1 g. — **Müller:** Einführung in die Geodäsie mit Übungen, 1 g. — **Küstner:** Theorie und Praxis der astronomischen Instrumente, 3; Praktische Übungen im astronomischen Beobachten, nach Vereinbarung; Astronomisches Kolloquium, 1 g. —

Technische Hochschule Braunschweig.

Dießelhorst: Experimentalphysik: Ausgewählte Kapitel aus der Mechanik, Wärmelehre und Optik, 4; Wechselströme, 3; Physikalisches Praktikum I: Einfache experimentelle Aufgaben aus allen Teilen der Physik, II: Anleitung zu selbständigen Arbeiten im Laboratorium; Physikalisches Kolloquium, 14 tgl., 2 g. — **Bergwitz:** Radioaktivität der Erde und der Atmosphäre, 1; Theoretische Telegraphie, 1. — **Witte:** Analytische Mechanik, 4. — **Peukert:** Elektrotechnische Messungen, 2; Allgemeine Elektrotechnik, 4; Grundzüge der Elektrochemie, für Elektrotechniker, 2; Arbeiten im elektrotechnischen Laboratorium, für Fortgeschrittene, 9. — **N. N.:** Elektromaschinenbau, 4, Übungen, 6; Elektrische Bahnen, 2; Grundzüge der Elektrotechnik, 2. — **Mosler:** Drahtlose Telegraphie, 2; Radiotelegraphisches Praktikum, 3. — **Micheler:** Einführung in die Photographie, 1; Spezielle Photographie, 2; Photographische Übungen, für Anfänger und Fortgeschrittene, 3. —

Meyer: Organische Experimentalchemie, 6; Chemische Technologie der Faserstoffe, 1; Arbeiten im chemischen Laboratorium; Chemisches Kolloquium (mit Freundlich), nach Vereinbarung, g. — **Biehringer:** Analytische Chemie für technische Chemiker, 2; Chemisch-

technische Rechnungen, 1; Heizstoffe und Kesselspeisewasser, 2, Übungen, 1. — **Freundlich:** Elektrochemie, 2; Chemische Technologie I, 4; Arbeiten im Laboratorium für physikalische Chemie und Elektrochemie. — **Reinke:** Chemische Technologie II, 4; Chemisch-technische Analyse II für Zucker-, Stärke-, Gärungs- und Molkereitechnik, 2; Enzyme, 2; Arbeiten im Laboratorium für chemische Technologie II und landwirtschaftlich-chemische Gewerbe; Seminaristische Übungen auf dem Gebiete der chemischen Technologie II, monatlich 2 g. — **Schultze:** Agrikulturchemie, 2. — **Beckurts:** Abwässerreinigung, 1; Wasser- und Harnuntersuchung, 1; Pharmazeutische Chemie, 4; Arbeiten im Laboratorium für pharmazeutische Chemie und Nahrungsmittelchemie. — **Troeger:** Analytische Chemie, 2; Repetitorium der anorganischen und organischen Chemie, 2. — **Emde:** Alkaloide, 1. —

Fricke: Analytische Geometrie und Algebra, 3; Differential- und Integralrechnung I, 4, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie, 2; Grundlagen der Theorie der Fourierschen Reihen, 1. — **Timmerding:** Darstellende Geometrie, 3, Übungen, 4; Perspektive, 1, Übungen, 2. — **Falckenberg:** Einführung in die höhere Mathematik, 3, Übungen, 1. — **N. N.:** Statik starrer und elastisch-fester Körper, 4, Übungen, 2. — **Schlink:** Technische Mechanik I: Statik, 6, Übungen und Repetitionen, 3, III: Hydraulik, Aerostatik und Aerodynamik, 4, Übungen und Repetitionen, 2; Meteorologie und Flugwesen, 1; Ausgewählte Kapitel aus der Theorie der Konstruktionen, 2. — **N. N.:** Grundzüge der Geodäsie, 2, Übungen, 2; Geodäsie I, 5, Übungen, 2; Grundzüge der sphärischen Astronomie (direkte astronomische Bestimmung der geographischen Koordinaten und des Azimuts), 2, Übungen, 2; Vermessungsübungen I, einschließlich Ausarbeitung, 4, II, 9; Ausarbeitung geodätischer Aufnahmen, 3. —

Technische Hochschule Breslau.

Lummer: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Physikalisches Praktikum, 3. — **Hilpert:** Elektrotechnik II, 4; Elektromaschinenbau I und II, 2; Apparatebau, 2; Übungen im Elektromaschinen- und Apparatebau, 4; Elektrotechnisches Laboratorium I, 4, III, 8; Kolloquium im Elektrotechnischen Institut, 14 tgl., g. — **Euler:** Elektrotechnische Meßkunde I und II, 2; Elektrische Kraftanlagen II, 2; Elektrische Bahnen, 2; Übungen im Bau elektrischer Kraftanlagen und Bahnen, 4. — **Große-Leege:** Telegraphentechnik, 2. —

Ruff: Anorganisch-chemisches Praktikum, tgl.; Analytische Chemie, 3; Chemisches Kolloquium (mit Eucken, Neumann und Semmler), 14 tgl., 2 g. — **Neumann:** Anorganisch-chemische Technologie, 4; Chemisch- und elektrochemisch-technisches Praktikum, tgl. — **Semmler:** Organisch-chemisches Praktikum, tgl.; Organische Experimentalchemie, 4; Abriß der organischen Chemie, 1. — **Eucken:** Physikalische Chemie I und II, 2; Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene, tgl.; Übungen in physikalischer Chemie und Elektrochemie, 4. — **Nauß:** Einführung in die Gastechnik, 1. —

Dehn: Mathematik, 4, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel der Analysis, nach Vereinbarung. — **Hessenberg:** Darstellende Geometrie 2, Übungen, 4; Analytische Geometrie, 3; Kinematik, nach Vereinbarung. — **Mann:** Mechanik II: Graphische Statik 4, Übungen, 2, IV, 2, Übungen, 2; Eisenhochbau, einschließlich Eisenbetonbau II, 2, Übungen, 2; Statik der Baukonstruktionen II, 1. — **Steinitz:** Höhere Mathematik II, 2, Übungen, 2; Vektoranalysis, 2. — **von dem Borne:** Die wissenschaftlichen Grundlagen der Luftschiffahrt: Theorie der Flugzeuge, 2; Aeronautische und meteorologische Übungen, 2; G. d. züge der Meteorologie, 1; Physik der Erdkruste, 2. —

Technische Hochschule Danzig.

Krüger: Experimentalphysik II, 4; Kleines physikalisches Praktikum, 4; Großes physikalisches Praktikum,

tägl. — **Federlin** (für **Kalähne**): Einführung in das physikalische Praktikum, 1; Licht und Wärmestrahlung, 1; Photographie und photographische Reproduktionsverfahren, 1, Übungen I, für Anfänger, II, für Fortgeschrittene, je 3; Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten im photophysikalischen Laboratorium, tägl. — **Roeßler**: Elektrotechnik I, 4, II, 2; Elektrotechnisches Laboratorium I, 2, II, 6, III, 9, IV, für Fortgeschrittene (Elektrotechniker), tägl. außer Sonnabend; Projektierung elektrischer Anlagen, 4; Berechnung und Entwurf elektrischer Maschinen (mit Roth), 1, Übungen, 4. — **Roth**: Elektrotechnische Meßkunde für Elektrotechniker, 2. — **Grix**: Elektrische Bahnen, 2, Übungen, 4; Berechnung elektrischer Leitungsnetze, 2. — **v. Wartenberg** (vertreten durch Wohl und Jellinek): Anorganisch-chemische Technologie I, 3, III; Technische Elektrochemie, 1; Praktikum im anorganisch-chemischen und elektrochemischen Laboratorium, tägl. — **Wohl**: Organische Experimentalchemie II, 2; Organisch-chemische Technologie I, 3; Praktikum im organisch-chemischen Laboratorium, tägl.; Praktikum im Laboratorium für landwirtschaftliche Gewerbe, tägl. — **Jellinek**: Physikalische Chemie I und II, 2; Kleines physikalisch-chemisches Praktikum I und II, 4; Großes physikalisch-chemisches Praktikum, tägl.; Analytische Chemie I, 2. — **v. Mangoldt**: Höhere Mathematik II, 2, Übungen, 1; Einführung in die höhere Mathematik, 5. — **Lorenz**: Einführung in die Mechanik, 4, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel aus der Mechanik, 2 g. — **Schilling**: Darstellende Geometrie, 3, Übungen, 4; Graphische Statik, 2, Übungen, 3. — **Sommer**: Höhere Mathematik I, 6, Übungen, 1. — **Eggert**: Geodäsie I, 2, II, 2; Praktische Übungen im Feldmessen, 4; Geodätisches Praktikum I, 2, II, 2; Geographische Ortsbestimmung, 2. —

Technische Hochschule Darmstadt.

Schering: Allgemeine Physik mit Versuchen: Magnetismus, Elektrostatik, Elektrische Ströme, 5; Physikalische Übungen (mit Zeißig), 4 Nachmittage; Selbständige Arbeiten aus dem Gebiete der Physik (mit Zeißig), nach Vereinbarung; Theoretische Elektrizitätslehre, 2. — **Zeißig**: Allgemeine Physik mit Versuchen: Magnetismus, Elektrostatik, Elektrische Ströme, 4; Ausgewählte Kapitel aus der allgemeinen Physik, für Pharmazeuten, 1. — **Meisel**: Theorie der optischen Instrumente II, 2. — **Wirtz**: Allgemeine Elektrotechnik I: Elemente der Elektrotechnik, 3; Elektrotechnische Meßkunde I: Elektrotechnische Meßinstrumente und Meßmethoden, 2; Übungen im elektrotechnischen Laboratorium (mit Sengel): Praktikum I: Übungen im Gebrauch der Meßinstrumente und Meßverfahren, II: Messungen an Gleich- und Wechselstrommaschinen, Motoren und Umformern, IV, Ausgewählte Übungen aus Praktikum I und II, 4 halbe Tage, III: Selbständige Arbeiten für vorgeschrittenere Studierende (mit Sengel und Petersen), nach Vereinbarung; Grundzüge der Telegraphie und Telephonie, 2; Radiotelegraphisches Praktikum. — **N. N.**: Allgemeine Elektrotechnik II: Gleich- und Wechselstromtechnik, 4. — **Petersen**: Allgemeine Elektrotechnik, Übungen, 2; Grundzüge der Hochspannungstechnik, 1. — **Sengel**: Konstruktion elektrischer Maschinen und Apparate, 3, Übungen, 3; Elektrische Licht- und Kraftanlagen, 2, Übungen, 2; Grundzüge der Elektrotechnik, 2. —

Wöhler: Spezielle anorganische Chemie, 4; Theoretische Chemie II, 2; Kolloquium über chemische Tagesfragen (mit Martin), 1; Chemisches Praktikum für anorganische und physikalische Chemie (mit Heyl, Martin und Schaeffer), tägl. außer Sonnabend. — **Schaeffer**: Agrikulturchemie, 1. — **Finger**: Ausgewählte Kapitel aus der organischen Chemie, 2; Teerfarbstoffe, 4; Praktikum im Laboratorium für organische Chemie (mit Friedlaender), tägl. außer Sonnabend; Färberei-Praktikum (mit Heuser), 4. — **Martin**: Analytische Chemie I, 2. — **Friedlaender**: Chemie der natürlichen Farbstoffe, 1 g. — **Heyl**: Pharmazeutische Chemie: Organi-

scher Teil, 2. — **N. N.**: Chemische Technologie, 2; Metallurgie, 2; Chemisches, chemisch-technisches und elektrochemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend. — **Vaubel**: Theoretische Chemie II: Thermochemie, 1, Übungen, 3; Die Steinkohlengasindustrie, 1 g. — **Sonne**: Chemische Technologie der Explosivstoffe, 2. — **Weller**: Untersuchen von Nahrungsmitteln, Genußmitteln und Gebrauchsgegenständen, 1, Übungen, 8. —

N. N.: Repetitorium der Elementarmathematik, 3-4. — **Graefe**: Höhere Mathematik für Architekten, Chemiker, Elektrochemiker und Geometer, 3, Übungen, 2; Ausgewählte Kapitel aus der höheren Mathematik, 2; Technische Mechanik, 3, Übungen, 2. — **Horn**: Höhere Mathematik für Ingenieure, Maschinenbauer und Elektrotechniker, 5, Übungen, 3; Integralgleichungen, 2-3. — **Dingeldey**: Höhere Mathematik für Ingenieure, Maschinenbauer und Elektrotechniker, 6, Übungen, 3; Höhere Mathematik II, 2, Übungen, 1. — **Schleiermacher**: Rechenapparate und wissenschaftliches Rechnen, 2; Aerodynamik in Beziehung zur Luftfahrt, 2 g. — **Wiener**: Darstellende Geometrie I, 4, Übungen, 6; Neuere mathematische Lehren zur Behandlung naturwissenschaftlicher und technischer Aufgaben: Ortsfunktionen und Vektorfelder, 2; Arbeiten im mathematischen Institut, 3. — **R. Müller**: Darstellende Geometrie I, 4, Übungen, 6; Reine Kinematik, 2. — **Hohenner**: Geodäsie, 4; Ausgewählte Kapitel aus der Geodäsie, 2; Geodätische Übungen I, 8, II, 4; Geodätische Ausarbeitungen, 4; Praktische Geometrie, 2, Übungen, 4, Ausarbeitungen, 2. — **Assistenten**: Planzeichnen, 4 und 2. — **Henneberg**: Mechanik I, 6. — **Braun**: Hydraulik, 2, Übungen, 1. —

Technische Hochschule Dresden.

Hallwachs: Experimentalphysik II: Elektrizität II, Optik, 5; Physikalisches Praktikum I, 6 oder 3, II, einschließlich Laboratoriumstechnik, für Fortgeschrittene, 9; Praktikum für größere physikalische Arbeiten, tägl. außer Sonnabend. — **Toepler**: Theoretische Physik III: Elektrizität und Magnetismus, 4, Übungen, 1 g. — **Luther**: Photographisches Praktikum, für Anfänger und Vorgeschr. 4 und 8; Selbständige Arbeiten im wissenschaftlich-photographischen Institut, 2 und 4, auch ganz- und halbtägig. — **Görges**: Allgemeine Elektrotechnik I, 3; Theorie des Wechselstromes I, 2; Theorie der Leitungen I, mit seminaristischen Übungen, 2; Elektrotechnisches Praktikum I, 4; Elektrotechnische Übungen für Geübtere I, 8; Selbständige Arbeiten im Elektrotechnischen Institut, 20; Elektrische Meßkunde, 2. — **Heubach**: Elektromaschinenbau I, 2, III und Kolloquium, 2. — **Möllering**: Telegraphie und Telephonie, 3. — **Wagner**: Übungen im Elektromaschinenbau für Elektroingenieure, 12, für Maschinen- und Fabrikingenieure, 4. —

F. Foerster: Anorganische Experimentalchemie, 6; Anorganisch-chemisches Praktikum: Qualitative Analyse, 12, Qualitative Analyse, technische Titrimethoden, Gasanalyse, tägl. außer Sonnabend; Praktikum für größere Arbeiten auf dem Gebiete der Elektrochemie und physikalischen Chemie, tägl. außer Sonnabend. — **Scholl**: Organisch-technische Chemie II, 3; Neuere Erfolge und Probleme der organischen Chemie, 1; Organisch-chemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend; Praktikum für Farbenchemie (mit v. Walther), 12; Praktikum für Farbenchemie bzw. Färbereitechnik (mit v. Walther), tägl. außer Sonnabend; Praktikum für größere Arbeiten der Farbenchemie bzw. der Färbereitechnik (mit v. Walther), tägl. außer Sonnabend. — **König**: Chemie und chemische Technologie der organischen Farbstoffe, 4. — **v. Walther**: Organisch-chemische Arbeitsmethoden, 2. — **Di-tz**: Die chemische Technologie der Mörtel und Zemente, 1; Die chemische Technologie des Glases, 1. —

Krause: Höhere Mathematik III, 3; Seminaristische Übungen (mit Naetsch), 14-tägig, 2; Einleitung in die Theorie der unendlichen Prozesse, 4; Mathematisches Seminar, 1 g; Seminaristische Übungen für Physiker (mit Naetsch), 1 g. — **Müller**: Allgemeine mechanische

Technologie I, 3; Papierfabrikation, 3; Praktikum für die Faserstofftechnik, für Fortgeschrittene, 20, für Anfänger, 12. — **Helm**: Höhere Mathematik I, 5, Übungen, 2; Analytische Mechanik, 4; Versicherungstechnisches Seminar, 1 g, Übungen, 2. — **Ludwig**: Darstellende Geometrie I, 3, Übungen, 4; Synthetische Geometrie, 3, Übungen, 2 g; Theorie der Abbildung und Verbiegung der Flächen, 2; Seminaristische Übungen über höhere Geometrie, 1 g. — **Naetsch**: Sphärische Trigonometrie, 2; Analytische Geometrie der Kegelschnitte, 3; Fokaleigenschaften der Flächen 2. Grades, 1. — **Patzenhausen**: Methode der kleinsten Quadrate, 2, Seminaristische Übungen, 1; Höhere Geodäsie 2, Seminaristische Übungen, 1; Astronomisch-geographische Ortsbestimmungen, für Ingenieure und Forschungsreisende, 2, Seminaristische Übungen, 1; Vorübungen zum Planzeichnen für Verm.-Ing.: Schriftzeichnen, 2; Planzeichnen II, für Bauingenieure, 2, für Verm.-Ing., 4; Skizzieren geodätischer Instrumente, Übungen, 2; Triangulierungsübungen, 4; Geodätisches Praktikum I, 4, II, 4; Geodätisches Praktikum für Architekten, 4; Größere Geländeaufnahmen, 2 Wochen. — **Grübler**: Technische Mechanik II: Statik einschließlich graphischer Statik, 6, Seminaristische Übungen, 2; Graphostatische Übungen, 2. —

Universität Frankfurt a. M.

Wachsmuth: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 3 $\frac{1}{2}$; Elektrizitätsleitung in Gasen, 1; Physikalische Kolloquium (mit v. Laue), 14tägig, 1 $\frac{1}{2}$ g; Physikalische Übungen für Anfänger, 6, für Fortgeschrittene, tägl.; Wissenschaftliche Arbeiten, tägl. — **v. Laue**: Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik, 2. — **Dégisne**: Der elektrische Wechselstrom (Experimental-Vorlesung), 2; Wechselstrommessungen, 1; Die elektrische Wechselstrom-Maschine, 1 g; Kolloquium über die neuere Literatur der angewandten Physik, 14tägig, 2 g; Kleines elektrotechnisches Praktikum I: Meßtechnik, Photometrie, 3, II: Maschinen, Motore, 3; Großes elektrotechnisches Praktikum, halb- oder ganztägig; Wissenschaftliche Arbeiten, ganztägig. —

Freund: Anorganische Experimentalchemie, 3 $\frac{3}{4}$; Kolloquium über neue chemische Literatur, 14tägig, 1 $\frac{1}{2}$ g; Großes chemisches Praktikum und Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten: a) Organische Abteilung, ganztägig, b) Anorganische Abteilung (mit Ebler), ganz- oder halbtägig; Kleines chemisches Praktikum für Anfänger (mit Ebler), 2 halbe Tage; Chemisches Praktikum für Mediziner (mit Ebler), 6; Chemisches Praktikum für Angehörige der Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät (mit Speyer), 2 halbe Tage. — **Lorenz**: Elektrochemie, 3; Geschmolzene Salze (Fortsetzung), 1; Kolloquium über neuere Arbeiten aus dem Gebiete der physikalischen Chemie, 14tägig, 2 g; Kleines Praktikum der physikalischen Chemie und Elektrochemie (mit Fraenkel), 4 Wochen; Großes physikalisch-chemisches Praktikum (mit Fraenkel), halb- oder ganztägig; Wissenschaftliche Arbeiten, ganztägig. — **Fraenkel**: Hohe Temperaturen: Erzeugung, Messung und chemische Vorgänge, 1. — **Mayer**: Einführung in die organische Chemie auf elementarer Grundlage, 1; Chemie und Technologie der Teerfarbstoffe, 2; Praktische Übungen in der Färberei der Textilfasern, 2. — **Ebler**: Analytische Chemie II; Gewichtsanalyse und Maßanalyse, 2; Gasanalyse und Gasvolumetrie, 1, Übungen, 4; Radioaktivität und radioaktive Substanzen, 2; Ausgewählte Kapitel aus der anorganischen Technik, 1; Kolloquium über anorganische und analytische Chemie, 1 g. — **Speyer**: Chemische Technologie: Organische Prozesse, 2. — **Tillmans**: Wasserreinigung und Abwasserbeseitigung, 1 g; Praktikum der Nahrungsmittelchemie oder Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, halbtägig. — **Becker**: Angewandte Chemie und Bakteriologie in Industrie, Handel und Gewerbe, Chemisch-technische Warenkunde, Chemie und Industrie der Ersatzstoffe I und II, mit Exkursionen, je 2; Chemisches Praktikum: Übungen in der Untersuch-

ung und Beurteilung von Handelswaren (Chemisch-technische Analyse), 5. —

Schoenflies: Differentialgeometrie, 4, Übungen, 1; Mathematisches Seminar: Vorträge der Teilnehmer aus verschiedenen Gebieten (mit Bieberbach und Szász), 2 g. — **Bieberbach**: Differentialrechnung, zugleich Einführung in das Studium der höheren Mathematik, 4; Geschichte der Mathematik im neunzehnten Jahrhundert, 2. — **Brendel**: Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2; Einführung in die praktische Astronomie: Geographische Orts- und Zeitbestimmung (mit Labitzke), 4; Vorträge und Besprechungen über versicherungswissenschaftliche Fragen, 2 g. — **Szász**: Analytische Geometrie, 4; Ganze transzendente Funktionen, 2, Übungen für Anfänger, 1. —

Universität Freiburg i. Br.

Himstedt: Experimentalphysik: Magnetismus, Elektrizität, Optik, Elektro-Optik, 5; Übungen aus der theoretischen Physik, 1; Physikalische Praktikum, für Mediziner und Pharmazeuten, 1 Nachmittag, für Naturwissenschaftler, 2 Nachmittage; Physikalische Kolloquium, 2; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Koenigsberger**: Mathematische Physik: Optik, mit Übungen, 2-3; Relativitätstheorie, 1-2; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Gaede**: Anleitung zu selbständigen Arbeiten im technisch-physikalischen Institut, tägl. — **Friedrich**: Physik der Atmosphäre, 2; Besprechung neuerer Arbeiten aus dem Gebiete der Physik, 1; Über Dosimeterverfahren in der Strahlentherapie mit Vorführungen für Mediziner, 1; Anleitung zu selbständigen Arbeiten aus dem Gebiete der Experimentalphysik, tägl. —

Gattermann: Organische Experimentalchemie, 5; Chemisches Praktikum (mit Riesenfeld, Fromm, Meigen, Skita, Hess und Schwarz), a) für Chemiker, ganztägig, b) für Nichtchemiker, halbtägig, tägl. außer Sonnabend. — **Kiliani**: Anorganische Experimentalchemie, 5; Arbeiten und Übungen im chemischen Laboratorium, medizinische Abteilung, tägl.; Chemisches Praktikum (mit Autenrieth und Knoop), 6. — **Meyer**: Physikalische Chemie, 3; Photographie mit praktischen Übungen und Demonstrationen, 2; Radioaktivität, 1; Physikalisch-chemisches Übungspraktikum, 2; Selbständige physikalisch-chemische Arbeiten, nach Vereinbarung. — **Riesenfeld**: Anorganische Experimentalchemie, 5; Kolloidchemie, 1; Ionenlehre, 1. — **Fromm**: Organische Technologie mit Exkursionen, 2; Repetitorium der organischen Chemie für Mediziner, 2, Repetition, 1. — **Meigen**: Qualitative Analyse, 3; Gasanalytisches Praktikum, 2. — **Skita**: Chemie der Teerfarbstoffe, 2; Übungen im Färben von Gespinnstfasern, 2. — **Hess**: Chemie der Zuckerarten, 1. — **Autenrieth**: Pharmazeutische Chemie II: Organische Chemie, 3; Chemie des Harns, 1. — **Knoop**: Ausgewählte Kapitel der physiologischen Chemie, 1; Physiologisch-chemisches Praktikum, 3; Arbeiten und Übungen im physiologisch-chemischen Institut; Einleitung in das chemische Praktikum für Mediziner, 1. — **Madelung**: Theorien der organischen Chemie, 1. — **Schwarz**: Theoretische Grundlagen der quantitativen Analyse, 1; Neuere Anschauungen der anorganischen Chemie, 1; Seminar für anorganische Chemie, Repetitorium, 1. —

Stickelberger: Analytische Geometrie der Ebene, 4, Übungen, 1; Funktionentheorie, 4, Seminarübungen, 1. — **Heffter**: Algebraische Analysis: Irrationale und imaginäre Zahlen, unendliche Reihen, Produkte, Kettenbrüche, mit Übungen, 4; Algebraische Kurven und Flächen höherer Ordnung, 3; Mathematisches Seminar: Algebraische Kurven und Flächen, 2 g. — **Loewy**: Integralrechnung, 4, Übungen, 1 g; Versicherungsmathematik, 2. — **Bolza**: Elliptische Funktionen, 4. — **Seith**: Praktische Geometrie, 2, Übungen, 2 g. — **Ansel**: Theoretische Astronomie, 3; Theorie der Gezeiten, 2; Geographische Ortsbestimmung mit Übungen, 3 g. —

Universität Gießen.

König: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Physikalisches Praktikum für Mathematiker und Naturwissenschaftler, 6, für Fortgeschrittene, nach Vereinbarung, für Chemiker, Mediziner, Pharmazeuten und Landwirte, 3; Leitung selbständiger physikalischer Arbeiten, tägl.; Physikalisches Seminar für Lehramtskandidaten: Übungen in Demonstrationsversuchen und Behandlung einfacher theoretischer Hausaufgaben (mit Cermak), 14-tägig, 2 g; Physikalisches Kolloquium (mit Fromme), 14-tägig, 2. — **Fromme:** Theoretische Elektrizitätslehre, 4; Theoretisch-physikalische Übungen, 1; Niedere Geodäsie, 3; Praktische Übungen, 1 Nachmittag; Meteorologie, 1. — **Cermak:** Radioaktivität, 1; Handfertigkeitpraktikum, 3. — **Uller:** Einführung in die mathematische Behandlung physikalischer Probleme, 1. — **Jentsch:** Beugungstheorie der optischen Instrumente, 1; Ballistik, 1. — **Pepler:** Meteorologische Optik, 1. —

Elbs: Anorganische Experimentalchemie, 5; Chemisches Praktikum, tägl.; Chemische Übungen für Landwirte, tägl. außer Sonnabend, für Mediziner und Veterinärmediziner (mit Brand), 5. — **Schaum:** Einführung in die physikalische Chemie, 2; Physikalisch-chemische Übungen, 3; Photographische Übungen, 3; Physikalisch-chemisches Praktikum, ganz- oder halbtägig. — **Brand:** Chemische Technologie I: Technologie anorganischer Stoffe, mit Exkursionen, 2. — **Thomae:** Besprechung neuerer chemischer Patente, 1. — **v. Liebig:** Grundanschauungen der Chemie in ihrer geschichtlichen Entwicklung, 1 g. — **Feist:** Pharmazeutische Präparate, anorganischer Teil, 3; Die menschlichen Nahrungsmittel und ihre Verfälschungen, 1; Gesetzeskunde für Apotheker und Nahrungsmittelchemiker, 1. —

Engel: Analytische Geometrie, mit Übungen, 5; Differentialgeometrie (Fortsetzung), 4, Seminar, 2. — **Schlesinger:** Differentialrechnung, mit Übungen, 5; Lineare Differentialgleichungen, 4; Seminar: Funktionentheorie, 1. — **Graßmann:** Analytische Mechanik II, 4, Seminar, 14-tägig, 1; Festigkeitslehre, 4. —

Universität Göttingen.

Debye: Thermodynamik mit erläuternden Demonstrationen, 4; Physikalisches Praktikum für Physiker und Mathematiker (mit Simon u. Rausch v. Trautenberg), 4; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl.; Physikalisches Kolloquium (mit Voigt und Pohl), 2 g. — **Voigt:** Mechanik, 4, Übungen, 2 g; Elektrische Schwingungen, 2 g. — **Wiechert:** Geophysik: Meteorologie, Wettervorhersage, Luftelektrizität, 4; Vermessungswesen, praktischer Teil, 4; Polarlicht, 1 g; Geophysikalisches Praktikum, nach Vereinbarung, g. — **Simon:** Schwingungen und Resonanz in Physik und Technik, 4; Lichtelektrische Erscheinungen, 1 g; Elektrotechnisches Praktikum, 3; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der angewandten Elektrizitätslehre, tägl. — **Reich:** Geschichte der Elektrizitätslehre, 1. — **Pohl (ev. Rausch v. Trautenberg):** Experimentalphysik mit besonderer Berücksichtigung der Naturwissenschaftler, Chemiker und Mediziner, 4; Physikalisches Praktikum für Naturwissenschaftler, Chemiker und Mediziner, 4; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, für Fortgeschrittene, tägl. — **Gerlach:** Spektroskopie und Spektralanalyse, mit Experimenten, 1 g; Experimentelle Strahlungstheorie, 1; Einführung in die Experimentalphysik (als Ergänzung zum Praktikum für Kriegsteilnehmer), 2. — **Rausch v. Trautenberg:** Einführende physikalische Übungen für Kriegsteilnehmer, 2. —

Windaus: Allgemeine Chemie II: Organische Chemie, 5; Chemisches Kolloquium, 1 g; Seminar für Lehramtskandidaten (mit Borsche), nach Vereinbarung; Chemische Übungen (mit Borsche), tägl. außer Sonnabend; Chemisches Praktikum für Mediziner (mit Borsche), 6. — **Tammann:** Physikalische Chemie, 2; Physikalisch-chemisches Praktikum für Anfänger, 4 Wochen; Physikalisch-chemische Arbeiten, ganz- und halbtägig; Kollo-

quium, 1 g. — **Coehn:** Die Chemie im Kriege: Stickstoffgewinnung, Explosivstoffe usw., 1; Photographisches Praktikum: a) für Anfänger, b) für Fortgeschrittene, 3; Photochemische Arbeiten, ganz- und halbtägig. — **Borsche:** Grundzüge der analytischen Chemie, 2; Chemische Technologie organischer Verbindungen II, 2. — **Zsigmondy:** Anorganische Kolloide II, 1 g; Ausgewählte Kapitel aus der anorganischen Chemie II, 1; Praktikum der anorganischen und der Kolloidchemie, ganz- und halbtägig. — **Mannich:** Die Auffindung der Gifte, 1; Pharmazeutische Chemie, anorganischer Teil, 3; Kolloquium über pharmazeutische Chemie, 1 g; Praktische Übungen in pharmazeutischer, toxikologischer und Nahrungsmittelchemie, tägl. außer Sonnabend; Einführung in die Chemie für Mediziner, 2. — **Vogel:** Einführung in die Lehre vom heterogenen Gleichgewicht, 1; Metallographisches Praktikum, 3. — **Bachmann:** Ausgewählte Kapitel aus der analytischen Chemie: Maßanalyse, optische Analyse und Mikroanalyse, 1. —

Hilbert: Differentialgleichungen, 4, Übungen (mit Frl. Noether), 2 g; Struktur der Materie (mit Debye), 2 g. — **Klein:** Vorträge über Bedeutung und Invariantentheorie der Berührungstransformationen, 2 g. — **Runge:** Differential- und Integralrechnung I, mit Übungen, 6; Kolloquium über Fragen der angewandten Mathematik, 2 g. — **Landau:** Zahlentheorie, 4; Trigonometrische Reihen, 2; Mathematisch-physikalisches Seminar: Übungen für mittlere Semester, 2 g. — **Carathéodory:** Analytische Geometrie, 4; Übungen, 1 g; Reelle Funktionen, 4. — **Bernstein:** Wahrscheinlichkeitsrechnung und Methode der kleinsten Quadrate, 3; Versicherungsrechnung, mit schriftlichen Übungen, 2; Biostatistik, insbesondere des Menschen, 1 g; Seminar für Versicherungswissenschaft: Vorträge über ausgewählte Gegenstände der mathematischen Statistik, 2 g. — **Hartmann:** Spektralanalyse der Gestirne, 1; Astronomische Übungen für Anfänger und Lehramtskandidaten, 2; Astronomisches Seminar, 2 g; Leitung astronomischer und astrophysikalischer Arbeiten für Fortgeschrittene, 12. — **Ambronn:** Theorie und Gebrauch der astronomischen Instrumente, 2; Über Ephemeriden und Sternverzeichnisse, 1; Astronomische Übungen für Anfänger, 6; Leitung astronomischer Arbeiten für Fortgeschrittene, tägl. —

Universität Graz.

Benndorf: Experimentalphysik II, für Mediziner, zugleich Einführung in die Physik für Lehramtskandidaten, 4; Physikalische Übungen I, für Chemiker und Naturhistoriker, 6 g, II, für Mathematiker und Physiker, 6 g; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten für Vorgesrittene, tägl. außer Sonnabend, g. — **Streintz:** Theorie des galv. Elementes auf Grundlage der Elektrochemie, 2. — **Rosenberg:** Übungen in der Anstellung physikalischer Schulversuche, 3 g. — **Waßmuth:** Wärme und Elastizität, 1 g. — **Radakovic:** Seminar für theoretische Physik, 2 g; Besprechung physikalischer Fragen, 1 g. — **Skrabal:** Organische Experimentalchemie, 5; Chemische Übungen (auch für Lehramtskandidaten), für Anfänger, tägl. außer Sonnabend, für Vorgesrittene, tägl., für Mediziner, 4. — **Kremann:** Physikalische Chemie VI, 3; Die graphischen Methoden in der Chemie, 2; Physikalisch-chemisches Praktikum, tägl. — **v. Hemmelmayer:** Organische Farbstoffe, 2; Experimentierübungen (chemische Schulversuche), für Lehramtskandidaten, 2. —

v. Dantscher: Elemente der Funktionentheorie: Differentialrechnung, 5; Mathematisches Seminar, 2 g. — **v. Daublebsky:** Grundzüge der analytischen Geometrie (Fortsetzung), 2; Funktionentheorie, 3; Mathematisches Seminar II, 2 g. — **Streißler:** Darstellende Geometrie, 3. — **Hillebrand:** Die Laplacesche Kosmogonie, 2; Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichsrechnung, 3; Kalendariographie, 1 g. —

Technische Hochschule Graz.

v. Ettingshausen: Physik, 5; Elektrizitätslehre, 5; Elektrotechnik, 3½; Elektrotechnische Übungen: Prak-

tische Messungen, 8; Enzyklopädie der Elektrotechnik, 2. — **Streintz**: Physik: Mechanik, Optik und Wärmelehre, 4; Der Bleiakкумуляtor, 1 $\frac{1}{2}$. —

Emich: Organische Chemie I, 5; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten im chemischen Laboratorium, für Vorgeschr. d. Anl.; Anleitung zur mikrochemischen Analyse, für Vorgeschr. d. Anl. (mit Donau), nach Vereinbarung. — **Andreasch**: Qualitative chemische Analyse II, 2; Laboratoriumsunterricht und Übungen II, 16; Chemische Technologie der organischen Stoffe: Technologie der Fette und Mineralöle, 4; Laboratoriumsunterricht und Übungen in der organisch-technisch-chemischen Analyse, 20; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten aus dem Gebiete der organischen Chemie und der chemischen Technologie organischer Stoffe, für Vorgeschr. d. Anl. — **B. Reinitzer**: Quantitative chemische Analyse II: Maßanalyse, 1; Laboratoriumsunterricht und Übungen, 20; Chemische Technologie der anorganischen Stoffe: Technologie der Silikate, 4; Elektrochemie II: Angewandte Elektrochemie, 2; Laboratoriumsunterricht und Übungen in der Darstellung anorganisch-chemischer Präparate, 20; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten aus dem Gebiete der anorganischen Chemie und der chemischen Technologie anorganischer Stoffe, für Vorgeschr. d. Anl. nach Vereinbarung. — **v. Cordier**: Typisch wichtige organische Synthesen, 1. — **Kremann**: Ausgewählte Kapitel aus der physikalischen Chemie II, 2. — **Donau**: Kolloidchemie II, auch für Anfänger, 1. — **Fuhrmann**: Photographie: Wissenschaftliche Photographie, einschließlich Mikrophotographie und Röntgenphotographie, 1; Chemie der Nahrungs- und Genußmittel, 3, Übungen, 4. — **N. N.**: Mechanische Technologie I, 2, II, 2, III, 2; Mechanische Schutzmittel gegen Unfälle, 2. — **v. Hemmelmayer**: Agrikulturchemie, 2. —

Hoevar: Mathematik I: Algebra und Analysis, Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, 6, Übungen (mit Weitzenböck), 2. — **Weitzenböck**: Elemente der höheren Mathematik, 4; Einführung in die Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung, 1. — **v. Peithner**: Mathematik II: Geometrie, Integralrechnung, Differentialgleichungen, 4, Übungen (mit Weitzenböck), 2. — **Schüller**: Darstellende Geometrie, 3, Repetitorium, 2, Übungen, 6, Seminarübungen: Unterseminar, 2, Oberseminar für Vorgeschr. d. Anl., 2; Projektive Geometrie II, 3, Übungen, 3. — **Wittenbauer**: Allgemeine Mechanik, einschließlich der Elemente der graphischen Statik II: Statik, Kinematik, Dynamik, 4, Übungen, 3 und 2; Technische Mechanik II: Hydrostatik, Hydraulik, Mechanik der Gase, Flug- und Luftschiffahrt, 3. — **Klingatsch**: Niedere Geodäsie, 4; Geodätische Feldübungen, 8; Sphärische Astronomie, 2; Katastervermessung, 3, Übungen, 16. —

Universität Greifswald.

Stark: Experimentalphysik I: Allgemeine Dynamik, Elastodynamik, 5; Physikalische Praktikum für Naturwissenschaftler, 6; Physikalische Praktikum für Mediziner und Pharmazeuten, 2; Anleitung zu selbständigen Untersuchungen, tägl.; Besprechung neuer physikalischer Arbeiten, 14tägl., 2 g; Einleitung in die theoretische Physik, 3. — **Bestelmeyer**: Angewandte Physik I, 2. —

Dimroth: Anorganische Experimentalchemie, 6; Chemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend: a) Anorganische Abteilung, ganz- und halbtägl., b) Organische Abteilung, ganztägl. (mit Posner), c) für Pharmazeuten und Nahrungsmittelchemiker (mit Scholtz), ganz- und halbtägl., für Mediziner (mit Scholtz), 4, Erläuterungen, $\frac{1}{2}$ g. — **Posner**: Chemische Technologie II: Organische Stoffe, 2; Besprechung neuerer Arbeiten aus dem Gebiete der organischen Chemie, 1 g. — **Scholtz**: Pharmazeutische Chemie, organischer Teil, 3; Chemie der Nahrungs- und Genußmittel, 2; Sterilisationskursus für Pharmazeuten, 2; Pharmazeutisches Kolloquium, 1 g. —

Vahlen: Ballistik, 2 g; Mechanik I, 3; Seminaristische Übungen, 2. — **Hausdorff**: Differentialrechnung, 4, Übungen, 1 g; Funktionentheorie, 4; Mathe-

mathesisches Seminar, 2 g. — **Thaer**: Algebra, 4; Darstellende Geometrie, mit Übungen, 6. —

Universität Halle.

Mie: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Physikalische Übungen für Naturwissenschaftler, 6, Erläuterungen, 2 g; Kleines physikalisches Praktikum für Mediziner, Pharmazeuten und Landwirte, 3; Leitung selbständiger physikal. Untersuchungen, tägl. — **Schmidt**: Theorie der Wärme, 4; Übergangspraktikum für angewandte Physik, 4; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl.; Physikalisches Kolloquium, 14tägl., 2 g. — **Wigand**: Über Elektronen und Ionen, 1; Physikalisches Handfertigkeitspraktikum, 1 Nachmittag. — **Thiem**: Kursus der praktischen Photographie, 2. —

Vorländer: Allgemeine Experimentalchemie I: Organische Chemie, 5; Praktische Übungen im Chemischen Laboratorium (mit Schulze), tägl., für Mediziner, 2 halbe Tage; Einzelne Abschnitte der organischen Chemie, 1 g. — **Erdmann**: Praktische Übungen im Laboratorium für angewandte Chemie, tägl. außer Sonnabend; Teerfarbstoffe, 1 g. — **Schulze**: Darstellung und Prüfung der Arzneimittel I, 2; Chemisches Praktikum für Pharmazeuten, tägl.; Sterilisationsübungen für Pharmazeuten, 1 g. — **Baumert**: Chemie der Nahrungs- und Genußmittel, 2; Praktische Übungen im Laboratorium für Nahrungsmittelchemie, tägl. außer Sonnabend; Die wichtigsten Lebensmittel und deren Verfälschungen, 1 g. — **Tubandt**: Physikalische Chemie I, 2; Übungen und selbständige Arbeiten im physikalisch-chemischen und elektrochemischen Laboratorium, tägl.; Kleines physikalisch-chemisches Praktikum, 4; Physikalisch-chemische Meßmethoden: Erläuterungen zum physikalisch-chemischen Praktikum, 1 g. —

Wangerin: Differentialgeometrie: Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die Lehre von den Raumkurven und Flächen, 5; Übungen des Mathematischen Seminars, 1 g; Ausgewählte Kapitel der höheren Mathematik, 2 g. — **Gutzmer**: Analytische Geometrie der Ebene, 4; Zahlentheorie, 3; Übungen des Mathematischen Seminars, 1 g; Ausgewählte Kapitel der höheren Mathematik, 2 g. — **Eberhard**: Differentialrechnung, 4, Übungen, 1 g. — **Buchholz**: Sphärische Astronomie und geographische Ortsbestimmung, 2; Übungen in geographischer Ortsbestimmung, 2. — **Bernstein**: Verbrennungskraftmaschinen, 2. — **Grammel**: Einführung in die Vektorrechnung, 2. —

Technische Hochschule Hannover.

Precht: Experimentalphysik, 4; Arbeiten im Laboratorium der Physik (mit Leithäuser), 4; Luftschiffahrt, 2. — **Leithäuser**: Photographie, 2, Übungen, 2; Elektrische Wellen und drahtlose Telegraphie, 2. — **Kohlrausch**: Grundzüge der Elektrotechnik, 2; Theoretische Elektrotechnik, 4; Elektrotechnisches Laboratorium (mit Beckmann, Brückmann) I, 8, II, 16, III, für Maschinen-Ingenieure, 8. — **Heim**: Elektrische Anlagen II: Zentralanlagen, 3, Übungen, 2; Entwerfen von elektrischen Maschinen u. Transformatoren, 3, Übungen, 2; Elektr. Bahnen, Elektrotechnischer Teil, 2; Elektrische Kraftübertragung, 2. — **Beckmann**: Praktische Elektrotechnik für Anfänger I, 1; Elektrotechnische Meßkunde I I, 2, II, 1; Elektrizitätszähler, 1 g. — **Brückmann**: Gleichrichter zur Umformung von Wechselstrom in Gleichstrom, 1 g; Elektrotechnisches Seminar, 1; Einanker und Kaskaden-Umformer, 1. —

Seubert: Grundzüge der Chemie, 6; Arbeiten im Laboratorium der anorganischen Chemie (mit Eschweiler, Seybold und Sauermilch), tägl. außer Sonnabend. — **Eschweiler**: Maßanalyse, 2. — **Behrend**: Grundzüge der organischen Chemie, 3; Arbeiten im Laboratorium der organischen Chemie (mit Nottbohm und Odenwald), tägl. außer Sonnabend. — **Ost**: Zuckerindustrie und Gärungsgewerbe, 3; Mineralöle und Fette, 2; Arbeiten im Laboratorium der techni-

schen Chemie, tägl. außer Sonnabend. — **Bodenstein**: Angewandte Elektrochemie, 3; Elektrochemische Übungen (mit Braune), 4; Arbeiten im elektrochemischen Institut (mit Braune), tägl.; Übungen in der Elektroanalyse (mit Braune), 7. — **Jänecke**: Metallographie des Eisens und seiner Legierungen, 1. — **Laves**: Grundzüge der physiologischen Chemie, 2. —

Kiepert: Höhere Mathematik II (mit Prange), 6, Übungen, 2, Repetition, 1; Ausgewählte Kapitel der Mathematik: Höhere Mathematik IV, 4. — **Müller**: Höhere Mathematik (mit Prange) I A, 6, Übungen, 2, III A, 3, Übungen, 1; Geschichte der Mechanik seit Euler, 1. — **Salkowski**: Grundzüge der höheren Mathematik, 3, Übungen, 1; Praktische Mathematik, 2, Übungen, 2; Versicherungsmathematik, 2. — **Rodenberg**: Darstellende Geometrie I (mit Morin), 3, Übungen, 6; Mathematisches Seminar (mit Müller und Salkowski), 2 g. — **Prange**: Die Stabilität der Bewegung (mit besonderer Berücksichtigung des Flugzeugs), 2; Einführung in die Theorie der algebraischen Kurven, 2. — **Oertel**: Grundzüge der praktischen Geometrie (mit Petzold), 2, Übungen, 3; Praktische Geometrie, Planzeichnen (mit Petzold), 4; Geodäsie I: Praktische Geometrie (mit Petzold), 2, Übungen, 6; Grundzüge der astronomischen Ortsbestimmung, 2. — **Pröll**: Mechanik I: Grundzüge der Mechanik (mit Tietzel), 4, Übungen, 1; Ausgewählte Kapitel der technischen Mechanik (mit Tietzel), 1; Aeromechanik in ihrer Anwendung auf Motorluftschiffe und Flugzeuge (mit Tietzel), 1, Übungen, 1. — **N. N.**: Maschinen Meßkunde, 2. —

Universität Heidelberg.

Lenard: Experimentalphysik: Optik, Elektrizität und Magnetismus, 4; Physikalisches Praktikum (mit Becker), 6; Physikalisches Seminar und Kolloquium, 1 g; Wissenschaftliche Arbeiten im physikalischen und radiologischen Laboratorium (mit Becker), tägl. außer Sonnabend. — **Becker**: Theoretische Optik, 4; Kathodenstrahlen, 1. — **Schmidt**: Photographische Kurse für Anfänger und Vorgeschriftene, 2. —

Curtius: Experimentalchemie I: Allgemeine Chemie und Metalloide, 5; Chemisches Praktikum für Anfänger und Geübtere in anorganischer, organischer, physikalischer, analytischer und pharmazeutischer Chemie (mit Jannasch, Trautz, Müller und Schrader), tägl. außer Sonnabend, für Lehramtskandidaten und Mediziner, halbtägig; Chemisches Anfänger-Praktikum für Mediziner, 4. — **Krafft**: Organische Chemie, 4; Praktisch-chemische Arbeiten und Übungen im Laboratorium, tägl. außer Sonnabend; Chemisches Ferien-Praktikum im Februar und März, tägl. außer Sonnabend; Chemisches Praktikum für Anfänger, tägl. außer Sonnabend. — **Jannasch**: Titrier-Analyse, 2; Ausmittlung der Gifte, 1; Gasanalytisches Praktikum (mit Müller), 4; Chemisches Praktikum zur Untersuchung der Nahrungs- und Genußmittel, 5. — **Knoevenagel**: Technologische Chemie. — **Trautz**: Physikalische Chemie: Photochemie, chemische Reaktionsgeschwindigkeit und Katalyse, 3; Physikalische Chemie der Gesteine des Vulkanismus und des Kosmos: Silikatchemie, Geochemie, kosmische Chemie, 2; Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften, 1, Übungen, 1; Praktische Einführung in die physikalische und Elektrochemie, 4–6 Wochen. — **Mohr**: Besprechung neuerer organisch-chemischer Arbeiten, 1. — **Stollé**: Pharmazeutische Chemie. — **Muckermann**: Über neuere Arzneimittel; Repetitorium der Chemie für Pharmazeuten. — **Müller**: Qualitative Analyse; 1; Gasanalyse und Gasvolumetrie, 1, Praktische Übungen, 2. — **Schrader**: Geschichte der organischen Chemie seit Kekulé, 1; Repetitorium der organischen Chemie, 2. —

Stäckel: Differential- und Integralrechnung, 4, Übungen, 1; Mathematisches Oberseminar (mit Perron), 2; Differentialgleichungen, 3. — **Perron**: Ausgewählte Kapitel aus der Elementargeometrie, 3; Mathematisches Unterseminar, 1. — **Koenigsberger**: Funktionentheorie, 4; Abelsche Gleichungen und Kreisteilung, 1. — **Koehler**: Analytische Geometrie der Ebene, 3. — **Pfeiffer**: Dar-

stellende Geometrie mit Übungen, 3. — **Wolf**: Elemente der Witterungskunde, 2 g. —

Tagesereignisse.

Auf Einladung der Kommission der **Wolfskehl-Stiftung** der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen wird Herr Professor Dr. Max Planck in Göttingen am 13.–17. Mai, 9–10 Uhr, einen öffentlichen Vortragszyklus über Quantentheorie mit anschließender Diskussion abhalten. Die Themata seiner Vorträge sind:

1. Einleitung. Entropie und Wahrscheinlichkeit. Hohlraumstrahlung.
 2. Materielle Systeme mit einem Freiheitsgrad.
 3. Materielle Systeme mit einigen Freiheitsgraden.
 4. Materielle Systeme mit vielen Freiheitsgraden.
- Der Besuch steht jedem Fachgenossen frei.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der Privatdozent für chemische Technologie an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Ernst Terres zum a. o. Professor ebenda, der Vizekanzler der Universität Helsingfors Professor der Chemie Wirklicher Staatsrat Dr. Edward Immanuel Hjelt zum Gesandten der finnischen Republik beim Deutschen Reiche, der a. o. Professor an der Technischen Hochschule Dresden Dr. Heinrich Barkhausen zum ord. Professor für Schwachstromtechnik und Direktor des Institutes ebendasselbst.

Berufen: Der ord. Professor an der Landwirtschaftlichen Hochschule und Privatdozent an der Universität Berlin Dr. Jacob Meisenheimer zum ord. Professor der Chemie an der Universität Greifswald, der ord. Professor an der Universität Göttingen Geh. Regierungsrat Dr. Emil Wiechert zum ord. Professor der Geophysik und Geodäsie an der Universität Berlin.

Verliehen: Dem ord. Professor der Chemie an der Universität Halle Dr. Daniel Vorländer, dem ord. Professor der Physik an der Universität Münster Dr. Gerhard Schmidt, dem ord. Professor für Chemie an der Universität Bonn Dr. Eberhard Rimbach, dem a. o. Professor der Chemie an der Universität Königsberg Dr. Reinhard Blochmann, dem Abteilungsvorsteher des Königl. Meteorologischen Instituts Potsdam Professor Dr. Reinhard Siring, dem ord. Professor der organischen Chemie an der Technischen Hochschule Berlin und a. o. Professor an der Universität daselbst Dr. Robert Pschorr, dem Privatdozent für Chemie an der Universität Berlin Professor Dr. Paul Jacobson der Titel Geh. Regierungsrat, dem a. o. Professor der Chemie an der Universität Würzburg (mit der Vertretung des verstorbenen Geheimrat Buchner beauftragt gewesen) Dr. Fritz Reitzenstein der Titel Hofrat, dem Professor der Physik an der Universität Berlin Dr. Albert Einstein von der Philosophischen Fakultät der Universität Göttingen der Otto Vahlbruch-Preis für seine Arbeiten über die Theorien der Gravitation, dem wissenschaftlichen Hilfsarbeiter am Astrophysikalischen Observatorium Potsdam Dr. Otto Birk sowie den wissenschaftlichen Mitarbeitern der Deutschen Chemischen Gesellschaft Dr. Robert Stelzner und Dr. Prager der Titel Professor.

Ehrungen: Zu auswärtigen Mitgliedern in der mathematisch-physikalischen Klasse der Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen der ord. Professor für angewandte Thermodynamik an der Technischen Hochschule München Geheimrat Dr. Karl von Linde und der ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität Berlin Geh. Regierungsrat Dr. Max Planck.

Gestorben: Der Privatdozent für Physik, Philosophie und Geophysik an der Universität Berlin Geh. Regierungsrat Professor Dr. Max Bernhard Weinstein, der Privatdozent für Mathematik an der Universität Berlin Dr. Robert Jentzsch, der ord. Professor der Chemie an der Faculté de Bordeaux Dr. Charles Blarez.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 9.

1. Mai 1918.

Redaktionsschluß für No. 11 am 1. Mai 1918.

19. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

- | | | |
|--|---|--|
| E. Waetzmann, Über Schwebungen. (Zur Antwort des Herrn Budde.) S. 177. | bestimmung leuchtender Flammen. S. 180. | lehre der Gase. (Einige Demonstrationsversuche.) S. 188. |
| St. Meyer, Periodische Systeme der Elemente. S. 178. | J. Lense, Über die Anwendbarkeit der kinetischen Gastheorie auf das Fixsternsystem. S. 182. | A. Schmidt, Magnetische Mittelwerte des Jahres 1917. S. 195. |
| H. Senftleben u. E. Benedict, Eine Methode zur Temperatur- | W. Kasperowicz, Galvanischer Unterbrecher. S. 187. | Vorlesungsverzeichnis f. das Sommersemester 1918. S. 196. |
| | H. Greinacher, Aus der Ionen- | Berichtigung. S. 200. |
| | | Personalien. S. 200. |
| | | Angebote. S. 200. |

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über Schwebungen.

(Zur Antwort des Herrn Budde.)

Von E. Waetzmann.

Die ursprünglichen Bedenken Buddes¹⁾ gegen einige Ausführungen in § 2 meiner Arbeit²⁾: „Über den Zusammenklang zweier einfacher Töne“ beruhten im wesentlichen auf Mißverständnissen. Ich habe gezeigt³⁾, daß die Bemerkungen, die Budde meiner Arbeit „gegenüberstellte“, gegenstandslos sind, weil sie durchaus meinem Standpunkt entsprechen und nichts enthalten, was nicht bereits in meiner ersten Arbeit völlig klar auseinandergesetzt worden wäre. Aus der Bemerkung zu Anfang der neuesten Abhandlung Buddes⁴⁾, „kleinere vielleicht vorhanden gewesene Mißverständnisse mögen dabei unberücksichtigt bleiben“, glaube ich schließen zu dürfen, daß wir uns hierin jetzt einig sind.

Die weiteren Ausführungen Buddes in seiner Antwort entspringen aber wiederum einem Mißverständnis. Die Ursache für dieses Mißverständnis liegt m. E. nicht in meiner Darstellung.

Im Mittelpunkt der Buddeschen Antwort steht der Satz: „Nun habe ich behauptet und behaupte noch, daß der Faktor $\sin \frac{p+q}{2}t$ als einfacher Ton $\frac{p+q}{2}$ gehört wird, wenn $p-q$ sehr klein ist“. Budde nimmt also an, ich hätte bestritten, daß man bei sehr kleinen Inter-

vallen den Ton $\frac{p+q}{2}$ höre. Das ist aber nicht der Fall. Zum Beweise hierfür erinnere ich nur daran, daß Budde in seiner ersten Arbeit selbst zitiert: „Für diesen Fall (Abstand von p und q erheblich kleiner als ein halber Ton) gibt Waetzmann selbst als Erfahrungsergebnis im Anschluß an Stumpf an: „Man hört nur einen zwischen ihnen liegenden Ton, und diesen schwebend“. Hiernach sind die Ausführungen der Buddeschen Antwort m. E. völlig gegenstandslos.

Mein Gedankengang, der den Widerspruch Buddes herausgefordert hat, war in ganz groben Zügen folgender: Wir stellen uns auf den Standpunkt der Resonanztheorie. Sind nun gleichzeitig zwei Schwingungen p und q von gleichen Amplituden gegeben, so kann aus der Produktdarstellung auch für sehr kleine Abstände von p und q noch nicht auf das Vorhandensein des Tones $\frac{p+q}{2}$ geschlossen werden.

Um verständlich zu machen, daß man $\frac{p+q}{2}$ hören kann, ist vielmehr noch die Annahme erforderlich, daß ein gewisser Dämpfungsgrad der Ohrresonatoren vorhanden ist. Meine Behauptung, daß die Produktdarstellung die Existenz des „Tones“ $\frac{p+q}{2}$ noch nicht beweist, wird, abgesehen von den sonstigen Gründen, auch von Budde selbst durch die gelegentliche Bemerkung¹⁾ als richtig bestätigt, daß dieser „Ton“ noch „geringe periodische Höhenänderungen“ aufweisen darf, die von manchen Beobachtern auch wahrgenommen werden.

Da die scheinbar so einfachen Überlegungen über die Tonhöhe bei Schwebungen in Wirk-

1) Budde II.

1) E. Budde, diese Zeitschr. 18, 285, 1917 (Budde I).

2) E. Waetzmann, diese Zeitschr. 12, 231, 1911 (Waetzmann I).

3) E. Waetzmann, diese Zeitschr. 18, 560, 1917 (Waetzmann II).

4) E. Budde, diese Zeitschr. 19, 60, 1918 (Budde II).

ichkeit sehr verwickelt sind, empfiehlt es sich, wie ich es in meinen Arbeiten getan habe, streng zu scheiden zwischen dem, was im Außenraum vor sich geht und dem, was man hört. Bezüglich aller Einzelheiten muß ich auf meine früheren Arbeiten verweisen. Um neuen Mißverständnissen vorzubeugen, möchte ich nur noch betonen, daß der Zweck und Inhalt meiner Arbeiten in erster Linie nicht der war, zu untersuchen, ob man diesen oder jenen Ton hört oder nicht hört, sondern gegenüber den zahlreichen Ungenauigkeiten und Unklarheiten in der fraglichen Literatur prinzipiell zu zeigen, wie man vom Standpunkte der Resonanztheorie aus bei diesen Untersuchungen vorzugehen hat.

Es scheint mir notwendig, noch auf zwei Einzelpunkte der Buddeschen Antwort hinzuweisen.

1. Budde hält seine Kritik meiner Bemerkung gegen einige Ausführungen Starkes¹⁾ mit dem Hinweis darauf aufrecht, daß sich Starkes Ausführungen nur auf „sehr kleine“ Intervalle beziehen. Der Ausgangspunkt der Starkeschen Argumentation ist aber der, daß beim gleichzeitigen Erklängen von p und q ein auf $\frac{p+q}{2}$ abgestimmter Resonator nicht mit-

töne; eine Annahme, die gerade für sehr kleine Intervalle in den meisten Fällen überhaupt nicht zutrifft. Der Hinweis auf die Kleinheit des Intervalls kann also höchstens gegen Starke sprechen.

2. Budde sagt: „Stellt man die Bewegung eines Punktes, an dem die beiden Schwingungen p und q zusammenwirken, graphisch dar, so erscheint sie dem Auge unter dem allbekannten Bilde einer an- und abschwellenden Sinuskurve. Derartige Bilder sind dem Leser wohl aus allen Lehrbüchern bekannt.“ Eine Schwebungskurve unterscheidet sich aber durchaus von einer an- und abschwellenden Sinuskurve, wie beispielsweise die Zeichnungen in meinen vorhergehenden Arbeiten und zahlreiche Kurven in einer früher zitierten Arbeit von Stumpf²⁾ zeigen. Allerdings ist richtig, daß sich in vielen Lehrbüchern „Schwebungskurven“ finden, die so aussehen, wie es Budde beschreibt. Diese Schwebungskurven sind aber falsch gezeichnet.

Soweit ich übersehe, sind jetzt alle Streitpunkte klargestellt, so daß ich meinerseits auf eine Fortführung der Diskussion verzichten kann. Mir scheint die Antwort Buddes überhaupt nur

dadurch veranlaßt zu sein, daß er meine früheren Arbeiten nicht genau kennt. Das Verdienst der Buddeschen Arbeiten dürfte darin liegen, daß sie von neuem die Aufmerksamkeit auf das sehr schwierige Problem der Schwebungen gelenkt haben.

Breslau, Physikal. Institut, Februar 1918.

(Eingegangen 8. März 1918.)

Periodische Systeme der Elemente.

Von Stefan Meyer.

Die Modifikationen, die den ursprünglichen „periodischen Systemen“ von D. Mendelejeff und L. Meyer gegeben wurden, sind sehr zahlreich; jede hat ihre Vorzüge und Nachteile, aber zu allgemeinerem Gebrauch ist neben der Mendelejeffschen keine gelangt.

Wenn trotzdem im folgenden neuerlich zwei Schreibarten vorgebracht werden, so geschieht dies auch nur in der Meinung, daß vielleicht der eine oder der andere Forscher in ihnen geeignete mnemotechnische Hilfsmittel finden mag.

In der ersten Tabelle sind, wie dies schon oft geschah, die langen Perioden in je einer ganzen Zeile untergebracht; weiters aber soll der verschiedenen breite Rahmen qualitativ den Gang der Atomvolumina und der zahlreichen damit verknüpften Eigenschaften andeuten. Dadurch wird insbesondere der Unterschied der sonst gewöhnlich untereinander geschriebenen Halbperioden der langen Reihen schärfer hervorgehoben.

Die zweite Tabelle ist von der ersten hauptsächlich darin verschieden, daß die Maxima der Atomvolumen in die Mitte gestellt sind, während sich früher die Minima an dieser Stelle befanden. Die Reihung entspricht den Gedankengängen W. Kossels¹⁾ und ist auch von L. Flamm²⁾ schon anlässlich eines Vortrages verwendet worden. Die Einführung der verschiedenen Breite der Rahmen zur Versinnlichung des schematischen Ganges der Atomvolumen bringt der Anordnung befriedigende Symmetrie und zeigt deutlicher als die voranstehende, daß nicht die Edelgase, sondern die Elemente der Alkaligruppe die Spitzen der Atomvolumenkurve bilden.

1) H. Starke, Verh. d. D. phys. Ges. 10, 285, 1908.

2) C. Stumpf, Zeitschr. f. Psychol. u. Physiol. der Sinnesorgane 39, 241, 1905.

1) W. Kossel, Ann. d. Phys. (4) 49, 229, 1916.

2) L. Flamm, Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Architekt.-Ver. 69, 436, 1917.

Periodisches System der Elemente.

Die Atomvolumina nehmen
von der Mitte nach beiden
Seiten zu.

Negative Valenz=Zahl der Elektronen die aufgenommen werden können:										Positive Valenz=Zahl der Elektronen die abgegeben werden können:							
(-7)	(-6)	(-5)	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8		
+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	0	(-7)	(-6)	(-5)	-4	-3	-2	-1			

Gruppen-Nummer B (Die Atomvolumina nehmen von der Mitte nach beiden Seiten ab.) A

(Eingegangen 22. Februar 1918.)

Eine Methode zur Temperaturbestimmung leuchtender Flammen.

Von Hermann Senftleben und Elisabeth Benedict.

Bei den bisher vorliegenden Methoden zur Ermittlung von Flammentemperaturen ist man von dem Gedanken ausgegangen, entweder aus den Strahlungseigenschaften der Flammen auf Grund der Strahlungsgesetze ihre Temperatur zu bestimmen oder aus der Temperatur von in die Flamme eingeführten Körpern auf die Flammentemperatur zu schließen. Auf diesem letzteren Grundgedanken beruht auch die im folgenden beschriebene Methode der Temperaturbestimmung leuchtender Flammen, deren lichtaussendende Bestandteile glühende Kohlenstoffpartikelchen sind. Bei der Anwendung dieser Methode müssen vor allem die Bedingungen erfüllt sein, daß der eingeführte Körper die Temperatur der Flamme annimmt und die Beschaffenheit der Flamme nicht ändert. Führt man einen Körper in die Flamme ein, so erreicht er infolge des Energieverlustes durch Ableitung und Ausstrahlung ohne weiteres niemals die Flammentemperatur. Den durch Ableitung bedingten Wärmeverlust kann man zwar durch geeignete Einführung des betreffenden Körpers praktisch vermeiden; aber infolge der dauernden Ausstrahlung wird der Draht sich selbst und die ihn umgebenden Flammenteile abkühlen und dadurch eine zu niedrige Temperatur annehmen. Um diesen Fehler zu vermeiden, hat man mehrfach einen zuerst von Nernst angegebenen Kunstgriff¹⁾ benutzt. Dieser besteht darin, daß man dem Körper von außen her gerade die Energie wieder zuführt, die er durch Strahlung verliert, und ihn dadurch auf die Flammentemperatur bringt. Diese Zuführung der Energie geschieht am praktischsten durch Nachheizen des Körpers auf elektrischem Wege. Die Hauptaufgabe bei der Durchführung der Methode besteht nun darin, den durch Leitung und Strahlung eintretenden Energieverlust des Körpers und damit die Energie zu bestimmen, die von außen zugeführt werden muß, um den Körper auf die wahre Flammentemperatur zu bringen. Bei den an nicht leuchtenden (Bunsen-)Flammen ausgeführten Temperaturbestimmungen hat man den Energieverlust direkt gemessen oder auf andere Weise bestimmte Kriterien²⁾ für die Gleichheit von ausgestrahlter bzw. abgeleiteter und zugeführter Energie aufstellen können. In-

folge der gänzlich anderen Beschaffenheit der leuchtenden Flammen lassen sich aber diese Kriterien nicht auf sie übertragen und es handelte sich daher darum, ein anderes Kriterium zur Bestimmung der zuzuführenden Energie zu finden.

Ausgehend von der Tatsache, daß sich in leuchtenden Flammen glühender Kohlestoff in fein verteiltem Zustand befindet, haben wir unserer Methode die Annahme zugrunde gelegt, daß derselbe sich nur dann als Ruß an einem in die Flamme eingeführten Körper abscheidet, wenn seine Temperatur niedriger ist als die der Flamme; demnach würde die Temperatur des Körpers gleich der der Flamme sein, wenn bei einer Erniedrigung derselben sofort Rußabscheidung eintreten würde. Damit ist die Temperaturbestimmung der Flamme auf die Ermittlung dieser Temperatur des eingeführten Körpers zurückgeführt.

Diese Temperatur wurde bei den hier besprochenen Untersuchungen auf optischem Wege bestimmt. Daher kamen für die Einführung in die Flamme nur Substanzen mit bekannten Strahlungseigenschaften in Betracht. Infolge der Höhe der hier in Frage stehenden Temperaturen eignete sich hierfür am besten Platin, am praktischsten in Form von Drähten. Diese Drähte wurden mitten in den leuchtendsten Teil der untersuchten Flamme eingeführt und konnten durch Zuführung von elektrischem Strom auf verschiedene Temperaturen gebracht werden. Durch Regulierung der Stromstärke ließ sich ein Temperaturpunkt finden, bei dessen Überschreitung keine Rußabscheidung mehr eintrat, unterhalb dessen aber die Rußabscheidung augenblicklich einsetzte. Bei dieser Stromstärke wurde in einem Holborn-Kurlbaumschen Pyrometer die schwarze Temperatur des Drahtes gemessen und aus ihr auf Grund der Strahlungsgesetze und des bekannten Reflexionsvermögens des Platins seine wahre Temperatur bestimmt.

Die hier angegebene Methode der Temperaturbestimmung wurde zunächst auf die Hefnerkerze angewendet, für sie ergab sich im Mittel eine Temperatur von 1705° abs. Die Genauigkeit der durch Stromregulierung festgelegten fraglichen Temperatur des Drahtes und damit der Flammentemperatur betrug ca. 20° , d. h. also etwa 1 Proz. der Flammentemperatur.

Bei dem so gewonnenen Temperaturwert ist der Einfluß des vor dem Draht befindlichen leuchtenden Teils der Flamme noch nicht berücksichtigt. Durch die Eigenstrahlung dieses Flammenteils und ihre Reflexion am Draht erscheint dieser heller, andererseits durch die Absorption dieses Flammenteils dunkler, als es

1) F. Berkenbusch, Wied. Ann. 67, 649, 1899; H. Schmidt, Diss. Berlin 1909; H. Kohn, Diss. Breslau 1913.

2) S. z. B. H. Kohn l. c.

seiner Temperatur entspricht. Die hierdurch hervorgerufenen Fehler, deren Größenordnung sich durch Messungen im Pyrometer leicht bestimmen läßt, sind klein und da sie außerdem teilweise in entgegengesetztem Sinne wirken, ist nur eine äußerst geringe Korrektur der aus der Helligkeit des Drahtes ermittelten Flammentemperatur erforderlich. Bei der Hefnerkerze beträgt diese Korrektur ca. —1 Proz. der Flammentemperatur, so daß bei ihrer Anbringung der oben angegebene Temperaturwert auf 1690° abs. zu erniedrigen ist.

Eine weitere mögliche Fehlerquelle liegt in dem bereits erwähnten Umstand, daß durch Einführung des Drahtes die Beschaffenheit der Flamme gestört wird. Um die Größe dieses Fehlers zu bestimmen, benutzten wir Drähte von sehr verschiedener Dicke (von 0,2 mm bis 1 mm Durchmesser) zur Temperaturbestimmung. Hierbei ergab sich erst bei ziemlich dicken Drähten eine merkliche Abhängigkeit der Temperatur von der Dicke des eingeführten Drahtes. Auch aus der Tatsache, daß sich die an einer in unmittelbarer Nähe des Drahtes befindlichen Flammenstelle gemessene schwarze Temperatur beim Entfernen des Drahtes nur unwesentlich änderte, wenn der Draht nicht allzu dick war, folgt, daß die durch die Einführung dünner Drähte hervorgerufene Störung der Flamme zu vernachlässigen ist.

Ein weiterer Punkt, der bei dieser Methode der Temperaturbestimmung zu erörtern ist, ist der Umstand, daß Platin und Kohlenstoff besonders bei hohen Temperaturen leicht Verbindungen eingehen und hierdurch die Beschaffenheit der Drahtoberfläche verändert werden könnte. Eine derartige Veränderung ließ sich zwar nicht mit Sicherheit feststellen, möglicherweise aber ist die Beobachtung, daß sich nach mehrfacher Benutzung eines Drahtes der Temperaturpunkt des Einsetzens bez. Aufhörens der Rußabscheidung nicht mehr so deutlich wie anfangs feststellen ließ, mit der oben erwähnten Tatsache der Karbidbildung des Platins in Verbindung zu bringen. Um aber über den eventuellen Einfluß dieser möglichen Fehlerquelle Aufschluß zu gewinnen, haben wir an sehr kühlen Flammen zur Temperaturbestimmung außer Platindrähten auch Golddrähte benutzt und sind innerhalb der Fehlergrenzen zu den gleichen Resultaten gekommen, was darauf hinweist, daß die erwähnte Möglichkeit der Verbindung von Kohlenstoff und Platin nicht merklich in Betracht kommt.

Die oben angegebene Temperatur der Hefnerkerze von 1690° abs. ist daher als der endgültige Temperaturwert dieser Flamme zu betrachten.

Um die Messungen an Golddrähten durchführen zu können, gelangten Petroleumflammen zur Untersuchung, deren Temperatur bis zu 1150° abs. herab dadurch verändert werden konnte, daß man die Flammen mehr oder weniger stark rußen ließ. Die Temperaturen dieser Flammen wurden gleichzeitig nach einer von Kurlbaum angegebenen Methode¹⁾ ermittelt, und es ergab sich eine befriedigende Übereinstimmung der auf beiden Wegen erhaltenen Temperaturwerte.

Auch bei der Hefnerkerze kann ein Vergleich der nach der vorliegenden Methode bestimmten Temperatur mit nach anderen Methoden erhaltenen Werten gezogen werden. Kurlbaum²⁾ erhält als Wert der Temperatur³⁾ 1711° abs., Ladenburg⁴⁾ auf zwei Wegen die Werte 1715° abs. und 1688° abs. und Becker⁵⁾ 1680° abs., während der aus unseren Messungen folgende Wert sich zu 1690° abs. ergibt.

Dies Ergebnis, daß die nach der hier angegebenen Methode erhaltenen Temperaturen mit auf gänzlich anderen Wegen gewonnenen Werten in gutem Einklang stehen, läßt die Berechtigung der zugrunde gelegten Annahme erkennen.

Andererseits ist es auf Grund des hier angegebenen Kriteriums der Rußabscheidung auch möglich, aus der bekannten Temperatur einer Flamme das unbekannte Absorptionsvermögen eines in die Flamme eingeführten Körpers zu ermitteln.

1) F. Kurlbaum, diese Zeitschr. 3, 187 u. 332, 1902.

2) l. c.

3) Da die in der vorliegenden Arbeit angegebenen Temperaturwerte in der Temperaturskala angegeben sind, die auf dem Werte 14370 der Konstanten c_2 des Planckschen Gesetzes aufgebaut ist, die Werte der genannten Autoren aber höchst wahrscheinlich noch auf dem Werte $c_2 = 14600$ beruhen, haben wir ihre Angaben um die aus diesem Unterschied folgende Temperaturdifferenz von 10 bis 11° erhöht.

4) R. Ladenburg, diese Zeitschr. 7, 697, 1906.

5) A. Becker, Ann. d. Phys. 28, 1017, 1909.

Breslau, Physikalisches Institut der Universität, im Februar 1918.

(Eingegangen 14. Februar 1918.)

Über die Anwendbarkeit der kinetischen Gastheorie auf das Fixsternsystem.

Von J. Lense.

§ 1. Da in jüngster Zeit der Gedanke, das Fixsternsystem nach den Methoden der kinetischen Gastheorie zu behandeln, von C. V. L. Charlier in mehreren Arbeiten zur Geltung gebracht wurde, dürfte es von Interesse sein, zu erfahren, welches der Zustand eines Gases sei, dessen Modell im großen durch das Sternsystem gegeben ist. Zu dem Ende vergleichen wir es mit Wasserstoff bei 0° C und 760 mm Druck. Beides sind Ansammlungen von Individuen, die einmal durch die Wasserstoffmoleküle, das andere Mal durch die Sterne repräsentiert werden. Um gleiche Verhältnisse in beiden Fällen vor Augen zu haben, nehmen wir die Sterne untereinander von gleicher Größe und Masse wie die Sonne an und ersetzen das Milchstraßensystem durch einen kugelförmigen Haufen mit einem Radius von 10^9 Erdbahnradien, der 10^9 solche der Sonne gleiche Sterne enthält. Diese Annahme wurde von H. Poincaré¹⁾ diskutiert und auch von Charlier²⁾ adoptiert. Sie dürfte beiläufig die Verhältnisse im Fixsternsystem wiedergeben. Die astronomische Volumseinheit, ein Würfel, dessen Seite gleich ist der mittleren Distanz Erde—Sonne, enthält also $\frac{3 \cdot 10^{-18}}{4\pi}$ Sterne. Da ferner die Masse der

Sonne als astronomische Masseneinheit gilt, ist durch diese Zahl auch die mittlere Dichte $\bar{\rho}$ des Sternsystems in astronomischen Einheiten gegeben. Wir wählen im folgenden als Maßsystem für das Gas das cm g sec-System, als Einheiten für das Milchstraßensystem Erdbahnradius, Sonnenmasse und tropisches Jahr. Ferner bezeichnen wir die auf das Gas bezüglichen Größen immer mit denselben Buchstaben wie die entsprechenden bei den Sternen, nur mit Strichen versehen.

Zuerst berechnen wir das Dichteverhältnis und die mittlere Entfernung zweier Individuen in beiden Systemen, letztere ausgedrückt in Molekül- ($d' = 2,17 \cdot 10^{-8}$ cm), bzw. Sonnendurchmessern ($d = 0,009305$). 1 cm³ Wasserstoff enthält unter den erwähnten Bedingungen $N' = 2,7 \cdot 10^{19}$ Moleküle (Loschmidtsche Zahl), während es bei völlig dichter Raumerfüllung durch die Moleküle deren $\frac{6}{\pi d'^3} = 1,87 \cdot 10^{23}$

fassen würde; die mittlere Distanz zweier Wasserstoffmoleküle liefert uns die Formel

$$D' = \frac{1}{d' \sqrt{N'}} = 15,4 \text{ Moleküldurchmesser.}$$

Beim Sternhaufen dagegen kommen in einem mit $1,87 \cdot 10^{23}$ Sternen inhaltsgleichen Raume — sein Volumen ist

$$V = \left(\frac{d}{d'}\right)^3 = 7,86 \cdot 10^{16} —$$

nur $N = 0,0188$ Sterne vor. Die mittlere Stern-distanz ist hier

$$D = \frac{1}{d \sqrt{N}} = 1,73 \cdot 10^8 \text{ Sonnendurchmesser.}$$

Die Moleküle sind also im Wasserstoff

$$\frac{N'}{N} = 1,44 \cdot 10^{21}$$

mal dichter angeordnet als die Sterne im galaktischen System. Da der Druck eines Gases bei konstanter Temperatur der Dichte proportional ist, würde Wasserstoff, dessen Moleküle mit derselben Dichte verteilt wären wie die Sterne, bei 0° C unter einem Druck von $5,28 \cdot 10^{-19}$ mm stehen.

§ 2. Betrachten wir jetzt die Zusammenstöße. Bekanntlich ersetzte Maxwell seine erste Annahme von gleich großen, vollkommen elastischen, kugelförmigen Gasmolekülen, die sich zwischen zwei Stößen geradlinig und gleichförmig bewegen, später durch eine zweite, wonach die Teilchen von gleicher Masse, sonst aber von beliebiger Gestalt sind, die einander bei kleiner gegenseitiger Entfernung mit einer Kraft abstoßen, umgekehrt proportional der fünften Potenz der Distanz, und sich außerhalb dieser Wirkungssphäre wieder gleichförmig und geradlinig bewegen. Dadurch treten an Stelle der elastischen Stöße sog. Vorübergänge, d. h. wenn ein Molekül bei einem andern innerhalb seiner Wirkungssphäre „vorübergeht“, wird es durch die abstoßende Kraft aus seiner geradlinigen Bahn solange abgelenkt, bis es wieder die Wirkungssphäre, jetzt in einer anderen Richtung, verläßt; die elastischen Stöße lassen sich als Spezialfall dieser Vorübergänge auffassen.

Bei den Sternen gibt es offenbar überhaupt keine rein elastischen Stöße, sondern nur solche Vorübergänge und Zusammenstöße, die man eher als unelastisch ansehen wird. Die Ablenkung während des Vorüberganges erfolgt hier unter der Herrschaft der Newtonschen Kraft. Bezeichnet N die Molekül- oder Sternzahl in der Volumseinheit, σ den Radius der Wirkungssphäre und $\bar{c}$ die mittlere Molekül- oder Sterngeschwin-

1) H. Poincaré, Leçons sur les hypothèses cosmogoniques. Paris 1913, S. 260.

2) C. V. L. Charlier, Notes on Statistical Mechanics. Meddel. Nr. 69 u. 70, Lund 1915.

digkeit, so folgen die Zahl Γ der Vorübergänge, die mittlere freie Weglänge λ und Wegzeit τ zwischen zwei Vorübergängen aus den Maxwell'schen Formeln

$$\Gamma = \sqrt{2} \pi N \sigma^2 \bar{c}$$

$$\lambda = \frac{\bar{c}}{\Gamma}$$

$$\tau = \frac{1}{\Gamma}.$$

Bei den Gasen pflegt man für σ den Moleküldurchmesser d' zu setzen, man erhält also für Wasserstoff, weil $\bar{c} = 1,7 \cdot 10^5 \text{ cm sec}^{-1}$,

$$\Gamma = 9,54 \cdot 10^9 \text{ pro Sekunde}$$

$$\lambda' = 1,78 \cdot 10^{-5} \text{ cm} = 820 \text{ Moleküldurchmesser}$$

$$\tau' = 1,05 \cdot 10^{-10} \text{ sec.}$$

Über den Radius der Wirkungssphäre eines Sternes wurden verschiedene Annahmen gemacht. G. Jäger¹⁾ setzt dafür den hundertfachen Erdbahnradius, Charlier einmal den Sonnendurchmesser, dann den Erdbahnhalm, schließlich die halbe mittlere Sterndistanz²⁾. In unseren Einheiten ist $N = 2,39 \cdot 10^{-19}$, $\bar{c} = 5,78$ ($= 27,4 \text{ km/sec}$), daher

$$\sigma = 0,009305 (= \text{Sonnendurchm.}), \quad \Gamma = 5,32 \cdot 10^{-22} \text{ pro Jahr}, \quad \lambda = 1,09 \cdot 10^{22} = 1,17 \cdot 10^{24} \text{ S.D.},$$

$$\tau = 1,88 \cdot 10^{21} \text{ Jahre}$$

$$1 \quad (= \text{Erdbahnradius}) \quad 6,14 \cdot 10^{-18}$$

$$9,42 \cdot 10^{17} \quad 1,01 \cdot 10^{20}$$

$$\tau = 1,63 \cdot 10^{17} \text{ Jahre}$$

$$100 \quad 6,14 \cdot 10^{-14}$$

$$9,42 \cdot 10^{13} \quad 1,01 \cdot 10^{16}$$

$$\tau = 1,63 \cdot 10^{13} \text{ Jahre}$$

$$8,06 \cdot 10^5 (= \text{halbemittl. Sterndist.}) \quad 3,98 \cdot 10^{-6}$$

$$1,45 \cdot 10^6 \quad 1,56 \cdot 10^8$$

$$\tau = 2,51 \cdot 10^5 \text{ Jahre}$$

Die erste Zeile bezieht sich auf die wirklichen Zusammenstöße, die drei andern auf Vorübergänge.

§ 3. Es ist klar, daß bei gleicher mittlerer Geschwindigkeit die Gesamtwirkung des Systems auf das Individuum um so weniger seine geradlinige Bahn krümmen wird, je kürzer die mittlere freie Weglänge ist. Um die Verhältnisse genauer zu überblicken, berechnen wir die Größe dieser Wirkung. Wir denken uns zu diesem Zweck einen kugelförmig geschichteten Haufen von kleinen Kugeln, die einander nach dem Newtonschen Gesetz anziehen. Die Dichte ρ sei eine Funktion der Entfernung r vom Zentrum und ebenso wie die Geschwindigkeitsverteilung

von der Zeit unabhängig. In diesem Fall ist die Bewegung eines Individuums eine Zentralbewegung um den Mittelpunkt des Haufens. Bedeuten r_0 und c_0 Radiusvektor und Geschwindigkeit zur Zeit $t = t_0$, C und V Flächengeschwindigkeit und Potential, so liefert der Energiesatz

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2} - c_0^2 = 2V,$$

wobei

$$V = 4\pi k^2 \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2} \int_0^r \rho r^2 dr,$$

($k^2 = \text{Gravitationskonstante}$)

daher

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = c_0^2 - \frac{C^2}{r^2} - 8\pi k^2 \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2} \int_0^r \rho r^2 dr.$$

Soll die Bahn ein Kreis sein, so muß $C = r_0 c_0$ sein und $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 0$ für $r = r_0$ eine Doppelwurzel haben, also

$$\frac{2C^2}{r_0^3} - \frac{8\pi k^2}{r_0^3} \int_0^{r_0} \rho r^2 dr = 0,$$

oder mit Weglassung des Index 0

$$c^2 = \frac{4\pi k^2}{r} \int_0^r \rho r^2 dr.$$

Führen wir noch die mittlere Dichte

$$\bar{\rho} = \frac{3}{r^3} \int_0^r \rho r^2 dr$$

ein, so lautet die Beziehung zwischen Kreisradius und Geschwindigkeit

$$c^2 = \frac{4\pi k^2}{3} \bar{\rho} r^2. \quad (1)$$

Die Umlaufszeit U wird daher

$$U = \frac{2\pi r}{c} = \sqrt{\frac{3\pi}{k^2 \bar{\rho}}}, \quad (2)$$

1) G. Jäger, Folgerungen aus den Eigenbewegungen der Fixsterne, Monatshefte für Math. u. Phys. Wien 1891.

2) C. V. L. Charlier, Statistical Mechanics based on the Law of Newton. Meddel. Serie II, Nr. 16, Lund 1917.

ist demnach unabhängig vom Halbmesser des Kreises und der Bahngeschwindigkeit.

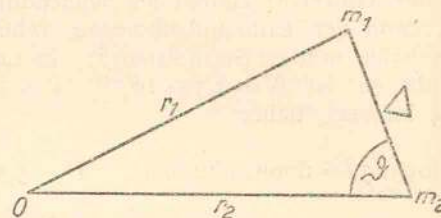
Wenden wir diese Formel auf den Wasserstoff an. 1 cm³ dieses Gases wiegt bei 0° C und 760 mm Druck $8,98 \cdot 10^{-5}$ g, $k^2 = 6,68 \cdot 10^{-8}$, folglich ist $U = 1,25 \cdot 10^6$ sec. Das Molekül würde hiernach auf seiner Kreisbahn BU Stöße mitmachen, wenn B die Stoßzahl für ein mit der bestimmten Geschwindigkeit c bewegtes Teilchen bedeutet. c ist solange kleiner als die mittlere Molekulargeschwindigkeit des Wasserstoffs, als $r < 3,38 \cdot 10^{10}$ cm, wie sich leicht aus Formel (1) ergibt. Die Stoßzahl B für ein Molekül mit bestimmter Geschwindigkeit c erhält man aber nach O. E. Meyer¹⁾, indem man Γ mit einem gewissen Reduktionsfaktor multipliziert, der zwischen $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und 1 variiert, wenn c

zwischen 0 und $\bar{c}$ liegt. Wir ändern also nichts an der Größenordnung unserer Resultate, wenn wir B durch Γ ersetzen. Das Wasserstoffmolekül würde somit auf seiner Kreisbahn $0,19 \cdot 10^{16}$ Stöße erfahren, d. h. es kann den ganzen Kreis gar nicht beschreiben, sondern nur $\left(\frac{360}{1,19 \cdot 10^{16}}\right)^0$ im Mittel, dann wird es schon durch einen Stoß aus ihm abgelenkt. Dieses kurze Kreisbogenstück kann aber als geradlinig angesehen werden; die Gesamtwirkung der Gaskugel krümmt hiermit die Molekülbahn nicht und kann infolgedessen vernachlässigt werden. Die Bewegung eines Moleküls erfolgt nur unter der Einwirkung der einzelnen Teilchen, in deren Wirkungssphäre es gerät. Für Gebiete nahe der freien Oberfläche einer Gasmasse gelten diese Überlegungen allerdings nicht, denn dort wächst schließlich der freie Weg über alle Grenzen, es kommen sonach fast gar keine Stöße mehr vor, das Molekül beschreibt unter dem Einfluß der ganzen Gaskugel einen Kegelschnitt.

Im Fixsternsystem ist in den gewählten Einheiten $k = 2\pi$, $\bar{q} = \frac{3 \cdot 10^{-18}}{4\pi}$, daher $U = 10^9$ Jahre, währenddessen der Stern $5,32 \cdot 10^{-13}$ Zusammenstöße erfährt, d. h. er könnte den Kreis $1,88 \cdot 10^{12}$ mal durchlaufen, ehe er mit einem andern effektiv zusammenstieße. Die einschränken den Bemerkungen, die bei der Gaskugel gemacht wurden, gelten auch hier.

§ 4. Hinsichtlich der Vorübergänge müssen wir uns vor allem darüber klar werden, welche Entfernung als Wirkungssphäre eines Sternes angesehen werden soll, da ja drei voneinander ziemlich verschiedene Vorschläge vorliegen. Wir

wollen versuchen, eine strengere Definition durch folgenden in der Theorie der Kaptur der Kometen benutzten Gedankengang zu gewinnen: Jeder Stern steht im allgemeinen unter der Einwirkung des gesamten Milchstraßensystems, das wir uns zur Vereinfachung der Formeln für unsere Überschlagsrechnungen als kugelförmig geschichteten Sternhaufen vorstellen. Es ist nun möglich, daß er im Laufe der Zeit im Haufen einem andern Stern so nahe kommt, daß sich eine störende Einwirkung dieses Sternes auf die durch die Gesamtanziehung aller Sterne bedingte Bahn des ersten bemerkbar macht. Bei immer weiterer Annäherung wird schließlich seine Bewegung hauptsächlich unter der Wirkung des Nachbarn stattfinden, während sich die Gesamtanziehung des Haufens nur mehr als Störung dieser neuen Bahn äußert. In dem Augenblick haben beide Sterne eine bestimmte Entfernung σ , die als Radius der Wirkungssphäre definiert werden soll. Seine Berechnung gestaltet sich folgendermaßen:



Es seien (s. Figur) m_1, x_1, y_1, z_1, r_1 Masse, rechtwinklige Koordinaten (auf den Massenmittelpunkt O des Haufens bezogen) und Radiusvektor des einen Sternes, m_2, x_2, y_2, z_2, r_2 die analogen Größen für die andern und Δ ihre gegenseitige Entfernung. Dann lauten die Differentialgleichungen der Bewegung für m_1

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{4\pi k^2 x_1}{r_1^3} \int_0^{r_1} \rho r^2 dr - \frac{k^2 m_2 (x_1 - x_2)}{\Delta^3}$$

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = -\frac{4\pi k^2 y_1}{r_1^3} \int_0^{r_1} \rho r^2 dr - \frac{k^2 m_2 (y_1 - y_2)}{\Delta^3}$$

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} = -\frac{4\pi k^2 z_1}{r_1^3} \int_0^{r_1} \rho r^2 dr - \frac{k^2 m_2 (z_1 - z_2)}{\Delta^3};$$

die für m_2 erhält man durch Vertauschung der Stellenzeiger 1 und 2. Es treten also neben der Gesamtanziehung, die durch die ersten Glieder der rechten Seiten repräsentiert wird, noch Glieder auf, welche die störende Wirkung des andern Sternes darstellen. Auf den Stern m_1

1) O. E. Meyer, Die kinetische Theorie der Gase, Breslau 1899.

wirken sonach der Massenmittelpunkt O mit der anziehenden Kraft

$$K = \frac{4\pi k^2}{r_1^2} \int_0^{r_1} \rho r^2 dr$$

und der zweite Stern m_2 mit der störenden Kraft

$$K' = \frac{k^2 m_2}{\Delta^2}$$

Wir beziehen nun die Koordinaten von m_1 auf m_2 als Ursprung, führen also

$$\begin{aligned}\xi &= x_1 - x_2 \\ \eta &= y_1 - y_2 \\ \zeta &= z_1 - z_2\end{aligned}$$

ein und erhalten als Differentialgleichungen für m_1

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = -4\pi k^2 \left(\frac{x_1}{r_1^3} \int_0^{r_1} \rho r^2 dr - \frac{x_2}{r_2^3} \int_0^{r_2} \rho r^2 dr \right) - \frac{k^2 (m_1 + m_2) \xi}{\Delta^3}$$

und zwei analoge für η und ζ . Wir können sagen, auf m_1 wirkt m_2 mit der anziehenden Kraft

$$L = \frac{k^2 (m_1 + m_2)}{\Delta^2}$$

und O mit der störenden Kraft

$$L' = 4\pi k^2 \sqrt{\left(\frac{1}{r_1^3} \int_0^{r_1} \rho r^2 dr \right)^2 + \left(\frac{1}{r_2^3} \int_0^{r_2} \rho r^2 dr \right)^2 - \frac{2(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)}{r_1^3 r_2^3} \int_0^{r_1} \rho r^2 dr \int_0^{r_2} \rho r^2 dr}.$$

Wir definieren jetzt die Wirkungssphäre von m_2 gemäß obigem Gedankengange durch die Gleichung

$$\frac{K}{K'} = \frac{L}{L'} \quad (3)$$

Wegen der Beziehung

$$r_1^2 = r_2^2 + \Delta^2 - 2r_2 \Delta \cos \vartheta$$

$$r_1 = r_2 (1 - 2u \cos \vartheta + u^2)^{1/2} = r_2 (1 - u \cos \vartheta + \frac{1}{2} u^2 \sin^2 \vartheta + \dots)$$

$$\cos \vartheta = \frac{x_2(x_2 - x_1) + y_2(y_2 - y_1) + z_2(z_2 - z_1)}{\Delta r_2} = \frac{1}{u} \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_2^2 u}$$

$$(1 - 2u \cos \vartheta + u^2)^{-2} = 1 + 4u \cos \vartheta + 2u^2 (6 \cos^2 \vartheta - 1) + \dots$$

$$(1 - 2u \cos \vartheta + u^2)^{-3/2} = 1 + 3u \cos \vartheta + \frac{3}{2} u^2 (5 \cos^2 \vartheta - 1) + \dots$$

$$(1 - u \cos \vartheta) (1 - 2u \cos \vartheta + u^2)^{-1/2} = 1 + 2u \cos \vartheta + \frac{3}{2} u^2 (3 \cos^2 \vartheta - 1) + \dots$$

$$I_1 = \int_0^{r_1} \rho r^2 dr$$

$$I_2 = \int_0^{r_2} \rho r^2 dr$$

$$I_1 = I_2 - \rho r_2^3 u \cos \vartheta + \frac{1}{2} r_2^3 u^2 \left[\rho (1 + \cos^2 \vartheta) + r_2 \frac{d\rho}{dr_2} \cos^2 \vartheta \right] + \dots$$

$$I_1^2 = I_2^2 \left\{ 1 - \frac{1}{I_2} r_2^3 \rho u \cos \vartheta + \frac{1}{I_2} r_2^3 u^2 \left[\rho (1 + \cos^2 \vartheta) + \left(\frac{r_2^2}{I_2} \rho^2 + \frac{d\rho}{dr_2} \right) r_2 \cos^2 \vartheta \right] + \dots \right\}$$

$$I_1 I_2 = I_2^2 \left\{ 1 - \frac{1}{I_2} r_2^3 \rho u \cos \vartheta + \frac{1}{2 I_2} r_2^3 u^2 \left[\rho (1 + \cos^2 \vartheta) + r_2 \frac{d\rho}{dr_2} \cos^2 \vartheta \right] + \dots \right\}$$

$$K = \frac{4\pi k^2 I_1}{r_2^2} (1 - 2u \cos \vartheta + u^2)^{-1}$$

liefert diese Definitionsgleichung Δ als Funktion von r_2 und ϑ , welche Funktion nichts anderes als den Radius σ der Wirkungssphäre bedeutet. Im allgemeinen (außer den zentralen Partien) wird Δ klein gegenüber r_2 sein, weswegen wir eine Potenzreihenentwicklung nach $u = \frac{\Delta}{r_2}$ vornehmen wollen. Wir erhalten danach

$$K' = \frac{k^2 m_2}{r_2^2 u^2}$$

$$L = \frac{k^2 (m_1 + m_2)}{r_2^2 u^2}$$

$$L' = \frac{4\pi k^2}{r_2^2} \sqrt{I_1^2 (1 - 2u \cos \vartheta + u^2)^{-2} + I_2^2 - 2I_1 I_2 (1 - u \cos \vartheta) (1 - 2u \cos \vartheta + u^2)^{-1/2}}$$

$$= \frac{4\pi k^2 I_2 u}{r_2^2} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta + \frac{1}{I_2^2} r_2^2 \varrho \cos^2 \vartheta (r_2^2 \varrho - 4I_2) + \dots}$$

In dem Ausdruck für L' ist ϱ als Funktion von r_2 einzusetzen; weil aber L' bezüglich der kleinen Größe u von der ersten Ordnung ist, wählen wir zur Vereinfachung

$$\varrho = \bar{\varrho} = \frac{3I_2}{r_2^2},$$

wodurch sich der Wurzel Ausdruck auf 1 reduziert. Da ferner nach unseren Annahmen $m_1 = m_2 = m$, somit $\bar{\varrho} = Nm$, so lautet schließlich Gleichung (3) bis auf Glieder fünfter Ordnung bezüglich u

$$\frac{8}{9} \pi^2 N^2 r_2^2 u^5 = 1,$$

oder, wenn wir den Index weglassen,

$$\sigma = ur = \sqrt[5]{\frac{9}{8\pi^2 N^2 r}}. \quad (4)$$

In Einheiten der mittleren Sterndistanz

$$D = \frac{1}{\sqrt[3]{N}}$$

folgt hiernach

$$\beta = \frac{\sigma}{D} = 10 \sqrt[5]{20} \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} r^{-1/5} = 11,30 r^{-1/5}.$$

Aus dieser Formel berechnen wir folgende Tabelle:

$\frac{r}{10^8} =$	1	2	3	4	5
$\beta =$	0,2839	0,2471	0,2279	0,2151	0,2057
$\frac{r}{10^8} =$	6	7	8	9	10
$\beta =$	0,1984	0,1924	0,1873	0,1829	0,1791

Mit Ausnahme der Zentral- und Randgebiete des Haufens können wir infolgedessen im Mittel $\beta = 1/5$ annehmen und erhalten damit

$$\Gamma = 6,376 \cdot 10^{-7} \text{ pro Jahr,}$$

$$\lambda = 9,06 \cdot 10^6 \text{ Erdbahnradien,}$$

$$= 9,74 \cdot 10^8 \text{ Sonnendurchmesser,}$$

$$\tau = 1,57 \cdot 10^6 \text{ Jahre.}$$

Setzen wir voraus, der Stern bewege sich mit der Geschwindigkeit c auf dem entsprechenden Kreise vom Radius r infolge der Gesamtanziehung des Systems, so resultiert aus (1), (2) und (4) für die Anzahl der Vorübergänge während eines Umlaufs

$$\Gamma_u = \sqrt{2\pi N} \sigma^2 c U = \pi \sqrt[10]{8} \sqrt[5]{81\pi N r^3}$$

$$= \frac{3\pi}{\sqrt[10]{2}} \cdot 10^{-18/5} r^{3/5},$$

daher

$$\Gamma_u = 139 \text{ für } r = 10^8 \text{ und } \Gamma_u = 555$$

$$\text{für } r = 10^9, \text{ hiermit } \Gamma_u = 347$$

im Mittel.

Der Stern legt also ungefähr $1-3^0$ zurück, ohne in die Wirkungssphäre eines andern zu gelangen. Die Krümmung eines so kurzen Kreisbogenstückes kann aber vernachlässigt werden. Da ferner die Gesamtwirkung des Haufens wegen seiner symmetrischen Gestalt in der Zentralregion verschwindet, so kann man von ihr auch im Fixsternsystem (mit Ausnahme der Randpartien) ebenso wie bei der Gaskugel absehen.

§ 5. Zusammenfassend kann man also sagen: Gaskugel und Sternsystem sind Ansammlungen sehr vieler Einzelteilchen, die einander nach dem Newtonschen Gesetz anziehen und sich infolgedessen nicht unbegrenzt ausdehnen, sondern geschlossene Systeme bilden. Trotz der bei beiden so verschiedenen Dichte bewegen sich die Teilchen mit solchen Geschwindigkeiten, daß die zwischen zwei Vorübergängen liegende freie Bahn im allgemeinen als geradlinig angesehen werden kann. Allerdings sind die Dimensionen äußerst verschieden. Während im Gas die winzigen Moleküle in unmeßbar kurzer Zeit ihre minimale freie Wegstrecke zurücklegen, brauchen die Sonnen des Sternensalls Jahrmillionen, um von der Nachbarschaft eines Sternes in die un-

geheuer weit entfernte eines andern zu gelangen, durchwandern aber während dieser Zeit infolge ihrer Geschwindigkeit und der wegen der riesigen gegenseitigen Entfernung äußerst schwachen Gesamteinwirkung der übrigen Sterne im allgemeinen ebenfalls fast geradlinige Wege. Als störende Nachbarschaft oder Wirkungssphäre eines Sternes kann eine mit dem fünften Teil der mittleren Sterndistanz als Radius um seinen Mittelpunkt geschlagene Kugel gelten. Die überaus große freie Wegzeit macht es begreiflich, daß Charlier für die sog. Relaxationszeit, d. i. der Größenordnung nach diejenige Zeit, welche das System braucht, um infolge der Vorübergänge als wahrscheinlichsten stationären Zustand die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung anzunehmen, die enorme Zahl von 10^{16} Jahren erhält, während sie nach Jeans für die Gase nur 10^{-10} sec beträgt.

R. Emden¹⁾ stellt in seinem Buche über Gaskugeln folgende drei Bedingungen für die Anwendbarkeit der statistischen Methoden der kinetischen Gastheorie auf:

1. Die Masse eines Teilchens muß klein sein gegenüber der des ganzen Systems;
2. die mittlere freie Weglänge muß klein sein gegenüber den Abmessungen des Systems;
3. die mittlere freie Wegzeit muß klein sein gegenüber den in Betracht kommenden Zeiten.

Sehen wir als mittlere freie Weglänge und -zeit im Sinne der zweiten Annahme Maxwells den zwischen zwei Vorübergängen zurückgelegten Weg, bzw. die entsprechende Zeit an, so dürften nach dem Vorausgehenden diese Bedingungen als erfüllt gelten, die Anwendung der statistischen Methode der Gastheorie auf das Fixsternsystem ist erlaubt, wenn wir nur genügend lange Zeiträume zulassen. Allerdings haben wir verschiedene, nicht exakt zutreffende Voraussetzungen gemacht, wie z. B. Massen- und Volumsgleichheit aller Sterne mit der Sonne, ihre Unveränderlichkeit bei effektiven Zusammenstößen, überhaupt Vernachlässigung der Wirkung dieser Stöße, kugelförmige Gestalt des Systems, um das Problem rechnerisch leichter behandeln zu können; da es sich aber nur um die Größenordnung der betreffenden Zahlen handelte, um die Anwendbarkeit der statistischen Methode festzustellen, dürften diese Annahmen nicht unerlaubt sein. Damit ist jedoch keineswegs behauptet, daß sich das Fixsternsystem ganz analog wie ein Gas verhalte. Dies kann erst durch ein bedeutend größeres Beobachtungs-

material entschieden werden, als gegenwärtig vorliegt. So z. B. arbeiten die wirklichen Zusammenstöße, die eine Konzentration und Differenzierung zur Folge haben, der ausgleichenden Wirkung der Vorübergänge geradezu entgegen.

Es möge noch erwähnt werden, daß Bedingung 2 eine Folge von 1 ist, wie sich leicht aus unseren Betrachtungen schließen läßt. Bedingung 1 lautet ja exakt formuliert so: Es muß möglich sein, ein gegen die Abmessungen des ganzen Systems kleines Volumenelement anzugeben, das selbst noch genügend viele Individuen enthält. Wählen wir nun die Seite dieses Elementarwürfels zur Längeneinheit und setzen beispielsweise voraus, es seien drinnen 100 Sterne vorhanden, so wäre für den Halbmesser des ganzen Haufens mindestens ungefähr 100 zu nehmen, sonach würde r , da die zentralen Teile ausgenommen sind, etwa zwischen 10 und 100 variieren. Mit den ungünstigsten Werten $N=100$, $r=10$ erhalten wir aber für die mittlere freie Weglänge aus Gleichung (5)

$$\lambda = \frac{360}{\Gamma_n} = \frac{6}{\pi} \sqrt[10]{\frac{1152}{\pi^2}} = 3^0,$$

d. h. Bedingung 2 ist erfüllt.

Wien, im März 1918.

(Eingegangen 20. März 1918.)

Galvanischer Unterbrecher.

Von Witold Kasperowicz.

Außer den schon allgemein bekannten elektrolitischen Unterbrechern sind auch Unterbrecher mit galvanisch leitender Flüssigkeit nach ähnlichem Prinzip möglich. Im folgenden wird ein galvanischer Unterbrecher beschrieben, der eine gewisse Analogie mit dem Simon-Unterbrecher aufweist, es wird jedoch anstatt einer elektrolitisch leitenden Flüssigkeit eine galvanisch leitende benutzt. Schon bei den ersten Versuchen des Verfassers zeigte es sich, daß die Erscheinungen beim Unterbrechen und die Anwendbarkeit eines solchen galvanischen Unterbrechers von denen bei den elektrolitischen Unterbrechern verschieden sind. Als galvanisch leitendes flüssiges Medium wurde Quecksilber benutzt. Eine einfache Anordnung eines solchen

¹⁾ R. Emden, Gaskugeln. Leipzig u. Berlin 1907, S. 239.

Unterbrechers besteht aus zwei ineinander geschobenen, mit Quecksilber gefüllten Gefäßen aus einem isolierenden Material (Porzellan, Quarz, Glas oder anderem), welche mit entsprechenden, in das Quecksilber eintauchenden Stromzuführungen versehen sind. Eine kleine Öffnung in dem inneren Gefäß erlaubt den Kontakt zwischen den beiden Quecksilbermassen in Form eines kurzen und dünnen Quecksilberfadens herzustellen. Eine andere einfache Ausführung besteht aus einem kleinen, mit Quecksilber gefüllten Gefäß, das durch eine isolierende Zwischenwand in zwei Teile getrennt ist, wobei eine Öffnung in der Zwischenwand den Kurzschluß herzustellen ermöglicht.

Eine besonders für Demonstrationszwecke geeignete Vorrichtung besteht aus einem U-förmigen, mit Quecksilber gefüllten Glas- oder Quarzrohr, das an der Biegungsstelle stark verjüngt ist. Wenn man einen solchen Unterbrecher in den Stromkreis einschaltet (Gleichstrom, auch Wechselstrom), so wird der Unterbrecher sozusagen überlastet, der Quecksilberfaden verdampft bei entsprechender Stromstärke mit Bildung eines kleinen Lichtbogens, der Strom wird stark heruntergedrückt bzw. unterbrochen. Der Quecksilberdampf kondensiert sich sehr schnell, das weggetriebene Quecksilber strömt zurück und es wird wieder ein Kurzschluß gebildet, der Unterbrechungsvorgang erneuert sich. Die zum Unterbrechen nötige Stromstärke ist von der Dicke und Länge des Quecksilberfadens und eventuell von seiner Form abhängig (wenn dieser nicht zylindrisch ist, sondern etwa konisch zusammenlaufend) und endlich von der Wärmeabgabe, welche wegen der guten Leitfähigkeit des Quecksilbers groß ist. Auch ist der Widerstand eines solchen Unterbrechers sehr klein, er eignet sich besonders zum Unterbrechen von Starkstrom. Ein Quecksilberfaden von 1 mm Querschnitt und mehreren Millimetern Länge unterbricht bei entsprechender Wärmeableitung einen Strom von etwa 200 Amp. Man kann selbstverständlich durch Änderung der Dicke und Länge des Quecksilberfadens oder auch der Spannung die Unterbrechungszahl verändern, oder auch den Unterbrecher für andere Stromstärken abstimmen, was auch durch Regelung der Kühlung erzielt werden kann. Endlich wird der Unterbrechungsvorgang beeinflusst, indem man den Unterbrecher unter Druck oder im Vakuum funktionieren läßt.

Man kann die galvanischen Unterbrecher auch nach dem Wehneltischen Prinzip konstruieren, indem man die Spitze eines dickeren Metallstabes in Quecksilber eingetaucht in Serie mit dem zu unterbrechenden Stromkreis einschaltet.

Zusatz: Es hat mir Prof. Simon mitgeteilt, daß schon Ruhmer auf die Möglichkeit eines galvanischen Unterbrechers hingewiesen hat.

(Eingegangen 16. März 1918.)

Aus der Ionenlehre der Gase.

Einige Demonstrationsversuche.

Von H. Greinacher.

Mit Tafel IV.

Potentialverlauf in einem stromdurchflossenen Gase.

Bei der Elektrizitätsleitung in Gasen ist es wichtig, den Potentialverlauf zwischen den Elektroden zu kennen. Während das Potentialgefälle in festen und flüssigen Leitern (bei gleichförmigem Leitungsquerschnitt) überall gleich ist, zeigt sich dieses im stromdurchflossenen Gase in charakteristischer Weise verändert. Man kommt gewöhnlich in den Fall, dies an einem durch Röntgenstrahlen ionisierten Plattenkondensator zu zeigen. Man stellt etwa den Potentialverlauf zwischen den Elektroden in der Weise fest, daß man eine isolierte Sonde anbringt und das Potential, das diese an verschiedenen Stellen annimmt, mittels eines geeichten Elektrometers mißt.

Wie im folgenden gezeigt wird, läßt sich der Potentialverlauf unmittelbar verfolgen, wenn man ihn sozusagen direkt mit dem in einem Elektrolyten vergleicht. Die Anordnung, die sich sowohl für Demonstration als auch etwa für praktische radiologische Übungen geeignet er-

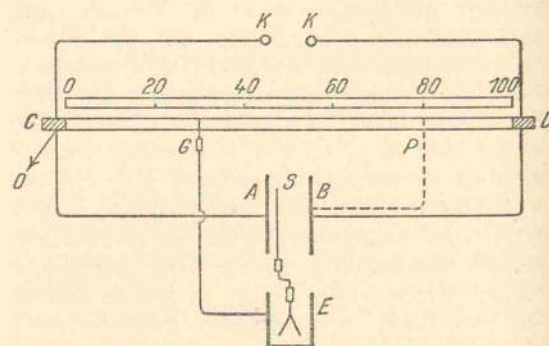


Fig. 1.

wiesen hat, ist in Fig. 1 skizziert. *KK* seien die Pole einer Hochspannungsbatterie, *AB* die

Platten, zwischen denen der Ionisierungsstrom fließt. Hierzu parallel ist als Elektrolyt ein Holzstab CD geschaltet. Die Sonde S , die zwischen A und B verschoben wird, ist mit einem gewöhnlichen Elektroskop verbunden, dessen Gehäuse andererseits zu einem auf dem Holzstab verschiebbaren Gleitkontakt führt. Das Potential an irgendeiner Stelle zwischen A und B wird nach dieser Brückenmethode in einfacher Weise dadurch gefunden, daß man G solange verschiebt, bis das Elektroskop keinen Ausschlag mehr zeigt. Der Abstand GC gibt dann ein Maß für die Potentialdifferenz zwischen S und A .

Zur praktischen Ausführung der Methode sei folgendes angeführt. Die erforderliche Hochspannung wurde mittels eines Gleichrichters, wie er seinerzeit beschrieben wurde¹⁾, erzeugt. CD war eine 2,5 cm dicke Buchenholzstange, die an den Enden mit zwei Messingzwingen versehen war. Der Abstand zwischen den Elektroden betrug 1 m. Der Gleitkontakt bestand aus einem durch einen Metallknopf beschwerten Drahtbaken, der mittels eines isolierten Griffes seitlich verschoben werden konnte. Eine dünne Stricknadel wurde als Sonde verwendet. Auf die Platten A und B ($\Phi = 15$ cm) waren in der Mitte kreisförmige Bleche ($\Phi = 4$ cm), die durch Bestreichen mit schwacher Radiumlösung aktiv gemacht waren, geklebt. Die Aktivität der Bleche war derart, daß eines ein Elektroskop in etwas weniger als $\frac{1}{2}$ Minute zu entladen imstande war.

Das Elektroskop war ein Elster- und Geitel-sches und direkt als Nullinstrument in der Brücke durchaus nicht geeignet. Um jedoch eine genügende Empfindlichkeit für Spannungsänderungen zu erhalten, wurde das Elektroskop in aufgeladenem Zustande verwendet. Dies läßt sich durch folgende kleine Modifikation des Meßverfahrens erreichen. Man stellt zu Anfang, wenn der Abstand $SA = 0$, d. h. S metallisch mit A verbunden ist, den Gleitkontakt nicht auf den Teilstrich 0, sondern etwa auf 20. Dann gibt das Elektroskop einen Ausschlag von $\frac{1}{5}$ der angelegten Hochspannung. Diesen Ausschlag hält man nun während der ganzen Messungsreihe konstant. Man geht sukzessive mit S nach rechts und fährt mit dem Gleitkontakt nach, bis jeweils der konstante Elektroskopausschlag erreicht ist. Die Verschiebung von G (gegenüber dem Teilstrich 20) gibt dann wieder die Potentialdifferenz SA . Natürlich kommt bei diesem Verfahren G schon bei D

an, bevor S die Platte B erreicht, so daß man nicht ohne weiteres bis B messen kann. Um den ganzen Raum zwischen A und B ausmessen zu können, läßt sich folgendermaßen vorgehen: Es sei G z. B. bis 95 gekommen. Bis zu diesem Punkt hat G stets ein um ΔV höheres Potential als S gehabt. Man verschiebt nun G nach links, bis sein Potential um ΔV kleiner ist als das von S . Das Elektroskop zeigt dann denselben Ausschlag wie vorher. Die betreffende Stellung würde (theoretisch) bei $95 - 2 \times 20 = 55$ liegen. Nun mißt man wie früher weiter. Jetzt eilt S dem Kontakt G um ebensoviel voraus, als es früher zurücklag, läßt sich also bis B verschieben.

So leicht dieses Verfahren mittels Umstellen durchzuführen ist, so hat es doch zwei Nachteile. Zunächst wird ein Teil des Holzstabs bei einer Messungsreihe zweimal zum Messen benützt. Hat nun das Holz dort zufällig seine größten Inhomogenitäten, so kommen diese im Resultat doppelt zur Geltung. Sodann leidet doch die Durchsichtigkeit des Versuchs etwas. Man kann, um dies zu vermeiden, den Versuch auch in folgender zweiter Form ausführen.

Man bringt z. B. am Teilstrich 80 eine Abzweigung an (etwa eine Drahtschlinge) und verbindet B statt mit D mit dem Punkt P . Da die Leitfähigkeit des Holzes relativ groß gegenüber der Leitfähigkeit des ionisierten Gases ist, so wird auch bei dieser Abzweigung der Strom in CP praktisch derselbe wie in PD sein. Die Gleichförmigkeit des Potentialgefälles zwischen C und D wird also nicht gestört. Man beginnt nun die Messung ($SA = 0$) damit, daß man G z. B. auf 16 stellt. Mit der Sonde kann man jetzt ohne weiteres bis an B herangehen, weil sich G über den Punkt P hinaus verschieben läßt.

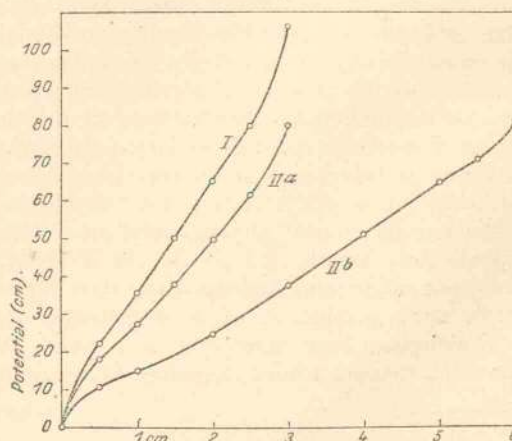


Fig. 2.

¹⁾ Diese Gleichrichter (siehe diese Zeitschr. 17, 343, 1916) werden von der Firma Huber, Müller & Co., Zürich, bis zu 10000 Volt Gleichspannung ausgeführt.

Einige Messungen, die nach den beiden Verfahren erhalten wurden, sind in Fig. 2 wiedergegeben. I ist durch Umstellen gewonnen. Die Abweichung vom theoretischen Endwert 100 beträgt hier, wohl aus dem oben erwähnten Grunde, mehrere Prozente. Die Kurven II sind nach dem zweiten Verfahren gewonnen. Die Spannung an KK betrug bei I: 1000 Volt, bei II: 1300 Volt.

Gasdruckänderung in stromleitendem Gase.

a) Im Spitzenstrom. Druckänderungen in einem Gase, das von Ionen durchwandert wird, sind von Chattock¹⁾ für Ionen bei der Spitzenentladung und von Zeleny²⁾ bei der Ionisierung durch Röntgenstrahlen nachgewiesen worden. Die durch das elektrische Feld getriebenen Ionen erteilen durch ihren Anprall den getroffenen Gasmolekülen eine Beschleunigung. Diese wird entweder statisch durch eine Erhöhung des Gasdrucks kompensiert, oder sie äußert sich dynamisch durch Strömungen im Gas (elektrischer Wind). Bei der Spitzenentladung ist infolge des relativ starken Ionenstromes der Effekt so stark, daß man die Gasdruckerhöhung unschwer manometrisch beobachten kann. Chattock hat die Druckmessung zu einer einfachen Methode, die Ionenbeweglichkeiten zu bestimmen (l. c.), verwendet.

Man kann nun den Effekt des Ionendruckes in folgender, in Fig. 3 skizzierten Anordnung demonstrieren. Eine Nähnadelspitze S befindet sich etwa 1 cm über dem einen Schenkel eines mit einer Wasser-Alkoholmischung gefüllten Manometers. Die Flüssigkeitsoberfläche in dem ca. 7 mm weiten Rohr A liegt etwa 5 mm unter dem Rande. Der zweite Schenkel ist in der gezeichneten Weise ausgezogen und umgebogen. Die Kapillare ist außerdem etwas nach rückwärts gedreht, so daß die Manometeröffnung gegenüber der Spitze frei liegt. Man kann die Kapillare bzw. die Höhe der Wasserfüllung in A leicht so wählen, daß der Meniskus in B über dem in A erscheint, so daß beide mit der Spitze zusammen projiziert werden können. Die Wasseroberfläche im weiten Schenkel dient gleichzeitig als zweite, der Spitze gegenüberstehende Elektrodenfläche. Durch den Draht bei E ist die Flüssigkeit über ein Galvanoskop, das Mikroampere noch anzeigt, mit Erde verbunden. An die Nadelspitze legt man nun den einen Pol

deren anderer Pol zur Erde abgeleitet ist. Sobald diese in Tätigkeit gesetzt wird, bewegt sich der Flüssigkeitsfaden 5 bis 10 mm nach links. Deckt man die Öffnung von A mit einem Glas-

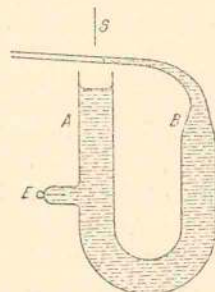


Fig. 3.

plättchen ab, so daß der Spitzenstrom nicht mehr zu A fließt, so hört damit auch die Druckerhöhung in A auf, der Flüssigkeitsfaden geht zurück. Der Versuch geht gleich gut mit positiver und negativer Spitze. Jedoch kann man leicht zeigen, daß im ersten Fall, wo der Strom also von positiven Ionen getragen wird, der Druckunterschied etwas größer ausfällt.

Ja, man kann direkt das Verhältnis der Ionenbeweglichkeiten u_2/u_1 bestimmen. Denn es ist nach Chattock (l. c.) $u = \frac{kJ}{\Delta p}$, wo J den

auf die Flüssigkeitsfläche treffenden Ionenstrom, Δp den hierdurch verursachten Druckunterschied bedeutet. Macht man bei positiver und negativer Spitze J gleich groß (durch passendes Drehen der Elektrisiermaschine), so ist direkt $u_2/u_1 = \Delta p_1/\Delta p_2$. Die Δp sind einfach durch die Verschiebungen des Flüssigkeitsfadens zu messen. Es wurden so eine Reihe von Messungen gemacht, die indes unter sich nicht allzugut übereinstimmen, jedoch für Demonstrationzwecke genügen können. Die Stromstärke betrug 8,4 Mikroampere. Folgende Werte seien beispielsweise angeführt:

Tabelle I.

Spitzenabstand cm	Δp_2 mm	Δp_1 mm	u_2/u_1
1	9,2	11,0	1,2
1	7,5	10,0	1,3
2	4,1	5,1	1,25

Es sei bemerkt, daß der Versuch auch sehr bequem mit dem oben erwähnten Gleichrichter

1) J. Zeleny, Proc. Cambr. Phil. Soc. 10, 14, 1898.

2) A. P. Chattock, Phil. Mag. (5) 48, 401, 1899.

auszuführen ist (wenigstens bei einem Spitzenabstand 1 cm, wo die erforderliche Spannung weniger als 10000 Volt beträgt). Indessen möge hier auf mögliche Verbesserungen der Meßgenauigkeit nicht eingegangen werden, da für Demonstrationszwecke doch hauptsächlich Einfachheit und Übersichtlichkeit der Anordnung maßgebend sind.

b) Bei unselbständiger Elektrizitätsleitung. Während man beim Spitzenstrom nur die Wirkung der einen Ionenart vor sich hat, kommen bei der Ionisierung durch Röntgenstrahlen beide Ionenarten zur Geltung. Die beiden Wirkungen sind einander entgegengesetzt, so daß nur, wenn die eine überwiegt, eine Druckänderung im Gase auftreten kann. Zudem sind die Ströme meist schwächer als die aus Spitzen, so daß die ionomotorische Kraft unter Verwendung von Röntgenstrahlen viel geringer ist. Immerhin gelang es Zeleny (l. c.), Luftströmungen in einem Plattenkondensator nachzuweisen, der zur Vermeidung von Störungen (Zirkulationen) in ein möglichst luftdicht verschlossenes Gehäuse hineingebracht war. Senkrecht zum Ionisierungsstrom wurden in der Nähe der Platten zwei vertikal herabfließende Ströme aus Salmiaknebel erzeugt. Die entstehenden Luftströme beobachtete man dann durch die gegen die Platten hin abgelenkten Salmiakstrahlen. Der Versuch ist in seiner überzeugenden Einfachheit so hübsch, daß er ohne weiteres als Demonstrationsversuch geeignet erscheinen muß. Indessen wird man bei der Ausführung gewahr, daß der Versuch etwas prekär und kaum für ein größeres Auditorium geeignet ist.

Ich möchte daher eine Anordnung angeben bei welcher der Effekt derart verstärkt ist, daß er ohne Schwierigkeit und mit kleinstem Aufwand gezeigt werden kann. Indessen ist es vielleicht nicht ohne Interesse, die Erscheinung, die man im röntgendurchstrahlten Gase erhält, erst theoretisch etwas zu überblicken. Wir führen die Berechnung für den besonders übersichtlichen Fall aus, daß wir gleichmäßige Ionisierung zwischen zwei Platten haben. Das elek-

trische Feld wirke nur in der X -Richtung (Fig. 4). Eine Randwirkung der Platten sei vermieden bzw. werde vernachlässigt. Luftströmungen aus dem Plattenraum heraus seien durch Anbringen isolierender Seitenwände ausgeschaltet. In diesem Fall werden überhaupt keine Luftströmungen eintreten. Die ionomotorische Kraft wird sich nur statisch durch Änderungen des Gasdrucks längs der X -Achse äußern.

Betrachten wir eine dünne Luftschicht dx an der Stelle B . Die Dichte der freien Elektrizität infolge des Ionenstromes sei q . Die Kraft, die auf diese Raumladung in dieser Luftschicht vom Querschnitt f wirkt, ist dann

$$dK = f q X dx. \quad (1a)$$

Seien n_1 und n_2 die Dichte der positiven bzw. negativen Ionen, so ist also

$$dK = f e (n_1 - n_2) X dx. \quad (1b)$$

Überwiegt n_1 , so ist die Kraft nach rechts gerichtet und umgekehrt. Dieser Kraft wird durch eine Änderung des Gasdrucks längs dx von gleicher Größe das Gleichgewicht gehalten. Wir knüpfen an die Berechnungen an, wie sie bisher für eine Ionenart vorliegen. Danach ist der Strom positiver Ionen, der durch dx fließt,

$$i_1 = f n_1 e u_1 X. \quad (2a)$$

Nun ist entsprechend der für die negativen Ionen

$$i_2 = f n_2 e u_2 X. \quad (2b)$$

Somit wird (1b)

$$dK = \left(\frac{i_1}{u_1} - \frac{i_2}{u_2} \right) dx. \quad (3)$$

Will man den Gasdruck k/f als Funktion von x berechnen, so muß noch i_1 und i_2 an jeder Stelle bekannt sein. Wir finden einen einfachen Ausdruck hierfür, wenn wir die Wiedervereinigung der Ionen ausschließen (große Potentialdifferenzen). In diesem Fall gehen durch die Luftschicht B pro Sekunde alle links davon gebildeten positiven Ionen und alle rechts davon gebildeten negativen Ionen hindurch. Man hat demnach

$$i_1 = f N e x \quad (4)$$

und

$$i_2 = f N e (a - x).$$

Aus (3) wird

$$dK = f N e \left(\frac{x}{u_1} - \frac{a - x}{u_2} \right) dx \quad (5)$$

und

$$K = f N e \left[\frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} \right) - \frac{x a}{u_2} \right] + c. \quad (6)$$

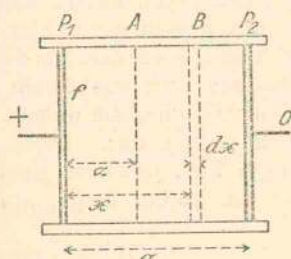


Fig. 4.

Aus (6) ist zu ersehen, daß der Gasdruck K/f

für $\frac{x}{u_1} = \frac{a-x}{u_2}$ ein Minimum hat. Dies ist die

bekannte Beziehung für die Lage der neutralen Zone zwischen den Platten P_1, P_2 . Für die Lage dieser Ebene A hat man

$$\xi = \frac{au_1}{u_1 + u_2}. \quad (7)$$

Sehen wir vom Gasdruck selbst ab, und setzen wir K für diese Zone gleich null, so ergibt sich aus (6) der Gasdruck K/f an den beiden Platten P_1, P_2 zu

$$K_2 = \frac{fNeu_2a^2}{2u_1(u_1 + u_2)} \quad (8a)$$

$$K_1 = \frac{fNeu_1a^2}{2u_2(u_1 + u_2)}. \quad (8b)$$

Falls $u_1 \neq u_2$, ist der Druck auf P_1 nicht gleich dem auf P_2 . Die Differenz ist

$$K_2 - K_1 = \frac{fNea^2}{2} \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right). \quad (9)$$

Sie ist also bei der geringeren Beweglichkeit der positiven Ionen positiv. Das ganze Ionisationsgefäß würde demnach eine treibende Kraft von links nach rechts erfahren.

Ist der Ionisationsraum nicht abgeschlossen, so kann die Luft seitwärts an den Platten ausweichen. Zugleich strömt immer wieder neue Luft bei A , an der Stelle niedrigsten Gasdrucks, zu. Diese Zirkulation wird um so größer sein, je größer K_1 bzw. K_2 gemacht werden. Sie wird überdies durch geeignete Modifikation der Elektroden erleichtert werden können.

Gleichungen (8) gelten dann nicht mehr quantitativ, können aber doch auch bei den abgeänderten Versuchsbedingungen noch als wegleitend angenommen werden. Hiernach sind die totale stromleitende Ionenmenge Nfa und überdies der Abstand a groß zu machen, wenn eine große Kraft K an den Elektroden entstehen soll. Zudem wird der Gasdruckunterschied K/f erhöht, indem man die Elektrodenfläche f verkleinert. Als zweckmäßig wurde befunden, eine große Platte zusammen mit einer kleinen, rechtwinklig dazu gegenübergestellten Platte zu verwenden und an letzterer die Strömungen zu beobachten.

Die Anordnung im einzelnen ist in Fig. 5 dargestellt. Über einem Bleikasten K , in dem sich die Röntgenröhre befindet, sind die beiden Platten P_1, P_2 (Weißblech) angeordnet. Diese

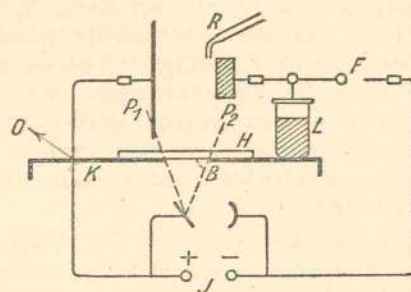


Fig. 5.

sind, etwa durch Glas, isoliert auf einem Holzbrettchen H montiert. Es waren P_1 und P_2 18 cm bzw. 6 cm hoch und 16 cm bzw. 2,5 cm breit. Der Abstand zwischen P_2 (Kante) und P_1 betrug 8 cm. P_2 war in halber Höhe von P_1 , der Plattenmitte gegenüber, angebracht. Der Raum zwischen den Platten (und etwas mehr) wurde durch eine kreisförmige Blende B ($\Phi = 6$ cm), die mit einer 0,01 mm dicken Al-Folie bedeckt war, bestrahlt. Das Brettchen H wurde solange seitlich verschoben, bis ein über die Anordnung gehaltener Leuchtschirm den Schatten von P_2 als Linie zeigte (symmetrische Bestrahlung). P_1 wurde mit dem Bleikasten, bzw. mit Erde verbunden, während an P_2 eine Spannung von 5000 bis 10000 Volt angelegt wurde. Dies wurde ohne besondere Spannungsquelle so bewerkstelligt, daß man den -Pol des Induktors bzw. die Kathode der Röntgenröhre mit einer Funkenstrecke F und einer kleinen Leidener Flasche L verband. Die eine Elektrode der Funkenstrecke wurde durch eine Drahtspitze gebildet¹⁾. Funkenabstand: einige Zentimeter, je nach der gewünschten Spannung, jedoch so groß, daß keine sichtbaren Funken übergangen. Die Spannung von P_2 wird zweckmäßig mit einem Braunschen Elektrometer oder einer Parallelfunkenstrecke kontrolliert.

Die Luftströmungen, die an der Platte P_2 auftreten, werden durch einen aus der Röhre R vertikal nach unten austretenden Gasstrahl sichtbar gemacht. Schon Zeleny verwendete gelegentlich statt der Salmiaknebel einen Kohlen-säurestrahl. Statt dessen wurde hier karburierte Luft als zweckmäßig befunden. Zu diesem Zweck leitete man einfach Luft aus einem Gasometer durch eine Waschflasche, die wenige Zentimeter hoch mit Äther gefüllt war. Diese mit Ätherdampf gesättigte Luft passierte einen Glashahn und dann die ca. 30 cm lange, am Ende bis

1) Man kann die Drahtspitze natürlich auch direkt dem Knopf der Leidener Flasche gegenüberstellen.

auf ein Lumen von 1 bis 2 mm ausgezogene Röhre R . Der Ätherdampfstrahl wurde durch Projektion (Schlierenmethode) sichtbar gemacht. Zu diesem Zweck war vor die Anordnung in einem Abstand von $1\frac{1}{4}$ m eine Bogenlampe ohne Kondensor aufgestellt. Jedoch war eine kreisförmige Blende davor angebracht, so daß auf dem Projektionsschirm nur das Schattenbild von P_2 und die nächste Umgebung sichtbar war. Der Projektionsschirm befand sich in $1\frac{1}{4}$ m Entfernung hinter der Apparatur. Die Abstände können jedoch auch größer genommen werden. Man beobachtete den aus der Spitze austretenden Dampfstrahl, der sich als heller Streifen deutlich abhob und regulierte ihn mittels des Glashahns soweit herunter, bis er mit ganz geringer Geschwindigkeit austrat. Am empfindlichsten war die Anordnung, wenn der Strahl am Erlöschen war oder doch bald nach dem Austreten diffus wurde. Das Experiment ging aber auch ganz gut, wenn der Strahl von der Spitze bis über das ganze Gesichtsfeld deutlich ausgeprägt war. Die Spitze befand sich $\frac{1}{2}$ bis 1 cm von der Platte P_2 entfernt. Sie brauchte durchaus nicht genau in die Ebene von P_2 einjustiert zu sein. Sie wurde im Gegenteil absichtlich meist etwas seitwärts angebracht, um eine Spaltung des Dampfstrahls an der Kante zu vermeiden.

Man beobachtete nun folgendes. Beim Anstellen der Röntgenstrahlen krümmte sich der Ätherstrahl gegen die Kante der Platte P_2 . Wenn schon er fast augenblicklich seine definitive Gestalt annahm, so konnte man doch erkennen, daß entsprechend der Ausbildung der stationären Luftströmung hierzu eine gewisse Zeit erforderlich war. Wurde die Leidener Flasche entladen, oder wurden die Röntgenstrahlen abgestellt, so floß der Ätherstrahl senkrecht herab. Falls der Strahl infolge seiner geringen Bewegung in der unteren Partie diffus war, wurden seine Konturen bei der Ablenkung wieder schärfer. Die Ablenkung erfolgte je nach der Stärke der Bestrahlung und dem Abstand der Röhrenspitze bis hinter die Platte P_2 , so daß ein Teil des Ätherstrahls verdeckt wurde. Eine allzu hohe Aufladung der Leidener Flasche mußte, um Spitzenentladung zu verhindern, vermieden werden. Wurde dies nicht beachtet, so erhielt man eine Abstoßung des Ätherstrahls an der unteren Ecke von P_2 , d. h. eine plötzliche Richtungsänderung des Strahles in ziemlich gerader Linie nach links unten, die dann auch nach dem Abstellen der Röntgenstrahlen noch solange anhielt, als die Leidener Flasche zu hoch geladen war.

Nicht nur die Luftströmungen an der Plattenkante, sondern auch die längs der Seitenflächen

konnten nachgewiesen werden. Brachte man z. B. das Röhrende dicht hinter P_2 , so trat an der unteren Kante ein nach rechts unten fließender Strahl hervor. Befand es sich an der rechten oberen Ecke von P_2 , so erhielt man ebenfalls einen nach rechts gekrümmten Strahl.

Zwei photographische Aufnahmen des Projektionsbildes (Fig. 6) dürften die Erscheinung am besten illustrieren. Man sieht den kräftig kontrastierenden Dampfstrahl, der je nach dem Abstand der Röhrenmündung verschieden stark abgelenkt ist. Der Induktor war mit Gleichstrom und Wehneltunterbrecher betrieben, die Röhrenhärte entsprach einer Parallelfunkstrecke (Platte —, Spitze +) von 6 bis 7 cm.

Es sei noch erwähnt, daß in der oben skizzierten Anordnung P_2 stets negativ aufgeladen war. Vorschalten eines Kommutators vor $P_1 P_2$ erlaubt beide Ionen zu untersuchen. Statt mit der genannten Einrichtung wurde auch mit dem mehrfach erwähnten Gleichrichter gearbeitet und sowohl bei positivem als negativem Ionenstrom eine gute Wirkung beobachtet. In ersterem Falle konnte gelegentlich eine etwas stärkere Wirkung (im Einklang mit unserer theoretischen Erörterung) festgestellt werden. Bei einem Versuch, bei dem P_1 nur doppelt so groß war wie P_2 und der Abstand bloß 3 cm betrug, konnte der Effekt nur hie und da, nicht immer nachgewiesen werden. Die theoretische Überlegung führte dann dazu, Dimensionen und Abstände größer zu nehmen, so daß das Experiment nun ohne weiteres gelingt.

Nicht unerwähnt möge bleiben, daß man das Experiment noch primitiver gestalten kann, wenn man den Ätherdampfstrahl durch einen Rauchstrahl ersetzt. Man bläst Zigarrenrauch durch eine ca. 30 cm lange Kapillare ($\Phi = 1$ mm), die in ähnlicher Weise wie B umgebogen und angesetzt wird. Selbst bei kräftigem Rauchstrahl erhält man eine lebhafte Krümmung desselben durch die Luftkonvektion. Man beobachtet entweder direkt den von der Bogenlampe beleuchteten Strahl oder sein Schattenbild auf dem Projektionsschirm. Wenn auch bei dieser Version der experimentelle Aufwand auf ein Äußerstes reduziert erscheint, so möge doch hervorgehoben werden, daß Rauchstrahlen ebenso wie die Salmiaknebel im ursprünglichen Zelenyschen Experiment, nicht so eindeutig beweisend sind, da man sich doch über den möglichen Einfluß so großer Partikel auf die zu demonstrierende Erscheinung Rechenschaft geben muß. Der Versuch scheint mir aber für die Ionenlehre so wichtig, daß ich ihm in der vorbeschriebenen einwandfreien Form durchaus den Vorrang geben möchte.

Thermionen-Emission.

Im Anschluß an das vorige sei es gestattet, noch einige kleinere Versuche zu beschreiben. Eines der einfachsten Experimente besteht bekanntlich darin, die Entladung eines negativ geladenen Elektroskops durch Heranbringen eines rotglühenden Körpers (etwa eines Eisennagels) zu zeigen. Besonders lehrreich ist in Ergänzung hierzu etwa der Versuch mit einer Glasstange. Bringt man das im Bunsenbrenner auf Rotglut erwärmte eine Ende in die Nähe des Elektroskops, so findet auch hier eine Entladung statt. Sie erfolgt aber nur teilweise. Da das Glas ein Isolator ist, so läßt sich das glühende Ende in dem Maße, wie es positive Ionen abgibt, selbst negativ auf. Hat diese negative Ladung einen gewissen Betrag erreicht, so werden schließlich alle emittierten Ionen wieder zum Glase zurückgezogen. Die weitere Entladung des Elektroskops hört dann auf. Falls die Ionen keine natürliche Anfangsgeschwindigkeit besitzen, haben in diesem Moment das glühende Glas und das Elektroskop (von Kontaktpotentialen abgesehen) dasselbe Potential. Besitzen die Ionen bei der Emission jedoch kinetische Energie, so wird bei Erreichung des stationären Zustandes das Potential des Elektroskops etwas höher als das des Glasstabs sein. An den Versuch schließt sich somit ungezwungen eine Betrachtung über die Selbstaufladung von Platten, die man glühenden Körpern gegenüberstellt, an.

Der Versuch selbst wurde in folgender Weise ausgeführt. Durch ein dickes, etwa 30 cm langes Kapillarrohr wurde ein Draht gesteckt. Dieser ragte aus dem einen Ende heraus, reichte jedoch an der zu erwärmenden Seite nicht ganz bis ans Ende. Durch Berühren des herausragenden Drahtendes konnte die am erwärmten Glasende befindliche Ladung abgeleitet werden. Um die Isolation des Glases zu erhöhen, ist es nach Bedarf angezeigt, den in der Hand gehaltenen Teil mit Siegellack oder dgl. zu überziehen. Das Stabende wurde nun erhitzt und ans negativ geladene Elektroskop herangehalten. Es erfolgte rasche Entladung, die jedoch bei einem bestimmten Punkte stehen blieb. Nun wurde mit der freien Hand das Drahtende berührt, wodurch die negative Ladung abgeleitet wurde. Sofort fielen die Blättchen nun ganz zusammen.

Selbstaufladung lichtelektrischer Platten.

Besonders einfach läßt sich das Vorhandensein eines Aufladepotentials beim lichtelektrischen Effekt demonstrieren. Bestrahlt man etwa eine isoliert aufgestellte Zinkplatte mit Ultraviolett, so wird sich diese infolge der Emission nega-

tiver Teilchen allmählich positiv aufladen. Da die Ionen aber zufolge der Gasreibung nicht weit kommen, bildet sich eine Stauung negativer Elektrizität dicht vor der Platte. Es kann sich infolgedessen nur eine kleine Potentialdifferenz zwischen Platte und Elektronenwolke ausbilden. Denn der stationäre Zustand, bei dem gleichviel Ionen ausgesandt und durch das Feld und die Diffusion wieder zur Platte zurückkehren, wird bald erreicht. Größere Aufladepotentiale lassen sich in einem guten Vakuum erzielen. Hierfür gilt dann die bekannte einfache Beziehung $V_e = \frac{mv^2}{2}$, während man für den gas-

erfüllten Raum $V'e + \int_0^a R dx = \frac{mv^2}{2}$ ansetzen

kann, wo R die Reibungskraft im Abstand x von der Platte bedeutet. V' muß demnach kleiner als V sein. Aber selbst das Aufladepotential im Vakuum beträgt nur einige Volt. Die Demonstration ist daher, abgesehen davon, daß ein empfindliches Instrument nötig ist, unbefriedigend, weil Aufladepotentiale von dieser Größe nicht nur infolge der Erstenergien der Elektronen sondern auch durch die Kontaktpotentiale zustandekommen können.

Weit höhere Aufladepotentiale erhält man im gaserfüllten Raum, wenn man die Ionenwolke fortbläst. Man kann dadurch die Rückkehr der emittierten Ionen zur Platte ganz bedeutend vermindern, erhält also eine höhere Aufladung der Platte. Erteilt man den Ionen auf mechanischem Wege eine Geschwindigkeit von der Platte weg, so müssen die Potentialdifferenzen der Platte gegen die Umgebung ganz bedeutend sein, wenn die Ionen gegen den Luftstrom zurückgetrieben werden sollen.

Der Versuch läßt sich in folgender Weise ausführen. Man verbindet eine frisch geschmirgelte Zinkplatte mit einem empfindlichen Blattelektroskop und bestrahlt sie mit einer Bogenlampe (20 cm Entfernung, ohne Kondensor). Eine Blende sorgt dafür, daß am besten nur ein Teil der Zinkplatte, jedenfalls nicht die Umgebung, bestrahlt wird. Gegen die Platte bläst man nun einen kräftigen Luftstrom (Blasebalg). Sofort beginnt sich das Elektroskop positiv aufzuladen und zeigt schließlich einen konstanten Ausschlag (Größenordnung 100 Volt), der auch nach Aufhören des Luftstroms praktisch nicht abnimmt. Der Luftstrom selbst hat ohne Belichtung keine Wirkung.

Unipolare Flammenleitung.

Das Hittorfsche Experiment besteht bekanntlich darin, daß man zwei in eine Flamme

gehaltene Elektroden von Salzdampf bestreichen läßt. Man beobachtet dann, daß der Strom in der Flamme nicht wesentlich beeinflusst wird, solange der Salzdampf nicht an die Kathode gelangt, daß aber in diesem Falle eine ganz beträchtliche Stromvergrößerung eintritt. Die positive Raumladung, die sich dicht an der Kathode bildet und ein starkes Polarisationsgebiet hervorbringt, ruft ein starkes Kathodengefälle hervor. Die Ionen bewegen sich also im übrigen Teil der Flamme unter einem sehr geringen Potentialgefälle. Erst durch die Beseitigung des positiven Polarisationsgebiets durch die Ionen des Salzdampfes verteilt sich das Gefälle auf die ganze Flamme, und vermehrt sich entsprechend die in der Zeiteinheit an die Elektroden gelangende Ionenmenge.

Die unipolare Leitung im Hittorfschen Experiment kann man nun auch auf folgende Weise zeigen. In eine Bunsenflamme seien zwei gleiche Elektroden gebracht, die etwa, um ein Glühendwerden zu vermeiden, aus zwei über Eisendrähte gesteckten Messinghülsen bestehen mögen. Die beiden Hülsen befinden sich in gleicher Höhe parallel nebeneinander. Der Abstand sei so groß, als es die Breite der Flamme erlaubt. An die Elektrode *A* werde nun statt Gleichstrom Wechselstrom angelegt (50 bis 100 Volt), den man etwa der Sekundärspule eines primär aus einem Wechselstromnetz gespeisten kleinen Induktoriums (Transformator) entnimmt. Die zweite Sekundärklemme des Induktoriums liege an Erde. Die Elektrode *B* sei in Verbindung mit einem Galvanometer (Empfindlichkeit: ca. 10^{-7} Amp./mm), dessen zweite Klemme ebenfalls mit Erde verbunden sei.

Bei Anlegen der Wechselspannung wird man praktisch keinen Ausschlag am Galvanometer bemerken. Nun bringt man eine Na-Salzperle in die Flamme. Sie befinde sich erst unter der Elektrode *A*. Das Galvanometer gibt einen großen Ausschlag, einen Gleichstrom in der Richtung von *B* nach *A* anzeigend. Nun bringe man den Salzdampf an *B*. Sofort kehrt sich die Stromrichtung um. Durch Hin- und Herbewegen der Salzperle kann man dann Größe und Richtung des Ausschlags beliebig ändern.

Das Experiment zeigt, ebenso wie das ursprüngliche Hittorfsche, daß der Widerstand der Flamme in der Richtung, in der die vom Salzdampf bestrichene Elektrode Kathode ist, viel kleiner ist. Es zeigt aber noch weiter, daß die Bildung und Vernichtung des kathodischen Polarisationsgebiets außerordentlich rasch vor sich geht. Denn während jedes Richtungswechsels des Wechselstroms (von 50 Perioden) muß sich die Polarisation ausbilden können, wenn

der Salzdampf die stromerhöhende Wirkung haben soll. Es dürfte insofern nicht uninteressant sein, den hier beschriebenen Gleichrichter-effekt auch bei höheren Periodenzahlen zu verfolgen.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität, März 1918.

(Eingegangen 9. März 1918.)

Magnetische Mittelwerte des Jahres 1917.

Von Ad. Schmidt.

Nach den Beobachtungen des Potsdamer Magnetischen Observatoriums des Preußischen Meteorologischen Instituts waren die Durchschnittswerte der Elemente während des Jahres 1917:

westliche Deklination . . .	7°58',4
nördliche Inklination . . .	66°29',2
Horizontalintensität . . .	0,18671 <i>I</i> .

Die Änderungen gegen das Vorjahr betrugen $-9',2$, $+2',1$, -27γ ($1\gamma = 0,1^5 I$; $I = \text{cm}^{-\frac{1}{2}} \text{g}^{\frac{1}{2}} \text{s}^{-1}$). Sie stehen in guter Übereinstimmung mit den während der letzten vorhergehenden Jahre beobachteten und können für die nächsten Jahre zur Extrapolation verwendet werden.

Für andere Orte Deutschlands entnimmt man die Werte der magnetischen Elemente am bequemsten den von K. Haußmann bearbeiteten, in Petermanns Mitteilungen 1913, 1. Halbband, veröffentlichten „Magnetischen Übersichtskarten von Deutschland für 1912“, indem man ihnen zur Umrechnung auf das laufende Jahr (1918) die Korrekturen $-10'$ bei der Deklination, $+10'$ bei der Inklination, $-0,0016 I$ bei der Horizontalintensität hinzufügt. Für die in den Veröffentlichungen des Meteorologischen Instituts (Nr. 217, 224, 276) erschienenen „Magnetischen Karten von Norddeutschland und Südwestdeutschland für 1909“ sind die entsprechenden Reduktionen $-10'25'$, $+10'$, $-0,0020 I$.

Das Jahr 1917 war ziemlich reich an magnetischen Störungen, zeigte jedoch, was ihre Zahl und noch mehr was ihre Intensität betrifft, einen Rückgang gegenüber den zwei vorhergehenden Jahren, was bei seiner ungewöhnlich starken Entwicklung von Sonnenflecken den sonstigen Erfahrungen widerspricht. (Das Jahresmittel der Wolf-Wolferschen Fleckenrelativzahl betrug 1915: 46,0; 1916: 55,4; 1917: 98,8.)

(Eingegangen 6. März 1918.)

Vorlesungsverzeichnis für das Sommersemester 1918.

Universität Breslau.

Lummer: Experimentalphysik I: Mechanik, Wärme, Akustik, 5; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Waetzmann und Ladenburg), 9, für Geübtere (mit Schaefer, Waetzmann und Ladenburg), tägl. — **Schaefer:** Mechanik der Kontinua: Elastizität und Hydrodynamik, 5, Übungen, 1½ g; Ausgewählte Kapitel der höheren Dynamik, 1; Theoretisch-physikalisches Kolloquium zur Theorie des Kreisels, 2 g. — **Buchwald:** Analyse des gesamten Spektrums, mit Vorführungen, 2. — **Riesenfeld:** Photographisches Praktikum, 2; Die Photographie und ihre Technik, 1 g. —

Biltz: Unorganische Experimentalchemie, 6; Chemische Referatenstunde für Vorgeschnitene, 14 tädig, 1½ g; Chemisches Praktikum, organische Abteilung, ganztädig, unorganische Abteilung, ganz- und halbtädig, tägl. außer Sonnabend, für Mediziner und Landwirte, 4. — **Gadamer:** Anorganische Experimentalchemie, mit besonderer Berücksichtigung der Pharmazie, 6; Prüfung der Arzneimittel, 1 g; Praktisch-chemische Übungen mit besonderer Berücksichtigung der Pharmazie, der forensischen Chemie und Nahrungsmittelchemie, tägl.; Kleines chemisches Praktikum, 6. — **Herz:** Chemie und Physik der Metalle und ihrer Verbindungen, 2; Grundlagen der Maßanalyse, 1; Anwendungen der Maßanalyse, mit besonderer Berücksichtigung des Deutschen Arzneibuches, 1; Besprechungen zur qualitativen Analyse, 1 g. —

Sturm: Analytische Geometrie der Raumes, 3. — **Kneser:** Differentialrechnung, 4; Variationsrechnung, 4; Übungen des mathematisch-physikalischen Seminars, 2 g. — **N. N.:** Theorie der algebraischen Gleichungen, 4; Differentialgleichungen, 2; Übungen des mathematisch-physikalischen Seminars, 2 g. — **Steinitz:** Projektive (synthetische) Geometrie, 5, Übungen, 1 g. — **Wilkens:** Mechanische Integration nebst Anwendung auf die Planetenbewegungen, 3, Übungen, 1 g; Astronomisches Seminar, 2 g; Übungen an den Instrumenten der Sternwarte, nach Verabredung, g. —

Technische Hochschule Brünn.

Jaumann: Allgemeine und technische Physik, 3½; Theoretische Physik, 1½; Physikalisches Praktikum für Chemiker (mit Lohr), 3, für Bauingenieure (mit Szarvassi), 3. — **Lohr:** Physik, 4. — **Szarvassi:** Physikalische Grundlagen der drahtlosen Telegraphie, 2. — **Zickler:** Elektrotechnische Messungen, 2; Elektrische Beleuchtungsanlagen, 3; Elektrotechnisches Praktikum I, 4, III, speziell für Elektrotechniker, 8, Ausarbeitung 8. — **N. N.:** Bau elektrischer Maschinen I, 3; Projektierung elektrischer Anlagen, einschließlich elektrischer Arbeitsübertragung, 2; Elektrische Bahnen, 1; Elektrotechnische Konstruktionsübungen I, 2, II, Übungen, 8. — **Siegel:** Verwertung von Prüfungsergebnissen an elektrischen Maschinen für den Dynamobau, 1. — **Srnka:** Maschinen-Telegraphen, 1; Elektrische Meldeanlagen, 1. —

Frenzel: Analytische Chemie II: Allgemeiner Teil, 2; Chemische Übungen Ib, 22, IIb: Physikalisch-chemische Übungen, 5; Grundzüge der Elektrochemie, 2; Elektrochemisches Praktikum, 3; Physikalische Chemie I, 3. — **Hönig:** Organische Chemie I, 5; Chemische Übungen III: Organisch-chemische Übungen, 20; Chemie der Nahrungs- und Genußmittel, 3. — **Ulrich:** Chemische Technologie organischer Stoffe II 2, 5; Mikrochemische Arbeitsmethoden, 1; Übungen im Laboratorium für chemische Technologie II, insbesondere der Farb- und Faserstoffe II, 25; Spezielle chemische Technologie der Faserstoffe, 1. — **Gröger:** Enzyklopädie der technischen Chemie, 1½. — **Knöpfer:** Synthese organischer Verbindungen, 2. — **Donath:** Chemische Technologie anorganischer Stoffe I, 3, II, 3;

Chemische Technologie organischer Stoffe I, 3; Übungen im Laboratorium für chemische Technologie I 2 (mit Margosches), 20. — **Margosches:** Chemische Technologie organischer Stoffe III, 1; Katalytische Fetthärtung, 1; Chemische Technologie III: Anleitung zu technisch-chemischen Untersuchungen, 2; Chemische Technologie der organischen Kolloide, 2. —

Waelisch: Mathematik Ib, 2, Korrepetitionen, 1; Darstellende Geometrie II, 5, Konstruktives Zeichnen, 6; Geometrische Grundlagen der Photogrammetrie, 1. — **Tietze:** Mathematik II 1, 3, Korrepetitionen, 1; Mathematische Näherungsmethoden, 4, Übungen, 1; Variationsrechnung, 2. — **v. Schrutka:** Elemente der höheren Mathematik, 4, Korrepetitionen, 1. — **Benze:** Wahrscheinlichkeitsrechnung II, mit Anwendungen, 3; Mathematische Statistik, 2. — **Fanta:** Versicherungsmathematik II, 2, Übungen, 1; Reformen im Rechnungswesen von Versicherungsanstalten, 1. — **Tranquillini:** Technisches Zeichnen I: Elemente des Hochbaues, 2, Übungen, 4. — **Löschner:** Technisches Zeichnen II: Plan- und Geländezeichnen, 2; Plan- und Geländezeichnen: Situationszeichnen, 4; Niedere Geodäsie, 2; Photogrammetrie und Stereophotogrammetrie mit Übungen, 1; Vermessungsübungen II, 12; Sphärische Astronomie, 2. — **N. N.:** Technisches Zeichnen: Maschinenzeichnen, 6. — **Steiner:** Elemente der niederen Geodäsie, 2, Übungen, 3. — **Lechner:** Analytische Mechanik, 2; Elemente der graphischen Dynamik, 1; Mechanische Rechenübungen, 1½. — **Leon:** Mechanisches Seminar für Vorgeschnitene, 1½. —

Universität Erlangen.

Wiedemann: Experimentalphysik II: Wärme, Akustik, Optik, 5; Physikalisches Anfängerpraktikum für Chemiker, Mediziner usw., 2; Physikalisches Halb- und Vollpraktikum, tägl. außer Sonnabend. — **Reiger:** Theoretische Physik, 4, Übungen, 1 g. — **Hauser:** Photographie, mit Übungen, 2. —

O. Fischer: Organische Experimentalchemie, 5; Praktische Übungen im Chemischen Laboratorium (mit Heinrich): a) Analytische Übungen, b) Vollpraktikum, tägl. außer Sonnabend; Praktikum für Mediziner, 4. — **Busch:** Anorganische Chemie, unter Berücksichtigung ihrer Anwendung in der Pharmazie, 3; Chemische Technologie, organische Großindustrie, mit Ausflügen, 2; Chemisches Praktikum: a) ganztädig, tägl., b) halbtädig, tägl. außer Sonnabend; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend; Übungen auf dem Gebiete der Nahrungsmittelchemie, ganz- und halbtädig, tägl. außer Sonnabend. — **Heinrich:** Analytische Chemie der Metalloide, mit besonderer Berücksichtigung der Maßanalyse (Experimentalvorlesung zur Ergänzung des analytisch-chemischen Praktikums), 2; Repetitorium der Chemie für Chemiker, Pharmazeuten und Lehramtskandidaten, besonders für Kriegsteilnehmer, 2; Einführung in die physikalische Chemie und Elektrochemie, 1. —

Noether: Analytische Geometrie, 4; Differentialgeometrie, 3. — **Hartwig:** Astronomie und Astrophysik, 2; Systematische Vorführung der Einrichtungen der Sternwarte in Bamberg, tägl. g; Astronomisches Praktikum auf der Sternwarte in Bamberg, tägl. g. — **Baldus:** Darstellende Geometrie, 4, Übungen, 2 g; Sphärische Trigonometrie, 1; Wahrscheinlichkeitsrechnung für Mathematiker, 1, Übungen, 1; Politische Arithmetik für Juristen, 1, Übungen, 1. —

Universität Innsbruck.

v. Schweidler: Experimentalphysik II, 4; Ausgewählte Teile der kosmischen Physik, 2 g; Physikalisches Praktikum für Lehramtskandidaten, 6, für Mediziner, 3; Wissenschaftliche Arbeiten für Vorgeschnitene, tägl. g. — **Tumirz:** Theorie der Elektrizität und des Magnetismus II, 5; Übungen im mathematisch-physikalischen Seminar, 2 g. — **v. Lerch:** Ausgewählte Kapitel der Physik, 3. —

Hammerl: Elektrotechnik II: Über ein- und mehrphasige Wechselstrom-Maschinen und Motoren, 2 g. — **March:** Kinetische Gastheorie, 2. —

Brunner: Allgemeine Chemie II: Organische Chemie, 5; Praktische Übungen im chemischen Laboratorium für Chemiker und Pharmazeuten, sowie für Lehramtskandidaten, tägl. außer Sonnabend, für Mediziner, 6. — **Hopfgartner:** Pharmazeutische Chemie, 5. — **Zehenter:** Über Teerfarbstoffe, 2 g. —

Gmeiner: Differential- und Integralrechnung (Fortsetzung), 5; Übungen im mathematischen Seminar, 2 g. — **Zindler:** Zahlentheorie und Algebra, 5; Mathematisches Seminar für Anfänger, 1 g, für Vorgebildete, 1 g. — **Menger:** Achsonometrie und Linearperspektive (Fortsetzung), 2 g. —

Universität Jena.

Wien: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärmelehre, 4; Physikalisches Praktikum: a) für Mathematiker und Physiker, 6, b) für Chemiker und Pharmazeuten, 4, c) für Mediziner, 4; Physikalisches Kolloquium; Leitung physikalischer Spezialuntersuchungen (mit Auerbach und Straubel). — **Auerbach:** Theoretische Optik, 4; Der physikalische Schulunterricht, 1; Die Entwicklung der Physik seit 100 Jahren, zugleich als Übersicht der Tatsachen und Gesetze, 2; Das naturwissenschaftliche Weltbild, 1; Physikalisches Praktikum (mit Pauli): a) für Mathematiker und Physiker, 6, b) für Chemiker, Pharmazeuten und Mediziner, 3; Physikalische Spezialarbeiten (mit Pauli), tägl. — **Straubel:** Abbildungstheorie, 1. — **Ambrohn:** Benutzung des Polarisations-Mikroskops bei histologischen Untersuchungen, 1; Übungen in der Handhabung des Mikroskops und seiner Nebenapparate, 2. — **Pauli:** Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 4, eventl. III: Mechanik, Akustik, Wärmelehre, für Fortgeschrittene, 2. —

Knorr: Allgemeine Experimentalchemie I: Anorganische Chemie, 5; Analytisch-chemisches Praktikum (mit Wolff): a) Vollpraktikum, 30, b) Halbpaktikum, 15, c) Mediziner-Vollpraktikum, 6, d) Mediziner-Halbpaktikum, 3; Chemisches Praktikum im organischen Laboratorium und Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten (mit Schneider), 40. — **Wolff:** Analytische Chemie II: Maßanalyse, 1½; Elektrolyse und elektrolytisches Praktikum, 2. — **Immendorff:** Grundzüge der anorganischen und organischen Chemie (Experimentalchemie), 5; Kleines chemisches Praktikum für Landwirte, 7; Großes chemisches Praktikum für Landwirte, tägl.; Agrikulturchemisches Seminar für Fortgeschrittene, 14 tägig, 2 g. — **Vongerichten:** Technologie der Teerfarben und verwandter Industriezweige, mit Ausflügen, 2; Technisch-chemisches Praktikum, ganz- und halbtägig. — **Matthes:** Pharmazeutische Chemie II: Organische Chemie, 3; Untersuchung und Darstellung chemisch-pharmazeutischer Präparate, Ausmittelung der Gifte, Halbpaktikum, 15; Praktische und theoretische Übungen aus dem Gebiete der Nahrungsmittelchemie, Ganzpraktikum, tägl. außer Sonnabend; Theoretische und praktische Übungen in der Sterilisierung der Arzneimittel und Verbandstoffe, Urinuntersuchungen, 3. — **Schneider:** Das periodische System der Elemente, 1. — **Kaufmann:** Chemisches Repetitorium, 3. — **Hirsch:** Chemie und physikalische Chemie der Eiweißkörper, für Chemiker und Mediziner, 2; Einführung in die Kolloidchemie, für Chemiker und Mediziner, 1. —

Hausner: Analytische Geometrie der Ebene, mit Übungen, 5; Theorie der krummen Flächen, 5; Seminar, 1; Differential- und Integralrechnung I, mit Übungen, 5; Proseminar: Über Determinanten, 2. — **Koebe:** Funktionentheorie, 4, Seminar, 1 g. — **Frege:** Einleitung in die analytische Mechanik, 4; Begriffsschrift, 1 g. — **Knopf:** Zeit- und Ortsbestimmung mit praktischen Übungen auf der Sternwarte, 4; Geodäsie mit praktischen Übungen: Geländeaufnahme, Nivellieren usw., 4. — **Winkelmann:** Numerisches Rechnen, mit Übungen, 4; Vektoranalysis, mit Übungen, 4. —

Technische Hochschule Karlsruhe.

Lehmann: Physik, 4, Ergänzungen, 2; Physikalisches Laboratorium (mit Schachenmeier), 6; Seminar für Experimentalphysik, 2 g; Anleitung zu selbständigen Arbeiten im physikalischen Laboratorium, nach Vereinbarung. — **N. N.:** Mathematische Physik, 3; Repetitorium der Physik, 2. — **Schachenmeier:** Optik mit besonderer Berücksichtigung der Elektronentheorie, 2. — **Richter:** Elektromaschinenbau II: Induktionsmotoren, Wechselstrom-Kommutatormotoren, 5; Übungen im Konstruieren elektrischer Maschinen und Apparate, 4; Elektrotechnisches Laboratorium II, Übungen, 6, für Vorgeschriftene, einschließlich Hochspannungs-, Hochfrequenzmessungen und drahtlose Telegraphie (mit Schleiermacher, Schwaiger und Hausrath), 8; Exkursionen zur Besichtigung elektrischer Anlagen, nach Vereinbarung. — **Schleiermacher:** Grundlagen der Elektrotechnik und Meßkunde, 2; Theoretische Elektrizitätslehre, 4; Elektrotechnisches Laboratorium I, 6. — **Schwaiger:** Elektromotorische Betriebe, einschließlich Bahnen, 2; Elektrische Kraftwerke und Schaltanlagen, 2; Schalt- und Regulierapparate, 1; Nichtstationäre elektrische Vorgänge und Hochspannungstechnik, 1; Übungen zu diesen vier Vorlesungen, 2; Exkursionen zur Besichtigung elektrischer Anlagen, nach Vereinbarung. — **Teichmüller:** Allgemeine Elektrotechnik, 2; Elektrotechnisches Seminar, 2; Übertragung und Verteilung elektrischer Energie: Leitungen, 1, Schaltungsschemata, 2, Übungen, 2; Energieversorgung des Landes; Elektrische Beleuchtung, 2; Besichtigung elektrischer Anlagen, nach Vereinbarung. — **Hausrath:** Instrumente- und Apparatebau, 2; Theoretische Telegraphie, 1; Hochfrequenzmessungen, 1; Besichtigung von Schwachstromanlagen. — **Thomälen:** Theorie der Wechselströme, 2, Übungen, 2. — **Schultheiß:** Geschichte und Wesen der Witterungsvoraussage, 1. — **Schmidt:** Photographische Kurse, mit Vorträgen über die Theorie der photographischen Vorgänge, für Anfänger und Vorgeschriftene, 2; Exkursionen, 1 Nachmittag. —

Engler: Organische Chemie I, 4; Ausgewählte Kapitel der organischen Chemie, 1; Organisch-chemisches Kolloquium (mit Franzen), 1; Spezielle Kapitel der allgemeinen Chemie; Chemisches Laboratorium, tägl. außer Sonnabend. — **Bredig:** Physikalische Chemie II, 2; Ausgewählte Kapitel der physikalischen Chemie und ihrer Anwendungen, 1; Demonstrationen technisch-elektrochemischer Prozesse (mit Askenasy), 3; Physikalisch-chemisches und elektrochemisches Kolloquium für Vorgeschriftene, 2; Physikalisch-chemisches und elektrochemisches Laboratorium, tägl. außer Sonnabend; Physikalisch-chemischer und elektro-chemischer Einführungskurs, mit einleitenden Vorträgen. — **Bunte:** Chemische Technologie I: Baumaterialien, Glas, Keramik usw., 2, II: Chemische Großindustrie, 2; Übungen in der technischen Analyse (mit Eitner), für Chemiker, 4, für Maschineningenieure, 3, für Vorgerücktere, tägl.; Gaschemische Übungen; Arbeiten im chemisch-technischen Laboratorium, tägl. außer Sonnabend; Technologische Exkursionen. — **Franzen:** Organische Chemie II, 2; Ausgewählte Kapitel der theoretischen Chemie, 1. — **Askenasy:** Prozesse der elektrochemischen Großindustrie I, 2. — **Dieckhoff:** Anorganische pharmazeutische Chemie, 2; Analytische Chemie I, 2. — **Eitner:** Methoden der technischen Analyse, 2; Ausgewählte Kapitel der technischen Analyse, 1; Spezielle Technologie der Gasbeleuchtung I und II, 1, Übungen, 4. — **Koenig:** Chemie der Metalle, 2. — **Reis:** Photochemie II: Wirkungen des Lichtes, 2. — **Rupp:** Chemische und mikroskopische Untersuchung von Nahrungs- und Genußmitteln sowie Gebrauchsgegenständen, 2. — **Steinkopf:** Chemie der heterozyklischen Verbindungen II, 1; Chemie der Alkaloide, 1. — **Terres:** Ausgewählte Kapitel der chemischen Technologie, 1. — **Ubbelohde:** Industrie des Petroleums, 1; Über Kunststoffe, 1. — **N. N.:** Chemie der Faserstoffe und Farbstoffe II: Die Chemie der künstlichen und natürlichen Farbstoffe, 2, Übungen in Färberei und Druckerei, 2. —

Böhm: Grundlehren der höheren Mathematik, 4; Höhere Mathematik II, 2. — **Heun:** Mechanik II, 4, Übungen, 2; Mechanisches Seminar, 3 g. — **Krazer:** Höhere Mathematik I, 6, Übungen, 2. — **Mohrmann:** Darstellende Geometrie II, 4, Übungen, 4; Konstruktive Übungen der Perspektive, 3. — **Brandt:** Elementare und analytische Geometrie der Ebene und des Raumes II, 3, Übungen, 1; Einführungskurs in die höhere Mathematik, nach Vereinbarung. — **Haupt:** Übungen in den Grundlehren der höheren Mathematik, 2. — **Noether:** Stabilitäts- und Schwingungsprobleme, 2; Hydromechanik, 1. — **Wellstein:** Projektionslehre, 2, Übungen, 4. — **Näbauer:** Geodätisches Praktikum II, 6, III, 3; Größere Vermessungsübungen am Schlusse des Sommersemesters, 2 Wochen. — **Stutz:** Katastervermessung und Feldbereinigung, 3, Übungen, 2. —

Universität Kiel.

Dieterici: Experimentalphysik II: Optik, Elektrizität, Magnetismus, 5; Physikalische Praktikum für Anfänger: a) Mathematiker und Naturwissenschaftler, 8, b) Mediziner und Pharmazeuten, 4; Physikalische Praktikum für Fortgeschrittene, tägl. — **Weber:** Thermodynamik, 4; Theorie physikalischer Messungsapparate, 1, Übungen, nach Vereinbarung; Ausgewählte physikalische Messungen und Untersuchungen, tägl. außer Sonnabend; Physikalische Kolloquium, 2 g. — **Martienssen:** Radioaktivität, 1. —

Diels: Anorganische Experimentalchemie, 5; Chemisches Praktikum I, anorganische Abteilung (mit Mumm), tägl. außer Sonnabend, II, organische Abteilung, tägl., für Mediziner (mit Feist), 4. — **Berend:** Die Entwicklung der Chemie im neunzehnten Jahrhundert, 1 g. — **Mumm:** Analytische Chemie, 2. — **Horrmann:** Pharmazeutische Chemie, organischer Teil, 3; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend. — **Stoehr:** Über Alkaloide, 1. — **Preuner:** Einführung in die physikalische Chemie, 2. —

Pochhammer: Einleitung in Determinantentheorie und Algebra, 3; Über Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variable, 4; Übungen im mathematischen Seminar, 1 g. — **Harzer:** Geographische Ortsbestimmungen, 3, Übungen, 1 g. — **Kobold:** Höhere Geodäsie, 2; Geodätische Übungen, 2. — **Toeplitz:** Differential- und Integralrechnung I, 4, Übungen für Anfänger, 2; Zahlen-theorie, 4; Mengenlehre, 1 g. —

Universität Königsberg.

Kaufmann: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärmelehre, 5; Physikalische Übungen: a) für Physiker und Mathematiker, 3, b) für Mediziner, 3; Neuere Theorien der Physik, 2 g; Seminaristische Übungen zur Geschichte der Experimentalphysik (mit Hoffmann), 2 g. — **Volkman:** Elastizitätstheorie, einschließlich Akustik, 4; Mathematisch-physikalisches Laboratorium: Physikalisch-praktische Übungen und Arbeiten für Anfänger und Vorgerückte, 6; Mathematisch-physikalisches Seminar: Ergänzungen und Erläuterungen zur Elastizitätstheorie mit besonderer Berücksichtigung der Grundbegriffe und Grundsätze der Mechanik, 1 g. — **Hoffmann:** Radioaktivität, 1. —

Klinger: Anorganische Chemie, 5; Chemische Übungen im Laboratorium (mit Blochmann und Eisenlohr), tägl. außer Sonnabend, für Mediziner, 4; Besprechung besonderer Teile der Chemie (mit Blochmann, Eisenlohr und Sonn), 1 g. — **Rupp:** Pharmazeutische Chemie, 3; Chemische Übungen, tägl. außer Sonnabend; Nahrungsmittelanalytische Methoden, 1 g. — **Zielstorff:** Organische Chemie für Landwirte, 2; Die Ernährung der Pflanze: Düngerlehre, 3; Landwirtschaftliche Nebengewerbe, 2; Chemisches Praktikum für Anfänger, tägl. außer Sonnabend; Praktische Übungen auf dem Gebiete der Fütterungslehre und Futterberechnungen, 2; Praktische Übungen im chemischen Laboratorium, für Geübtere, ganz-

tägl., g; Landwirtschaftliche Exkursionen, 1 Nachmittag, g. — **Blochmann:** Maßanalyse, 2; Heizstoffe und Feuerungsanlagen, 1 g. — **Eisenlohr:** Photochemie, 1; Die Valenz der Elemente, 1 g. —

Meyer: Analytische Geometrie der Ebene, mit Übungen, 4; Differentialgeometrie, 4; Übungen im mathematischen Seminar, g. — **Blaschke:** Differential- und Integralrechnung I, 4; Variationsrechnung und Variationsprinzip der Mechanik, 4; Seminar: a) Aufgabenseminar, b) Vortragssseminar, 2 g. — **Kaluza:** Versicherungsmathematik, mit Übungen, 2; Einführung in die Relativitätstheorie, 1; Repetitorium der Elementarmathematik, mit Übungen, 3. —

Universität Leipzig.

Wiener: Experimentalphysik I: Mechanik, Wärme, Akustik, 5; Selbständige physikalische Arbeiten für Vorgeschr. (mit Scholl), tägl.; Physikalische Übungen (mit Scholl), 6, für Mediziner und Pharmazeuten, 3; Physikalische Kolloquium (mit Des Coudres), 2 g. — **Des Coudres:** Einleitung in die theoretische Physik: Wellen, Strömung imponderabler Agentien, Potential, 4; Anfängerübungen, 1 g; Selbständige Arbeiten für Vorgeschr. (mit Fredenhagen), tägl. — **v. Oettingen:** Die Grundlage der Musikwissenschaft und die Theorie reiner Stimmung, 1 g. — **Scholl:** Ausgewählte Kapitel aus der Optik, mit Demonstrationen, 1. — **Wenger:** Geophysikalische Arbeitsmethoden: Darstellung von Feldern, mathematische Operationen mit Feldern, Statistik, harmonische Analyse, graphische und rechnerische Hilfsmittel, 2, Übungen, 2 g; Arbeiten im Geophysikalischen Institut, tägl.; Geophysikalisches Kolloquium, 2 g. — **Marx:** Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften: Differential- und Integralrechnung, für Mediziner und Naturwissenschaftler, 2. — **Haas:** Die modernen Probleme der theoretischen Physik: Elektronen-, Gas-, Strahlungs-, Quanten-, Relativitätstheorie, 3; Geschichte der Physik von ihren Anfängen bis zu Galilei, 1 g; Selbständige geschichtlich-physikalische Arbeiten für Vorgeschr. (nach Vereinbarung), g. — **Lilienfeld:** Erzeugung und Anwendung tiefer Temperaturen, 1 g. —

Hantzsch: Anorganische Experimentalchemie, 5, Ergänzung, 1 g; Analytische und anorganisch-chemische Übungen (mit Schaefer), für Chemiker, Pharmazeuten, Mathematiker, Naturwissenschaftler und Landwirte, tägl.; Organisch-präparative Übungen (mit Reddelien), tägl.; Chemische Übungen für Mediziner und Zahnärzte (mit Schaefer), 6; Selbständige Arbeiten für Fortgeschrittene (mit Stobbe, Rassow, Schaefer und Reddelien), tägl. — **Le Blanc:** Physikalische Chemie II: Elektrochemie, mit Demonstrationen unter Berücksichtigung der Technik, 3; Chemische Arbeiten für Anfänger: Analytische und präparative, anorganische und organische Arbeiten (mit Böttger), tägl.; Physikalisch-chemische Arbeiten: Photochemisch-photographische (mit Weigert), elektrochemische und kolloid-chemische (mit Böttger), für Fortgeschrittene, ganztägl., für Anfänger auch halbtägl., tägl.; Physikalisch-chemischer Einführungskurs, auch für Mediziner, auf Wunsch: Darstellung elektrochemischer Präparate (mit Schall und Böttger), 4 oder 8. — **Paal:** Organische Experimentalchemie, 5; Chemische Übungen, analytisch, anorganisch und organisch, auch für Anfänger, für Chemiker, Mathematiker, Naturwissenschaftler und Landwirte (mit Deußen, Scheiber, Sieverts und Waentig), tägl.; Arbeiten auf dem Gebiete der Nahrungsmittelchemie (mit Deußen und Waentig), tägl.; Pharmazeutisch-chemisch-toxikologische Übungen (mit Deußen und Scheiber), tägl.; Chemische Übungen für Mediziner und Zahnärzte (mit Sieverts und Waentig), 6; Chemische Arbeiten für Vorgerücktere (mit Heller, Deußen, Scheiber, Sieverts und Waentig), tägl.; Chemisch-technische Übungen (mit Heller), tägl. — **Stobbe:** Spezielle organische Chemie: Die aromatischen Verbindungen, 2; Wiederholungskursus der organischen Chemie, nach

Vereinbarung, g. — **Wagner**: Übersicht über die anorganischen Verbindungen unter Zugrundelegung des Massenwirkungsgesetzes, 1; Technik der Experimentalchemie und Besprechung von Schulversuchen, 1 g; Chemische Übungen für Lehrer: Schulversuche und Präparate, tägl.; Didaktische Besprechungen: Physikalische und chemische Grundbegriffe, 1 g. — **Rassow**: Chemische Technologie, Brenn- und Leuchtstoffe, sowie ausgewählte anorganische Betriebe, 2; Technologische Ausflüge, g; Technische Gasanalyse, mit praktischen Übungen, 1; Chemisch-technologische Übungen, ganz- oder halbtägig; Deutschlands Eisenindustrie, mit Lichtbildern, 1 g. — **Weigert**: Moderne Photochemie, 1; Photochemische und photographische Übungen, 4; Photochemische und photographische Arbeitsmethoden, 1 g. — **Schall**: Elektrochemische Technik des Ozons und der Peroxyde, 1. — **Böttger**: Übungen in Elektroanalyse unter besonderer Berücksichtigung der Schnellmethoden, 3. — **Heller**: Chemie der organischen Farbstoffe, 2. — **Schaefer**: Analytische Chemie, mit Versuchen, 2. — **Deußen**: Die wichtigsten Untersuchungsmethoden des deutschen Arzneibuchs, 1. — **Wilke**: Maschinenzeichnen, 1. —

Hölder: Gewöhnliche Differentialgleichungen, 4, Übungen, 1 g; Anwendungen der elliptischen Funktionen, 3. — **Rohn**: Algebraische Kurven, besonders der 3. und 4. Ordnung, 4, Übungen, 1 g; Darstellende Geometrie I, 2, Übungen, 2. — **Herglotz**: Potentialtheorie, 4; Algebraische Analysis, 2. — **Schnee**: Analytische Geometrie der Ebene, 4, Übungen, 1 g; Bestimmte Integrale, 3. —

Universität Marburg.

Richarz: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Optik, 5; Übersicht über die Experimentalphysik, als Wiederholung für Kriegsteilnehmer, 1 g; Physikalisches Kolloquium, 2 g; Physikalisches Praktikum (mit Feußner und Schulze), 6; Leitung eigener Untersuchungen, tägl. — **Schulze**: Theoretische Physik: Analytische Mechanik, 4; Übersicht über die theoretische Physik, als Wiederholung für Kriegsteilnehmer, 1 g. — **Take**: Physikalische Technologie mit Vorführungen und Ausflügen, 1 1/2. — **Feußner**: Theoretisch-physikalisches Seminar, 2 g. — **Wegener**: Allgemeine Astronomie, mit Lichtbildern und Vorführungen auf der Sternwarte, 2. —

v. Auwers: Anorganische Experimentalchemie, 6; Chemisches Seminar, im Anschluß an die wissenschaftlichen Arbeiten im Institut, 14 tägl., 2 g; Chemisches Praktikum (mit Fries und Strecker), tägl. außer Sonnabend, für Vorgerücktere, tägl.; Chemische Übungen für Mediziner (mit Strecker), tägl. außer Sonnabend; Praktisch-chemischer Kursus für Mediziner (mit Strecker), 1/2, Theoretische Einführung mit Vorführungen (Praktikum), 3 1/2. — **Keller**: Anorganische Chemie, mit besonderer Berücksichtigung der Pharmazie und Medizin, 6; Nahrungsmittelchemie I (allgemeines), 1; Besprechungen und Übungen über Prüfung von Arzneimitteln, 1 g; Übungen über Keimfreimachung von Arznei- und Verbandmitteln, 2. — **Schmidt**: Qualitative Analyse, im Anschluß an die praktischen Übungen; Praktische Übungen in der analytischen und forensischen Chemie, sowie in der Untersuchung der Nahrungs- und Genußmittel und selbständige Arbeiten (mit Keller), tägl. — **Strecker**: Gewichtsanalyse, 2; Titriranalyse, 1; Repetitorium der anorganischen Chemie, 2; Repetitorium der organischen Chemie, 2; Gasanalytisches Praktikum, 3. — **Fries**: Ausgewählte Kapitel aus der organischen Chemie: Chemie der aliphatischen Verbindungen, 3; Chemisches Kolloquium, 2 g; Chemisches Repetitorium für Mediziner: Organische Chemie, 1. — **Thiel**: Physikalische Chemie I, 3; Theoretische Übungen über ausgewählte Kapitel der physikalischen Chemie, 1 g; Psychiatrisch-chemisches Praktikum, 6; Anleitung zu selbständigen Untersuchungen, tägl.; Photochemisches Praktikum, für Anfänger und Fortgeschrittene (mit Stuchtey), 1. —

Hensel: Analytische Geometrie der Ebene, 4; Elementare Algebra, 3; Mathematisches Seminar, 1 g. —

Neumann: Funktionentheorie, 4; Variationsrechnung, 4; Mathematisches Seminar, 2 g; eventl. **Wiarda**: Einführung in die Potentialtheorie, 4; Mengenlehre, 3; Höhere Funktionentheorie: Elliptische Funktionen, 2. — **v. Dalwigk**: Differentialrechnung, 4; Allgemeine Flächentheorie, 3; Übungen aus der Geodäsie, 1 g. —

Universität München.

Röntgen: Experimentalphysik II: Wärme und Elektrizität, 5; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl.; Praktische Übungen im Physikalischen Laboratorium (mit Koch und Wagner), 4. — **Sommerfeld**: Optik, 4; Seminar über optische Fragen, 1 g; Atomistik, 1; Selbständige Arbeiten im Institut für theoretische Physik, tägl. — **Graetz**: Experimentalphysik II: Mechanik, Akustik, Optik, 5; Physikalisches Praktikum: a) Übungen in physikalischen Messungen, b) Übungen in physikalischen Demonstrationen, 4; Die Fortschritte der exakten Naturwissenschaften, 1; Einleitung in die theoretische Physik II, 3; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten aus der Physik, nach Vereinbarung. — **Schmauß**: Allgemeine Meteorologie und Klimatologie, 4. — **Koch**: Wirkungsweise und Gebrauch des Mikroskops, mit Demonstrationen (allgemeinverständlich), 1. — **Wagner**: Die Grundlagen und Leistungen der Quantentheorie, 1. — **Donle**: Einführung in die theoretische Elektrizitätslehre, 2. — **Ewald**: Übersicht über die Mechanik einschl. Hydrodynamik usw., 3. —

Willstätter: Organische Experimentalchemie, 5; Einführung in die Chemie, 1 g; Praktische Arbeiten im Chemischen Laboratorium: Anorganische Abteilung (mit Prandtl und Vanino), tägl. außer Sonnabend, Organische Abteilung (mit Kurt Meyer und Dieckmann), tägl., Physikalisch-chemische Abteilung (mit Fajans), tägl. außer Sonnabend; Chemisches Praktikum für Mediziner (mit Vanino), 4; Arbeiten im Chemischen Laboratorium für fortgeschrittene Mediziner, halb- oder ganztägig; Physikalisch-chemisches Praktikum (mit Fajans), a) 1 Tag, b) 1/2 Tag. — **Paul**: Anorganische Chemie mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendung, 5; Nahrungsmittelchemie I, mit Exkursionen, 2; Pharmazeutisch-chemische Präparatenkunde: Organische Präparate, 3; Chemisches Praktikum: Praktische Übungen, einschließlich physikalisch-chemischer, elektro-chemischer und nahrungsmittel-chemischer Arbeiten, tägl. außer Sonnabend; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum: Praktische Übungen, einschließlich der Übungen in den für den Apotheker wichtigen Sterilisationsverfahren, tägl. außer Sonnabend. — **Prandtl**: Spezielle unorganische Experimentalchemie I: 1. bis 4. Gruppe des periodischen Systems, 4; Praktikum für Gasanalyse, 4. — **Dieckmann**: Chemie der Alkaloide, 1 g. — **Fajans**: Physikalische Chemie II, 2; Physikalisch-chemisches Kolloquium für Anfänger, 1 g. — **Pummerer**: Chemische Technologie der Schwermetalle mit besonderer Berücksichtigung des Eisens, mit Exkursionen, 2. — **Kalb**: Heterozyklische Verbindungen, 1. —

Lindemann: Theorie der elliptischen Funktionen, 5; Analytische Geometrie des Raumes, 5; Übungen und Vorträge im Mathematischen Seminar, 1 1/2 g. — **v. Seeberger**: Kapitel aus der astronomischen Bewegungslehre, 4. — **Voß**: Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die Theorie der ebenen und räumlichen Kurven, 4; Theorie der unendlichen Reihen, 2; Mathematisches Seminar: Übungen in der Theorie der Differentialgleichungen, 2 g. — **Pringsheim**: Integralrechnung, 5. — **Brunn**: Ausgewählte Kapitel aus der Lehre von den konvexen Kurven und Flächen (Eigebilden), bes. die Singularitätenhäufung betr., 2. — **Hartogs**: Synthetische Geometrie II, 5. — **Großmann**: Übungen an den Instrumenten der Sternwarte, nach Vereinbarung. — **Dingler**: Elementarmathematik, mit geschichtlichen und pädagogischen Hinweisen, 4; Einführung in die mathematische Behandlung von Beobachtungsdaten, 2. — **Rosenthal**: Differentialrechnung, 5, Übungen, 1 1/2; Theorie der geometrischen Konstruktionen, 3. —

Akademie Posen.

Spies: Der elektrische Strom, 4. —
Könnemann: Die Physik der Sonne, 1. —

Deutsche Universität Prag.

Lampa: Experimentalphysik II, besonderer Teil, 5; Physikalisches Praktikum II (Fortsetzung), 6 bzw. 3; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, für Vorgeschr. tgl. g. — **Frank:** Einführung in die Relativitätstheorie, 3; Theorie des Lichtdrucks, 2; Huyghens und Newton, 1; Seminar: Besprechung neuerer Arbeiten über Röntgenstrahlen, 2 g. —

Meyer: Organische Chemie, für Philosophen, Mediziner und Pharmazeuten, 5; Chemische Übungen, tgl. außer Sonnabend, für Mediziner, halbtägig; Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen, für Vorgeschr. tgl. außer Sonnabend. — **Rothmund:** Physikalische Chemie II, 4, Physikalisch-chemisches Praktikum, 4; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tgl. außer Sonnabend. — **Wagner:** Die chemischen Wirkungen des Lichtes: Photochemie und Photographie, 1. — **Kirpal:** Chemische Großindustrie mit Exkursionen, 3. — **Sigmund:** Die Enzyme und ihre Bedeutung in der Physiologie und Technik, 1. —

Pick: Elemente der Infinitesimalrechnung II, 2, Übungen, 1; Mathematisches Seminar, 2 g. — **Kowalewski:** Ausgewählte Kapitel der analytischen Geometrie, 3; Theorie der Transformationsgruppen, 2; Mathematisches Seminar, 2 g. — **Funk:** Theorie der Beugung des Lichtes, nach Vereinbarung. — **Mack:** Kurs über geometrisches Zeichnen und darstellende Geometrie, 3. — **Prey:** Geographische Ortsbestimmung, 3; Ausgleichsrechnung, 2. — **Scheller:** Refraktion und Extinktion, 1. — **Spitaler:** Physikalische Erdbebenforschung, 2; Wetterprognose, 2, Übungen, 1.

Universität Rostock.

Heydweiller: Experimentalphysik: Allgemeine Physik, Akustik, Wärme, 5; Physikalische Übungen a) für Mathematiker und Naturwissenschaftler, 8, b) für Mediziner und Pharmazeuten, 4; Wissenschaftlich-physikalische Arbeiten, tgl.; Physikalisches Seminar (mit Weber), 1. — **Weber:** Analytische Mechanik, 3; Wärmelehre, 2; Übungen zur theoretischen Physik, 1. —

Pfeiffer: Anorganische Chemie, 5; Kolloidchemie, 1; Großes chemisches Praktikum: Analytische und anorganisch-präparative Arbeiten, tgl.; Leitung wissenschaftlicher Arbeiten, tgl.; Kleines chemisches Praktikum für Mathematiker, Naturwissenschaftler und Pharmazeuten, halbtägig; Übungen für Nahrungsmittelchemiker, nach Vereinbarung, für Mediziner (mit Stoermer), 3. — **Stoermer:** Ausgewählte Kapitel aus der organischen Chemie, 3; Gerichtliche Chemie, 2; Maßanalyse, 1; Übungen in der organischen Abteilung: a) Großes chemisches Praktikum, b) wissenschaftliche Arbeiten, tgl. — **Honecamp:** Agrikulturchemie II: Tierernährung, 2; Agrikulturchemisches Praktikum, tgl. — **Kümmell:** Elektrochemie, 2. —

Staudé: Analytische Geometrie des Raumes, 4; Theorie der analytischen Funktionen, 4; Mathematisches Seminar, 2. —

Berichtigung

zu meiner Arbeit: „Adiabatenhypothese und Boltzmannsches Prinzip“.

Von Adolf Smekal.

Infolge eines bedauerlichen Versehens ist in der in der Überschrift genannten Arbeit¹⁾ angegeben, daß die adiabatische Invarianz der Quantenansätze hinreichend und

¹⁾ A. Smekal, diese Zeitschr. 19, 137, 1918.

notwendig für die Gültigkeit des Boltzmannschen Prinzips ist. Wie aus der Arbeit selbst hervorgeht, ist wohl die adiabatische Invarianz der Gewichtsfunktion G notwendig-hinreichend, die adiabatische Invarianz der Quantenansätze hingegen nur hinreichend. Um auch ihre Notwendigkeit zu beweisen, würde es noch einer Zusatzforderung bedürfen.

Berlin, 25. April 1918.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der Adjunkt am chemischen Institut der Universität Prag Dr. Alfred Eckert zum ord. Professor für allgemeine und analytische Chemie ebenda, der Oberassistent am Kaiser-Wilhelm-Institut für Chemie in Berlin-Dahlem Dr. Otto Lische zum Professor, der Professor der Chemie am Kings College in London Sir Herbert Jackson zum Präsidenten des Institute of Chemistry daselbst, Dr. B. Sjollema zum ord. Professor der Chemie an der Tierärztlichen Hochschule Utrecht.

Berufen: Der a. o. Professor an der Universität Jena Dr. Hermann Matthes zum ord. Professor der Pharmazie und Nahrungsmittelchemie an der Universität Straßburg.

Verliehen: Dem Privatdozenten für Mathematik und Honorarprofessoren für Versicherungsmathematik an der Deutschen Technischen Hochschule Brünn Dr. Ernst Fanta der Titel a. o. Professor.

Gestorben: Der ord. Professor der allgemeinen und Experimental-Chemie an der Universität Straßburg Dr. Johannes Thiele, der frühere ord. Professor der Chemie an der Queens University in Belfast Dr. Edmund A. Letts.

Angebote.

Physiker oder Physikerin

für unser physikalisches Laboratorium gesucht. Angebot mit Lebenslauf, Gehaltsansprüchen, womöglich Lichtbild an

Siemens & Halske A.-G., Glühlampenwerk, Charlottenburg, Helmholtzstraße 4—8.

Physiker

oder physikalisch gebildeter Ingenieur für Untersuchungen im Laboratorium (akustische und elektrische Schwingungsvorgänge) gesucht. Angebote mit Lebenslauf, Militärverhältnissen, Gehaltsansprüchen usw. erbeten an

Signal Gesellschaft m. b. H. Kiel
Werk Ravensberg.

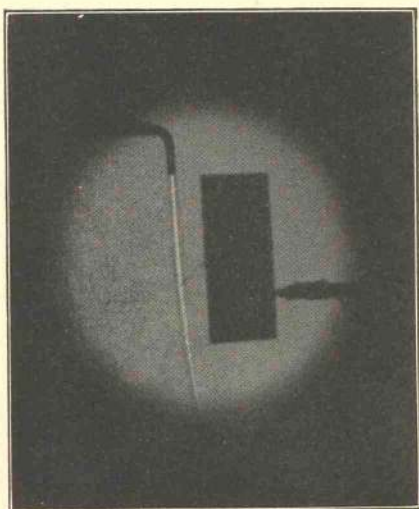


Fig. 6a.

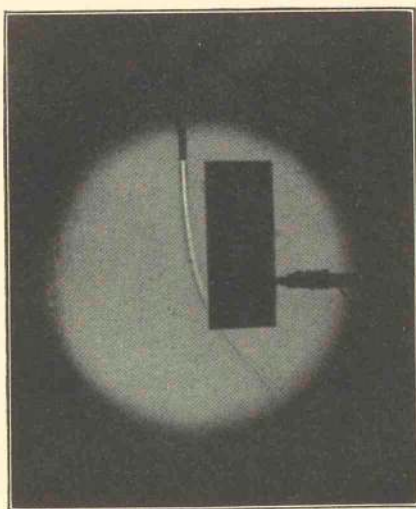


Fig. 6b.

VI LIST

Staats- u. Universitäts-
Bibliothek Hamburg

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 10.

15. Mai 1918.

Redaktionsschluß für No. 12 am 15. Mai 1918.

19. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

A. Korn, Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes. VII. S. 201.

H. Thirring, Über die formale Analogie zwischen den elektromagnetischen Grundgleichungen und den Einsteinschen Gravita-

tionsgleichungen erster Näherung. S. 204.

M. Wolfke, Weitere Versuche über eine durchdringende Sekundärstrahlung der Kanalstrahlen. S. 205.

O. Hahn u. L. Meitner, Die Muttersubstanz des Actiniums, ein

neues radioaktives Element von langer Lebensdauer. S. 208.

E. Schrödinger, Notiz über die Ordnung in Zufallsreihen. S. 218.

Vorlesungsverzeichnis f. das Sommersemester 1918. S. 220.

Personalien. S. 224.

Angebote. S. 224.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes.

Von A. Korn.

VII.

Die Grundlagen der Theorie der universellen Schwingungen.

In dem unendlichen Äther, den wir für die erste Grundlegung als inkompressibel ansehen, wenn es sich um Schwingungen von außerordentlich kleiner Schwingungsdauer handelt, sollen schwach kompressible Teilchen angenommen werden, also Massensysteme, welche der Berücksichtigung unterliegende, sehr geringe Dichteänderungen erleiden können.

Die Grundidee der Theorie der universellen Schwingungen beruht auf der Erkenntnis, daß jedes kompressible System einer (im allgemeinen unendlichen) Reihe von Eigenschwingungen fähig ist; der unendliche Äther, zusammen mit den eingelagerten schwach kompressiblen Teilchen, ist ein kompressibles System, und die Eigenschwingungen dieses Systems wollen wir als „universelle Schwingungen“ bezeichnen, unter Beschränkung auf solche Schwingungen, die von Wirbeln frei sind.

Die schwach kompressiblen Teilchen, welche wir in der Theorie der universellen Schwingungen auch als ponderable Teilchen bezeichnen wollen, sollen im Gegensatz zu den elektrischen Teilchen dem gewöhnlichen (d'Alembertschen) mechanischen Grundgesetze folgen, während bei den elektrischen Teilchen die Korrektur der Individualität hinzuzufügen ist (vgl. Abh. I¹).

Der Äther muß unzweifelhaft derselbe sein in der Theorie der universellen Schwingungen, wie in der Theorie der elektromagnetischen Erscheinungen; man bemerkt aber auch leicht, daß die Korrektur der Individualität die Bewegungs-

form eines wirbellosen, inkompressiblen Mediums nicht verändern kann.

Die Theorie der universellen Schwingungen wird daher überhaupt nicht durch die Korrektur der Individualität beeinflusst werden und ist so aufzustellen, als ob das gewöhnliche (d'Alembertsche) mechanische Grundprinzip sowohl für den Äther, als auch für die schwach kompressiblen Teilchen strenge Geltung hätte.

Aus diesem Grunde bleiben meine früheren Grundlagen der Theorie der universellen Schwingungen formal unverändert¹).

Für den Äther gelten die gewöhnlichen hydrodynamischen Gleichungen:

$$\mu \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \dots, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \mu = \text{const.}; \quad (2)$$

für die Räume der schwach kompressiblen Teilchen in erster Annäherung²):

$$\mu \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \dots, \quad (3)$$

1) Man vgl. im besonderen: A. Korn, Eine mechanische Theorie der Reibung in kontinuierlichen Massensystemen. (Ferd. Dümmlers Verlag, Berlin 1901.) Le problème mathématique des vibrations universelles. Comm. Soc. Math. Charkoff 1903. Les vibrations universelles de la matière. Ann. Ec. Norm. (3) 25, 529, 1908.

2) Die Bewegungsgleichungen können aus dem mechanischen Grundprinzip auch für die schwach kompressiblen Teilchen ohne weitere Annahme abgeleitet werden, als daß in erster Annäherung Inkompressibilität besteht und daß die Elementarteilchen, welche die schwach kompressiblen Medien zusammensetzen, ungeordnete molekulare Geschwindigkeiten haben, gegen deren absolute Mittelwerte die translatorischen Geschwindigkeiten u, v, w klein sind. Wir brauchen also zur Ableitung weder die Annahme elastischer Stöße zwischen den Elementarteilchen, noch die Annahme bestimmter molekularer Abstoßungskräfte, über die ja erst die Theorie der universellen Schwingungen Aufklärung verschaffen soll. Man vgl.: Eine mechanische Theorie der Reibung S. 97—116.

1) Diese Zeitschr. 18, 325, 1917.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mu}{dt} &= -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ 3\mu \frac{d\phi}{dt} &= 5\phi \frac{d\mu}{dt}; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

u, v, w, μ, ϕ sollen überall, also auch bei dem Durchgange durch die Grenzen stetig sein und im Unendlichen verschwinden.

Im Falle der Wirbelfreiheit existiert eine mit ihren ersten Ableitungen überall stetige, im Unendlichen verschwindende Funktion

$$\varphi(x, y, z, t)$$

so, daß

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \dots \quad (5)$$

und daß die Funktion φ im Äther der Gleichung:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (6)$$

in den kompressiblen Teilchen der Gleichung:

$$\Delta \varphi = \alpha^2 \frac{d}{dt} \left[\frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} \right] \quad (7)$$

genügt, wo α^2 eine Konstante ist, welche um so kleiner sein wird, je weniger kompressibel die Teilchen sind¹⁾.

Der Druck p im Außenraume ist durch die Gleichung:

$$p = -\mu \left\{ \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} \right\} \quad (8)$$

bestimmt, und die translatorische Bewegung sehr kleiner kompressibler Teilchen im Äther wird so vor sich gehen, als ob auf dieselben Kräfte mit den Komponenten:

$$X = \int_{\omega} p \cos(\nu x) d\omega, \dots \quad (9)$$

wirkten, wo die Integrale über alle Oberflächenelemente $d\omega$ (mit den inneren Normalen ν der Oberfläche ω des betreffenden Teilchens zu erstrecken sind²⁾).

1) Man vgl.: Eine mechanische Theorie der Reibung S. 116–126.

2) Bezüglich der Stetigkeit der Funktion p bei dem Durchgange durch die Grenze könnte noch ein Zweifel bestehen; man bedenke, daß die Hinzufügung von Gliedern der Form

$$\Psi(u, v, w) \delta x \nu$$

(Ψ irgendeine stetige Funktion seiner Argumente) in dem mechanischen Grundprinzip (Abh. I, S. 341–345, diese Zeitschr. 18, 1917) zu beiden Seiten der Grenzfläche wegen der Stetigkeit der Verrückungen keine Änderung in jenem hervorbringt, wenn für beide Medien die Individualitätskorrektur vorausgesetzt wird. In dem hier vorliegenden Falle könnte man noch durch eine neue Hypothese über Ψ verfügen; dies ist aber glücklicherweise für die Theorie der universellen Schwingungen nicht notwendig, da aus den Gleichungen (1) und (3) außen bzw. innen von selbst bis auf zu vernachlässigende Größen

$$p_a = p_i$$

folgt, wenn μ, u, v, w bei dem Durchgange durch die Fläche ω stetig bleiben sollen.

Um das Problem der Eigenschwingungen zu lösen, haben wir den Ansatz

$$\varphi = \Phi \sin \frac{t}{T} 2\pi \quad (10)$$

zu machen, wo Φ von der Zeit unabhängig oder jedenfalls so beschaffen ist, daß seine Ableitungen nach der Zeit nicht von der Ordnung $\frac{1}{T}$

groß sind, wobei von vornherein vorauszusehen ist, daß T eine sehr kleine Zeitdauer sein wird, sobald man die Dimensionen der schwach kompressiblen Teilchen sehr klein wählt.

Die Funktion Φ , das „Potential der betreffenden universellen Schwingung“ ist somit eine im ganzen Raume mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktion, welche im Unendlichen verschwindet, in der Flüssigkeit der Gleichung:

$$\Delta \Phi = 0 \quad (11)$$

und in den schwach kompressiblen Teilchen der Gleichung:

$$\Delta \Phi + k^2 \Phi = 0 \quad (12)$$

genügt¹⁾, wenn wir

$$k^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} \alpha^2 \quad (13)$$

setzen.

Das hierdurch gestellte Problem ist ein Analogon zu dem bekannten Problem, welches sich auf einen begrenzten Raum τ mit einer stetig gekrümmten Oberfläche ω bezieht:

$$\Delta \Phi + k^2 \Phi = 0, \text{ in } \tau,$$

$$\Phi = 0, \text{ an } \omega.$$

In analoger Weise, wie für dieses letztere Problem²⁾, läßt sich für das hier gestellte Problem beweisen³⁾:

Es existieren abzählbar unendlich viele, positive Zahlen:

$$k_0^2 < k_1^2 < k_2^2 < \dots < +\infty,$$

die voneinander verschieden sind und eine Ver-

1) Unter Vernachlässigung von Größen, die von der Ordnung $\frac{1}{T}$ Zeiteinheit klein sind.

2) Die Existenz der Grundschiwingung für dieses Problem wurde zuerst bewiesen von H. A. Schwarz, man vgl. Ges. Abh. Berlin (Springer) 1890, S. 241 ff. (in der Ebene), für die erste Oberschiwingung von E. Picard, C. R. 117, 502, 1894, für die Gesamtheit der Schwingungen von H. Poincaré, Rendiconti, Palermo, t. 8, 1894, für einen von einer konvexen Fläche begrenzten Raum. Allgemein im Raume für einen von einer beliebigen stetig gekrümmten Fläche begrenzten Raum von A. Korn, Abh. zur Potentialtheorie IV, Berlin (Ferd. Dümmler) 1901; jetzt kann der Beweis mit Hilfe der Theorie der linearen Integralgleichungen auf mehrere verschiedene Arten geführt werden.

3) Bezüglich des Existenzbeweises für die universellen Funktionen Φ_i und die zugehörigen k_i^2 vgl. man A. Korn, Le problème mathématique des vibrations universelles. Comm. Soc. Math. Charkoff, 1903.

dichtungsstelle im Unendlichen haben, und zugehörige Funktionen:

$$\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots,$$

welche mit ihren ersten Ableitungen im ganzen Raume eindeutig und stetig sind und im Unendlichen verschwinden, mit den Eigenschaften:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Phi_j + k_j^2 \Phi_j &= 0; \text{ in den Teilchen} \\ \Delta \Phi_j &= 0, \text{ im Außenraume.} \end{aligned} \right\} (14)$$

Die Funktionen Φ_j mögen die universellen Funktionen der ponderablen Massenverteilungen, die zugehörigen

$$T_j = \left| \frac{2\pi a}{k_j} \right| \quad (15)$$

die Schwingungsdauern der universellen Schwingungen

$$u_j = \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \sin \frac{t}{T_j} 2\pi, \dots \quad (16)$$

heißen.

Wir haben hier ein ganz bestimmtes mathematisches Problem vor uns, wenn wir z. B. die Oberflächen der schwach kompressiblen Teilchen in ihren Mittellagen als kleine Kugelflächen voraussetzen, bei gegebenen Lagen ihrer Zentren.

Vor allem wird die Bestimmung der Grundschwingung (Schwingung mit größtem T) interessieren, dann aber auch die ersten Oberschwingungen.

Nach Bestimmung der Schwingungsformen kann man bei Zugrundelegung einer bestimmten universellen Schwingung nach den scheinbaren Kräften fragen, welche durch die Schwingungen auf die einzelnen Teilchen ausgeübt werden, und man kann von vornherein bemerken, daß sich die Teilchen translatorisch sichtbar so bewegen werden, als ob auf jedes die Kräfte

$$X_j = \frac{1}{T_j} \int_{\omega} \int_t^{t+T_j} p \cos(vx) d\omega dt, \dots \quad (17)$$

ausgeübt würden, wo die Integrale über alle Elemente $d\omega$ der Oberfläche ω des betreffenden Teilchens (mit den inneren Normalen v) zu erstrecken sind.

Für diese Kräfte habe ich einige sehr bemerkenswerte Umformungen abgeleitet:

Erste Form:

Die scheinbaren, infolge einer universellen Schwingung auf eines der schwach kompressiblen Teilchen ausgeübten Kräfte sind formal durch die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} X_j &= \frac{\mu}{2} \int_{\omega} \left[\frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial v} - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \right)^2 \right) \cos(vx) \right] d\omega, \\ Y_j &= \frac{\mu}{2} \int_{\omega} \left[\frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial v} - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \right)^2 \right) \cos(vy) \right] d\omega, \\ Z_j &= \frac{\mu}{2} \int_{\omega} \left[\frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \frac{\partial \Phi_j}{\partial v} - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \right)^2 \right) \cos(vz) \right] d\omega \end{aligned} \right\} (18)$$

darstellbar, wo

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial v} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \cos(vx) + \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \cos(vy) + \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \cos(vz) \quad (19)$$

zu setzen ist¹⁾.

Zweite Form:

Die scheinbaren, infolge einer universellen Schwingung auf eines der schwach kompressiblen Teilchen ausgeübten Kräfte sind formal durch die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} X_j &= -\frac{\mu k_j^2}{4} \int_{\omega} \Phi_j^2 \cos(vx) d\omega, \\ Y_j &= -\frac{\mu k_j^2}{4} \int_{\omega} \Phi_j^2 \cos(vy) d\omega, \\ Z_j &= -\frac{\mu k_j^2}{4} \int_{\omega} \Phi_j^2 \cos(vz) d\omega \end{aligned} \right\} (20)$$

darstellbar²⁾.

Nun sind wir ausgerüstet, nicht bloß das Problem der universellen Schwingungen durch Bestimmung der Potentiale Φ_j zu lösen, sondern auch die scheinbaren Kräfte zu bestimmen, welche auf die einzelnen schwach kompressiblen Teilchen ausgeübt werden.

Die Grundschwingung, mit der wir uns in der folgenden Abhandlung beschäftigen werden, führt zur mechanischen Theorie der Gravitation.

¹⁾ Eine mechanische Theorie der Reibung, S. 130—136.

²⁾ Ebenda S. 138—139.

(Eingegangen 4. März 1918.)

Über die formale Analogie zwischen den elektromagnetischen Grundgleichungen und den Einsteinschen Gravitationsgleichungen erster Näherung.

Von Hans Thirring.

Im folgenden sollen einige formale Entwicklungen etwas näher ausgeführt werden, die in einer vorangegangenen Arbeit¹⁾ bloß in einer Fußnote Platz gefunden hatten. Es handelt sich um die Analogie zwischen den Maxwell-Lorentzischen Gleichungen einerseits und jenen Gleichungen andererseits, welche die Punktbewegung in einem schwachen Gravitationsfelde in erster Näherung bestimmen. Einstein hat selbst schon auf diese Analogie gelegentlich seiner Rede auf dem Wiener Naturforschertag 1913 hingewiesen²⁾; da aber seither seine Feldgleichungen eine ganz wesentliche Modifikation erfahren haben, scheint es nicht unangebracht zu sein, die betreffenden Formeln für die endgültige Fassung der Theorie zu entwickeln.

Vorweg sei bemerkt, daß wir im folgenden stets ein Maßsystem verwenden, in dem die Lichtgeschwindigkeit gleich 1 wird, und daß wir als Koordinaten

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = it$$

wählen.

Wir betrachten nun einen ganz speziellen Fall von Punktbewegung in einem quasistationären Gravitationsfelde. Ein Massenpunkt bewege sich in dem Felde so langsam, daß die Quadrate und Produkte seiner Geschwindigkeitskomponenten gegen 1 zu vernachlässigen sind. Das Gravitationsfeld selbst sei ein schwaches (so daß die Abweichungen der $g_{\mu\nu}$ von den klassischen Werten -1 bzw. 0 als kleine Größen erster Ordnung betrachtet werden können) und sei erzeugt durch inkohärente (spannungsfreie) bewegte Massen, deren Geschwindigkeiten etwas größer seien als die des untersuchten Massenpunktes, so daß wir noch die Quadrate und binären Produkte berücksichtigen müssen. Bezeichnen wir die Geschwindigkeit des Massenpunktes mit v und die der felderregenden Massen mit v' , so sollen in Rechnung gezogen werden Ausdrücke von der Größenordnung: v , v' , v'^2 und $v \cdot v'$.

Die Bewegungsgleichungen lauten bekanntlich:

$$\frac{d^2 x_\tau}{ds^2} = \Gamma_{\mu\nu}^\tau \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}, \quad \tau = 1 \dots 4. \quad (1)$$

Auf der rechten Seite stehen die Geschwindigkeitskomponenten des Massenpunktes; vernachlässigen wir gemäß unseren Voraussetzungen

ihre Quadrate und Produkte, so gehen die Gleichungen über in:

$$\frac{d^2 x_\tau}{dt^2} = 2i \left(\Gamma_{14}^\tau \frac{dx_1}{dt} + \Gamma_{24}^\tau \frac{dx_2}{dt} + \Gamma_{34}^\tau \frac{dx_3}{dt} \right) - \Gamma_{44}^\tau. \quad (2)$$

Wir betrachten im folgenden die drei räumlichen Komponenten der Bewegungsgleichungen; es sei also $\tau = 1, 2, 3$. Für schwache Felder sind die Dreiindizesymbole:

$$\Gamma_{\sigma 4}^\tau = - \left\{ \begin{matrix} \sigma 4 \\ \tau \end{matrix} \right\} = \left[\begin{matrix} \sigma 4 \\ \tau \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_4} + \frac{\partial g_{\tau 4}}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial g_{\sigma 4}}{\partial x_\tau} \right). \quad (3)$$

Die Ableitungen $\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_4}$ ($\sigma \neq 4, \tau \neq 4$) sind, wie sich sogleich herausstellen wird, von der Größenordnung v'^2 ; sie sind in (2) mit $\frac{dx_\sigma}{dt}$ (Größenordnung v) multipliziert, fallen demnach in unserer Näherung weg. In Γ_{44}^τ treten nur die Ableitungen von $g_{\tau 4}$ und g_{44} auf; wir brauchen also für das folgende nur jene Koeffizienten $g_{\mu\nu}$, die den Index 4 mindestens einmal enthalten. Um sie zu berechnen, benutzen wir die Einsteinsche Näherungslösung¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} g_{\mu\nu} &= -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \quad \delta_{\mu\nu} = 1, \quad \mu = \nu, \\ &= 0, \quad \mu \neq \nu, \\ \gamma_{\mu\nu} &= \gamma_{\mu\nu}' - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha\alpha}', \\ \gamma_{\mu\nu}' &= -\frac{\kappa}{2\pi} \int \frac{T_{\mu\nu}(x', y', z', t' - R)}{R} dV_0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

wobei $T_{\mu\nu}$ den Energietensor, $x' y' z'$ die Koordinaten des Integrationsraumes, R den Abstand Integrationselement—Aufpunkt und dV_0 das natürlich gemessene Volumelement bezeichnet. Der Energietensor für inkohärente Materie ist gegeben durch:

$$T_{\mu\nu} = T^{\mu\nu} = \rho_0 \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}. \quad (5)$$

Die vier in Betracht kommenden Koeffizienten $g_{\mu 4}$ lauten demnach:

$$\left. \begin{aligned} g_{14} &= -i \frac{\kappa}{2\pi} \int \frac{\rho_0 v_x'}{R} \left(\frac{dt'}{ds} \right)^2 dV_0, \\ g_{24} &= -i \frac{\kappa}{2\pi} \int \frac{\rho_0 v_y'}{R} \left(\frac{dt'}{ds} \right)^2 dV_0, \\ g_{34} &= -i \frac{\kappa}{2\pi} \int \frac{\rho_0 v_z'}{R} \left(\frac{dt'}{ds} \right)^2 dV_0, \\ g_{44} &= -1 + \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{\rho_0}{R} \left(\frac{dt'}{ds} \right)^2 dV_0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

1) H. Thirring, diese Zeitschr. 19, 33, 1918.

2) A. Einstein, diese Zeitschr. 14, 1261, 1913.

1) A. Einstein, Berl. Ber. 1916, S. 688.

Die in Gl. (2) auftretenden Feldkomponenten $\Gamma_{\sigma 4}^r$ berechnen sich nun aus den $g_{\mu\nu}$ mit den angewendeten Vernachlässigungen wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{14}^1 &= 0 & \Gamma_{24}^1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{14}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{24}}{\partial x_1} \right) & \Gamma_{34}^1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{14}}{\partial x_3} - \frac{\partial g_{34}}{\partial x_1} \right) & \Gamma_{44}^1 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{14}}{\partial x_4} \\ \Gamma_{14}^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{24}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{14}}{\partial x_2} \right) & \Gamma_{24}^2 &= 0 & \Gamma_{34}^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{24}}{\partial x_3} - \frac{\partial g_{34}}{\partial x_2} \right) & \Gamma_{44}^2 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_2} + \frac{\partial g_{24}}{\partial x_4} \\ \Gamma_{14}^3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{34}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{14}}{\partial x_3} \right) & \Gamma_{24}^3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{34}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{24}}{\partial x_3} \right) & \Gamma_{34}^3 &= 0 & \Gamma_{44}^3 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_3} + \frac{\partial g_{34}}{\partial x_4} \\ \Gamma_{14}^4 &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{14}}{\partial x_4} & \Gamma_{24}^4 &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{24}}{\partial x_4} & \Gamma_{34}^4 &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_3} - \frac{\partial g_{34}}{\partial x_4} & \Gamma_{44}^4 &= 0. \end{aligned} \right\} (7)$$

Die Gleichungen (2), (6) und (7) entsprechen nun bis auf numerische Faktoren ganz den elektrodynamischen Grundgleichungen. Um diese Ähnlichkeit besser hervortreten zu lassen, setzen wir noch:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{U}_x &= i g_{14}, & \mathfrak{U}_y &= i g_{24}, & \mathfrak{U}_z &= i g_{34}, & \Phi &= \frac{g_{44} + 1}{2}, \\ \mathfrak{S}_x &= 2i \Gamma_{24}^3 = -2i \Gamma_{34}^2, & \mathfrak{S}_y &= 2i \Gamma_{34}^1 = -2i \Gamma_{14}^3, & \mathfrak{S}_z &= 2i \Gamma_{14}^2 = -2i \Gamma_{24}^1, \\ \mathfrak{E}_x &= \Gamma_{44}^1 = -\Gamma_{14}^4, & \mathfrak{E}_y &= \Gamma_{44}^2 = -\Gamma_{24}^4, & \mathfrak{E}_z &= \Gamma_{44}^3 = -\Gamma_{34}^4, \\ k &= \frac{\kappa}{8\pi}. \end{aligned} \right\} (8)$$

Mit diesen Bezeichnungen gehen die Gleichungen (6), (7) und (2) über in:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{U} &= 4k \int \frac{q_0 v'}{R} \left(\frac{dt'}{ds} \right)^2 dV_0, \\ \Phi &= k \int \frac{q_0}{R} \left(\frac{dt'}{ds} \right)^2 dV_0, \end{aligned} \right\} (6a)$$

$$\mathfrak{S} = \text{rot } \mathfrak{U}, \quad \mathfrak{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t}, \quad (7a)$$

$$\ddot{\mathfrak{s}} = -\mathfrak{E} - [v \mathfrak{S}]. \quad (2a)$$

Abgesehen von dem Faktor $\left(\frac{dt'}{ds} \right)^2$, der nur

um Größen von der Ordnung v'^2 von der Einheit abweicht, unterscheiden sich die Gleichungen (6a), (7a) und (2a) von den entsprechenden elektrodynamischen nur durch das verkehrte Vorzeichen der rechten Seite von (2a) und durch das Auftreten des Faktors 4 in (6a). Es ist also das Analogon zur magnetischen Kraft in der Gravitationstheorie viermal so groß als in der Elektrodynamik.

An die Herleitung dieser formalen Analogie sei eine Bemerkung prinzipieller Natur angeschlossen. Es erscheint von vornherein sehr unwahrscheinlich, daß mathematische Gesetze, die auf einem Erscheinungsgebiete Näherungsformeln für gewisse Spezialfälle darstellen, ein anderes Erscheinungsgebiet exakt beschreiben sollen. Es drängt sich deshalb (abgesehen von dem physikalischen Bedürfnis auch aus formalen Gründen) die Vermutung auf, daß die Maxwell-Lorentzschen Gleichungen ebenfalls nur Näherungsformeln seien, die zwar für die elektro-

technisch herstellbaren Felder genügend genau sind, für viel stärkere Felder aber, wie sie in den Atom- und Elektronendimensionen auftreten, einer entsprechenden Verallgemeinerung bedürfen, zu welcher ja von Hilbert und Mie (die von einem viel weiteren Gesichtspunkt ausgehen) bereits Entwürfe gemacht worden sind.

Institut für theoretische Physik d. Universität Wien, März 1918.

(Eingegangen 26. März 1918.)

Weitere Versuche über eine durchdringende Sekundärstrahlung der Kanalstrahlen.

Von M. Wolfke.

Mit Tafel V.

Vor kurzem habe ich über eine neue Sekundärstrahlung der Kanalstrahlen berichtet¹⁾. Weitere Versuche, die ich mit einer neuen Anordnung und mit Benutzung der magnetischen Ablenkung der Kanalstrahlen ausgeführt habe, haben die Erregung einer durchdringenden Sekundärstrahlung durch Kanalteilchen bestätigt. Gleichzeitig hat sich jedoch herausgestellt, daß die Vermutungen, die ich in bezug auf den Charakter dieser Strahlung in der ersten Abhandlung ausgesprochen habe, sich nicht aufrecht erhalten lassen.

1) M. Wolfke, diese Zeitschr. 18, 479, 1917.

Versuchsmethode.

Bei den neuen Versuchen wurde als wichtiger Faktor, wie oben erwähnt, die magnetische Ablenkung der Kanalstrahlen benutzt. Das entsprechende Rohr ist in Fig. 1 dargestellt.

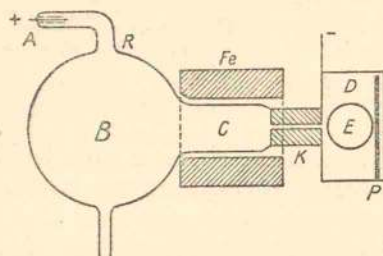


Fig. 1.

Die Kugel *B* (Durchmesser 180 mm) mit der Anode *A* ist mit dem Ansatz *C* (Durchmesser 54 mm und 110 mm lang) auf den durchbohrten Eisenzylinder *K* aufgekittet. Die in *C* erzeugten Kanalstrahlen gehen durch den Kanal (Durchmesser 5 mm) in die Messingkamera *D*. In die Kamera sind zwei Polschuhe *E* (Durchmesser 44 mm) mit einem Luftspalt (10 mm breit) seitlich eingelötet. Diese Polschuhe dienen als Verlängerungen für die Polschuhe eines Rumkorffschen Elektromagneten, zwischen denen sich die Kamera *D* befindet. Auch die Kugel *B* liegt zwischen zwei Spulen eines Elektromagneten, der die von der Kathode herkommenden Kathodenstrahlen nach *R* ablenkt. Die Form und die Größe des Entlastungsrohres sind so gewählt, daß in die Kamera *D* durch den Kanal keine direkten Röntgenstrahlen eindringen können. Ein durchbohrter Eisenzylinder *Fe* schützt den Entladungsraum vor den Streufeldern der beiden Elektromagnete. In die Kamera *D* kann hinter die Polschuhe *E* (Abstand 10 mm) eine Messingkassette *P* mit einer photographischen Platte eingeschoben werden (der Abstand zwischen Kanalende und der Kassette beträgt 64 mm). Die Messingkassette ist vorn durch eine Doppelwand mit aufeinanderpassenden viereckigen Öffnungen (20 mm breit und 110 mm hoch) geschlossen. Zwischen diese Doppelwand werden die benutzten Metallfolien mittels Schrauben zusammengepreßt. Die Folien berühren die Gelatineschicht der photographischen Platte nicht (Abstand 1,5 mm).

Bei allen Aufnahmen der Sekundärstrahlung wurden nie einzelne Folien benutzt, sondern es wurden mindestens 3 Folien aufeinander gelagert. Außerdem habe ich bei jedem Versuch die Folien vor und nach der Bestrahlung mit Kanalstrahlen einer Lichtprobe unterworfen.

Diese Lichtprobe bestand darin, daß eine in der Messingkassette hinter den Folien eingeschlossene Röntgenplatte mit einer Halbwattlampe (Beleuchtungsstärke ca. 200 Meterkerzen) während einer halben Stunde belichtet wurde. Es wurden nur solche Folien zu den Versuchen benutzt, bei denen nach der Belichtung die Röntgenplatte beim Einwickeln klar geblieben war. Die Lichtprobe nach der Bestrahlung diente zur Kontrolle dafür, daß die Folien während der Bestrahlung mit Kanalstrahlen nicht gelitten haben.

Das Kanalrohr wurde mit einer Hg-Gaede-pumpe, mit Kapselpumpe als Vorvakuum, gepumpt und mit einem Induktorium betrieben. Um eine zu starke Erwärmung der Folien durch die auffallenden Kanalstrahlen zu vermeiden, wurde das Induktorium bei allen Aufnahmen intermittierend in Zwischenzeiten von mindestens 5 sec nur während je einer Sekunde in Betrieb gesetzt. Ich habe „Agfa“-Röntgenplatten für die Aufnahmen der Sekundärstrahlung und „Guilleminot“-Diapositivplatten für direkte Aufnahmen der Solarisationsbilder der Kanalstrahlen gebraucht.

Einfluß des Magnetfeldes auf die Schwärzung.

Läßt man unabgelenkte Kanalstrahlen auf die vor eine Röntgenplatte vorgelagerten Aluminiumfolien fallen, so erscheint hinter dem Ort, wo das Kanalstrahlenbündel die Folien trifft, eine kreisrunde ziemlich gleichmäßige diffuse Schwärzung. Als orientierende Vorversuche wurde der Einfluß der magnetischen Ablenkung der Kanalstrahlen auf die Intensität dieser Schwärzung untersucht. Zu diesem Zweck habe ich eine Reihe von Aufnahmen unter sonst gleichen Bedingungen mit verschiedenen starken Magnetfeldern ausgeführt. Die Kassette wurde dabei mit 5 Aluminiumfolien, jede ca 0,005 mm dick, lichtdicht abgeschlossen. Die Bestrahlung mit Kanalstrahlen dauerte für jede Aufnahme 5 Minuten. Alle Platten wurden in gleicher Weise mit Rodinal 1/20 entwickelt. Ich erhielt folgendes Resultat:

Ohne Magnetfeld erscheint die Schwärzung ziemlich intensiv, nimmt jedoch sehr stark ab nach Einschalten eines schwachen Magnetfeldes von einigen Gauß. Von ca 75 Gauß aufwärts bis ca 1700 Gauß ändert sich die Schwärzung kaum merklich, um dann wieder abzunehmen, so daß sie bei ca 5000 Gauß ganz deutlich schwächer ist als bei 1700 Gauß.

Diese Schwärzungsabnahmen lassen sich folgendermaßen deuten:

Die erste Abnahme der Schwärzung beim

Einschalten eines schwachen Magnetfeldes kann durch die Ablenkung der Striktionskathodenstrahlen, welche wegen mangelhafter Gleichrichterwirkung aus dem Entladungsraum durch den Kanal hineintreten und auf den Folien eine Röntgenstrahlung erregen, erklärt werden. Die weitere Abnahme der Schwärzung mit wachsendem Magnetfeld zwischen 1700 und 5000 Gauß läßt sich jedoch nur dadurch erklären, daß noch andere Ionen, die bedeutend schwerer ablenkbar sind als die Elektronen, an der Erregung der schwärzenden durchdringenden Strahlung teilnehmen.

Erregung einer durchdringenden Strahlung durch positive Ionen.

Bei den oben beschriebenen Versuchen war eine durchdringende Sekundärstrahlung der abgelenkten Ionen direkt durch Schwärzung nicht festzustellen. Dies wird begreiflich, wenn man bedenkt, daß die abgelenkten Ionen verschiedene Geschwindigkeiten haben und durch das Magnetfeld stark auseinandergezogen werden, so daß sie sich auf eine größere Fläche verteilen und dadurch bedeutend schwächer als früher wirken, wo sie alle auf den Zentralfleck konzentriert waren.

Eine direkte Feststellung einer durchdringenden Sekundärstrahlung der abgelenkten Ionen durch Schwärzung ist mir erst nach längeren Bestrahlungen von 20 bis 60 Minuten gelungen.

Die Fig. 2 (Tafel) zeigt eine solche Aufnahme, die mit einer Bestrahlung von 30 Minuten erhalten worden ist. Vor die Röntgenplatte waren 3 Aluminiumfolien vorgelagert, jede ca 0,005 mm dick. Das Magnetfeld betrug 3300 Gauß, das Entladungspotential entsprach einer Funkenstrecke von ca 30 mm Länge, zwischen Kugeln von ca 30 mm Durchmesser.

Die Fig. 3 (Tafel) zeigt eine direkte Solarisationsaufnahme des magnetischen Spektrums der Kanalstrahlen bei gleicher Feldstärke von 3300 Gauß und gleichen Entladungsbedingungen wie oben mit 30 sec Bestrahlung.

Aus dem Vergleich der beiden Aufnahmen erkennt man deutlich, daß die Strahlung, die der oberen Schwärzung (Fig. 2) entspricht, von dem Ort der Folien herkommt, wo sich das Maximum (Fig. 3) der abgelenkten Kanalstrahlen befindet. Die Tatsache, daß das Solarisationsmaximum (Fig. 3) der positiven Ionen etwas stärker abgelenkt ist, als das entsprechende Maximum der Sekundärstrahlung (Fig. 2), läßt sich ohne weiteres dadurch erklären, daß die photographische Platte bei den

Solarisationsaufnahmen um ca 3 mm weiter von den Polschuhen entfernt war, als die Aluminiumschicht bei den Aufnahmen der Sekundärstrahlung. Die Richtung dieser Ablenkung entspricht den positiv geladenen Teilchen, die auch sicher als solche an die Oberfläche der Folien kamen, da die Kassette unmittelbar hinter den Polschuhen liegt und bei dem benutzten Vakuum, von ca 0,001 mm Hg, auf dem kurzen Wege keine merklichen Umladungen stattfinden konnten.

Diese Aufnahmen beweisen einwandfrei, daß die positiven Ionen beim Aufprallen eine durchdringende Strahlung zu erregen imstande sind.

Ob auch die negativen Ionen die gleiche Eigenschaft besitzen, läßt sich aus diesem Versuch nicht schließen, da die negativ geladenen Teilchen sehr schwach vertreten waren.

Aus der Lage der oberen Schwärzung (Fig. 2) läßt sich die spezifische Ladung e/m der betreffenden positiven Ionen annähernd berechnen. Es ergibt sich die Größenordnung von 10^{13} in absoluten elektrostatischen Einheiten, was auf Sauerstoff- ev. Stickstoffionen hindeutet. Das gleiche ist auch aus dem Solarisationsbild (Fig. 3) ohne weiteres zu ersehen, da das Kanalrohr mit Luft gefüllt war und nach Retschinsky¹⁾ alsdann die Sauerstoff- und Stickstoff-Maxima auf den Solarisationsbildern am stärksten auftreten. Es ist aber sehr wahrscheinlich, daß auch andere Kanalteilchen die gleiche Eigenschaft, eine durchdringende Sekundärstrahlung zu erregen, besitzen.

Vermutungen über die Natur der Sekundärstrahlung.

In meiner ersten Abhandlung über diesen Gegenstand²⁾ habe ich auf Grund der Schwärzungsunterschiede, die ich damals je nach der Anordnung und Natur der Folien erhielt, die Vermutung ausgesprochen, daß es sich um die Erregung der charakteristischen Röntgenstrahlung der dort benutzten Metalle (Zinn und Blei) handelte. Die weiteren Versuche haben diese Vermutung nicht bestätigt. Es stellte sich nämlich bei Wiederholung der früheren Versuche stets eine gleichmäßige Schwärzung auf beiden Hälften gleich stark ein, ohne auch eine Spur von den früher beobachteten Schwärzungsunterschieden zu zeigen. Eine sorgfältige Prüfung dieser Diskrepanz führte auf eine äußerst verborgene Fehlerquelle in den ersten Versuchen. Es zeigte sich, daß bei allen früheren

1) T. Retschinsky, Ann. d. Phys. (4) 47, 539, 1915.
2) M. Wolfke, l. c.

Aufnahmen die sehr dünne Aluminiumfolie in der Mitte, wo die Folien zusammengepreßt waren¹⁾, unter der Wirkung der Kanalstrahlen sich wölbte (wahrscheinlich durch Erwärmung) und auf diese Weise nicht genügend dicht an den Messingstäbchen anlag. Dadurch entstanden feine Lücken auf der Aluminiumseite, durch welche Strahlungen direkt auf die andere Hälfte gelangten und gerade dort, wo eine stärkere Schwärzung erwartet wurde, eine solche hervorriefen und auf diese Weise einen Schwärzungsunterschied der beiden Hälften vortäuschten. Nachdem diese Fehlerquelle sorgfältig eliminiert wurde dadurch, daß eine von den Folien ohne Unterbrechung unter dem mittleren Messingstäbchen hindurchging, erschien hinter den Folien nur eine schwache gleichmäßige Schwärzung.

Auf Grund der neuen Versuche läßt sich nichts Sicheres über die Natur der Sekundärstrahlung aussagen. Es scheint nur, daß es sich hier um eine sehr weiche Strahlung handelt. Es genügt nämlich das Vorlagern einer Blattsilberfolie von weniger als 0,001 mm Dicke, um die obere Schwärzung (Fig. 2) zum Verschwinden zu bringen; eine vierte Aluminiumfolie von ca 0,005 mm Dicke zu den drei sonst benutzten zugefügt, schwächt die obere Schwärzung (Fig. 2) um mehr als die Hälfte. Eine rohe Schätzung ergibt für diese Strahlung einen größeren Absorptionskoeffizienten, als derjenige der charakteristischen Aluminiumstrahlung.

Zusammenfassung.

Es wurde mittels photographischer Schwärzungen unter Benutzung der magnetischen Ablenkung der Kanalstrahlen festgestellt, daß die positiven Kanalteilchen (Sauerstoff- ev. Stickstoff-Ionen) beim Aufprallen auf Aluminiumfolien eine durchdringende Strahlung erregen.

Die vom Verfasser auf Grund seiner früheren Versuche ausgesprochene Vermutung, daß die Kanalteilchen die charakteristische Röntgenstrahlung der schweren Metalle (Zinn und Blei) erregen können, hat sich nicht bestätigt, es scheint vielmehr, daß es sich bei diesem Effekt um eine sehr weiche Strahlung handelt.

1) M. Wolfke, l. c. Vgl. Fig. 2.

Zürich, Phys. Inst. d. Eidg. Techn. Hochschule, Februar 1918.

(Eingegangen 2. März 1918.)

Die Muttersubstanz des Actiniums, ein neues radioaktives Element von langer Lebensdauer.

Von Otto Hahn und Lise Meitner.

Das Actinium ist unter allen radioaktiven Elementen dasjenige, dessen Eigenschaften bisher am wenigsten sichergestellt sind. Selbst seine Einreihung in das radioaktive Zerfallsschema kann noch nicht eindeutig vorgenommen werden. Daß das Actinium in einem genetischen Zusammenhang zum Uran steht, wurde im Jahre 1908 von Boltwood wahrscheinlich gemacht¹⁾. Er zeigte, daß sich Actinium in allen Uranmineralien in einem Betrage vorfindet, der sich — innerhalb der durch die Meßschwierigkeiten gegebenen Fehlergrenzen — als proportional dem Urangehalt erwies. Da die Gesamtaktivität des Actiniums im Gleichgewicht mit seinen Zerfallsprodukten nach den Boltwoodschen Befunden nur 28 Proz. der Aktivität des Urans in einem Mineral beträgt, so schloß Rutherford²⁾, daß das Actinium eine Seitenlinie in der Uranreihe vorstelle und berechnete aus der mittleren Reichweite der α -Strahlen der Actiniumprodukte, daß nur 8 Proz. der Substanz, bei welcher die Abzweigung stattfindet, in Actinium umgewandelt werden.

Es handelte sich nun darum, in der Uranreihe dasjenige Produkt aufzufinden, dessen dualer Zerfall Ausgangspunkt für die Actiniumreihe ist und festzustellen, ob und über welche Zwischenprodukte die Actiniumentstehung vor sich geht. Um zu entscheiden, ob ein Nachweis der Actiniumbildung überhaupt angestrebt werden kann, muß man wenigstens die Größenordnung der Lebensdauer des Actiniums kennen. Im Jahre 1911 teilte Frau Curie³⁾ Beobachtungen mit, aus denen hervorging, daß die Halbwertszeit des Actiniums etwa 30 Jahre beträgt. Diese Angabe ist zwar bisher vereinzelt geblieben, doch sprechen auch andere Umstände dafür, daß Actinium eine verhältnismäßig kurze Lebensdauer besitzen muß, so z. B. die Tatsachen, daß Giesel⁴⁾ an hochaktiven Präparaten im Funkenspektrum keine neuen Linien beobachten konnte, und daß Auer v. Welsbach an Lanthan konzentriertes Actinium herstellte, das 100 000 mal stärker aktiv war als die gleiche Gewichtsmenge Uran.

Auch wir haben seit einer Reihe von Jahren ein Actiniumpräparat in elektroskopischer Untersuchung, das eine deutliche Abnahme der Akti-

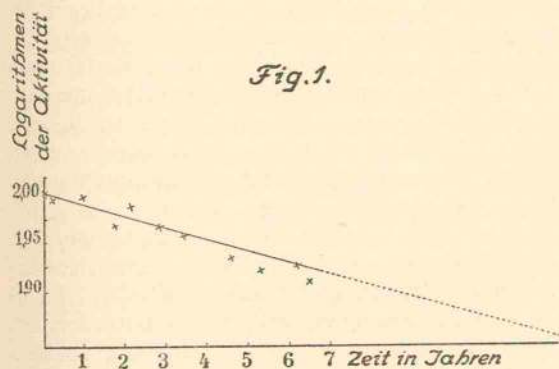
1) B. B. Boltwood, Sill. Journ. 25, 269, 1908.

2) E. Rutherford, Radioaktive Substanzen. 1913. S. 497.

3) Mme Curie, Le Radium 8, 353, 1911.

4) F. Giesel, Ber. d. D. Chem. Ges. 37, 1696, 1904.

tät zeigt und zwar in der Größenordnung, wie sie der von Frau Curie angegebenen Lebensdauer entspricht. Die Messungen, die in Fig. 1 wiedergegeben sind, sind nicht so übereinstimmend, daß man eine genaue Halbwertszeit angeben könnte. Aber sie lassen jedenfalls deutlich erkennen, daß die Halbwertszeit des Actiniums zwischen 25 und 30 Jahren liegen dürfte. Als Abszissen sind in



der Fig. 1 die Zeiten in Jahren, als Ordinaten die Logarithmen der Aktivität aufgetragen.

In den Jahren 1913 und 1914 hat Herr Dr. Reisenegger zu anderen Zwecken eine größere Anzahl sehr reiner Actiniumpräparate in unserem Laboratorium hergestellt, die genauer als das oben erwähnte Präparat gemessen werden können. Auch diese zeigen eine deutliche Abnahme, so daß die relativ kurze Lebensdauer des Actiniums wohl außer Zweifel steht.

Entstände daher das Actinium direkt aus Uran oder einem seiner Zerfallsprodukte, so müßte sich dessen Bildung mühelos nachweisen lassen. Gleichwohl gibt Soddy in seiner im Jahre 1911 erschienenen Chemie der Radioelemente an, daß bisher keine Erzeugung von Actinium aus Uran oder irgendeinem seiner Zerfallsprodukte beobachtet worden ist. Man war demnach gezwungen, für das Actinium noch eine langlebige Muttersubstanz anzunehmen, ohne aber über deren chemische oder radioaktive Eigenschaften das geringste aussagen zu können.

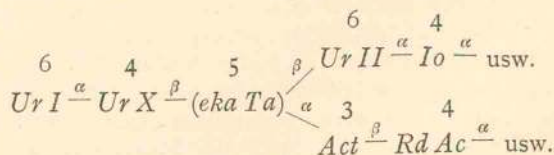
Einen wesentlichen Schritt vorwärts wurde diese Frage gebracht, als auf Grund der neueren Arbeiten von v. Hevesy, Russell, Soddy und Fajans eine Einreihung der radioaktiven Substanzen in das periodische System vorgenommen werden konnte.

Russell¹⁾ hatte schon, durch die von ihm allerdings noch unvollkommen erkannte Verschiebungsregel geleitet, für die Uranreihe das Schema aufgestellt

1) A. S. Russell, Chem. News 107, 49, 1913.

$${}^6\text{UrI} \xrightarrow{\alpha} {}^4\text{UrX}_1 \xrightarrow{\beta} {}^5\text{UrX}_2 \xrightarrow{\beta} {}^6\text{UrII} \xrightarrow{\alpha} {}^4\text{Io} \xrightarrow{\alpha} {}^2\text{Ra usw.},$$
 wobei die beigesetzten Zahlen die Wertigkeit des betreffenden Elements anzeigen.

UrX_2 war damals noch nicht gefunden und nur hypothetisch von Russell eingeführt worden. In einem kurz darauf erschienenen Aufsatz über die Radioelemente und das periodische System griff Soddy¹⁾ das Russellsche Schema auf, wobei er nur UrX_2 durch die Bezeichnung (*Eka Ta*) ersetzte, um auszudrücken, daß dieses unbekannte Element ein höheres Homologes des Tantal sein müßte. Er betonte, daß wenn dieses α -Strahlen aussenden sollte, es eine sehr lange Lebensdauer besitzen müsse. Soddy hatte nämlich, um die Stellung des Ioniums in der Uranreihe festzulegen, im Jahre 1909 Versuche darüber angestellt, ob sich die Entstehung einer α -strahlenden Substanz aus sehr starken UrX -Präparaten, die aus 50 kg Uranylinitrat gewonnen waren, nachweisen ließe. Er hatte damals eine äußerst geringe α -Aktivität gefunden, die sich aber während einer längeren Beobachtungsdauer als konstant erwies. In der zitierten Arbeit vom Jahre 1913 kam Soddy auf diese Untersuchungen zurück und berichtete, daß er seinerzeit die Uran X-Präparate durch Messung des gesammelten aktiven Niederschlags auch auf Actinium geprüft und im Verlaufe von etwa $2\frac{1}{2}$ Jahren eine ganz schwache Zunahme der Aktivität beobachtet habe. Er schloß daraus, daß das Actinium über eine langlebige Zwischensubstanz, nämlich das Ekatantal aus UrX entsteht und stellte folgendes Schema auf:



Soddy nahm hierbei, gestützt auf Versuche von Fleck an, daß Actinium dreiwertig sei.

Kurz darauf wurde von Fajans und Göhring tatsächlich ein β -strahlendes Umwandlungsprodukt des UrX gefunden²⁾, das UrX_2 oder Brevium, wie es von Fajans benannt wurde. Es erwies sich aber im Gegensatz zu den Soddyschen Voraussetzungen als äußerst kurzlebig. Wir selbst hatten im Anschluß an Untersuchungen über die komplexe Natur des Radioactiniums³⁾ auch die Stellung des Actiniums in der Uranreihe diskutiert und darauf verwiesen,

1) F. Soddy, Chem. News 107, 97, 1913.

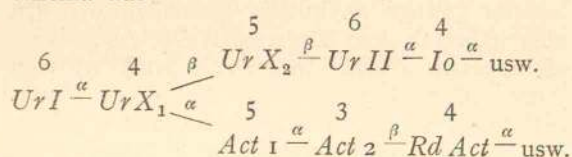
2) K. Fajans und O. Göhring, diese Zeitschr. 14, 877, 1913.

3) O. Hahn u. L. Meitner, diese Zeitschr. 14, 752, 1913.

daß das Soddysche Schema durch die Auf-
findung des kurzlebigen UrX_2 , dessen Existenz
und Halbwertszeit wir gleichzeitig bestätigten,
unhaltbar geworden sei.

Die gleiche Schlußfolgerung zog auch Fa-
jans¹⁾. Aber er suchte diese Schwierigkeit da-
durch zu lösen, daß er zwischen zwei auch von
Soddy erwogenen möglichen Fällen unterschied.
Ist Actinium dreiwertig, so sollte es nach Fa-
jans aus einem β -strahlenden zweiwertigen Kör-
per entstehen, für welchen nur Radium in Be-
tracht kam. Ist es zweiwertig, so kam eine
Entstehung aus einem α -strahlenden vierwertigen
Körper in Frage, nämlich dem Ionium.

Wir hingegen mußten gerade auf Grund
unseres Resultats, daß Radioactinium nicht
komplex ist, die Möglichkeit, daß Actinium
zweiwertig ist, ablehnen und stellten daher unter
Berufung darauf, daß erhebliche Mengen Acti-
niums in alten Radiumpräparaten niemals beob-
achtet worden waren, das folgende Zerfalls-
schema auf:



Wir bezeichneten also mit $Act I$ die 5-wertige,
 α -strahlende, mit UrX_2 isotope, langlebige
Muttersubstanz des Actiniums, und berechneten,
daß die α -Aktivität dieser Substanz sich zu etwa
3 Proz. an der Aktivität des Urans beteiligen
müßte.

Die von anderer Seite angestellten experi-
mentellen Untersuchungen stützten unser Schema.
Soddy²⁾ konnte in 13,5 mg Radium, das 10
Jahre lang unverändert eingeschmolzen gewesen
war, kein Actinium nachweisen und schloß
daraus, daß Radium nicht die Muttersubstanz
des Actiniums sein könnte und daß das von
uns vorgeschlagene Schema das einzig mög-
liche sei.

Auch Fajans und Paneth³⁾ fanden weder
in einem 6 Jahre alten Radiumpräparat von
180 mg Stärke, noch in einem starken, 4 Jahre
alten Thorium-Ionioxalat Actinium. Damit
war also erwiesen, daß als Muttersubstanz des
Actiniums nur ein Isotop des UrX_2 in Betracht
käme.

Bald darauf konnten wir die Existenz des
von Antonoff⁴⁾ gefundenen, von Fleck be-

strittenen UrY bestätigen und seine chemische
Natur als identisch mit UrX_1 feststellen¹⁾, ein
Resultat, das auch Soddy²⁾ gleichzeitig erhalten
hatte. Da das UrY β -Strahlen aussendet, muß
es sich in ein Isotop des UrX_2 verwandeln.
Da es außerdem nur zu wenigen Prozents aus
Uran entsteht, so lag die Annahme nahe, daß
sein Umwandlungsprodukt die gesuchte Mutter-
substanz des Actiniums sei, welche Möglichkeit
sowohl von Antonoff als von Soddy in Er-
wägung gezogen wurde. Aber gleichzeitig be-
richtete Soddy³⁾, daß er beim Zerfall von
 $UrX + UrY$ keine entstehende α -Aktivität habe
nachweisen können. Dieselbe Frage wurde dann
von O. Göhring⁴⁾ einer Untersuchung unter-
zogen, über deren Resultat er zusammenfassend
sagt: „Es wurden einige Versuche zur Auf-
findung eines neuen Gliedes der Breviumplejade
ausgeführt, das eventuell als Muttersubstanz des
Actiniums in Betracht kommen könnte. Es ist
aber nicht gelungen, ein solches nachzuweisen,
weder in Pechblende, noch bei Ionium, noch bei
 UrY .“

Die Muttersubstanz des Actiniums blieb also
nach wie vor unbekannt, so daß St. Meyer
und E. v. Schweidler in ihrem im Jahre 1916
erschienenen Lehrbuch⁵⁾ die Meinung äußerten,
es sei fraglich, ob diese Substanz tatsächlich in
der 5. Gruppe zu suchen sei.

Wir hatten indessen die an das von uns
früher aufgestellte Schema anknüpfenden Ver-
suche fortgesetzt. Anfangs gingen wir von Uran-
nitrat verschiedenen Alters aus, in der Er-
wägung, daß sich in älteren Uranproben mög-
licherweise schon nachweisbare Mengen des
gesuchten Körpers gebildet haben könnten. Da
wir zufällig im Besitze eines mindestens 25 Jahre
alten, nicht verarbeiteten Uransalzes waren,
wurden gleiche Mengen dieses alten und eines
neuen Uransalzes in Wasser gelöst und unter
identischen Bedingungen mit Tantalsäure ge-
schüttelt, ein Verfahren, das wir früher zur
Trennung des UrX_2 erfolgreich verwendet
hatten⁶⁾. Die Filter aus dem alten Uran waren
in der Tat viel stärker aktiv als die aus dem
neuen, doch nahm die Aktivität ab. Sie bestand
aus UrX , Polonium und etwas Ionium. Die
Aktivitäten wurden mit längeren Pausen bis
Januar 1917 verfolgt, um zu prüfen, ob die

1) O. Hahn u. L. Meitner, diese Zeitschr. 15, 236, 1914.

2) F. Soddy, Phil. Mag. (6) 27, 215, 1914.

3) l. c.

4) O. Göhring, diese Zeitschr. 15, 642, 1914.

5) St. Meyer u. E. v. Schweidler, Radioaktivität, 1916, S. 378.

6) O. Hahn und L. Meitner, diese Zeitschr. 14, 758, 1913.

1) K. Fajans, diese Zeitschr. 14, 136—142, 1913.

2) Soddy, Nature 91, 634, 1913.

3) K. Fajans u. F. Paneth, Wien. Ber. 123, 1627, 1914.

4) G. N. Antonoff, Phil. Mag. (6) 26, 1058, 1913.

Aktivität der Präparate, die zunächst natürlich abnahm, nach einiger Zeit zunehmen würde. Es konnten aber dabei keine sicheren Resultate erzielt werden.

Eine zweite Reihe Versuche, die Ende 1913 ausgeführt wurden, bestand darin, daß Pechblende zusammen mit einem tantalhaltigen Mineral (Columbit oder Samarskit) mit Natriumbisulfat aufgeschlossen, der in heißem Wasser ungelöste Teil, der Tantal, Niob usw. enthalten muß, zur Lösung der Erdsäuren mit Schwefelsäure + Wasserstoffsuperoxyd behandelt und das Tantal mit Schwefeldioxyd ausgefällt wurde. Die anfangs immer vorhandene α -Aktivität, die zum großen Teile von Polonium und Ionium herührte, wurde beim häufigen Umfällen so schwach, daß sie keine einwandfreien Beobachtungen mehr zuließ.

Da die Muttersubstanz des Actiniums besonders bei der voraussichtlich geringen Reichweite ihrer α -Strahlen sich an der Gesamtaktivität der Pechblende nur sehr wenig beteiligen kann, so mußten die in viel größerem Prozentsatz vorhandenen durch Adsorption mitgerissenen Mengen von Ionium und Polonium den Nachweis der gesuchten Substanz sehr erschweren, wenn nicht unmöglich machen.

Wir suchten daher nach einem geeigneteren Ausgangsmaterial und vermuteten ein solches in den hauptsächlich aus Kieselsäure bestehenden Rückständen der Pechblende, die ungelöst zurückbleiben, wenn Pechblende mit Salpetersäure behandelt wird. Diese Rückstände enthalten bei sorgfältigem Arbeiten Radium, Radioblei und Ionium nur in sehr kleinen Mengen, dagegen praktisch die Gesamtmenge an Tantal ähnlichen Substanzen des Ausgangsmaterials. Die gesuchte Substanz mußte also hier im Verhältnis zu Radium usw. schon angereichert vorhanden sein. Eine Stütze für diese Vermutung bot die Tatsache, daß eine Probe Kieselsäure, die vor längerer Zeit aus Pechblende hergestellt worden war, neben schwacher Thoriumemanation auch deutlich eine geringe Menge Actiniumemanation nachzuweisen gestattete.

Aus äußeren Gründen wurden die Versuche erst Anfang 1917 wieder aufgenommen und auch da konnte sich der eine von uns an ihrer Durchführung nur zeitweise beteiligen.

Die Vermutung, daß die Pechblenderückstände das geeignete Versuchsmaterial bieten, hat sich bewährt. Es ist uns gelungen, ein neues aktives Element aufzufinden und den Beweis zu erbringen, daß es die Muttersubstanz des Actiniums ist. Wir schlagen dafür den Namen Protactinium vor.

Darstellung des Protactiniums.

a) Versuche im kleinen aus Uranpechblende.

21 g pulverisierte Pechblende wurden mehrmals mit starker Salpetersäure gekocht. Der nicht in Lösung gegangene Rückstand, der zum Teil aus unangegriffener Gangart, zum Teil aus fein verteilter Kieselsäure bestand, wurde abfiltriert, sorgfältig ausgewaschen und getrocknet, die flockig ausgeschiedene Kieselsäure von der Gangart durch Schlämmen getrennt und ihr Gewicht zu 2 g bestimmt.

1,5 g dieser SiO_2 wurden in ein Messing-schälchen gebracht, um auf Aktivitätsänderungen untersucht zu werden, die weiter unten noch näher besprochen werden sollen.

Die übrigen 0,5 g SiO_2 wurden mit einigen Milligramm Kaliumtantalfluorid versetzt, im Platintiegel mehrmals mit Flußsäure behandelt, nach Verdünnen mit Wasser durch einen Paraffintrichter filtriert und erst mit verdünnter HF , schließlich mit reinem Wasser ausgewaschen. Das Filter mit der ungelösten Substanz wurde verascht und gewogen. Es waren 4,6 mg. Der weitaus größte Teil des Ausgangsmaterials war also in Lösung gegangen.

Das klare Filtrat wurde eingedampft und mit konzentrierter H_2SO_4 abgeraucht. Dabei blieb ein ziemlich beträchtlicher Rückstand, der beweist, daß das Ausgangsmaterial außer SiO_2 noch Fe , Erden usw. enthielt.

Die Hälfte der abgerauchten Substanz wurde mit starker HNO_3 wiederholt gekocht, wobei der größte Teil in Lösung ging. Die geringen, unlöslich gebliebenen, etwas rötlich gefärbten Flocken (durch Spuren Eisen verunreinigtes Tantal) wurden getrocknet und auf einem Aluminiumblech montiert. Es sei hier als Präparat 1 bezeichnet.

Nach unserer Voraussetzung mußte mit dem so gewonnenen Tantal die Muttersubstanz des Actiniums abgetrennt sein. Da die Muttersubstanz α -Strahlen besitzt (von voraussichtlich geringerer Reichweite als die Folgeprodukte), so mußte unser Präparat eine starke α -Aktivität aufweisen, die in Anbetracht der Lebensdauer des Actiniums trotz der 5 α -strahlenden Folgeprodukte nur sehr langsam zunehmen konnte. Schaltete man dagegen die langsame α -Strahlung der Muttersubstanz des Actiniums aus, so mußte eine sehr viel schnellere, fast von Null ansteigende Aktivitätszunahme beobachtet werden. (An eine Messung der β -Aktivität konnte bei dem schwachen Präparat nicht gedacht werden.)

Um obige Punkte zu prüfen, wurde das Präparat 1 einmal in einem gewöhnlichen α -Strahlen-Elektroskop untersucht, außerdem aber noch in einem durch 0,02 mm Aluminium abgeschlossenen

Elektroskop. Da das Präparat etwa 1 cm vom Boden der Ionisationskammer entfernt war, so konnten in diesem zweiten Fall α -Strahlen von geringer Reichweite nur wenig mitgemessen werden. Das Resultat entsprach unseren Überlegungen.

Die im α -Strahlen-Elektroskop gemessene Aktivität blieb während vieler Wochen praktisch konstant und ließ allmählich eine ganz langsame Zunahme erkennen. Die Messungen im abgeschlossenen Elektroskop ergaben dagegen eine deutlich zunehmende Aktivität, deren Stärke nach mehreren Wochen auf das Doppelte des anfänglichen Wertes gestiegen war.

Die ursprünglich vorhandene Substanz besitzt also eine α -Strahlung geringer Reichweite und wandelt sich in Produkte mit schnelleren α -Strahlen um.

Der einwandfreieste Beweis, daß die Aktivitätszunahme von der Actiniumnachbildung herrührte, wäre natürlich durch die Messung des aktiven Niederschlages oder der Emanation zu erbringen gewesen. Da hierfür die uns damals zur Verfügung stehenden Präparate zu schwach waren, wählten wir den indirekten Weg, alle anderen in Betracht kommenden Produkte auszuschließen.

Nach dem chemischen Verhalten der Substanz und der geringen Reichweite der ursprünglichen Strahlung konnte diese, falls sie einem der schon bekannten Produkte angehören sollte, nur von Radium *D* oder von Ionium herrühren. Polonium allein war schon durch die Zunahme der α -Aktivität ausgeschlossen.

Um zu entscheiden, ob bei dem gewählten Abtrennungsverfahren *RaD* oder Ionium mitabgeschieden worden war, wurde folgender Versuch gemacht.

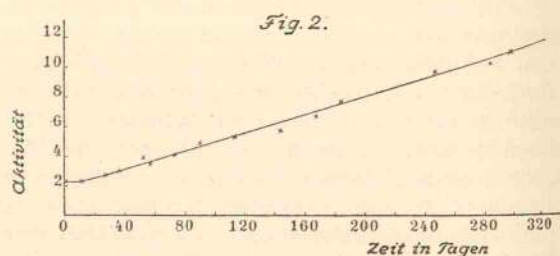
0,3 g eines Kieselsäurerückstandes wurden mit einigen Milligramm Tantalsäure, etwa 2 mg $Pb(NO_3)_2$ und außerdem mit in ihrer Aktivität leicht nachweisbaren Mengen von *UrX* und *ThB* versetzt. *UrX* ist mit Ionium isotop, *ThB* mit *RaD*. Sie konnten daher als Indikatoren für die beiden auszuschließenden Produkte dienen. Das Gemisch wurde nun ganz wie der erste Kieselsäurerückstand behandelt. Es resultierten hierbei drei Produkte: Erstens der in Flußsäure unlösliche Teil, der hauptsächlich seltene Erden, somit auch das Ionium bzw. *UrX* enthalten muß. Zweitens der in *HF* lösliche Teil, der selbst wieder in zwei Teilprodukte zerfällt, nämlich in das nach dem Abrauchen mit H_2SO_4 unlösliche Tantal mit der zu prüfenden α -strahlenden Substanz und einen in HNO_3 löslichen Bestandteil, der mittels NH_3 ausgefällt wurde. Alle drei Filter wurden auf Aktivitätsänderungen geprüft.

Obwohl sich das ganze *ThB* bei dem in Flußsäure unlöslichen Produkt und der überwiegende Teil des *UrX* in eben diesem unlöslichen Teil und im Ammoniakniederschlag fand, war die konstante α -Aktivität wieder beim Tantal und damit erwiesen, daß diese weder von Ionium noch von *RaD* herrühren kann.

Die einzig möglichen bekannten radioaktiven Produkte waren also auf diese Weise ausgeschlossen worden.

Der weitere zeitliche Verlauf der Anstiegs-kurve des Präparats 1 lieferte einen neuen Beweis, daß die entstehende α -Strahlung weder von Zerfallsprodukten des Ioniums noch des *RaD* herrühren könne. Denn einerseits ist die Zunahme der durchdringenden α -Strahlung viel größer als der Nachbildung von Radium aus Ionium entspricht, andererseits erfolgt sie seit mehr als 10 Monaten vollkommen gradlinig, während die Polonium-Anstiegs-kurve schon nach 6 Monaten ein deutliches Langsamerwerden der Nachbildung erkennen läßt.

Die Kurve der Fig. 2 gibt die Aktivitätszunahme der durchdringenden α -Strahlung des Präparats 1 wieder. Als Abszissen sind die Zeiten in Tagen, als Ordinaten die Aktivitäten in willkürlichen Einheiten aufgetragen.



Der gradlinige Verlauf der Kurve entspricht der Nachbildung eines verhältnismäßig langlebigen Produkts aus einem Mutterprodukt von langer Lebensdauer. Wie weiter oben erwähnt worden ist, hatten wir nur einen kleinen Teil des unlöslichen Rückstandes der Pechblende verarbeitet, der größte Teil wurde direkt auf Aktivitätsänderungen untersucht. Die Messungen ergaben auch hier nach einer geringen anfänglichen Abnahme eine starke gradlinige Zunahme der durchdringenden α -Strahlung, ein Beweis, daß die Kieselsäurerückstände der Pechblende die neue Substanz enthalten und daher tatsächlich das geeignete Ausgangsmaterial für ihre Darstellung bieten.

Die vorstehend beschriebenen Versuche zeigen, daß die mit dem Tantal abgeschiedene α -Strahlung einem neuen bisher unbekannten radioaktiven Element angehört, das wahrschein-

lich die Muttersubstanz des Actiniums ist. Um diese Wahrscheinlichkeit zur absoluten Sicherheit zu erheben, mußten Versuche mit größeren Mengen Ausgangsmaterial durchgeführt werden.

b) Versuche mit Rückständen der technischen Radiumverarbeitung.

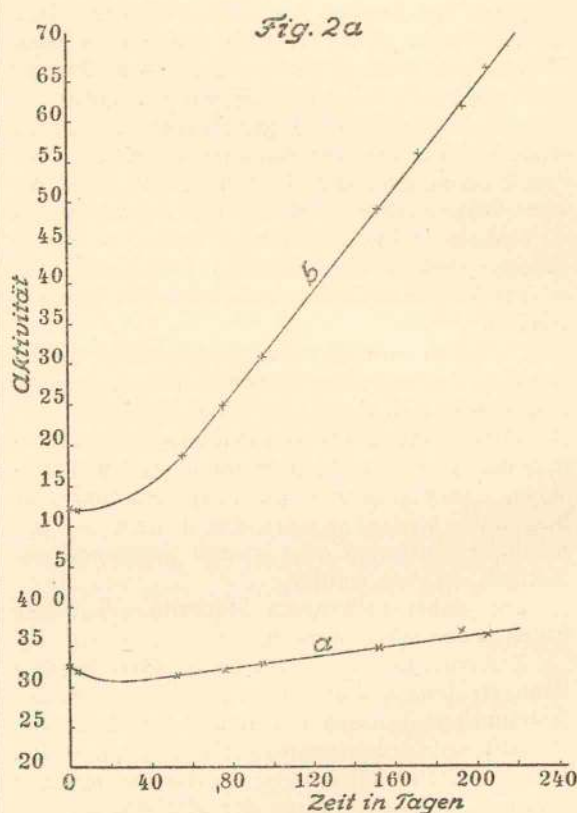
Die Chininfabrik Buchler & Co. in Braunschweig sandte uns auf unsere Bitte einige 100 g Rückstände aus alten Radiumverarbeitungen. Wir möchten auch an dieser Stelle für die freundliche Unterstützung unsern besten Dank aussprechen. Die Rückstände stammen nach persönlicher Mitteilung des Herrn Prof. Giesel von Radiumverarbeitungen hochprozentiger Pechblende. Nach einigen Vorversuchen wurde das Material im Achatmörser möglichst fein pulverisiert, dann einige Milligramm Tantalsäure zugefügt und dreimal in 25 proz. HCl gekocht, abfiltriert, getrocknet und gewogen. Es zeigte sich, daß mehr als die Hälfte der Substanz in Lösung gegangen war. Eine oberflächliche Untersuchung der Salzsäurelösung ergab als wesentlichen Bestandteil Eisen, bzw. ähnliche Metalle und etwas seltene Erden.

Der in HCl unlösliche Teil wurde nach Zusatz von einigen Milligrammen Thorinitrat in derselben Weise wie früher der Kieselsäurerückstand aus der Pechblende behandelt, also wieder auf Tantal verarbeitet.

Wir haben nach dieser Methode mehrere Präparate hergestellt, und sie in den oben beschriebenen Elektroskopen auf ihre Aktivitätsänderungen untersucht. Alle zeigten das gleiche Verhalten. Die Messungen in dem offenen α -Strahlen-Elektroskop ließen zunächst eine geringe Abnahme der Aktivität erkennen, die, wie wir durch besondere Versuche feststellten, von kleinen Mengen Polonium herrührten. Aber schon nach 2 Monaten war eine deutliche, wenn auch langsame Zunahme der Aktivität bemerkbar.

Die Messungen in dem mit 0,02 mm Aluminium verschlossenen Elektroskop zeigten die anfängliche Abnahme viel weniger ausgeprägt und eine bedeutend raschere Zunahme der Aktivität. Das ist auch leicht verständlich. In dem offenen α -Elektroskop werden die α -Strahlen des Poloniums voll ausgenützt und daher muß seine Abnahme sich stärker bemerkbar machen als in dem abgeschlossenen, in welchem der größte Teil der Energie der Polonium- α -Strahlen schon außerhalb des Ionisationsraumes verbraucht wird. Die schnellere Zunahme im abgeschlossenen Elektroskop entspricht natürlich wieder dem Umstande, daß die α -Strahlen der mit dem Tantal abgetrennten neuen Substanz nicht mitgemessen werden.

Die Kurven a und b der Fig. 2a geben für eines der aus den Radiumrückständen hergestellten Präparate die Aktivitätsänderungen wieder, und zwar bezieht sich Kurve a auf die Messungen im offenen α -Strahlen-Elektroskop, Kurve b auf die Messungen im verschlossenen Elektroskop.



Beide Kurven zeigen die eben besprochene geringe anfängliche Abnahme. Die Kurve b weniger ausgeprägt als Kurve a. Die Aktivität der Kurve a besitzt zur Zeit Null einen beträchtlichen Wert entsprechend der α -Strahlung der neuen Substanz und steigt dann ganz langsam an. Der Anstieg der Kurve b geht nach Abzug der Poloniumstrahlung fast vom Werte Null an und erfolgt sehr viel rascher. Aus dem α -Anstieg kann man unter der sicher berechtigten Annahme, daß die Lebensdauer des Actiniums klein ist im Verhältnis zu der seiner Muttersubstanz, die Lebensdauer des Actiniums nach der Gleichung berechnen:

$$J_t = J_0 + k J_0 (1 - e^{-\lambda t}).$$

Dabei bedeutet J_0 die von der Muttersubstanz allein herrührende Aktivität, also die Aktivität zur Zeit Null, k den Faktor der relativen Beteiligung der nachgebildeten α -Strahlen an der

Ionisation, λ die Zerfallskonstante des Actiniums und J_t den Wert der Aktivität zur Zeit t .

Für eine genauere Berechnung ist die Dauer unserer Messungen noch zu kurz. Eine rohe Überschlagsrechnung ergab, daß die Größenordnung des oben für die Halbwertszeit des Actiniums angegebenen Wertes stimmt.

Es wurde nun auch versucht, mit demselben Präparat den Anstieg des aktiven Niederschlags nachzuweisen. Das Präparat wurde zu diesem Zwecke auf einer geerdeten Platte von Zeit zu Zeit mehrere Stunden lang einer negativ geladenen Messingplatte gegenübergestellt und die letztere dann auf ihre Aktivität geprüft. Etwa drei Wochen nach der Herstellung des Präparats war kein aktiver Niederschlag nachzuweisen, 5 Monate danach war eine leicht meßbare Menge aktiven Niederschlags vorhanden und seither konnte die Zunahme einwandfrei verfolgt werden.

Natürlich wurde der gesammelte aktive Niederschlag auf seine zeitliche Abnahme geprüft und erwies sich dabei als reines *Ac B*.

Eine andere Probe aus demselben Ausgangsmaterial wurde auf Actiniumemanation untersucht. Anfangs war keine Emanation nachweisbar; nach Verlauf einiger Zeit konnte das allmähliche Auftreten und stetige Stärkerwerden deutlich erkannt werden.

Die dabei verwendete Methode soll weiter unten beschrieben werden.

Die vorstehenden Versuche ergaben den eindeutigen Beweis, daß wir die Muttersubstanz des Actiniums in Händen haben und daß diese eine verhältnismäßig langsame α -Strahlung aussendet. Um quantitative Messungen der Reichweite dieser Strahlen und des Ganges der Nachbildung der Emanation und des aktiven Niederschlages ausführen zu können, bedurfte es sehr viel stärkerer Präparate.

Da uns die notwendigen Mengen Ausgangsmaterial nicht zur Verfügung standen und außerdem die Verarbeitung größerer Mengen im Laboratoriumsbetrieb unter den jetzigen Verhältnissen sehr schwer vorgenommen werden kann, wandten wir uns an Herrn Prof. Giesel mit der Bitte, ob er 1 kg der Rückstände seiner Radiumherstellung nach unsern Angaben zu verarbeiten geneigt wäre. Herr Prof. Giesel hatte die große Güte, diese Arbeit für uns auszuführen und hat uns so in den Stand gesetzt, die weiter unten beschriebenen Versuche vorzunehmen. Wir möchten Herrn Prof. Giesel für sein großes Entgegenkommen und seine wertvolle Hilfe auch an dieser Stelle herzlich danken.

Die Aufarbeitung der 1-kg-Rückstände wurde nach derselben Methode vorgenommen, wie wir sie für die kleinen Mengen angewendet hatten.

Vor der Behandlung mit *HCl* wurden 50 mg Tantalsäure zugesetzt und dann der oben beschriebene Prozeß einmal durchgeführt. Das uns von Herrn Prof. Giesel gesandte Verarbeitungsprodukt wog nur mehr 16 g. Mit diesem Produkt wurde nach Zusatz von weiteren 5 mg Tantalsäure die Flußsäure-Schwefelsäure-Verarbeitung mehrmals wiederholt. Bei der letzten Verarbeitung blieben als in *HF* ungelöster Rückstand einige Milligramm sehr schwach aktiver Substanz zurück. Das mit *H₂SO₄* abgerauchte Tantal wurde mit starker Salpetersäure behandelt und die dabei in Lösung gegangene geringe Menge erwies sich als fast inaktiv.

Die mit dem Tantal abgeschiedene Hauptmenge, ein weißes Pulver von 73 mg Gewicht, war über 1000 mal stärker aktiv als die abgetrennten Mengen, ein Beweis, daß die gesuchte Substanz durch das angewendete Abtrennungsvorgehen schon einen hohen Grad radioaktiver Reinheit erreicht hat.

Um zu sehen, wieviel mal stärker aktiv unser Präparat sei als die gleiche Gewichtsmenge Uran, wurde die α -Aktivität von 5 mg des Präparats mit der α -Aktivität einer dünnen Schicht Uranoxyd (5,7 mg) verglichen. Es ergab sich, daß, Gewicht für Gewicht gerechnet, das Tantalpräparat 46 mal stärker aktiv ist, als *Ur I + II*, also 92 mal stärker als *Ur I*. Berücksichtigt man ferner, daß nur 8 Proz. der Uranatome beim Zerfall Anlaß zur Bildung des Protactiniums geben, so entsprechen die 73 mg in ihrer Aktivität einer Menge Protactinium, die mit 86 g Uran im Gleichgewicht steht. Dabei ist vom Einfluß der Reichweiten abgesehen.

Aus diesen 73 mg wurden nun mehrere Präparate hergestellt. Etwa 25 mg wurden mit Chloroform angerührt und in möglichst gleichmäßiger dünner Schicht auf 3 Aluminiumbleche von 1,6 cm Radius aufgestrichen, und zwar auf Aluminiumblech 1 9,5 mg, auf Blech 2 6,8 mg und auf Blech 3 5,0 mg.

45 mg wurden in dünnes Seidenpapier eingehüllt und in ein kleines Chlorkalziumröhrchen gebracht, um auf Emanation geprüft zu werden.

Mit diesen Präparaten wurden nun die definitiven Reichweitemessungen, Emanations- und Niederschlagsbestimmungen ausgeführt.

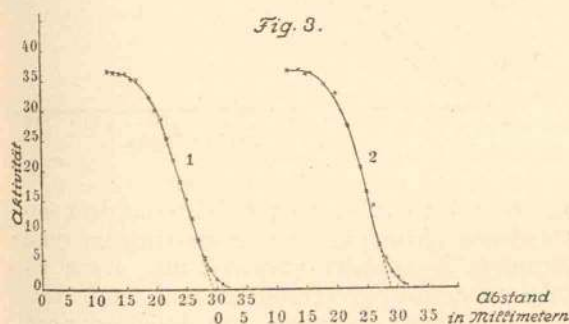
Bestimmung der Reichweite der α -Strahlen des Protactiniums.

Zur Bestimmung der Reichweite diente die Methode von Bragg und Kleeman¹⁾, in Verbindung mit einem etwas modifizierten Wilsonschen Elektroskop. Der Kondensator bestand

1) Bragg u. Kleeman, Phil. Mag. 1904.

aus einer in eine Metallbüchse isoliert eingeführten Messingscheibe und dem Deckel der Büchse, dessen zentraler Teil entfernt und durch ein Aluminiumblättchen von 0,0039 mm Dicke ersetzt worden war. Die Höhe des Kondensators betrug etwa 2 mm. Die zu untersuchende Substanz wurde auf ein längs einer Millimeterteilung senkrecht verschiebbares Tischchen gebracht. Um schräge Strahlen nach Möglichkeit auszuschließen, wurde über die Substanz eine Bleibende von 5 mm Höhe gebracht, die mit Löchern von 1,5–2,5 mm Radius versehen war.

Als Strahlenquelle dienten die 9,5 mg des Aluminiums 1. Das Resultat der Messung zeigt Fig. 3 Kurve 1. Als Abszissen sind die Entfernungen der Strahlenquelle vom Kondensator in Millimetern, als Ordinaten die Aktivitäten in willkürlichem Maßstab aufgetragen.



Die Kurve zeigt den typischen Verlauf der Reichweitekurven. Man sieht, daß die Ionisation bei einer Entfernung von 2,94 cm beginnt. Die jenseits dieses Abstandes noch merkbare geringe Ionisation rührt von den durchdringenderen Strahlen der Folgeprodukte her.

Da das den Kondensator abschließende Aluminiumblättchen 0,676 cm Luftstrecke äquivalent ist, so ergibt sich die tatsächliche Reichweite bei 23° C und 758,5 mm Luftdruck zu 3,616 cm. Die Reichweite R_0 bei 0° C und 760 mm Druck ist daher 3,314 cm.

Um zu sehen, ob die Schichtdicke der strahlenden Substanz auf die gefundene Reichweite noch von Einfluß ist, wurde noch eine Meßreihe mit dem Aluminium 2 ausgeführt, bei welchem auf der gleichen Fläche nur 6,4 mg Substanz aufgetragen waren.

Das Resultat der Messung ist in Kurve 2 der Fig. 3 wiedergegeben.

Die direkt gemessene Reichweite beträgt 2,88 cm. Rechnet man dazu die 0,676 cm Luftäquivalent des Aluminiumblättchens, so erhält man für die Reichweite 3,566 cm bei 23° C und

769 mm Druck. Daraus berechnet sich R_0 zu 3,31 cm.

Daß die beiden gefundenen Werte direkt identisch sind, ist wohl Zufall, da die verwendete Methode kaum eine größere Genauigkeit als 1–2 Proz. erwarten läßt. Jedenfalls aber zeigt die Übereinstimmung, daß ein irgendwie ins Gewicht fallender Einfluß der Schichtdicke nicht mehr vorhanden ist.

Zur Kontrolle wurde noch die Reichweite der α -Strahlen eines von Radium befreiten Ioniumpräparats bestimmt und für R_0 der Wert 2,93 cm erhalten in guter Übereinstimmung mit dem von St. Meyer, Hess und Paneth¹⁾ bestimmten Wert.

Die Reichweite der α -Strahlen des Protactiniums beträgt also innerhalb der durch die verwendete Meßmethode bedingten Fehlergrenzen 3,14 cm bei 0° C und 760 mm Druck.

Nach Geiger und Nuttall besteht bekanntlich zwischen der Zerfallskonstante λ eines Produkts und der Reichweite R_0 seiner α -Strahlen die Beziehung

$$\log \lambda = A + B \log R_0,$$

wobei A und B Konstanten sind. Leider sind diese Konstanten nicht so genau bestimmbar, daß man aus der Beziehung bindende Schlüsse ziehen könnte. In der Actiniumreihe ergibt sich außerdem noch die Schwierigkeit, daß entweder der Wert für AcX oder der für Radioactinium aus der durch die obige Beziehung dargestellten Geraden herausfällt. Nimmt man an, daß der für Radioactinium erhaltene Wert wegen der größeren Leichtigkeit seiner Bestimmung gesicherter ist als der für AcX , so erhält man für die Konstanten die Werte

$$A = -42,6, B = +57,1^2)$$

und daher

$$\log \lambda = -42,6 + 57,1 \log R_0.$$

Setzt man für R_0 den oben gefundenen Wert von 3,14 cm ein, so ergibt sich für λ der Wert $1,436 \cdot 10^{-13} \text{ sec}^{-1}$ und daher für die Halbwertszeit des Protactiniums der Wert von rund 180000 Jahren.

Verwendet man dagegen die aus den Daten für AcX sich ergebenden Konstanten (die St. Meyer und E. v. Schweidler bevorzugen), so lautet die Gleichung

$$\log \lambda = -35,0 + 46,7 \log R_0$$

und die Halbwertszeit des Protactiniums berechnet sich daraus zu rund 1200 Jahren. Es ist vielleicht von Interesse zu erwähnen, daß

1) St. Meyer, V. F. Hess u. F. Paneth, Wien. Ber. 123, 1472, 1914.

2) St. Meyer u. E. v. Schweidler, „Radioaktivität“, 1916, S. 261.

St. Meyer, V. F. Hess und F. Paneth¹⁾ beim Actinium selbst eine außerordentlich schwache α -Strahlung beobachteten, deren Reichweite R_0 sie zu 3,38 cm bestimmten. Es scheint möglich, daß das verwendete Präparat Spuren von Protactinium enthalten hat und deren α -Strahlung gemessen wurde.

Nachweis der Emanation und des aktiven Niederschlags.

Bei der Prüfung der Nachbildung der Actiniumemanation aus dem Protactinium kam es vor allem darauf an, gut reproduzierbare Versuchsbedingungen zu wählen. Als Meßapparat diente ein gewöhnliches Emanationselektroskop, an dessen einem Zuführungsrohr das Chlorkalziumröhrchen mit den 45 mg Präparat angeschlossen war. Zwischen Präparat und Elektroskop befand sich ein Wattefilter. Die Emanation wurde durch einen konstanten, über Schwefelsäure geleiteten Luftstrom in das Elektroskop geblasen. Zur Regulierung des einer Druckluftflasche entnommenen Luftstromes diente ein eingeschalteter Rotamesser. Die Versuche wurden in der Weise ausgeführt, daß das Elektroskop auf ein bestimmtes Potential aufgeladen, dann der Luftstrom eingestellt und von einem bestimmten Teilstrich des Elektroskops an die Messung begonnen wurde. Daß die abgegebene Emanation tatsächlich reine Actiniumemanation war, ließ sich leicht nachweisen. Zur Eichung diente ein unter gleichen Bedingungen gemessenes Actiniumpräparat.

Die gefundenen Werte in willkürlichen Maßeinheiten sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Als Zeit Null wurde der Tag der letzten chemischen Abtrennung gewählt.

Tabelle.

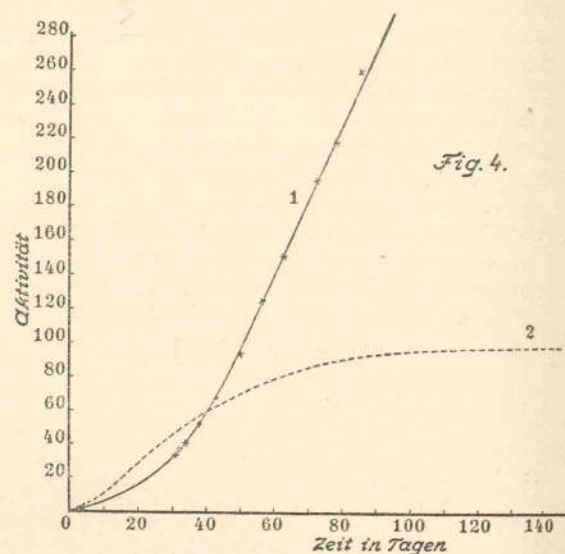
Zeit in Tagen	Aktivitäten
4	0,8
31	33,3
32	38,7
34	41,0
38	51,2
43	67,6
50	94
56	155
63	151,1
72	196
78	218
85	260

Man sieht, daß die Menge der Emanation während des ersten Monats von einem sehr kleinen Wert aus auf das mehr als Dreißigfache

1) l. c.

gestiegen ist und sich seitdem von Tag zu Tag mit Deutlichkeit verfolgen läßt.

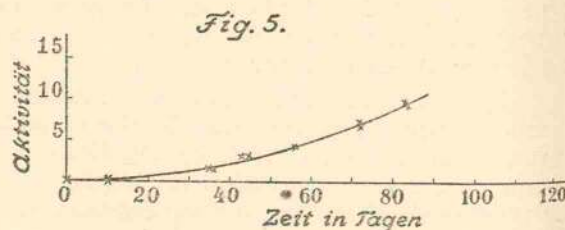
Den Verlauf des Anstiegs zeigt die Kurve a der Fig. 4. Die anfänglich langsamere Zu-



nahme rührt natürlich daher, daß aus dem entstandenen Actinium erst Radioactinium und Actinium X gebildet werden muß. Dann erfolgt der Anstieg gradlinig und muß entsprechend der Lebensdauer des Actiniums noch viele Jahre in derselben Weise vor sich gehen.

Die Kurve 1 der Fig. 4 zeigt zum Vergleich die Nachbildung der Emanation aus einem ursprünglich Radioactinium und Actinium X freien Actinium.

Schließlich wurde noch die Bildung des aktiven Niederschlags aus dem Präparat Aluminium 1 nach der früher beschriebenen Methode nachgewiesen. Die Ergebnisse zeigt die Kurve der Fig. 5.



Der Charakter der Kurve ist, wie auch zu erwarten, der gleiche wie der der Emanationskurve. Die Intensität ist entsprechend dem viel schwächeren Präparat und der viel ungünstigeren Meßmethode bedeutend geringer. Immerhin ist

auch hier die Menge des anfangs nicht nachweisbaren aktiven Niederschlages zwischen dem ersten und dritten Monat auf das siebenfache gestiegen.

Schlußfolgerungen.

Von den 34 bisher bekannten radioaktiven Elementen stellen im chemischen Sinn neue Elemente nur das Radium, Actinium, Polonium, die Radiumemanation und das mit dem Protactinium isotope Brevium vor. Nur diese 5 beanspruchen einen eigenen Platz im periodischen System der Elemente. Hergestellt als chemisch reine Individuen wurden bisher nur das Radium und die Radiumemanation. Beim Actinium ist die Trennung von den es begleitenden übrigen seltenen Erden so schwer, daß noch nicht einmal sein Spektrum aufgenommen werden konnte. Bei dem in 136 Tagen zur Hälfte zerfallenden Polonium scheitert die Herstellungsmöglichkeit in chemisch bearbeitbaren Mengen an der Kürze seiner Lebensdauer. Dasselbe gilt in viel stärkerem Maße von dem äußerst kurzlebigen Brevium (Halbwertszeit 1,17 Minuten). In dem Protactinium liegt jetzt ein Element vor, für das die Darstellung als neues chemisches Individuum und die Bestimmung von Spektrum und Atomgewicht bei Verarbeitung genügender Mengen Rückstände voraussichtlich gelingen muß.

Will man zu einer Schätzung gelangen, welche Gewichtsmengen aus gegebenen Mengen Uranmineralien sich gewinnen lassen, so muß man wissen, wieviel Prozente Uran bei seinem dualen Zerfall sich in die Actiniumreihe verwandeln, und wie groß die Lebensdauer des Protactiniums ist, da die im Gleichgewicht stehenden Gewichtsmengen zweier radioaktiver Substanzen sich wie ihre Halbwertszeiten verhalten. Den Prozentsatz kann man, wie schon weiter oben angegeben wurde, zu ungefähr 8 Proz. ansetzen. Über die Halbwertszeit des Protactiniums läßt sich aber aus den Reichweitebestimmungen bisher nur sagen, daß sie mindestens 1200 und höchstens 180000 Jahre sein kann.

Nimmt man den kleineren Wert als richtig

an, so entsprächen, da die Halbwertszeit des Urans $5 \cdot 10^9$ Jahre beträgt, 1 mg Protactinium

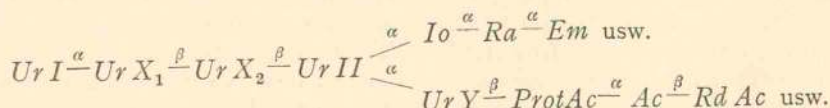
$$\frac{5 \cdot 10^9}{1200 \cdot 0,08} \text{ mg Uran, d. i. rund } 50 \text{ kg Uran.}$$

Wählt man den größeren Wert von 180000 Jahren, so ergibt sich, daß 1 mg Protactinium in rund 330 g Uran enthalten sein muß. Vergleicht man mit Radium, so ergibt sich, daß aus den gleichen Uranmengen, aus denen 1 g Ra gewonnen werden kann, im ersteren Fall 60 mg Protactinium, im letzteren Fall 9 g Protactinium zu gewinnen wären.

Man sieht aus dieser Berechnung, daß die hier beschriebenen Präparate naturgemäß noch sehr verdünnt sind, vermutlich zum weitaus größten Teil durch Erdsäuren. Eine Trennung von diesen ist noch nicht versucht worden. Wir hoffen aber derartige Trennungsversuche ausführen zu können, sobald die äußeren Umstände die Verarbeitung größerer Mengen von Uran-Radiumrückständen erlauben. Gelingen diese, so könnte an eine Bestimmung des Spektrums und Atomgewichts gegangen werden.

Die Kenntnis des Atomgewichts ist auch vom radioaktiven Standpunkt aus wichtig. Wie in der Einleitung dieser Arbeit auseinandergesetzt wurde, entsteht das Protactinium höchstwahrscheinlich über das Uran Y aus dem Uran. Unentschieden bleibt dabei aber, ob die Abzweigung beim Uran I oder beim Uran II stattfindet. Im ersten Fall müßte das Atomgewicht des Protactiniums 234, das des Actiniums daher 230 sein, im zweiten Fall müßten die beiden Atomgewichte um je 4 Einheiten kleiner sein.

Nach der von K. Fajans¹⁾ angegebenen experimentellen Beziehung zwischen Lebensdauer und Atomgewicht isotoper Elemente ist der wahrscheinlichere Wert des Atomgewichts für das Radioactinium und damit auch das Actinium 226. Daraus würde sich ergeben, daß die Abzweigung der Actiniumreihe beim Uran II stattfindet. Daher hat folgendes Schema den größten Anspruch auf Wahrscheinlichkeit.



Die Herstellung starker Protactiniumpräparate würde auch die Möglichkeit bieten, Actinium in reinerem Zustande als bisher ohne Schwierigkeit zu gewinnen. Es bedürfte nur der leicht auszuführenden Abtrennung des Actiniums aus gealtertem Protactinium, etwa wie heute Radiothor aus gealtertem Mesothor hergestellt

wird. Schon heute bieten vielleicht alte Uranrückstände ein nicht zu unterschätzendes Ausgangsmaterial zur Darstellung von Actinium, da in diesen Rückständen Erden noch in geringem Betrage vorhanden sind.

1) K. Fajans, diese Zeitschr. 14, 951, 1913.

In radioaktiver Hinsicht stellt das Protactinium eine Substanz vor, deren α -Strahlung im Laufe einiger Menschenalter auf das mehr als Sechsfache ansteigt und dann wie beim Radium praktisch konstant bleibt. Das gleiche gilt von der durchdringenden Strahlung; nur daß diese, da sie nur von den Zerfallsprodukten des Actiniums herrührt, von Null an ansteigt.

Zusammenfassung der Resultate.

1. Die bisher hypothetische Muttersubstanz des Actiniums wurde aufgefunden und in radioaktiv reinem Zustande an Erdsäuren konzentriert hergestellt. Sie ist ein höheres Homologes des Tantals.

2. Sie sendet α -Strahlen vom Durchdringungsbereich 3,14 cm aus.

3. Die Halbwertszeit beträgt mindestens 1200 und höchstens 180000 Jahre.

4. Die Nachbildung des Actiniums wurde bewiesen

- a) durch Aufnahme von α -Strahlenkurven,
- b) durch die Messung der Actiniumemanation, deren Zunahme sich seit Monaten von Tag zu Tag verfolgen läßt,
- c) durch den aktiven Niederschlag, den wir in wachsenden Mengen an negativ geladenen Platten sammeln konnten.

5. Außerdem wurde der Curiesche Wert für die Halbwertszeit des Actiniums bestätigt.

6. Für das neue radioaktive Element wurde der Name Protactinium gewählt.

Kaiser Wilhelm-Institut für Chemie. Berlin-Dahlem.

(Eingegangen 16. März 1918.)

Notiz über die Ordnung in Zufallsreihen.

Von Erwin Schrödinger.

In einem kürzlich in dieser Zeitschrift erschienenen Aufsatz¹⁾ macht Frl. Podjed von einer statistischen Beziehung, die M. v. Smoluchowski für die Veränderlichkeit der Zahl der Kolloidpartikel in einem (optisch) abgegrenzten Teil eines größeren Lösungsvolumens aufgestellt hat²⁾, eine interessante Anwendung auf eine bevölkerungsstatistische Zahlenreihe. Es handelt sich um die Beziehung

$$\overline{n^* - n'} = (n^* - \nu) P. \quad (1)$$

Darin bedeutet: ν die durchschnittliche Teil-

chenzahl (im allg. nicht ganzzahlig), n^* eine beliebige füngewählte Teilchenzahl (ganzzahlig), n' ist jene Teilchenzahl, welche in einem besonderen Fall auf die Zahl n^* folgt, und zwar nach der (ein für allemal festgewählten) Beobachtungszeit τ . Der durch den Querstrich angedeutete Mittelwert ist zu bilden über eine sehr große Anzahl von Versuchen, die alle „von n^* ausgehen“, also bei festem n^* über alle auftretenden Folgezahlen n' . Der Proportionalitätsfaktor P ist nach Smoluchowski identisch mit der Wahrscheinlichkeit, ein individuelles Partikel, das sich zu Anfang eines Intervalls τ in dem Raumteil aufhielt, am Ende desselben nicht mehr darin anzutreffen. P ist also grundsätzlich ein echter Bruch, der sich allerdings, wenn man τ größer und größer wählt, asymptotisch der Einheit nähern muß. Denn für große τ kann ja die Wahrscheinlichkeit der Folgezahl n' durch die Kenntnis der Anfangszahl n^* nicht mehr tangiert werden, also ist einfach

$$\overline{n^* - n'} = n^* - \bar{n}' = n^* - \nu. \quad (2)$$

Die Beziehung (1) findet unmittelbare Anwendung auf Versuchsreihen The Svedbergs u. a., welche in äquidistanten Zeitpunkten fortlaufend die Teilchenzahlen notierten. Sucht man aus einer solchen Reihe zunächst alle n^* heraus und achtet auf die nachfolgenden n' , so ergibt sich aus einer solchen Gruppe von Paaren (die zu einem n^* gehören) der Wert von P und aus mehreren oder der Gesamtheit der Gruppen eine Kontrolle der Beziehung, da alle Gruppen das nämliche P liefern müssen ($\overline{n^* - n'}$ muß als Funktion von n^* eine Gerade mit der Neigung $\arctg P$ sein, welche die n^* -Achse bei $n^* = \nu$ schneidet). —

In dem eingangs zitierten Aufsatz wendet nun Frl. Podjed die Beziehung (1) auf eine ganz andersartige Zahlenreihe an, und zwar auf die Relativzahlen der Mädchengeburten eines bestimmten Gebietes in 396 aufeinanderfolgenden Monaten (Promille der gesamten Geburtenziffer des betreffenden Monats, also Zahlen nahe bei 500). Dabei scheint mir, über den zweifellos bestehenden Analogien der beiden Zahlenreihen, ein sehr tiefgreifender Unterschied nicht ganz so scharf betont, als seiner Wichtigkeit für das volle, von Smoluchowski eröffnete Verständnis der Svedbergschen Versuche entspricht.

Die Smoluchowskische Beziehung (1) bringt die in Wahrheit bestehende Ordnung der nur scheinbar völlig ungeordneten Svedbergschen Zahlenreihe ans Licht; und das hängt gerade daran, daß hier $P < 1$ ist! Eine Zahlenreihe, welche der Beziehung (1) mit $P < 1$

1) A. Podjed, diese Zeitschr. 19, 39, 1918.

2) M. v. Smoluchowski, Wien. Ber. (2a) 123, 2386 ff., 1914; diese Zeitschr. 17, 562, 1916.

genügt, verliert diese Eigenschaft durch „Umrühren“ (etwa wenn man die Zahlen auf Kartonblättchen schreibt, durcheinandermischt und in beliebiger Reihenfolge neu auflegt). Sie verwandelt sich dabei mit großer Wahrscheinlichkeit in eine Reihe mit $P = 1$.

Wenn dagegen für eine Reihe von Zahlen Gleichung (1) mit $P = 1$ gilt, so ist das eine Gesetzmäßigkeit, die trotz oder, besser gesagt, wegen der völligen Ungeordnetheit der Reihe besteht. Eine solche Reihe ist gegen Umrühren „unempfindlich“. Daß in ihr auf eine extrem unwahrscheinliche, sagen wir abnorm große Zahl fast immer eine wahrscheinlichere, dem Mittelwert ν näher liegende Zahl folgt, liegt nur daran, daß Zahlen nahe dem Mittelwert die relativ häufigsten sind, und zwar umso häufiger, je näher sie dem Mittelwert liegen. Ein Einfluß von n^* auf die Folgezahl n' besteht nicht. Der Mittelwert der Folgezahlen n' ist für alle n^* der gleiche, nämlich gleich dem Generalmittel ν .

Das Charakteristische einer Reihe mit $P < 1$ liegt aber gerade darin, daß auf eine, sagen wir, übermittelgroße Zahl ($n^* > \nu$) Zahlen (n') folgen, die im Mittel immer noch — allerdings in gesetzmäßiger Weise weniger hoch — über dem Generalmittel ν liegen¹⁾: es besteht Wahrscheinlichkeitsnachwirkung; die mittlere Abnahme „von n^* aus“ ist kleiner, und zwar ein bestimmter Bruchteil P des Überschusses der Zahl n^* über den Durchschnitt ν (für $n^* > \nu$ gesprochen; für $n^* < \nu$ gilt das Entsprechende²⁾).

Zwischen Zahlenreihen von der Eigenschaft $P < 1$ und Reihen des Grenzfalles $P = 1$ besteht nach dem Gesagten ein ganz grundsätzlicher Unterschied. Ja man wird den Wert von P , der sich aus einer empirischen Zahlenreihe ergibt, geradezu als Prüfstein ihrer „Geordnetheit“ ansehen dürfen, natürlich innerhalb der Genauigkeitsgrenze, mit der ein solcher Begriff für endliche Reihen überhaupt festgelegt werden kann. $P < 1$ weist auf „partielle Geordnetheit“ hin, $P = 1$ auf völlige Ungeordnetheit. Dies scheint mir eine für den Physiker wie für den Statistiker wichtige und praktisch verwertbare Bemerkung, die sich aus den Über-

legungen Smoluchowskis ganz unmittelbar ergibt. —

Was nun im besonderen die geburtenstatische Zahlenreihe anlangt, so hebt Frl. Podjed mit Recht hervor, daß hier eine Abhängigkeit (der Mädchenpromille aufeinanderfolgender Monate) von vornherein nicht zu erwarten ist, demnach theoretisch $P = 1$ sein sollte. Dagegen liefert Mittelbildung über die verschiedenen empirischen P -Werte: $P = 0,9$.

Diese immerhin erhebliche Unterschreitung würde auf merkliche Geordnetheit bzw. Abhängigkeit hindeuten und wäre darum für den Bevölkerungsstatistiker von einigem Interesse. Sie scheint jedoch nicht reell, sondern zufällig dadurch entstanden zu sein, daß die Art der Mittelbildung allen n^* -Gruppen, auch den gliederärmeren und daher minder zuverlässigen, das gleiche Gewicht beilegt, wodurch ein größerer Fehler auftritt als dem Umfang des verwendeten Zahlenmaterials entspricht.

Zuverlässiger ist der Wert, der sich aus der graphischen Darstellung ablesen läßt (l. c. S. 42; es ist $n' - n^*$ als Funktion von n^* aufgetragen). Und da zeigt sich, daß die von Frl. Podjed den empirischen Punkten angeschmiegte Gerade fast genau unter 45° gegen die Achsen geneigt ist (ich messe an der Reproduktion den Richtungsfaktor

$$P = \frac{14,1}{14,3} = 0,986;$$

die Abweichung liegt augenscheinlich völlig innerhalb der Fehlergrenze). Die geburtenstatische Reihe erweist sich also, wie erwartet, als streng ungeordnet und wäre mit einer Diffusionsreihe von so großem Beobachtungsintervall τ in Parallele zu setzen, daß die Wahrscheinlichkeitsnachwirkung praktisch unmerklich ist. —

Beiläufig sei daran erinnert, daß auch in der Physik Zufallsreihen auftreten, welche — soweit unsere bisherige Erfahrung reicht — von Haus aus ein derart streng ungeordnetes Verhalten zeigen: beispielsweise die Zahlen der α -Partikel, welche in gleichen Zeitintervallen von einem (merklich konstanten) Ra -Präparat in einen bestimmten Raumwinkel emittiert werden¹⁾. Andererseits ließen sich viele bevölkerungsstatistische Reihen aufzeigen, in denen wirkliche partielle Geordnetheit, Wahrscheinlichkeitsnachwirkung aufeinanderfolgender Glieder, besteht: etwa

1) Aus (1) folgt

$$n' = \nu + (n^* - \nu)(1 - P)$$

und das ist, für $P < 1$, $\geq \nu$ je nachdem $n^* \geq \nu$.

2) Die strengen Gesetze dieser Wahrscheinlichkeitsnachwirkung sind übrigens — trotzdem sie zu so einfachen Mittelwertsbeziehungen führen — im Falle der Diffusionsreihen äußerst verwickelt: man vgl. die Bemerkung M. v. Smoluchowskis l. c. S. 2399 oben, ferner Wien, Ber. (2a) 124, 359ff., 1915.

1) Man vgl. bes. E. Marsden u. T. Baratt, Proc. Lond. Phys. Soc. 23, 1911; L. v. Bortkiewicz, Die radioaktive Strahlung als Gegenstand wahrscheinlichkeitstheoretischer Untersuchungen, S. 3ff. Berlin, J. Springer 1913.

die Promille weiblicher Bewohner bei äquidistanten Volkszählungen u. dgl.

Andere ähnliche Fälle könnten vielleicht eine Illustration des Verhaltens konzentrierterer Lösungen abgeben. (Smoluchowski setzt bei diesen Untersuchungen stets den „idealen Gaszustand“ voraus, oder mit andern Worten, daß die Bewegung jedes Teilchens ganz unabhängig von der der übrigen erfolgt.) Z. B. würde sich zweifellos eine Art „van der Waalsscher Kohäsion“ bemerkbar machen, wenn man statt der Promille weiblicher Bewohner die Promille Infektionskranker in äquidistanten Zeitpunkten notierte. Dagegen ließe sich bei entsprechender Registrierung etwa der „Zahl der Schneider pro Kopf der Bevölkerung“ wahrscheinlich — wegen der wechselseitigen Behinderung durch Konkurrenz — eine Parallele ziehen zu Abstoßungskräften zwischen den Teilchen oder zu deren, nicht mehr vernachlässigbarem, Eigenvolum. —

Zu beachten ist übrigens bei derartigen statistischen Untersuchungen, daß die Reduktion auf konstante Bevölkerungsziffer nur von relativ kleinen Veränderungen der letzteren befreit. Werden sie beträchtlich, so erhält man trotzdem eine „inhomogene“ Reihe, und zwar wegen der bekannten Abhängigkeit der Schwankungsgröße von der absoluten Zahl der Einzelfälle.

Wien, II. Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 16. März 1918.)

Vorlesungsverzeichnis für das Sommersemester 1918.

Technische Hochschule München.

Zenneck (i. V. Fischer): Experimentalphysik II: Magnetostatik, Elektrostatik, elektrische Strömung, veränderliches elektromagnetisches Feld, Elektrooptik, 4; Physikalisches Praktikum, 4 oder 8. — **Zenneck** (i. V. Emden): Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der Physik, 12—30. — **Fischer**: Grundzüge der Physik II: Optik, Elektrizität und Magnetismus, 3; Apparate und Methoden des physikalischen Unterrichts II: Optik, Elektrizität und Magnetismus, 3; Praktisch-physikalische Übungen: Aufbau und Handhabung von Apparaten, 4; Einführung in die wissenschaftlichen Arbeitsmethoden der Physik, 8—30; Elemente der theoretischen Physik: Optik, Elektrizität und Magnetismus, 4; Schwingungs- und Wellenlehre, 3. — **Knoblauch**: Technische Meßmethoden, 2; Technisch-physikalisches Praktikum, 4; Anleitung zur Ausführung wissenschaftlicher Arbeiten auf dem Gebiete der technischen Physik, nach Vereinbarung. — **Emden**: Aerodynamik und Anwendung derselben auf flugtechnische Probleme, 3. — **Dieckmann**: Drahtlose Telegraphie, 2; Elektrische und magnetische Probleme der Luftfahrt, 1; Hochfrequenzmeßtechnik, 4; Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen aus dem Gebiete der angewandten Physik, nach Vereinbarung. — **von und zu Aufseß**: Populäre Astrophysik II, 2. — **Heinke**: Einführung in die Elektrotechnik, 2, Übungen, 2, Praktikum: Meßtechnische Übungen, 2; Elektrotechnik für Maschineningenieure, 3; Elektrische Meßtechnik I, 3; Elektrotechnisches Praktikum I: Meßtechnik und Photo-

metrie, 4 und 2, für Vorgeschriftene, nach Vereinbarung. — **N. N.**: Schwachstromtechnik: Telegraphie, Telephonie und drahtlose Telegraphie, 2. — **Ossanna**: Theorie und Konstruktion der elektrischen Maschinen III: Transformatoren und Asynchronmotoren, 4; Elektrotechnisches Praktikum II: Messungen an Maschinen, Umformern und Transformatoren, 4 und 2; Wechselstrom-Kommutatormotoren, 2; Entwerfen von elektrischen Maschinen, 4; Entwerfen von Wechselstrom-Kommutatormotoren, 4. — **Kadrnozka**: Elektrische Anlagen I: Verwertung elektrischer Arbeit: Elektrische Beleuchtung, 3, II: Erzeugung und Verteilung elektrischer Arbeit, 2, Übungen: Entwerfen elektrischer Anlagen, 4. — **Urban**: Unterrichtskurse in praktischer Photographie 1, Praktische Übungen, 3. —

Manchot: Allgemeine Experimentalchemie, einschließlich der Grundzüge der organischen Chemie, 5; Unorganisches und analytisch-chemisches Praktikum für Anfänger und Vorgerücktere, 10, 20 oder 30; Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten im Unorganischen Laboratorium, nach Vereinbarung. — **Wieland**: Organische Chemie, 5; Chemisches Praktikum im Organischen Laboratorium, 20—30; Spezielle Arbeiten auf dem Gebiete der organischen Chemie, 30. — **Albert**: Die Arsenikalien und ihre Bedeutung für die Pharmazie, 1. — **Rohde**: Chemie der hydroaromatischen Verbindungen, 2. — **Hofer**: Analytische Chemie der Metalle und Metalloide nebst Gewichts- und Maßanalyse I, 4; Die elektrochemischen Prozesse, 2; Praktikum im Elektrochemischen Laboratorium, 10, 20 oder 30; Praktikum in der technischen Gasanalyse, 3. — **Schultz**: Chemische Technologie III: Chemische Großindustrie, 2, IV: Mörtelmaterialien, Glas und Tonwaren, 2; Praktikum im chemisch-technischen Laboratorium, 20—30; Spezielle Arbeiten auf dem Gebiete der technischen Chemie, nach Vereinbarung; Chemisch-technische Übungen: Chemisch-technische Analyse, Färberei, 4; Chemisches Praktikum für Zoll- und Steuerbeamte, 3. — **Braß**: Ausgewählte Teile der Farbstoffchemie, 1. — **Lintner**: Chemie der Nahrungs- und Genußmittel, 2; Gärungschemisches Praktikum nebst Übungen in der Untersuchung von Nahrungs- und Genußmitteln, nach Vereinbarung bis 30; Anleitung zu selbständigen Arbeiten im Gärungschemischen Laboratorium, nach Vereinbarung bis 30; Grundzüge der organischen Chemie und Einführung in die Technologie und Warenkunde mit besonderer Berücksichtigung der Gärungsgewerbe, 4. —

Faber: Höhere Mathematik II, 6, Übungen, 2; Mathematisches Seminar: Kolloquium (mit v. Dyck, Finsterwalder und Liebmann), 2. — **v. Dyck**: Höhere Mathematik IV, 2, Übungen, 2; Algebra, 4. — **Doehlemann**: Grundzüge der höheren Mathematik II, 4, Übungen, 2; Darstellende Geometrie II, 4, Übungen, 4; Theorie der geometrischen Konstruktionen, 4, Übungen, 1. — **Liebmann**: Variationsrechnung, 3; Ausgleichungsrechnung: Methode der kleinsten Quadrate, 2, Übungen, 1. — **Finsterwalder**: Konforme Abbildung mit graphischen Übungen, 2; Darstellende Geometrie II, 4, Übungen, 4. — **Lagally**: Dreifach orthogonale Flächensysteme, 2. — **Schmidt**: Vermessungskunde II, 4, Praktikum 4; Hauptvermessungsübungen, 2 Wochen. — **Großmann**: Elemente der Astronomie, 2. — **Föppl**: Technische Mechanik einschließlich der Elemente der graphischen Statik und der analytischen Mechanik I: Einführung in die Mechanik, 4, IV: Dynamik, 3, Übungen, 2; Praktikum im Mechanisch-technischen Laboratorium, 2. —

Universität Münster.

Schmidt: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 3 oder 6, für Fortgeschrittene (mit Konen), tägl. — **Konen**: Theorie der Wärme, 4; Seminar für theoretische Physik, 2 g; Übungen in Demonstrationsversuchen und in der Anfertigung einfacher Apparate, 3. —

Schenck: Allgemeine und anorganische Experimentalchemie, 6; Chemisches Kolloquium, 1 g; Chemisches Praktikum (mit Ley), tägl. außer Sonnabend; für Medi-

ziner (mit Kaßner und Ley), 4. — **Ley**: Organische Chemie II (Experimentalvorlesung), 3. — **Ott**: Analytische Chemie II: Quantitative Analyse, 1. — **Glund**: Chemie der Kohle, 1. — **Kaßner**: Über Gifte und deren Nachweis in Untersuchungsobjekten, 1 g; Organische Chemie, mit besonderer Berücksichtigung der Medizin und Pharmazie, 4; Kolloquium über pharmazeutische Präparate und die Gegenstände des deutschen Arzneibuches, 1; Ausgewählte Kapitel der chemischen Technologie, mit besonderer Berücksichtigung der Glasindustrie und Keramik, 1; Pharmazeutisch-chemische, maßanalytische und toxikologische Übungen im Laboratorium, Darstellung chemischer Präparate, für Vorgerücktere Anleitung zur Bearbeitung wissenschaftlicher oder technischer Aufgaben, tägl. außer Sonnabend. — **Bömer**: Allgemeine Nahrungsmittelchemie und Analyse, 2; Chemie und Analyse der Gebrauchsgegenstände, 1 g; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der angewandten Chemie, für Fortgeschrittene (mit König), tägl. g. —

Killing: Differential- und Integralrechnung I, 4, Übungen, 1 g; Synthetische Geometrie, 2; Übungen des mathematischen Unterseminars, 2 g. — **v. Lilienthal**: Differentialgleichungen mit Übungen, 4; Analytische Geometrie der Ebene mit Übungen, 4; Übungen des mathematischen Oberseminars, 2 g. — **Geilen**: Potentialtheorie, 2; Graphische Methoden, 2. — **Plafmann**: Das Sonnensystem, 2 g; Zeit- und Ortsbestimmung, 2; Über Beobachtung und Theorie der veränderlichen Sterne, nach Vereinbarung; Übungen im Beobachten und Rechnen, nach Vereinbarung, g. —

Technische Hochschule Prag.

Tuma: Experimentalphysik: Elektrostatik, Stationäre Elektrizitätsströmungen, Magnetische Wirkungen des elektrischen Stromes, Magnetische Induktion, 5, für Kulturingenieure und Geodäten, 3; Thermodynamik, 3; Physikalische Praktikum, 6. — **Niethammer**: Allgemeine Elektrotechnik, 3; Ausgewählte Kapitel der Wechselstrom-Elektrotechnik, 2. —

Hönigschmid: Anorganische Chemie, 4; Analytische Chemie, anorganisch-quantitativ, 2; Übungen im anorganisch-chemischen und analytischen Laboratorium I und II, tägl. außer Sonnabend; Anleitung zu wissenschaftlichen chemischen Untersuchungen für Geübtere, tägl. außer Sonnabend. — **Wenzel**: Organische Chemie, 5; Übungen im organisch-chemischen Laboratorium, tägl. außer Sonnabend; Anleitung zu wissenschaftlichen chemischen Untersuchungen, für Vorgeschr. tägl. — **Storch**: Chemie der Metalle und technische Metallgewinnung: II. und III. Gruppe des periodischen Systems, 2; Die wissenschaftlichen Grundlagen der Maßanalyse, 1; Physikalische Chemie III: Photochemie, 2; Anleitung zu wissenschaftlichen chemischen Untersuchungen, 15; Elektrochemische Prozesse der Industrie, 3, Übungen, 4. — **Ditz**: Chemische Technologie anorganischer Stoffe II, 6; Ausgewählte Kapitel aus der chemischen Technologie anorganischer Stoffe, 4; Übungen im anorganisch-technologischen Laboratorium, tägl. außer Sonnabend. — **v. Georgievics**: Chemische Technologie organischer Stoffe II, 6½; Übungen im organisch-technologischen Laboratorium, tägl. außer Sonnabend. — **Harpf**: Technologie des Schwefeldioxyds, 1. — **v. Gintl**: Praktische Übungen in der Ausführung von Heizgasuntersuchungen, 1; Chemie der Nahrungs- und Genußmittel und Untersuchung von Rohstoffen und Gebrauchsgegenständen, 3, Übungen, 8; Gasanalyse mit praktischen Übungen, 1; Gerichtlich-chemische Untersuchungen mit Demonstrationen, 1. — **Außerwinkler**: Photographie, 1, Übungen, 4, Photographisches Laboratorium, 4. — **Herzog**: Technische Mykologie, Übungen, 6; Agrikulturchemische Arbeitsmethoden, 1; Biochemische Analyse, 2; Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen für Vorgeschr. tägl.; Agrikulturchemie, 3. — **Siegmund**: Die Enzyme und ihre Bedeutung, 1; Chemie der Düngemittel, 1; Die Verunreinigung

der Gewässer, des Bodens und der Luft durch Abwässer, Rauchgase und Staub, 2. —

Carda: Mathematik I, 4, Übungen, 2; Elemente der höheren Mathematik, 2, Übungen, 1. — **N. N.**: Mathematik II, 4, Übungen, 2, für Handelslehrkandidaten, 3; Ausgewählte Kapitel der höheren Mathematik, 2. — **Rosmanith**: Versicherungsmathematik I, 3, IIa, 1, IIb, 2; Politische Arithmetik, 2. — **Mack**: Darstellende Geometrie, 2, Konstruktive Übungen, 4; Ausgewählte Kapitel aus der darstellenden und projektiven Geometrie, 5. — **Grünwald**: Ausgewählte Abschnitte aus der Bewegungslehre starrer Körper, 2. — **Pöschl**: Allgemeine Mechanik, 4, Übungen, 1, Graphische Übungen, 2; Hydromechanik, 3, Übungen, 1; Besondere Probleme aus dem Gesamtgebiete der Mechanik, 2. — **Haerpfer**: Elemente der niederen Geodäsie, Übungen, 4; Theorie der Kartenprojektionen, 1; Die Nomographie in der Geodäsie, 1. — **Adameczik**: Niedere Geodäsie, 4½, Übungen, 6; Grundzüge der sphärischen Astronomie, 3, Übungen, 2; Anwendungen der Geodäsie auf Kulturtechnik, 2, Übungen, 2; Geodäsisches Rechnen I, 2, II, 2. —

Universität Straßburg.

N.N.: Experimentalphysik II: Wärme, Akustik, Elektrizität, 5; Physikalische Übungen, 5 oder 10; Übersichtskursus für Mediziner, 3; Wissenschaftliche physikalische Arbeiten, tägl. außer Sonnabend; Physikalisches Kolloquium, 2 g. — **Cohn**: Experimentalphysik II: Elektrizität, Optik, 5; Ausgewählte Abschnitte der theoretischen Physik, nach Vereinbarung; Physikalische Übungen, 5; Übersichtskursus für Mediziner, 3; Wissenschaftliche physikalische Arbeiten. — **Rohmann**: Kinetische Gastheorie, 2. — **Hecker**: Die Arbeitsmethoden der Erdbebenforschung, 1. —

N.N.: Allgemeine Experimentalchemie, organischer Teil, 5; Chemisches Praktikum für Anfänger und Vorgeschr. (mit Wedekind und Straus), tägl. außer Sonnabend. — **Rose**: Chemische Technologie der schweren Metalle, 3; Die häufiger gebrauchten Mineralfarben, 1 g. — **Wedekind**: Theoretische und physikalische Chemie I, 3; Einführung in die Kolloidchemie und ihre Anwendungen, 1; Gasanalyse (Praktikum mit theoretischer Einleitung), 2½; Physikochemisches und elektrochemisches Praktikum, 4½. — **Straus**: Benzolderivate, 4. — **Kreutz**: Chemie und Technologie des Weines und Schaumweines, 1. — **Ruggli**: Ausgewählte Kapitel der organischen Chemie, 1. — **Weitz**: Neuere Forschungen aus der anorganischen und physikalischen Chemie, 1; Einführung in die chemische Thermodynamik, 1. — **N. N.**: Pharmazeutische Chemie und chemische Toxikologie, 5; Arbeiten im Laboratorium des pharmazeutischen Instituts, tägl.; Pharmakognostisch-mikroskopische Übungen, 3. —

Schur: Algebraische Gleichungen, 2; Ausgewählte Kapitel aus der Differentialgeometrie, 2; Theorie der Flächen zweiten Grades, 2; Übungen des mathematischen Seminars, 1½. — **Wellstein**: Infinitesimalrechnung II, 4; Darstellende Geometrie, 2. — **Epstein**: Determinanten mit Anwendungen auf Algebra und Geometrie, 3. — **Bauschinger**: Sphärische Astronomie, 4, Übungen, 2. — **Wirtz**: Einführung in die Theorie der Mondbewegung, 1. —

Technische Hochschule Stuttgart.

v. Koch: Experimentalphysik: Elektromagnetismus, Induktion, Akustik, Optik, Elektrooptik, 4; Theoretische Physik (als Einleitung: Mathematische Ergänzungen zur Experimentalphysik), 2; Physikalische Praktikum, tägl. außer Sonnabend; Handfertigkeitspraktikum in Physik für Vorgeschr. 2—3; Physikalisches Kolloquium, 2; Meteorologie: Ausgewählte Kapitel, 1. — **Veesenmeyer**: Grundlagen der Elektrotechnik: Konstruktionen und Anlagen, 1, Übungen, 1; Elektrotechnische Konstruktionselemente, 1, Übungen, 6; Dynamobau I, Seminar, 1, Übungen, 6, II, 2; Elektrische Apparate, 1; Elektrotechnische Maschinenkonstruktionen, 8; Projektieren elektrischer Anlagen, 1,

theorie (Fortsetzung), Übungen. — **Radon**: Besselsche Funktionen, 2. — **v. Hepperger**: Astrophysik, 4. —

Technische Hochschule Wien.

Jäger: Physik für Bauingenieure, 3; Ausgewählte Kapitel der Physik, 2. — **Mache**: Physik für Maschinenbauer und technische Chemiker: Wärmelehre, Optik und Akustik, Elektrizität, 2 und 5, für Architekten, 4. — **Flamm**: Die Feinstruktur der Materie, 1. — **Reithoffer**: Enzyklopädie der Elektrotechnik, 2; Übungen zu elektrischen Schwingungen und Wellen, 4; Wechselstromtechnik, 2; Elektrotechnik, Praktische Übungen I (mit Sahulka), 4. — **Stein**: Dynamobau, 3; Konstruktionsübungen, 6. — **R. Moser**: Kommutatormotoren für Ein- und Mehrphasen-Wechselstrom, 2. — **N. N.**: Elektrotechnik: Praktische Übungen II, 4. — **Hochenegg**: Bau und Betrieb elektrischer Anlagen einschließlich Stromverteilung, 3, Übungen, 4. — **Jüllig**: Elektrische Telegraphie und Eisenbahn-Signalwesen, 2. — **Zelisko**: Die Fernsprechtechnik, 2; Die Telegraphentechnik, 1. —

Bamberger: Übungen im Laboratorium der allgemeinen Experimentalchemie, tägl.; Enzyklopädie der technischen Chemie, 3; Praktische Übungen in der Ausführung technischer Proben, 3. — **Suida**: Allgemeine Experimentalchemie II: Organische Chemie I, 5; Chemische Technologie organischer Stoffe, 5, Übungen, tägl. außer Sonnabend. — **Vortmann**: Analytische Chemie, 4, Übungen, tägl. — **L. Moser**: Die technische Analyse anorganischer Stoffe, 2. — **Weissenberger**: Die Isotopie der Elemente, 2. — **v. Jüptner**: Theoretische und physikalische Chemie I, 1½, II, 2, Übungen, 4; Chemische Technologie anorganischer Stoffe, 5, Übungen, 20. — **Praetorius**: Thermodynamik mit Einschluß der neueren Forschungen, 1. — **Kossowicz**: Mykologie der Nahrungsmittelgewerbe, 1, Praktische Übungen, 2. — **Böck**: Chemie der synthetischen organischen Arzneimittel, 2; Chemie der Zellulose, 1. — **Paweck**: Technische Elektrochemie, 3. — **Eder**: Photochemie und angewandte Photographie, 1; Photographisches Praktikum, 4. — **Abel**: Galvanische Elemente und Akkumulatoren, 2. — **Strache**: Beleuchtungsindustrie, 2; Übungen in Gasbeleuchtung, Brennstoffe und Feuerungsanlagen, 4. — **Klimont**: Chemische Technologie der Mineralöle, 1; Technische Chemie der Fette, 1. — **Erban**: Chemische Textilindustrie II, 1. — **Oettinger**: Die in der Industrie verwendeten textilen Fasern, 2. — **Ruß**: Wirtschaftliche Bedeutung der chemischen Industrie, 1. —

Zsigmondy: Mathematik I, 5, Korrepetitionen, 2. — **Rothe**: Mathematik I, 5; Mathematische Einführung in die analytische Mechanik, 2. — **Czuber**: Mathematik II, 4, Übungen, 1. — **Radon**: Elemente der höheren Mathematik, 4; Enzyklopädie der Mathematik, 3; Einführung in die Funktionentheorie: Analysis der komplexen Veränderlichen, 2. — **Tauber**: Versicherungsmathematik I, 3, II, 3. — **Förster**: Politische Arithmetik, 2. — **Blaschke**: Einführung in die mathematische Statistik, 3. — **Müller**: Darstellende Geometrie und konstruktives Zeichnen, 4, Konstruktionsübungen, 6, Seminar, 2; Zyklographie, 2, Konstruktionsübungen, 2. — **Schmid**: Darstellende Geometrie und konstruktives Zeichnen 4, Konstruktionsübungen, 6; Projektive Geometrie II, 3, Konstruktionsübungen, 2. — **Danzer**: Geometrische Konstruktionen, 2. — **Wiegand**: Mechanik I: Mechanik der starren und flüssigen Körper, 6, Übungen, 1½. — **Jung**: Mechanik I: Mechanik der starren und flüssigen Körper, 7½, Übungen, 2; Vektoranalysis, 2. — **Wolf**: Einführung in die theoretische Elastizitätslehre, 2. — **Leon**: Ausgewählte Kapitel der Festigkeitslehre und Materialprüfung, 1½. — **Pollack**: Praktische Übungen zu den Elementen der niederen Geodäsie, 4. — **Dolezal**: Niedere Geodäsie, 4, für Geodäten, 5½, Übungen I: Instrumental- und Vermessungsübungen, Feldübungen, 8; Ausgewählte Kapitel der niederen Geodäsie, 1½; Geodätisches Seminar, 2, Übungen, 2. — **Dokulil**: Übungen zur niederen Geodäsie für Geodäten,

Vorübungen im Freien, 10, Katastervermessung, 10, Größere Vermessung, 15 Tage; Geodätisches Zeichnen: Situationszeichnen, 4; Technik des Katasterwesens, 2, Übungen, 2½; Technische Terrainlehre, 2. — **Schumann**: Sphärische Astronomie, 4; Übungen im Beobachten und Rechnen, 3½. —

Universität Zürich.

Meyer: Experimentalphysik: Elektrizität und Optik, 5; Ausgewählte Kapitel der Physik, 1; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 3½, für Vorgerücktere, tägl. außer Sonnabend; Ausführung selbständiger wissenschaftlicher Arbeiten, tägl.; Physikalisches Kolloquium, 2; Die physikalischen Grundlagen der Musik, mit Experimenten, 1. — **Greinacher**: Radiologie II: Die elektrischen Entladungen in Gasen, mit Experimenten, 1; Radiologisches Praktikum für Naturwissenschaftler und Mediziner, 4. — **Ratnowsky**: Theoretische Physik I: Mechanik II: Mechanik deformierbarer Körper, 4, Übungen, 1; Grundlagen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Erkenntnis, 1. — **Wolfke**: Wärmestrahlung, mit Experimenten, 1. —

Werner: Organische Experimentalchemie, 5; Chemisch-analytisches Praktikum für Chemiker, tägl.; Chemisches Praktikum für Vorgerücktere: Präparative Arbeiten, Ausführung selbständiger Arbeiten, tägl.; Chemisches Halbpraktikum für Naturwissenschaftler, halbtägl. — **Abeljan**: Quantitative chemische Analyse mit Berücksichtigung der elektrolytischen Methoden, 2; Nahrungsmittelchemie, 1; Anleitung zu chemischen Arbeiten im Laboratorium, 1; Chemisches Kolloquium, 1 g; Chemisches Praktikum für Mediziner und Veterinäre sowie für Naturwissenschaftler, 3 Tage, für Lehramtskandidaten, 6; Übungen im Untersuchen von Nahrungs- und Genußmitteln, 4. — **Dubsky**: Aromatische Chemie II: Spezielle Farbstoffe, 3; Heterozyklische Verbindungen, 1; Organische Arbeitsmethoden, 1; Naphtene, Terpene und Kampfer, 1. — **Lifschitz**: Einführung in die physikalische Chemie, 2; Allgemeine Elektrochemie, 2; Aktuelle Probleme der theoretisch-organischen Chemie, 1. — **Agthe**: Ausgewählte Kapitel aus dem Gebiete der anorganischen Verbindungen, 2. —

Fueter: Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, 4; Übungen zur analytischen Geometrie und zur Einführung in die höhere Mathematik, 1; Theorie der elliptischen Modulfunktionen, 4; Mathematisches Seminar (mit Speiser), 1. — **Speiser**: Differential- und Integralrechnung II, 4, Übungen, 1; Flächentheorie, 4. — **Bützberger**: Elemente der darstellenden Geometrie mit Übungen, 4. — **Bernays**: Grundlagen der Geometrie, 3. — **Wolfer**: Geographische Ortsbestimmung, 3; Übungen im astronomischen Beobachten, 3; Ausgewählte Methoden der Zeit- und Ortsbestimmung, 2; Grundzüge der geographischen Ortsbestimmung, mit Übungen, 2. —

Technische Hochschule Zürich.

Weiß: Physik II, 4, Repetitorium, 1; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Schweitzer), 4, 6 und 8; Wissenschaftliche Arbeiten in Physik, 8, 12, 24, tägl. — **Schweitzer**: Physik II, 3, Ergänzungen, 1, Repetitorium, 1; Experimentalphysik, 4, Repetitorium, 1; Thermodynamik, 2. — **Wolfke**: Wärmestrahlung, 1 g. — **Piccard**: Physikalische Präzisionsmessungen, 1 g. — **Brentano**: Optik, 2 g. — **Barbieri**: Photographie II, 1 g; Photogrammetrie, 1 g; Photographisches Praktikum, 2; Mikrophotographie, 1. — **Kuhlmann**: Theoretische Elektrotechnik I, 5, Übungen, 1, IIIa, 1, IIIb, 4; Elektrotechnisches Laboratorium IIa, 4 und 8. — **Tobler**: Schwachstromtechnik II, 2. — **Farny**: Elektrische Maschinen II: Gleichstrom, 3 g, Konstruktionsübungen, 9. — **Korda**: Drahtlose Telegraphie, 1; Kriegselektrotechnik, 1. — **Wyßling**: Elektrische Anlagen II, 3; Elektrische Bahnen, 3; Diplomarbeiten in elektrischen Anlagen (mit Farny und Kuhlmann). — **Wirz**: Technische elektrische Meßapparate II, 1; Meßtransformatoren, 1. —

Winterstein: Organische Chemie, 3, Repetitorium, 1;

Physiologische Chemie, 2; Anleitung zu dem agrikulturchemischen Praktikum, 1; Agrikulturchemisches Praktikum, 8, für Vorgerücktere, tägl.; Physiologisch-chemisches Praktikum für Vorgerücktere, tägl. — **F. P. Treadwell**: Analytische Chemie II, 2; Probierkunde mit Übungen, 2; Analytisches Praktikum, 20, 16 und 10; Chemisches Praktikum, 2 und 4; Analytisch-chemisches Praktikum für Vorgerücktere, tägl. — **Baur**: Physikalische Chemie I, 2, Repetitorium, 1; Technische Elektrochemie, 2, Repetitorium, 1; Physikalisch-chemisches Praktikum, 8; Elektrochemisches Praktikum, 4; Chemisches Praktikum für Vorgerücktere, tägl. — **Boßhard**: Anorganische chemische Technologie II: Alkalien, Chlor, Phosphate, 3, Repetitorium, 1, III: Silikate 2, Repetitorium, 1; Technisch-chemisches Praktikum, 16 und 24; Chemisches Praktikum für Vorgerücktere, tägl. — **Eder**: Pharmazeutische Chemie II, 2; Pharmakognosie II, 3; Toxikologie, 2; Atherische Öle, 1; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum I, 12, II, mit praktischem Kurs in Harnanalyse, 12; Technische Mikroskopierübungen I: Fasern und Stärke, 3; Pharmakognostische und pharmazeutisch-chemische Arbeiten für Vorgerücktere, tägl.; Harnanalyse, 1. — **Fierz**: Organische Technologie III: Teerprodukte und Explosivstoffe, 2, IV: Künstliche organische Farbstoffe, 3, Repetitorium, 1, V: Technologie der Kohlehydrate und Gärung, 1; Technisch-chemisches Praktikum, 16 und 24; Chemisches Praktikum für Vorgerücktere, tägl. — **Mißlin**: Technisch wichtige Pflanzenfarbstoffe und Extrakte, 1 g. — **Ott**: Übungskurse für Gasingenieure, zirka 1 Woche. — **Ruzicka**: Methoden der organischen Chemie, 1. — **Staudinger**: Organische Chemie, 6, Repetitorium, 1, Spezieller Teil II, 2, Repetitorium, 1; Chemisches Praktikum, 24, 10 und tägl., für Vorgerücktere, tägl. — **W. D. Treadwell**: Theorie technischer Gasgleichgewichte, 1. — **Wiegner**: Fütterungslehre, 2; Agronomische Übungen (mit Schellenberg), 4; Bodenkunde, 3, Übungen, 2; Chemie der Futtermittel I, 1; Ausgewählte Kapitel aus der Fütterungslehre, 1; Agrikulturchemisches Praktikum, für Vorgerücktere, tägl. —

Hurwitz: Funktionentheorie, 4; Mathematisches Seminar (mit Weyl), 2. — **Affolter**: Theoretische Ballistik: a) äußere, 2, b) innere, 2. — **Amberg**: Mathematik der Personenversicherung, 2 g. — **Baeschlin**: Vermessungskunde I, 3, Übungen, 3, III, 4, Übungen II, 8; Große Vermessungsübung (in den Sommerferien), 3—4 Wochen; Konstruieren geodätischer Instrumente, 2; Diplomarbeit in Vermessungswesen, 6 Wochen. — **Beyel**: Perspektive, 2; Darstellende Geometrie, 2. — **Brandenberger**: Einführung in den mathematischen Unterricht II, 2 g. — **Franel**: Höhere Mathematik II, 6, Repetitorium, 1, Übungen, 2. — **Gonseth**: Algebraische Flächen, 2; Graphische Methoden, 1; Mathematische Instrumente, 1. — **Großmann**: Anwendungen der darstellenden Geometrie, 2, Übungen, 3; Flächen 2. Grades, 2. — **Hirsch**: Höhere Mathematik II, 6, Repetitorium, 1, Übungen, 2; Mathematische Übungen, 2. — **Keller**: Repetitorium der darstellenden Geometrie: Axonometrie: Zentrische Kollineation, Kegel, Rotations-, Regel- und Schraubenflächen, allgemeine Flächen 2. Grades, 2; Theorie der Projektivität mit Anwendung derselben auf die konstruktive Behandlung der Kurven 2. Grades, 1. — **Kienast**: Galoissche Theorie der Gleichungen, 2 g. — **Kollros**: Anwendungen der beschreibenden Geometrie, 2, Übungen, 3; Geometrische Konstruktionen und Quadratur des Zirkels, 2. — **Kraft**: Geometrische Analysis, 3; Mechanik deformierbarer Systeme, 3; Grundkräfte der Welt, in Parallele zu dem Monismus von Haeckel, 1. — **Meißner**: Mechanik I, 6, Repetitorium, 1, Übungen, 2;

Schwingungs- und Wellenbewegungen I, 2; Kolloquium, 1. — **Polya**: Einführung in die Analysis reeller Größen, 2 g; Zahlentheorie, 2 g. — **de Quervain**: Die wichtigsten geographischen Reiseinstrumente, mit Übungen, 2. — **Rudio**: Anwendungen der höheren Mathematik, 4. — **Strickler**: Wirtschaftliche Kalkulationen aus dem Gebiete der Maschinen- und Elektroindustrie, 2. — **Weyl**: Analytische Geometrie, 2, Übungen, 1; Flächentheorie, 4. — **Wolfer**: Geographische Ortsbestimmung, 3; Übungen im astronomischen Beobachten, 3; Ausgewählte Methoden der Zeit- und Ortsbestimmung, 2; Grundzüge der geographischen Ortsbestimmung mit Übungen für Grundbuchgeometer, 2. — **Zwicky**: Vermessungskunde, 5; Feldmessungen, 8; Brücken- und Wasserbau, 3, Konstruktionsübungen, 3; Kulturtechnik II, 2, Konstruktionsübungen, 2. —

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der Dozent am Karolinischen Medizinischen Institut in Stockholm Dr. med. John Aug. Sjökvist zum Professor der Chemie und Pharmazie an derselben Hochschule.

Gestorben: Der ord. Professor der Physik an der Universität Straßburg Dr. Ferdinand Braun (während eines Aufenthaltes in Amerika).

Angebote.

Physiker oder Physikerin

für unser physikalisches Laboratorium gesucht. Angebot mit Lebenslauf, Gehaltsansprüchen, womöglich Lichtbild an
Siemens & Halske A.-G., Glühlampenwerk, Charlottenburg, Helmholtzstraße 4—8.

Physiker

oder physikalisch gebildeter **Ingenieur** für Untersuchungen im Laboratorium (akustische und elektrische Schwingungsvorgänge) gesucht. Angebote mit Lebenslauf, Militärverhältnissen, Gehaltsansprüchen usw. erbeten an

**Signal Gesellschaft m. b. H. Kiel
Werk Ravensberg.**

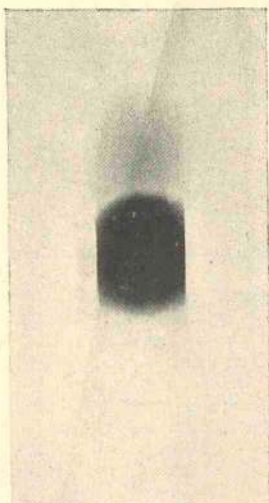


Fig. 2.

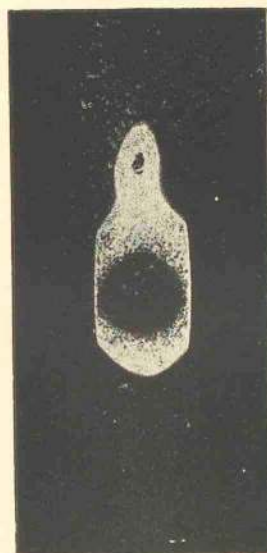


Fig. 3.

1881

Physikalische Hochschule

Staats- u. Universitäts-
Bibliothek Hamburg

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 11.

1. Juni 1918.

Redaktionsschluß für No. 13 am 29. Mai 1918.

19. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

P. Niggli, Die Bestimmung der Kristallstruktur komplizierter Verbindungen. S. 225.

A. Korn, Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes. VIII. S. 234.

Zusammenfassende Bearbeitungen:

W. Voigt, Die Resultate der geometrischen Strukturtheorien und die Ergebnisse der Analyse durch Röntgenstrahlen. I. Teil. S. 237.

Besprechungen:

W. Trendelenburg, Stereoskopische Raummessung an Röntgenaufnahmen. S. 247.

W. A. Roth, Physikalisch-chemische Übungen. S. 248.

Tagesereignisse. S. 248.

Vorlesungsverzeichnis f. das Sommersemester 1918. S. 248.

Personalien. S. 248.

Gesuche. S. 248.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Die Bestimmung der Kristallstruktur komplizierter Verbindungen.

Von Paul Niggli.

Die allgemein geometrischen Eigenschaften der regelmäßigen Punktsysteme lassen sich nach den von Schoenflies¹⁾ gemachten Angaben vollkommen bestimmen. Gewöhnlich wird bei der Erforschung der Kristallstrukturen als Hilfsmittel darauf zu wenig Rücksicht genommen. Es liegt das an der fehlenden Übersicht über die Eigenschaften der 230 Raumgruppen. In einem unter der Presse befindlichen Buch soll diesem Mangel abgeholfen werden. An Hand von Bestimmungstabellen wird die Möglichkeit geschaffen, das Raumsystem (die Raumgruppe) irgendeines komplizierten Kristalles sofort eindeutig zu bestimmen.

Sobald nämlich Massenteilchen in allgemeinsten Lage (mit mehr als zwei Freiheitsgraden) auftreten, deren Beugungsvermögen nicht verschwindend klein ist oder zufällig in der 1. Ordnung komponiert wird, ist sowohl nach dem Bragg'schen Verfahren als auch aus Laue-Photogrammen das Raumsystem einer gegebenen Symmetrieklasse ohne weiteres eruierbar. Die Einschränkung bedeutet, daß eine derartige Bestimmung naturgemäß nur dann eindeutig sein kann, wenn auch das Punktsystem eindeutig nur einem Raumsystem zuzuordnen ist, also die Symmetrieeigenschaften eventuell vorhandener Massenteilchen in ausgezeichneten Lage bereits in anderen Massenverteilungen ihren Ausdruck finden²⁾. Sind einmal das Raumsystem und die Zahl der Moleküle im Elementarparallelepiped bekannt, so lassen sich die Gleichungen der Ebenenserien und ihrer Belastungen

aufstellen und aus den Intensitätsmessungen die Koordinaten der einzelnen Punkte direkt bestimmen.

1. Das Bragg'sche Verfahren.

Die den Spektren 1. Ordnung entsprechenden Abstände mögen als Röntgenperioden bezeichnet werden. Die Bestimmung des Raumsystems eines Kristalles, dessen Symmetrieklasse man kennt, wird nun dadurch ermöglicht, daß jeder Raumgruppe individuelle Verhältnisse der Röntgenperioden zukommen. Ein Beispiel soll dies veranschaulichen:

Die Raumsysteme $\mathfrak{B}_h^{25} \mathfrak{B}_h^{26} \mathfrak{B}_h^{27} \mathfrak{B}_h^{28}$ besitzen die Symmetrie der rhombisch-holoedrischen Klasse und unterscheiden sich dadurch von allen übrigen Raumsystemen dieser Klasse, daß sie einem innenzentrierten Elementarparallelepiped zugeordnet sind. Die primitiven Translationen in Richtung der kristallographischen Achsen bezeichnen wir mit a, b, c und nennen das aus a, b, c gebildete Parallelepiped elementar. Zunächst sei angenommen, daß das Verhältnis $a:b:c$ dem von den Kristallographen benutzten Achsenverhältnis gleich ist.

Den Raumsystemen $\mathfrak{B}_h^{25} \mathfrak{B}_h^{26} \mathfrak{B}_h^{27} \mathfrak{B}_h^{28}$ ist nun gemeinsam, daß die Röntgenperioden senkrecht zu (100), (010), (001) bzw. $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ sind

und daß alle Röntgenperioden senkrecht zu Pyramidenflächen mit der Summe $(h+k+l) =$ eine ungerade Zahl ebenfalls der Hälfte der aus den Elementarabständen berechneten Größe entsprechen. Für Pyramidenflächen mit $(h+k+l) =$ eine gerade Zahl sind die Röntgenperioden den Elementarperioden gleich. Keine anderen Raumsysteme der rhombisch-holoedrischen Klasse besitzen derartige Beziehungen. Man bestimme somit von einem rhombisch-holoedrischen Kristall zunächst die Röntgenperioden (Abstände, die der 1. Ordnung der Spektren entsprechen) für (100) (010) (001) und zwei Pyramidenflächen wie (111)

1) A. Schoenflies, Kristallsysteme und Kristallstruktur. Leipzig 1891.

2) Außerdem gibt es einige wenige, meist paarweise zusammengehörige Raumsysteme, die sich in den Röntgenperioden nicht voneinander unterscheiden.

und (211) mit ungerader und gerader Indizesumme. Führt die Berechnung der Abstände 1. Ordnung für (211) auf ein Parallelepiped mit doppelt so großen Perioden als aus den von (100) (010) (001) und (111) berechnet wurde, so muß ein Raumsystem $\mathfrak{B}_h^{25} - \mathfrak{B}_h^{28}$ vorliegen. Die Raumsysteme $\mathfrak{B}_h^{25} \mathfrak{B}_h^{26} \mathfrak{B}_h^{27} \mathfrak{B}_h^{28}$ unterscheiden sich nun weiterhin hinsichtlich der bei den Prismen auftretenden Verhältnisse der Röntgenperioden voneinander. (Einfluß von Gleitspiegelebenen.)

Es sind drei Prismenzonen $(h k o) (h o l) (o k l)$ vorhanden. Der aus a, b, c (den Elementarperioden) berechnete Abstand zweier identischer Prismenflächen sei d . ($d_{hko}, d_{hol}, d_{okl}$).

In $\mathfrak{B}_h^{25}$ zeigen die Prismen aller drei Zonen mit der Summe der Indizes = eine ungerade Zahl $\frac{d}{2}$ als Röntgenperiode (wobei d natürlich von den Indizes der Flächen abhängig ist).

In $\mathfrak{B}_h^{28}$ gilt dies für zwei Prismenzonen, während in der dritten Zone überhaupt alle Flächen $\frac{d}{2}$ als Röntgenperiode besitzen.

In $\mathfrak{B}_h^{26}$ haben alle Flächen zweier Prismenzonen $\frac{d}{2}$ als Röntgenperiode, hingegen nur diejenigen mit ungerader Indizesumme in der dritten Zone.

In $\mathfrak{B}_h^{27}$ schließlich besitzen die Prismenflächen

aller drei Zonen, ohne Rücksicht auf die Indizes, $\frac{d}{2}$ als Röntgenperiode.

Durch die Untersuchung der Spektralabstände 1. Ordnung von sechs Prismenflächen ist somit die Unterscheidung zwischen $\mathfrak{B}_h^{25} - \mathfrak{B}_h^{28}$ möglich.

Was hier an einem Beispiel gezeigt wurde, gilt ähnlich für alle Raumsysteme; die nötigen Bestimmungstabellen werden in Kürze der Benutzung dargeboten werden¹⁾. Es ist nun nur noch der Fall zu berücksichtigen, daß das Elementarperiodenverhältnis nicht dem kristallographischen entspricht; dann wird man für alle Flächen, die derjenigen Achse nicht parallel gehen, welche geändert werden muß, zu Unstimmigkeiten kommen, die sich bei Änderung dieses Verhältnisses beheben.

Kennt man nun das Raumsystem und die absoluten Größen der Elementarperioden, so läßt sich die Zahl der Atome pro Elementarparallelepiped berechnen. Andererseits besitzen die Raumsysteme Punktlagen verschiedener Zähligkeit pro Elementarparallelepiped. Die niedrigzähligen sind mit entsprechenden Symmetrieeigenschaften behaftet, ihnen ist auch nur eine beschränkte Zahl von Freiheitsgraden eigen. Wenden wir für die Symmetriebedingungen die Schönfliesche Nomenklatur an, so erhalten wir beispielsweise für $\mathfrak{B}_h^{25} - \mathfrak{B}_h^{28}$ folgende kleine Tabelle.

Tabelle I.

Raumgruppe	Zähligkeiten und Symmetriebedingungen von Punktlagen ohne Freiheitsgrad (Die Buchstabenindizes sind durchweg unten rechts hingeschrieben worden.)	Zähligkeiten und Symmetriebedingungen von Punktlagen mit einem Freiheitsgrad	Zähligkeit und Symmetriebedingung von Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden	Zähligkeit der allgemeinsten Lage ohne Symmetriebedingung
$\mathfrak{B}_h^{25}$	$2 = V_h; 2 = V_h; 2 = V_h; 2 = V_h; 8 = C_i$	$4 = C_{2v}$	$8 = C_8$	16
$\mathfrak{B}_h^{26}$	$4 = V; 4 = V; 4 = C_{2h}; 4 = C_{2h}; 8 = C_i$	$8 = C_2$	$8 = C_8$	16
$\mathfrak{B}_h^{27}$	$4 = C_{2h}; 4 = C_{2h}; 4 = C_{2h}; 4 = C_{2h}$	$4 = C_{2v}; 8 = C_2$	$8 = C_8$	16
$\mathfrak{B}_h^{28}$	$8 = C_i; 8 = C_i$	$8 = C_2$	—	16

Das Raumsystem $\mathfrak{B}_h^{28}$ besitzt somit beispielsweise viererlei vierzählige Punktarten in genau bestimmter Lage, da wo die Symmetrieelemente der Kombination C_{2h} zusammenstoßen, ferner eine vierzählige Lage mit einem Freiheitsgrad auf der Schnittlinie zweier Spiegelebenen (C_{2v}). Außerdem zwei achtzählige Lagen, die an Drehsachsen oder Spiegelebenen gebunden sind, währenddem die allgemeinste Lage im Elementarparallelepiped 16zählig ist.

Kennen wir nun, nachdem das Raumsystem bestimmt wurde, die Zahl der Atome pro Ele-

mentarparallelepiped und sind gewisse Schlußfolgerungen über innerkonstitutionelle chemische Zusammensetzung zulässig, so wird es im allgemeinen nicht schwer halten die Atomschwerpunktlagen auf die einzelnen Punktarten zu verteilen.

Es sei beispielsweise das Raumsystem $\mathfrak{B}_h^{25}$ gefunden worden. Auf das Elementarparallel-

1) In einem Buche: „Geometrische Kristallographie des Diskontinuums“, das im Verlage von Gebrüder Bornträger, Berlin erscheinen wird.

epiped kommen zwei Moleküle einer Verbindung AB_8 , also 2 A -Atome und 16 B -Atome. Es sei kein Grund vorhanden anzunehmen, daß es zweierlei Sorten von B -Atomen gebe, dann müssen A einer zweizähligen Punktlage, B einer 16zähligen Punktlage angehören.

Von B sind nun die drei Koordinaten x, y, z eines Punktes zu bestimmen. x, y, z beziehen sich auf die Koordinatenachsen a, b, c mit den Größen a, b, c als Einheitsmaßstäbe und dem Nullpunkt in einer zweizähligen Punktlage. Sie müssen also echte Brüche sein. Kennen wir die Koordinaten eines der 16 zusammengehörigen Punkte, so sind auch die Koordinaten der übrigen 15 gegeben, da jedes Raumsystem ein individuelles und bekanntes Koordinatensystem zusammengesetzter Punkte besitzt. Es lautet beispielsweise für $\mathfrak{B}_h^{25}$ bei der angenommenen Nullage:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} x & \bar{y} & z \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} \bar{x} & y & \bar{z} \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} x & y & \bar{z} \end{matrix} \right] \\ & \left[\begin{matrix} x & \bar{y} & \bar{z} \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} \bar{x} & y & z \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \right] \\ & \left[\begin{matrix} x + \frac{1}{2} & y + \frac{1}{2} & z + \frac{1}{2} \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} \bar{x} + \frac{1}{2} & \bar{y} + \frac{1}{2} & \bar{z} + \frac{1}{2} \end{matrix} \right] \\ & \left[\begin{matrix} \bar{x} + \frac{1}{2} & y + \frac{1}{2} & \bar{z} + \frac{1}{2} \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} x + \frac{1}{2} & \bar{y} + \frac{1}{2} & \bar{z} + \frac{1}{2} \end{matrix} \right] \\ & \left[\begin{matrix} \bar{x} + \frac{1}{2} & \bar{y} + \frac{1}{2} & z + \frac{1}{2} \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} x + \frac{1}{2} & y + \frac{1}{2} & \bar{z} + \frac{1}{2} \end{matrix} \right] \\ & \left[\begin{matrix} x + \frac{1}{2} & \bar{y} + \frac{1}{2} & z + \frac{1}{2} \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} \bar{x} + \frac{1}{2} & y + \frac{1}{2} & \bar{z} + \frac{1}{2} \end{matrix} \right] \end{aligned}$$

Daraus sind nun sofort die Gleichungen für die Ebenenserien und ihre Belastungen parallel irgendeiner Fläche bestimmbar.

Die Größe $d = xh + yk + zl$ gibt nämlich den Abstand der Ebene (hkl), welche den Punkt (xyz) enthält, vom Nullpunkt an, sofern die Elementarperiode dieser Ebenenparallelschar gleich 1 gesetzt wird. Für bestimmte (hkl) und noch beliebige x, y, z -Werte ist nun nachzuprüfen, ob einzelne von den durch die 16 gleichwertigen Punkte gelegten Ebenen zusammenfallen. Es hängt dies von den Symmetrieeigenschaften und Translationsgrößen ab und ist auch von vornherein angebbar.

Für (100) findet man in $\mathfrak{B}_h^{25}$ bei beliebigem xyz z. B. die folgenden d -Werte:

$$\begin{aligned} & x, \bar{x}, \bar{x}, x, \bar{x}, x, x, \bar{x}; x + \frac{1}{2}, \bar{x} + \frac{1}{2}, \bar{x} + \frac{1}{2}, \\ & x + \frac{1}{2}, \bar{x} + \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}, \bar{x} + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

das bedeutet, daß die Elementarperiode nur von vier Ebenen mit einer Belastung von je

vier Atomen unterteilt wird. Die Abstände vom Nullpunkt sind $x, \bar{x}, x + \frac{1}{2}, \bar{x} + \frac{1}{2}$. Da zu

jeder Ebene im um die Hälfte der Elementarperiode vergrößerten Abstand eine gleichbelastete Massenebene gehört, ist die Röntgenperiode, wie bereits berücksichtigt, die Hälfte der Elementarperiode. Es finden sich in einer Röntgenperiode daher in Abständen $2x$ und $-2x$ vom Nullpunkt Massenebenen mit einer Belastung von je vier B -Atomen.

Den A -Atomen kommen die Koordinaten

$$\left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right] \text{ und } \left[\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix} \right] \text{ zu. Jede Ebene (100)}$$

mit $d = 0$ und $d = \frac{1}{2}$ besitzt pro Elementar-

parallelogramm 1 A -Atom. Für den angenommenen Fall würde daher die Amplitude n^{ter} Ordnung für (100) gegeben sein durch

$$A_n = A + 8B \cos n4\pi x,$$

wo A und B die Atomgewichte oder Atomnummern bedeuten. Die Verhältnisse der Amplituden verschiedener Ordnung für ein und dieselbe Ebene erhält man aus den Intensitätsmessungen der diesbezüglichen Spektren, und zwar ist nach den L. Vegardschen Annahmen:

$$\frac{A_{n_1}}{A_{n_2}} = \frac{n_1 \sqrt{I_1}}{n_2 \sqrt{I_2}}.$$

Im angenommenen Falle ließe sich somit durch ein einziges gemessenes Verhältnis von Intensitäten verschiedener Ordnung parallel (100) x bestimmen. In gleicher Weise werden die Spektren von (010) und (001) direkt zur Kenntnis von y und z führen.

Sind mehrere Atomarten auf Punkte allgemeinsten Lage verteilt, so werden lediglich infolge Erhöhung der Zahl der Unbekannten die Gleichungen komplizierter. Um die nötige Zahl der Amplitudenverhältnisse zu bekommen, müssen dann andere als pinakoidale Ebenen untersucht werden, so daß die Unbekannten auch als Summen in den Kosinuswerten auftreten. Stets und für alle Ebenen lassen sich aber bei Kenntnis des Raumsystems solche die Koordinaten der Punkte direkt enthaltende Gleichungen für die Amplituden aufstellen.

Ein derartig komplizierter, spezieller Fall möge noch besprochen werden, um so mehr, da gleichzeitig eine kleine, aber nicht unwesentliche Korrektur eines von anderer Seite gefundenen Strukturbildes vorgenommen werden kann.

Es betrifft das die Struktur des Kalialauns,

die neuerdings von L. Vegard und H. Schjelderup bestimmt wurde¹⁾).

Vegard und Schjelderup fanden für die Alaune folgende Verhältnisse der den Spektren 1. Ordnung entsprechenden Abstände senkrecht zu (100), (110), (111)

$$d_{100} : d_{110} : d_{111} = 1 : \sqrt{2} : \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Die Röntgenperioden für die verschiedenen kubischen Raumgruppen lauten für $d_{100} : d_{110} : d_{111}$ folgendermaßen (Tabelle II):

Tabelle II²⁾.

Raumgruppe	$d_{100} : d_{110} : d_{111}$	$1 = \frac{a}{n}$	Raumgruppe	$d_{100} : d_{110} : d_{111}$	$1 = \frac{a}{n}$
$\mathfrak{D}^1$	$1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = a$	$\mathfrak{D}^1$	$1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = a$
$\mathfrak{D}^2$	$1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{2}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$	$\mathfrak{D}^3$	$1 : \sqrt{2} : \frac{2}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$
$\mathfrak{D}^3$	$1 : \sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$	$\mathfrak{D}^3$	$1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{2}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$
$\mathfrak{D}^4$	$1 : \sqrt{2} : \frac{2}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$	$\mathfrak{D}^4$	$1 : \sqrt{2} : \frac{4}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{4}$
$\mathfrak{D}^5$	$1 : \sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$	$\mathfrak{D}^5$	$1 : \sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$
$\mathfrak{D}_h^1$	$1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = a$	$\mathfrak{D}_h^6, \mathfrak{D}_h^7$	$1 : 2\sqrt{2} : \frac{4}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{4}$
$\mathfrak{D}_h^2$	$1 : \sqrt{2} : \frac{2}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$	$\mathfrak{D}_h^8$	$1 : 2\sqrt{2} : \frac{2}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{4}$
$\mathfrak{D}_h^3$	$1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{2}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$	$\mathfrak{D}_h^1$	$1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = a$
$\mathfrak{D}_h^4$	$1 : \sqrt{2} : \frac{4}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{4}$	$\mathfrak{D}_h^2$	$1 : \sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$
$\mathfrak{D}_h^5$	$1 : \sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$	$\mathfrak{D}_h^3$	$1 : \sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$
$\mathfrak{D}_h^6$	$1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{2}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$	$\mathfrak{D}_h^4$	$1 : \sqrt{2} : \frac{2}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$
$\mathfrak{D}_h^7$	$1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$	$\mathfrak{D}_h^5$	$1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{2}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$
$\mathfrak{D}_d^1$	$1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = a$	$\mathfrak{D}_h^6$	$1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$
$\mathfrak{D}_d^2$	$1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{2}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$	$\mathfrak{D}_h^7$	$1 : \sqrt{2} : \frac{4}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{4}$
$\mathfrak{D}_d^3$	$1 : \sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$	$\mathfrak{D}_h^8$	$1 : \sqrt{2} : \frac{2}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{4}$
$\mathfrak{D}_d^4$	$1 : \sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$	$\mathfrak{D}_h^9$	$1 : \sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$
$\mathfrak{D}_d^5$	$1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{2}$	$\mathfrak{D}_h^{10}$	$1 : \sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{4}$
$\mathfrak{D}_d^6$	$1 : \sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{3}}$	$1 = \frac{a}{4}$			

1) L. Vegard u. H. Schjelderup, Ann. d. Phys. 54, 146, 1918.

2) In einzelnen Klassen kommen gewisse Verhältnisse $d_{100} : d_{110} : d_{111}$ mehrfach vor. Eine Unterscheidung zwischen derartigen Raumsystemen ist meist möglich, wenn nach parallel weiteren Ebenensystemen die Spektralabstände 1. Ordnung bestimmt werden. So unterscheiden sich $\mathfrak{D}_h^3$ und $\mathfrak{D}_h^8$ dadurch voneinander, daß im ersten Raumsystem parallel den Ebenen (hko) mit $(h+k) = \text{ungerade}$ die Röntgenperiode die Hälfte derjenigen ist, die man aus den Elementargrößen berechnet.

Die Alaune kristallisieren dyakisododekaedrisch, müssen also Raumsystemen $\mathfrak{T}_h$ zugeordnet werden. Es gibt ein einziges Raumsystem dieser Klasse, das ein Verhältnis $d_{100} : d_{110} : d_{111} = 1 : \sqrt{2} : \frac{2}{\sqrt{3}}$ besitzt, nämlich $\mathfrak{T}_h^2$. Es muß nach den Untersuchungen von Vegard und

Schjelderup das Raumsystem der Alaune sein.

Die Tabelle III gibt über die Zähligkeiten, Freiheitsgrade und Symmetriebedingungen der in einem Elementarwürfel kubischer Raumsysteme vorhandenen Punktlagen Auskunft. (Die Symmetriebedingungen folgen in der Reihenfolge der Zähligkeiten aufeinander.)

Tabelle III.

Zähligkeiten und Symmetriebedingungen von Punktlagen im Elementarwürfel.

Raumgruppe	Zähligkeit der Punktlagen ohne Freiheitsgrad	Zähligkeit der Punktlagen mit einem Freiheitsgrad	Zähligkeit der Punktlagen mit zwei Freiheitsgraden	Zähligkeit einer allgemeinen Punktlage	Dazugehörige Symmetriebedingungen
$\mathfrak{T}^1$	1, 1; 3, 3	4; 6	—	12	$T, T; V, V; C_3; C_2; C_1$
$\mathfrak{T}^2$	4, 4, 4, 4	16; 24	—	48	$T, T, T, T; C_3; C_2; C_1$
$\mathfrak{T}^3$	2; 6	8; 12	—	24	$T; V; C_3; C_2; C_1$
$\mathfrak{T}^4$	—	4	—	12	$C_3; C_1$
$\mathfrak{T}^5$	—	8; 12	—	24	$C_3; C_2; C_1$
$\mathfrak{T}_h^1$	1, 1; 3, 3	6; 8	12	24	$T_h, T_h; V_h, V_h; C_{2v}; C_3; C_2; C_1$
$\mathfrak{T}_h^2$	2; 6; 4, 4	8; 12	—	24	$T; V; C_{3i}; C_{3i}; C_3; C_2; C_1$
$\mathfrak{T}_h^3$	4, 4; 8; 24	24; 32; 48	48	96	$T_h, T_h; T; C_{2h}; C_{2v}; C_3; C_2; C_3; C_1$
$\mathfrak{T}_h^4$	8, 8; 16, 16	32; 48	—	96	$T, T; C_{3i}; C_{3i}; C_3; C_2; C_1$
$\mathfrak{T}_h^5$	2; 6; 8	12; 16	24	48	$T_h; V_h; C_{3i}; C_{2v}; C_3; C_2; C_1$
$\mathfrak{T}_h^6$	4, 4	8	—	24	$C_{3i}; C_{3i}; C_3; C_1$
$\mathfrak{T}_h^7$	8, 8	16; 24	—	48	$C_{3i}; C_{3i}; C_3; C_2; C_1$
$\mathfrak{T}_d^1$	1, 1; 3, 3	4; 6; 12	12	24	$T_d, T_d; V_d, V_d; C_{3v}; C_{2v}; C_2; C_3; C_1$
$\mathfrak{T}_d^2$	4, 4, 4, 4	16; 24	48	96	$T_d, T_d, T_d, T_d; C_{3v}; C_{2v}; C_3; C_1$
$\mathfrak{T}_d^3$	2; 6; 12	8; 12; 24	24	48	$T_d; V_d; S_4; C_{3v}; C_{2v}; C_2; C_3; C_1$
$\mathfrak{T}_d^4$	2; 6, 6, 6	8; 12	—	24	$T; V; S_4; S_4; C_3; C_2; C_1$
$\mathfrak{T}_d^5$	8, 8; 24, 24	32; 48	—	96	$T, T; S_4; S_4; C_3; C_2; C_1$
$\mathfrak{T}_d^6$	12, 12	16; 24	—	48	$S_4; S_4; C_3; C_2; C_1$
$\mathfrak{O}^1$	1, 1; 3, 3	6; 8; 12	—	24	$O, O; D_4; D_4; C_4; C_3; C_2; C_1$
$\mathfrak{O}^2$	2; 4, 4; 6, 6, 6	8; 12	—	24	$T; D_3, D_3; V, V; V; C_3; C_2; C_1$
$\mathfrak{O}^3$	4, 4; 8; 24	24; 32; 48	—	96	$O, O; T; V; C_4; C_3; C_2; C_1$
$\mathfrak{O}^4$	8, 8; 16, 16	32; 48	—	96	$T, T; D_3, D_3; C_3; C_2; C_1$
$\mathfrak{O}^5$	2; 6; 8; 12	12; 16; 24	—	48	$O; D_4; D_3; V; C_4; C_3; C_2; C_1$
$\mathfrak{O}^{6,7}$	4, 4	8; 12	—	24	$D_3, D_3; C_3; C_2; C_1$
$\mathfrak{O}^8$	8, 8; 12, 12	16; 24	—	48	$D_3, D_3; V, V; C_3; C_2; C_1$
$\mathfrak{O}_h^1$	1, 1; 3, 3	6; 8; 12	24	48	$O_h, O_h; D_{4h}; D_{4h}; C_{4v}; C_{3v}; C_{2v}; C_3; C_1$
$\mathfrak{O}_h^2$	2; 6; 8; 12	12; 16; 24	—	48	$O; D_4; C_{3i}; S_4; C_4; C_3; C_2; C_1$
$\mathfrak{O}_h^3$	2; 6, 6, 6; 8	12; 16; 24	24	48	$T_h; V_h; V_d, V_d; D_3; C_{2v}; C_3; C_2; C_3; C_1$
$\mathfrak{O}_h^4$	2; 4, 4; 6; 12	8; 12; 24	24	48	$T_d; D_{3d}, D_{3d}; V_d; V; C_{3v}; C_{2v}; C_2; C_3; C_1$
$\mathfrak{O}_h^5$	4, 4; 8; 24	24; 32; 48	96	192	$O_h, O_h; T_d; V_h; C_{4v}; C_{3v}; C_{2v}; C_3; C_1$
$\mathfrak{O}_h^6$	8, 8; 24, 24	48; 48; 64; 96	96	192	$O; T_h; C_{4h}; V_d; C_4; C_{2v}; C_3; C_2; C_3; C_1$
$\mathfrak{O}_h^7$	8, 8; 16, 16	32; 48; 96	96	192	$T_d, T_d; D_{3d}, D_{3d}; C_{3v}; C_{2v}; C_2; C_3; C_1$
$\mathfrak{O}_h^8$	16; 32; 32; 48	64; 96	—	192	$T; C_{3i}; D_3; S_4; C_3; C_2; C_1$
$\mathfrak{O}_h^9$	2; 6; 8; 12	12; 16; 24; 48	48	96	$O_h; D_{4h}; D_{3d}; V_d; C_{4v}; C_{3v}; C_{2v}; C_2; C_3; C_1$
$\mathfrak{O}_h^{10}$	16, 16; 24, 24	32; 48	—	96	$C_{3i}; D_3; V; S_4; C_2; C_2; C_1$

In einem Elementarwürfel des Alauns sind vier Moleküle vorhanden. Kalialaun besitzt die Formel $[Al(H_2O)_6](SO_4)_2K$ beziehungsweise $[K(H_2O)_6](SO_4)_2Al$. Im Elementarwürfel befinden sich somit 4 Al -Atome 24×2 Sauerstoffatome des Kristallwassers, 24×4 H -Atome, 8 Schwefelatome, 32 Sauerstoffatome des SO_4 -Radikales, 4 K -Atome. Andererseits besitzt, wie die Tabelle II zeigt, $\mathfrak{T}_h^2$ eine 2-zählige Punktlage mit der Symmetrie T , eine 6-zählige Punktlage mit einer Symmetrie V , zweierlei 4-zählige Punktlagen mit den Symmetriebedingungen der Klasse C_{3i} . Allen diesen Punktlagen kommt kein Freiheitsgrad zu, ihre Lage ist eine vollkommen bestimmte. Einen Freiheitsgrad (d. h. beliebige Lage auf einer Drehungsachse) besitzen die 8- und 12-zähligen Punktlagen. Die ersteren liegen auf Triglyren (C_3), die letzteren auf Diglyren (C_2). Alle übrigen Punkte ohne nähere Lagenbeschränkung treten im Elementarwürfel 24 mal auf. Daraus können wir sofort schließen, daß im Kalialaun die Lage der K - und Al -Atome durch die zweierlei vierzähligen Punkte gegeben ist und daß die 8 Schwefelatome auf den Triglyren liegen müssen. Die 32 Sauerstoffatome des SO_4 -Radikales können nicht alle gleichwertig sein. Am einfachsten setzen sie sich aus zweierlei Arten zusammen, die einer 8-zähligen Lage auf den Triglyren und einer beliebigen 24-zähligen Lage entsprechen. Die 48 Sauerstoffatome des Wassers müssen sich auf mindestens zwei 24-zählige Lagen verteilen.

Prüfen wir dieses Ergebnis vom Standpunkte des Chemikers. Die zwei wahrscheinlichsten Varianten der Strukturformeln sind bereits mitgeteilt. Werner nimmt die erstere an. Das Kristallwasser wird aller Wahrscheinlichkeit nach (sonst sind meistens die Sechshydrate die höchsten Formen) Doppelmolekeln bilden, die an Al oder K gebunden sind. Es müssen also zweierlei O -Atome vorhanden sein. Die Gruppierung

kann gemäß den Symmetrieeigenschaften der vierzähligen Punktlagen nur von der Art der Fig. 1 sein, die auch vom chemischen Standpunkte aus die allein in Frage kommende zu

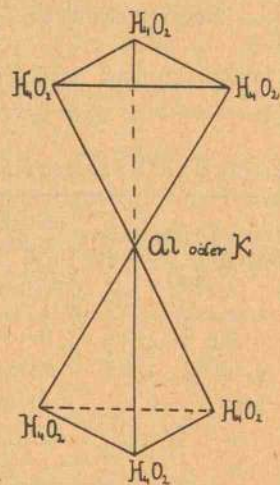


Fig. 1.

sein scheint. SO_4 wird zunächst als in erster Linie an K oder Al gebunden erachtet. Da diese Bindung in irgendeiner Weise durch die O -Atome vermittelt werden wird, ist zu erwarten, daß ein ursprüngliches Sauerstofftetraeder in eine trigonale Pyramide verzerrt wird, entsprechend etwa den Fig. 2a oder 2b. Dann müssen zweierlei Sauerstoffatome vorhanden sein, deren Zahl sich wie 1 : 3, d. h. wie 8 : 24 verhält. Chemisches Verhalten und geometrische Eigenschaft der Raumgruppe stehen somit in vollkommener Übereinstimmung.

Wir wählen nun einen der zweizähligen Punkte zum Koordinatennullpunkt und können sofort das System eines gleichwertigen Punktkomplexes aufstellen. Von jeder Atomart müssen wir die Koordinaten eines Punktes kennen, sie

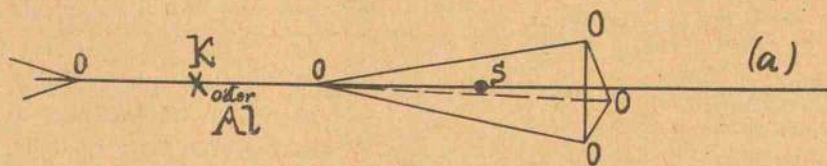


Fig. 2a.

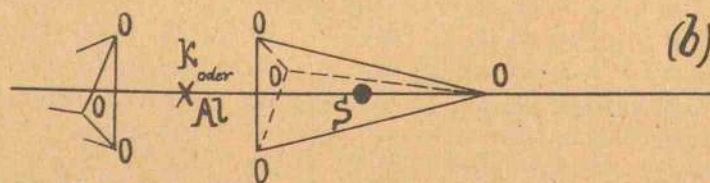


Fig. 2b.

sind für Atome mit Freiheitsgraden die zu ermittelnden Unbekannten. Die beiden vierzähligen Punktarten (K - und Al -Atomlagen) sind von

vornherein durch die Koordinaten $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

bzw. $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ gegeben. Die nur auf den

Triglyren liegenden Punkte besitzen Ausgangskordinaten mit $x=y=z$. Zur Bestimmung der Orte der S -Atome und der acht besonderen Sauerstoffatome des SO_4 -Radikales müssen daher je eine Unbekannte berechnet werden. Be-

zeichnen wir mit $\begin{bmatrix} x_s & y_s & z_s \end{bmatrix}$ die Koordinaten

eines S -Atoms, mit $\begin{bmatrix} x_1 & x_1 & x_1 \end{bmatrix}$ diejenigen eines

der acht Sauerstoffatome, so sind x_s und x_1 die Unbekannten. Die übrigen dreierlei Sauerstoffatomarten (eine von SO_4 , zwei von H_2O) entsprechen Punkten allgemeiner Lage. Für jede Art müssen wir daher die Koordinaten x, y, z irgendeines Punktes kennen. Bezeichnen

wir sie mit $\begin{bmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}$ (zu SO_4 gehörig) und

$\begin{bmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}$ (zu H_2O gehörig), so

sind dies zugleich die weiteren Unbekannten. Da die H -Atome wohl von keinem nennenswerten Einfluß auf die röntgenspektroskopischen Erscheinungen sind, so sind durch $x_s, x_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, x_4, y_4, z_4$ alle eruierten Unbekannten gegeben. Es sind deren 11. Aus den beispielsweise von Schoenflies angegebenen Koordinatentripeln gleichwertiger Punkte sind, wie früher erläutert, die A_n für irgendeine Ebene als Funktion dieser Unbekannten darstellbar. Berücksichtigt man für den gegebenen Fall, daß die Ebenensätze parallel (100) und (110) symmetrisch in bezug auf die Nullage erscheinen, diejenigen parallel (111) nur hinsichtlich der Lagen $d = \frac{1}{4}$ oder $\frac{3}{4}$ und daß in (100) die doppelten Koordinatenwerte eingehen, weil infolge von Gleitspiegelebenen schon $\frac{a}{2}$ die

Röntgenperiode ist, so erhält man folgende Gleichungen für die Amplituden der reflektierten Wellen n ter Ordnung.

Für (100)

$$A_n = 2(KAl) \cos n\pi + (4S) \cos n4\pi x_s + (4O) [\cos n4\pi x_1 + \cos n4\pi x_2 + \cos n4\pi y_2 + \cos n4\pi z_2 + \cos n4\pi x_3 + \cos n4\pi y_3 + \cos n4\pi z_3 + \cos n4\pi x_4 + \cos n4\pi y_4 + \cos n4\pi z_4].$$

Für (110)

$$A_n' = 2(KAlS_2O_2) + 2(KAl) \cos n\pi + (4S) \cos n4\pi x_s + (4O) \cos n4\pi x_1 + (4O) [\cos n2\pi(x_2 + y_2) + \cos n2\pi(x_2 - y_2) + \cos n2\pi(x_2 + z_2) + \cos n2\pi(x_2 - z_2) + \cos n2\pi(y_2 + z_2) + \cos n2\pi(y_2 - z_2) + \cos n2\pi(x_3 + y_3) + \cos n2\pi(x_3 - y_3) + \cos n2\pi(x_3 + z_3) + \cos n2\pi(x_3 - z_3) + \cos n2\pi(y_3 + z_3) + \cos n2\pi(y_3 - z_3) + \cos n2\pi(x_4 + y_4) + \cos n2\pi(x_4 - y_4) + \cos n2\pi(x_4 + z_4) + \cos n2\pi(x_4 - z_4) + \cos n2\pi(y_4 + z_4) + \cos n2\pi(y_4 - z_4)].$$

Für (111)

$$A_n'' = (4K) + (4Al) \cos n\pi + (6S) \cos n\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi x_s\right) + (2S) \cos n\left(\frac{\pi}{2} + 6\pi x_s\right) + (6O) \cos n\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi x_1\right) + (2O) \cos n\left(\frac{\pi}{2} + 6\pi x_1\right) + (6O) \left[\cos n\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi(x_2 + y_2 + z_2)\right\} + \cos n\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi(x_2 - y_2 - z_2)\right\} + \cos n\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi(y_2 - x_2 - z_2)\right\} + \cos n\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi(z_2 - x_2 - y_2)\right\} + \cos n\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi(x_3 + y_3 + z_3)\right\} + \dots + \cos n\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi(z_4 - x_4 - y_4)\right\} \right].$$

Es sind zur Auflösung der Unbekannten elf Verhältnisse $\frac{A_{n_1}}{A_{n_2}}$ zu bilden. Durch Intensitätsmessungen sind elf solche Verhältnisse empirisch zu bestimmen. Aus den Beobachtungswerten von Vegard und Schjelderup erhält man folgende abgerundeten Zahlenwerte für die Amplituden der reflektierten Wellen in willkürlichen Einheiten.

Tabelle IV.

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$
(100)	1,7	19	30	11	22	13		
(110)	3	20	19	22	0	38	0	36
(111)	6,5	8	30	11	18	28		

Da sich daraus innerhalb der gleichen Ebenen mehr als elf unabhängige Verhältnisse $\frac{A_{n_1}}{A_{n_2}}$ bilden lassen, muß das Gleichungssystem auf-

lösbar sein. Es wird eine lohnende Aufgabe für Mathematiker sein, einen möglichst einfachen Weg zur Auflösung derartiger Gleichungen anzugeben, treten sie bei der Strukturbestimmung komplizierter Kristalle doch immer auf.

Da die gemachten physikalischen Annahmen ($A_n = \sqrt{I_n} \cdot n$) wohl nur in erster Annäherung Gültigkeit besitzen, mag es vorläufig ebenso zweckmäßig sein durch Probieren angenäherte, und dem ganzen Strukturbild nach wahrscheinliche Lösungen zu finden. Derart ist wohl Vegard vorgegangen, aber der Ausgangspunkt seiner Betrachtungen ist vom geometrischen und chemischen Standpunkt aus anfechtbar und es ist höchstwahrscheinlich, daß in der gefundenen Lösung die Sauerstoffatome den Radikalen unrichtig zugeordnet worden sind.

Vegard und Schjelderup nehmen an, daß die Sauerstoffatome des SO_4 -Radikales in den Ecken eines dem Elementargitter ähnlichen orientierten Würfels mit den Zentrum im K -Atom angeordnet seien. Einzige Unbekannte ist dann beispielsweise die Koordinate desjenigen Eckpunktes, der auf der trigonalen Achse liegt. Die Sauerstoffatome teilen sie in „sechs Gruppen von je vier“, die jeweiligen Ecken von Tetraeder bilden, welche ihrerseits wieder kubisch um den Nullpunkt angeordnet sind. (Zwei Unbekannte.) Die Schwefelatome sind von vornherein richtig auf den trigonalen Achsen angenommen. (Eine Unbekannte.) Die Autoren reduzieren somit die 11 Unbekannten willkürlich auf vier. Gegen eine solche Reduktion ist zwecks eines ersten

Überschlagsverfahrens an sich nichts einzuwenden, besonders dann nicht, wenn „dafür“ chemische oder geometrische Anhaltspunkte vorhanden sind. Das ist nun bei der vorgeschlagenen Reduktion durchaus nicht der Fall und auch die rein geometrische Beschreibung des resultierenden Strukturbildes erweckt auf diese Weise ganz falsche Vorstellungen. Die Schwerpunktlage der K -Atome besitzt die Symmetrie der rhomboedrischen Kristallklasse. Wird somit die Punktverteilung richtig durchgeführt (und Vegard und Schjelderup nehmen genau die Symmetrie von $\mathfrak{Z}_h$ für das gesamte Raumsystem an), so müssen schließlich sechs von den acht darum würfelförmig gruppierten Sauerstoffatomen ganz anders von den übrigen Atomen umgeben sein als die zwei auf den trigonalen Achsen liegenden. Es ist dann 1. fraglich, ob sie dem gleichen Radikal angehören und 2. unwahrscheinlich, daß die beiderlei Arten genau gleichweit von den K -Atomen entfernt sind. Durch das Zentrum der Sauerstofftetraeder geht andererseits nur eine zweizählige Achse, je zwei der vier Atome werden daher ebenfalls ganz andere relative Lage besitzen als die übrigen zwei.

Sehr schön kommt nun das in der Ausrechnung, die Vegard und Schjelderup geben, zum Ausdruck und es fehlen in der angenäherten wahrscheinlichen Lösung nur die unabwendbaren Schlußfolgerungen. Nach ihrer Deutung finden sie als wahrscheinliche Werte folgende, von mir aus den dort bestimmten Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ berechneten, Koordinatenwerte:

$$x_s = \frac{5}{8} \left[\begin{matrix} x_2, y_2, z_2 \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} \frac{5}{72}, \frac{5}{72}, \frac{31}{72} \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} x_4, y_4, z_4 \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{11}{24} \end{matrix} \right]$$

$$x_1 = \frac{5}{72}; \left[\begin{matrix} x_3, y_3, z_3 \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{11}{24} \end{matrix} \right]$$

Die vorgenommene Reduktion der Unbekannten findet ihren Ausdruck in den strukturtheoretisch rein willkürlichen Beziehungen:

$$x_2 = x_1; y_2 = x_1; y_3 = \frac{1}{2} - x_1$$

$$x_3 = x_4; y_3 = 1 - y_4; z_3 = z_4 + \frac{1}{4}$$

Die Übereinstimmung mit den Beobachtungsergebnissen ist eine ziemlich gute, nimmt man daher trotz des anfechtbaren Ausgangspunktes die Lösung als eine erste angenäherte an, so weiß man nun sofort, durch welche noch vorhandenen Freiheiten eine bessere Übereinstimmung zu erzielen ist. Ich möchte hier nur noch darauf aufmerksam machen, daß auch schon die Vegardsche Annahme zu einer Atomverteilung führt, die berechnete Zweifel in die richtige Zuordnung der O -Atome zu einzelnen

Radikalen aufkommen läßt. Konstruiert man nämlich nach den Angaben das Punktsystem, so erkennt man, daß an je sechs von den um K herumgruppierten Sauerstoffatomen des angeblichen SO_4 -Komplexes sehr nahe O -Atome des H_2O liegen, während die übrigen O -Atome des Kristallwassers isoliert dem Al -Atom benachbart sind. So ist dem Sauerstoffatom $\left[\begin{matrix} \frac{5}{72}, \frac{5}{72}, \frac{31}{72} \end{matrix} \right]$ das Sauerstoffatom $\left[\begin{matrix} \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{11}{24} \end{matrix} \right]$ benachbart. Die Koordinatendifferenzen sind $\frac{1}{18}, \frac{1}{18}, \frac{1}{36}$. Das ist chemisch nicht sehr wahrscheinlich. Diese O -Atome liegen aber um das K -Atom gerade, wie es für die O -Atome der Wasserdoppelmolekeln um das K - oder Al -Atom erwartet werden muß. Die Sauerstoffatome des Komplexes

$\left[\frac{5}{72}, \frac{5}{72}, \frac{31}{72}\right]$ sind daher kaum als zum SO_4 -Radikal gehörig zu betrachten, sie bilden mit $\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{11}{24}\right]$ die O-Atome der Doppelmoleküle des Kristallwassers. Den SO_4 -Radikalen angehörig sind außer $\left[\frac{5}{72}, \frac{5}{72}, \frac{5}{72}\right]$ die O-Atome von $\left[\frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \frac{5}{24}\right]$, die mit den ersteren zusammen die Ecken einer trigonalen Pyramide bilden, in deren Innern die Schwefelatome sitzen. Die schematischen Figuren 1 und 2b wären dann verwirklicht, die Trigonen würden Molekülachsen sein, was mit der bevorzugten Oktaederfläche des Wachstums in guter Übereinstimmung ist. Von großem Interesse für den Chemiker wäre die eindeutige Entscheidung, ob die Wasserdoppelmoleküle um das Al- oder K-Atom gruppiert sind. Nach der angedeuteten Vegard'schen Lösung wären sie um das K-Atom gruppiert, es ist aber nicht ausgeschlossen, daß unter Benutzung aller Freiheitsgrade auch andere Zuordnungen möglich sind, um so mehr da nur parallel (111) Unterschiede bemerkbar sein können.

Es ist nicht das erste Mal, daß bei vom chemischen Standpunkte aus anfechtbarer Zuordnung von Atomen sich durch die Ausrechnung automatisch die richtige Verteilung einstellt (z. B. Spinell); ein Beweis, wenn ein solcher überhaupt nötig ist, daß zwischen Strukturchemie und Kristallstruktur enge Beziehungen herrschen, die man nicht vernachlässigen darf. Die Komplexstruktur in den Kristallen gibt uns direkt Auskunft über molekulare Aggregationen auch im flüssigen Zustand.

Das angeführte Beispiel möge zur Erläuterung des allgemeinen Bragg'schen Verfahrens der Strukturbestimmung komplizierter Kristalle genügen, im übrigen muß auf die Bestimmungstabellen verwiesen werden.

2. Die Kristallstrukturbestimmung aus Laue-Photogrammen.

Die gewöhnlichen Interferenzmusterphotographien sind bis jetzt bei komplizierteren Verbindungen wenig zur systematischen Strukturbestimmung verwendet worden. Bei sorgfältiger Benutzung läßt sich aber aus einer genügenden Zahl solcher Photographien die Struktur mit der gleichen Schärfe bestimmen wie aus Spektraluntersuchungen. Es soll hier auf die Methode nicht ins einzelne eingegangen werden; E. Schiebold wird in einer besonderen Arbeit an einem Beispiel ein Verfahren erörtern. Nur die, auf eine

Kenntnis der Raumgruppe hinzielenden Vorarbeiten mögen kurz skizziert werden, da zu diesen Untersuchungen die gleichen Bestimmungstabellen notwendig sind. Die Größe des Elementarparallelepipeds erhält man nach diesem Verfahren auf folgende Weise. Die Spektren der meisten Röntgenröhren besitzen nach kleinen Wellenlängen hin einen steilen Abfall, so daß praktisch eine untere λ -Grenze angegeben werden kann. Die letzten Wellenlängen besitzen noch eine große Intensität, so daß Interferenzpunkte mit ihren in 1. Ordnung wirksamen λ relativ häufig sind. Man lasse somit Röntgenstrahlen parallel den kristallographischen Achsen einfallen, bestimme die Indizes des Interferenzmusters ganz genau, suche die mit kleinster Wellenlänge erschienenen Punkte auf (für die nur eine 1. Ordnung wirksam sein kann) und berechne daraus direkt die Elementarperioden durch Einsetzen des für die gebrauchte Röntgenröhre niedrigsten λ -Wertes. Unter Berücksichtigung genügend vieler derartiger Punkte läßt sich ein wahrscheinlicher Grenzwert mit großer Sicherheit bestimmen. Die allgemeine Formel lautet

$$a \approx \frac{\lambda_p h}{2 \sin^2 \alpha},$$

wo λ_p die kleinste Wellenlänge, α der Winkel der reflektierenden Fläche (hkl) mit der Koordinatenachse a ist.

Die Raumgruppe läßt sich durch einen statistischen Vergleich der auf möglichst vielen verschieden orientierten Aufnahmen erschienenen Punkte und ihrer Intensität bestimmen. Die in den Röntgenperioden zur Geltung kommenden individuellen Raumsystemswerte finden nämlich ihren Ausdruck in verschiedenen Belastungen und wirksamen Röntgenperioden 1. Ordnung. In den Raumsystemen $\mathfrak{B}_h^{25} - \mathfrak{B}_h^{28}$ werden alle Pyramidenflächen mit $(h+k+l) =$ eine gerade Zahl bei allgemeinsten Punktlage relativ größere Röntgenperioden und Ebenen mit doppelter Belastung besitzen. Statistisch muß dies in den Interferenzpunkten dadurch zum Ausdruck kommen, daß Pyramiden mit $h+k+l =$ eine gerade Zahl vorherrschen, ja bei größeren Indizes allein vorhanden sind. In $\mathfrak{B}_h^{25}$ müßte diese Gesetzmäßigkeit auch für alle Prismenzonen erkennbar sein, in $\mathfrak{B}_h^{28}$ nur für zwei Prismenzonen, während die Prismen der dritten Zone in normaler Weise aufeinanderfolgen, höhere Indizes hier aber selten sind usw. Es ist das die schon von Bragg benutzte Methode; mittelst der Bestimmungstabellen läßt sie sich aber nicht nur zur Bestimmung der Translationsgruppe, sondern auch zur Bestimmung des Raumsystemes verwenden. Wie beim Bragg'schen Verfahren muß man acht geben, daß

nicht etwa Gesetzmäßigkeiten, die auch bei allgemeinsten Lage durch relativ einfache Werte x, y, z hervorgerufen werden (z. B. rhombisch $\frac{1}{3} \frac{1}{3} \frac{1}{3}$), mit den Raumsystemscharakteristika verwechselt werden. Das wird immer möglich sein, da die ersteren an bestimmte Zahlenwerte von (hk) geknüpft sind, während die letzteren den Symmetrieelementen parallel oder senkrecht stehenden Zonen angehören.

Es ist selbstverständlich, daß die hier benutzten Gesetzmäßigkeiten auch ihren Ausdruck in der statistischen Aufeinanderfolge der häufigsten Wachstumflächen finden müssen. In der Tat läßt sich bei genügendem statistischen Material meist schon aus der Flächenentwicklung mit einiger Wahrscheinlichkeit auf ein oder mehrere zur Auswahl zu benutzende Raumsysteme schließen. Beispielsweise ist bei Calcit der Einfluß von Gleitspiegelebenen und einer kristallographisch falsch gewählten einfachen Periode aus der Wachstumflächenhäufigkeit sofort erkenntlich, bei Pyrit der Einfluß von Gleitspiegelebenen (Zurücktreten von (110) in der Zone hko) usw. In den Interferenzmustern kommt diese Gesetzmäßigkeit nur frei von allen zufälligen den Habitus bedingenden Faktoren zur Geltung.

Damit scheint mir der systematische Weg der Kristallstrukturbestimmung genügend skizziert zu sein. Es ist zu hoffen, daß auf diese Weise für alle komplizierten Verbindungen mit relativ schweren Atomen die Atomanordnung feststellbar ist.

Leipzig, Institut für Mineralogie und Petrographie an der Universität.

(Eingegangen 16. März 1918.)

Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes.

Von A. Korn.

VIII.

Die Theorie der Gravitation.

In der Theorie der universellen Schwingungen¹⁾ haben wir in einem unendlichen, inkompressiblen Äther (inkompressibel, wenn es sich um Schwingungen außerordentlich kleiner Schwingungsdauer handelt) schwach kompressible Teilchen angenommen und die Eigenschwingungen des Systems:

¹⁾ Man vergleiche Abb. VII, diese Zeitschr. 19, 201, 1918.

$$\left. \begin{aligned} u_j &= \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \sin \frac{t}{T_j} 2\pi, & v &= \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \sin \frac{t}{T_j} 2\pi, \\ w_j &= \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \sin \frac{t}{T_j} 2\pi \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

gesucht; es zeigte sich, daß die mit ihren ersten Ableitungen im ganzen Raume stetige und im Unendlichen verschwindende Funktion Φ_j den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Phi_j &= 0 & \text{im Äther,} \\ \Delta \Phi_j + k_j^2 \Phi_j &= 0 & \text{in den schwach kompressiblen Teilchen} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

genügen muß, wo k_j^2 eine Konstante ist. Es gibt eine abzählbar unendlich große Zahl von Konstanten

$$k_0^2 < k_1^2 < k_2^2 < \dots < +\infty$$

und zugehörige Funktionen

$$\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots,$$

welche dieses Problem lösen; wir wollen uns in dieser Abhandlung mit der Grundschiwingung k_0^2, Φ_0 beschäftigen, welcher die größte Schwingungsdauer¹⁾

$$T_0 = \left| \frac{2\pi\alpha}{k_0} \right| \quad (3)$$

entspricht, unter der Voraussetzung, daß die schwach kompressiblen Teilchen in ihrer Mittellage kugelförmige Grenzflächen haben, deren Radius für alle Teilchen dieselbe Länge R besitzt.

Als Folge dieser Grundschiwingung wird sich eine scheinbare Wechselwirkung zwischen je zwei Teilchen des Systems ergeben, die nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze erfolgt.

Wir nehmen zuerst ein einziges Teilchen im Äther an. Dann ergibt sich als Lösung:

$$\left. \begin{aligned} k_0 &= \frac{\pi}{2R}, \\ \Phi_0 &= \frac{c}{r} \sin\left(\frac{\pi r}{2R}\right), & \text{im Teilchen,} \\ &= \frac{c}{r}, & \text{im Äther,} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

wo r die Zentralsdistanz des variablen Punktes (x, y, z) ist, in welchem Φ_0 betrachtet wird, c eine beliebige Konstante²⁾.

Diese Grundschiwingung ist somit eine Pulsation des schwach kompressiblen Teilchens, und die Schwingungsdauer der Pulsation ist um so kleiner, je kleiner der Radius R ist.

Wenn wir außer dem einen schwach kompressiblen Teilchen noch andere derartige Teilchen im Äther annehmen, ist von vornherein zu bemerken, daß man im allgemeinen darauf rechnen kann, daß sich die Lösung in diesem

¹⁾ α^2 ist eine den schwach kompressiblen Medien zugehörige Konstante, die um so kleiner ist, je weniger kompressibel das Medium vorausgesetzt wird.

²⁾ Vgl. „Eine mechanische Theorie der Reibung“, S. 139–144.

komplizierteren Falle nur wenig von dem eben genannten einfachsten Falle unterscheiden wird, wenn die Radien der Teilchen gegen die Zentralsdistanzen derselben klein sind. In erster Annäherung werden also die Gleichungen (4) wiederum bestehen, solange man sich in der Nähe des betrachteten Teilchens hält. Berechnet man nun eine zweite Annäherung, so ergibt sich

$$\Phi_0 = c \frac{\sin k_0 r}{r}, \quad \text{in dem betrachteten Teilchen,} \quad (5)$$

$$= c \frac{\sin k_0 R}{r} + \left(1 - \frac{R}{r}\right) C \frac{\sin k_0 R}{R},$$

im Äther in der Nähe des Teilchens, wo C das Newtonsche Potential¹⁾

$$C = \sum_j \frac{c R}{r_j} \quad (6)$$

aller übrigen Teilchen, c eine beliebige Konstante vorstellt. k_0 ist die kleinste positive Wurzel der Gleichung:

$$\operatorname{tng} k_0 R = \frac{c}{C} k_0 R, \quad (7)$$

so daß, wenn

$$k_0 = \frac{\pi}{2R} + \varepsilon$$

gesetzt wird, ε um so kleiner ausfällt, je kleiner C gegen c ist; für die Theorie der Gravitation wird in der Tat C gegen c klein anzunehmen sein, so daß sich eben k_0 nicht wesentlich von $\frac{\pi}{2R}$ unterscheiden wird²⁾.

Wir können nunmehr nach den in Abh. VII gegebenen Formeln die scheinbaren Kräfte berechnen, welche eines der Teilchen mit der Oberfläche ω_1 auf ein zweites Teilchen mit der Oberfläche ω_2 ausüben wird:

$$X = -\frac{k_0^2 \mu}{4} \int_{\omega_2} \Phi_0^2 \cos(\nu x) d\omega, \dots,$$

wenn wir rechts über alle Oberflächenelemente $d\omega$ der Oberfläche ω_2 (mit den inneren Normalen ν) integrieren.

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} X &= -\frac{\mu}{8\pi} \int_{\omega_1} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu} d\omega \int_{\omega_2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu} d\omega \frac{\cos(\varrho x)}{\varrho^2}, \\ Y &= -\frac{\mu}{8\pi} \int_{\omega_1} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu} d\omega \int_{\omega_2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu} d\omega \frac{\cos(\varrho y)}{\varrho^2}, \\ Z &= -\frac{\mu}{8\pi} \int_{\omega_1} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu} d\omega \int_{\omega_2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu} d\omega \frac{\cos(\varrho z)}{\varrho^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

1) r_j sei die Zentralsdistanz des betrachteten Teilchens bzw. von den übrigen Teilchen.

2) „Eine mechanische Theorie der Reibung“, S. 144–147.

wenn ϱ die Entfernung und Richtung Zentrum des Teilchens 1 $\rightarrow$ Zentrum des Teilchens 2 bezeichnet¹⁾.

Wir erhalten somit das Gravitationsgesetz zwischen je zwei Teilchen unter der Voraussetzung, daß die Radien der Teilchen gegen die Zentralsdistanzen klein sind und daß das, was wir ponderable Masse eines Teilchens nennen, mit dem Ausdrücke

$$\int_{\omega} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu} d\omega$$

proportional ist, wenn wir hier über alle Elemente $d\omega$ (mit den inneren Normalen ν) der Oberfläche ω des Teilchens integrieren. Dieses Integral ist für jedes Teilchen in erster Annäherung eine ganz bestimmte Konstante, und diese Konstanten seien für alle Teilchen gleich, da wir alle Teilchen von denselben Dimensionen voraussetzen.

Ein ponderabler Körper wird um so mehr ponderable Masse enthalten, je mehr solcher Teilchen in ihm vorhanden sind.

Es wird zugegeben werden müssen, daß die Theorie der Gravitation in dieser Form außerordentlich einfach ist und allen Anforderungen einer mechanischen Theorie genügt; ich möchte noch zwei Bemerkungen hinzufügen:

Erste Bemerkung. Diese Bemerkung bezieht sich auf die Beziehung der universellen Grundschiwingung zu den Schwingungen, welche für das elektromagnetische Feld in Betracht kommen. Ich halte die Hypothese für gut gestützt, die Schwingungsdauer T_0 der universellen Grundschiwingung mit der Schwingungsdauer T der Schwingungen des elektromagnetischen Feldes gleichzusetzen und die Phase der universellen Grundschiwingung mit der Phase der Schwingungen

$$u_2 \sin \frac{t}{T} 2\pi, \quad v_2 \sin \frac{t}{T} 2\pi, \quad w_2 \sin \frac{t}{T} 2\pi$$

des elektromagnetischen Feldes übereinstimmend anzunehmen. Die Gründe hierfür liegen in dem bereits früher (Abh. VI²⁾) erwähnten Ergebnis, daß bei dieser Annahme rasch rotierende Teilchen infolge der universellen Grundschiwingung zu magnetischen Teilchen werden, ein Ergebnis, das für die Theorie des Erdmagnetismus und für elektrooptische Erscheinungen in besonders nützlicher Weise verwandt werden kann. Daß die pulsierenden Teilchen, welche Elektronen sind, sich von den pulsierenden Teilchen, welche als ponderable Teilchen zu denken sind, sich dadurch unterscheiden müssen, daß elektrische Teilchen ihre Masse streng bei beliebigem Kon-

1) „Eine mechanische Theorie der Reibung“, S. 147–153.

2) Diese Zeitschr. 19, 12, 1918.

figurationswechsel erhalten, während die Massen bei der universellen Grundschiwingung

$$\text{univ. Konst. } \int_{\omega} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu} d\omega$$

bei einer Veränderung der gegenseitigen Lage der das System zusammensetzenden Teilchen eine Veränderung erleiden, haben wir schon mehrfach hervorgehoben; allerdings sind die Änderungen der ponderablen Massen bei einem Konfigurationswechsel von der Ordnung

$$\frac{R}{r_j}$$

klein, und das ist der Grund, weshalb diese Erscheinung, die unzweifelhaft eintreten muß, in der Erfahrung noch nicht beobachtet wurde: es ist zweifellos, daß aus diesem Grunde auch die Beschleunigung auf der Erde eine andere sein muß im Aphel als im Perihel; vielleicht wird es einmal in Zukunft möglich sein, derartige Veränderungen von g zu beobachten.

Zweite Bemerkung. Daß das Newtonsche Gesetz eventuell durch eine zweite Annäherung ersetzt werden müsse, darüber haben sich erst in allerjüngster Zeit Kontroversen gebildet, indem man auf die anomale Bewegung des Perihels der Merkurbahn hinwies. Die Relativitätstheoretiker wollen durch die von ihnen konstruierte zweite Annäherung eine Erklärung dieser Anomalie liefern; es kann doch aber wohl nicht ernstlich daran gedacht werden, in dieser Ausklügelung eine feste Stütze der Grundprinzipien der Relativitätstheorie zu sehen, zumal man bei verschiedenen Auslegungen dieser Prinzipien nach Belieben zu zweiten Annäherungen gelangt, welche für die Erklärung der Anomalie geeignet oder schädlich sind.

Zur Erklärung von Anomalien hat man auch auf dem Wege der mechanischen Theorien Möglichkeiten genug zur Verfügung. Abgesehen davon, daß in der obigen Theorie in dem Gravitationsgesetze Glieder vernachlässigt werden, welche gegen das Hauptglied von der Ordnung: „Radien durch Zentralsdistanzen“ klein sind, daher eventuell solche zunächst vernachlässigten Glieder für eine zweite Annäherung herangezogen werden könnten, bleibt auch noch der Gedanke, daß ja auch der Äther kein vollkommen inkompressibles Medium sein kann, sondern auch — wenn auch sehr geringe — Dichteänderungen zulassen muß. Es kommt das auf dasselbe hinaus wie die Zulassung einer endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation. Dieser letztere, von Gerber¹⁾ schon 1898 und 1902

1) E. Gehrcke hat sich das Verdienst erworben, die letzte Arbeit Gerbers, welche als Programmabhandlung des städtischen Realgymnasiums zu Stargard i. Pomm. 1902 erschienen ist, wieder ans Tageslicht zu ziehen (Ann. d.

ausgesprochene Gedanke, die Anomalie der Merkurbahn durch eine endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation zu erklären, stößt gleichfalls auf ziemlich erhebliche Schwierigkeiten. Die mechanische Pulsationstheorie gestattet, diese Schwierigkeiten zu beheben, und ich möchte in bezug hierauf auf meine vor längerer Zeit erschienene Abhandlung „Über eine mögliche Erweiterung des Gravitationsgesetzes“¹⁾ verweisen: Man kann, um zu einer zweiten Annäherung zu gelangen, folgendermaßen schließen:

Würde man dem Äther eine geringe Kompressibilität zuschreiben, ohne ihm auch noch eine gewisse Absorptionsfähigkeit beizulegen, so würden die Eigenschwingungen, welche wir als „universelle Schwingungen“ suchen, unmöglich sein, denn die Funktion Φ_j der Gleichungen (1) müßte dann an Stelle der Gleichungen (2) die Gleichungen

$$\Delta \Phi_j + \mu_j^2 \Phi_j = 0, \quad \text{im Äther,}$$

$$\Delta \Phi_j + k_j^2 \Phi_j = 0, \quad \text{in den Teilchen}$$

erfüllen, wo k_j^2 und μ_j^2 von Null verschiedene Konstanten sein sollen, und die einzige Lösung wäre $\Phi_j = 0$.

Dagegen habe ich in den in der Anmerkung 1 unten angeführten beiden Abhandlungen gezeigt, daß die Gleichungen in der Form:

$$\Delta \Phi - \mu^2 \Phi = 0, \quad \text{im Äther,}$$

$$\Delta \Phi + k^2 \Phi = 0, \quad \text{in den Teilchen}$$

sehr wohl wieder unendlich viele Lösungen haben werden, und der Grundschiwingung würde ein Gravitationsgesetz entsprechen, welches zwischen zwei Teilchen die Anziehungskraft

$$-\text{pos. Konst. } \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{e^{-\mu \rho}}{\rho} \right)$$

liefert, in Analogie zu früheren von C. Neumann und v. Seeliger durchgeführten Untersuchungen.

Dies hat mich zu dem Resultat geführt, daß universelle Schwingungen nur möglich sind, wenn der Äther entweder als inkompressibel oder als gleichzeitig kompressibel und absorbierend angenommen wird. Der allgemeinste Fall der gleichzeitigen Kompressibilität und Absorptionsfähigkeit findet darin seinen analytischen Ausdruck, daß das Geschwindigkeitspotential φ im Äther der Gleichung genügen soll²⁾:

Phys. (4) 52, 415–441, 1917). Wenn auch gegen manche mathematische Ausführungen Einwendungen erhoben werden können, bleibt das Verdienst des Grundgedankens ungeschmälert.

1) A. Korn, Über eine mögliche Erweiterung des Gravitationsgesetzes. I. Abh. Münch. Ber. 33, S. 383–434; II. Abh. ebenda, S. 563–590, 1903.

2) a und b sind dabei Konstanten. Die Theorie, welche das Glied $b \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ zusätzlich ergibt, muß natürlich auch mechanisch begründet werden; das ist sehr einfach

$$\Delta\varphi = a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + b \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

und wenn dann, wie es für die universelle (Grund-)Schwingung der Fall sein soll, φ von der Form ist:

$$\varphi = \Phi_1 \cos \frac{t}{T} 2\pi + \Phi_2 \sin \frac{t}{T} 2\pi,$$

so ergibt sich:

$$\varphi = \text{const} \frac{e^{-\mu r}}{r} \cos \left(\frac{t}{T} 2\pi - Kr + \delta \right).$$

Bei einem solchen Potential der universellen Grundschiwingung, in welchem die Konstanten μ und K durch die Gleichungen

$$\mu^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 a \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{T}{2\pi} \cdot \frac{b}{a} \right)^2} - 1 \right\},$$

$$K^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 a \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{T}{2\pi} \cdot \frac{b}{a} \right)^2} + 1 \right\}$$

gegeben sind, folgt als scheinbare Anziehungskraft, welche ein Teilchen 1 auf ein Teilchen 2 ausübt:

$$-\text{pos. Konst.} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left\{ f_1 \frac{e^{-\mu \varrho}}{\varrho} \cos K\varrho + f_2 \frac{e^{-\mu \varrho}}{\varrho} \sin K\varrho \right\},$$

wobei f_1 und f_2 Konstanten sind (im besonderen $f_1 > 0$).

Ich zweifle nicht, daß dieses verallgemeinerte

Gesetz, welches ich im Jahre 1903 als aus der gleichzeitigen Kompressibilität und Absorptionsfähigkeit des Äthers entspringend darstellte¹⁾, bei geeigneter Wahl der Konstanten μ und K zur Erklärung der Anomalie des Merkur-Perihels verwendet werden kann.

Ganz beiläufig möchte ich hinzufügen, daß meine Polemik gegen die Komplikation der Gravitationstheorie durch die Relativitätstheoretiker in keiner Weise darauf hindeuten mag, daß die Resultate der letzteren in irgendwelchem Gegensatz zu meinen Theorien stehen; im Gegenteil, es besteht gar keine Schwierigkeit, die Komplikation der Relativitätstheorie meinen Theorien hinzuzufügen; ich spreche nur die Ansicht aus, daß diese Komplikation überhaupt ganz unnötig ist, daß wenigstens vorläufig gar keine Gründe vorliegen, diese philosophisch gewiß sehr kühnen und mathematisch gewiß sehr schönen Untersuchungen der mathematischen Physik aufzuzwingen. Möge der Blick der heranwachsenden Generation wieder mehr auf die Mechanik und die Differentialgleichungen der mathematischen Physik gerichtet werden!

1) Münch. Ber. 33, 589, 1903.

(Eingegangen 16. März 1918.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Die Resultate der geometrischen Strukturtheorien und die Ergebnisse der Analyse durch Röntgenstrahlen¹⁾.

Von W. Voigt.

Allgemeiner Teil.

1. Gegenwärtige Bedeutung der geometrischen Strukturtheorien.

Die wundervollen Resultate der nach v. Laues Anregung angestellten Beobachtungen über den innern Bau der Kristalle haben den geometrischen Strukturtheorien erneutes Interesse zugewendet. Einerseits vermögen letztere bei der Deutung der direkten Beobachtungen orientierende Fingerzeige zu liefern. Andererseits gestatten sie, das Einzelergebnis in ein allgemeines Schema einzuordnen und seine Stellung im Rahmen aller durch die Theorie bestimmten Möglichkeiten festzulegen.

Die neuen Beobachtungsergebnisse rücken nun die moderne Strukturtheorie, die durch die Namen Sohncke, Fedorow, Schönflies

bezeichnet wird, und die Symmetrieverhältnisse der Kristalle ganz wesentlich durch die Anordnung der Bausteine bedingt annimmt, deren Eigensymmetrien dagegen nur in geringem Umfange heranzieht, durchaus in den Vordergrund. In der Tat darf die ältere, Bravais'sche Theorie, bei welcher u. U. wesentliche Merkmale der Symmetrie der Kristalle auf entsprechende Symmetrien der Kristallbausteine oder Moleküle zurückgeführt wurden, als mit den neuen Erfahrungen im allgemeinen nicht vereinbar bezeichnet werden; denn diese Erfahrungen zeigen nicht komplexe Moleküle in den Knotenpunkten der Bravais'schen Raumgitter liegend, sondern einfache Atome in größerer Zahl und in komplizierterer räumlicher Verteilung, als durch jene Theorie zugelassen.

Allerdings scheint der Anwendung der neueren „Anordnungstheorie“ zunächst der Umstand hinderlich zu sein, daß im allgemeinen verschiedene Artige Atome am Aufbau eines Kristalles beteiligt sind, während jene Theorie nur eine Art von Atomen, gegebenenfalls allerdings in zwei sich spiegelbildlich entsprechenden Ausbildungen, verwertet. Aber man sieht leicht, daß hier ein wirkliches Hindernis nicht vorliegt.

1) z. T. nach an der Universität Göttingen gehaltenen Vorträgen.

Wenn mehrere verschiedene Atomgattungen am Aufbau eines Kristalles beteiligt sind, so müssen die Atome jeder einzelnen Gattung für sich eine Anordnung einnehmen, die wohl höhere, aber unter keinen Umständen niedrigere Symmetrie besitzen kann, als sie das bezügliche Kristallpolyeder zum Ausdruck bringt. Denn das Hinzutreten einer weiteren Atomart kann unter keinen Umständen Symmetrieelemente entstehen lassen, die zuvor fehlten, sondern nur ev. zuvor vorhandene in kleinerem oder größerem Umfange vernichten. Somit hat es also seine volle Berechtigung, die von der Beobachtung wahrscheinlich gemachte Anordnung der Atome jeder einzelnen Art mit den Ergebnissen der Theorie zu vergleichen.

2. Ziel der vorliegenden Arbeit.

In einem gewissen Mißverhältnis zu der faktischen Bedeutung der geometrischen Strukturtheorie scheint sich nun aber die Schwierigkeit zu befinden, die gegenwärtig der Aneignung und Verwertung von deren Resultaten nach der Lage der Dinge unzweifelhaft noch entgegensteht. Die vorhandenen Handbücher stellen, zeitlich und sachlich, an die Mitarbeit des Lesers große Anforderungen, ohne doch m. E. erlaubte Wünsche bezüglich des Gewinnes an Anschauung und Überblick durchaus zu befriedigen. Aus diesen Erwägungen stammt der Gedanke einer Darstellung der Resultate der Strukturtheorie ganz direkt für die Zwecke der Anwendung. Nun liegt aber die Sache so, daß mit einer bloßen, nach irgendeinem Prinzip geordneten, beschreibenden Aufzählung der von der Theorie geforderten allgemeinen 230 Strukturtypen niemandem, der neu an die Frage herantritt, ernstlich gedient sein würde. Die Typen sind nämlich keine feststehenden Anordnungen, sondern nur Regeln oder Merkmale von solchen, sodaß innerhalb eines jeden Typs noch eine gewisse Mannigfaltigkeit möglich ist. Darum kann eine Aufzählung der Typen ohne vorhergehende Einführung in die Elemente, mit denen, und die Gesetze, nach denen eine Anordnung sich aufbaut, keinen Nutzen bringen; es wird also in jedem Falle, auch wenn auf eine Ableitung der Typen im allgemeinen verzichtet werden soll, eine ausführliche Darlegung eben jener Elemente und Gesetze der systematischen Aufzählung und Beschreibung der Typen vorausgeschickt werden müssen. Bei dieser letzteren selbst aber wird eine Betonung und Schilderung der Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Typen im Interesse nicht nur der Übersichtlichkeit des Ganzen, sondern auch der Verständlichkeit des Einzelnen nötig sein.

Eine ungemein große Rolle spielen gegenüber der Fülle und der Buntheit der Gebilde die Fragen der Systematik und der damit in Beziehung stehenden Symbolik, ebenso der figürlichen Darstellung. Keine in diesen Fragen mögliche Entscheidung wird die Ansprüche aller, mit verschiedenen Neigungen und Gewohnheiten an den Gegenstand Gehenden befriedigen. Was weiterhin zur Anwendung kommen wird, ist nach Prüfung des in den verschiedenen vorliegenden Arbeiten Benutzten (ev. unter Modifikation) ausgewählt, und zwar in besonderer Berücksichtigung des für diese Darstellung gesteckten speziellen Zieles.

Allgemein vorausgeschickt werden mag nur eine Bemerkung über die angewandte Symbolik. Man kann die verschiedenen kristallographischen oder Struktur-Typen entweder durch einen einzigen Kennbuchstaben für jeden Typ, oder aber durch die Kombination einer kleinen Zahl von einzelnen Zeichen charakterisieren, deren jedes eine bestimmte bei vielen Typen wiederkehrende Eigenschaft ausdrückt. Die Entscheidung zwischen den beiden Systemen ist bis zu einem gewissen Grade Geschmackssache; nur wenn eine Symbolik bestimmt ist, Fingerzeige für die mathematische Anwendung der einzelnen Eigenschaften zu geben, ist meines Erachtens das zweite System unbedingt vorzuziehen. Dasselbe ist demgemäß von mir bez. der kristallographischen Verhältnisse in meinen Arbeiten über Kristallphysik benutzt worden und kommt analog auch bez. der Strukturtypen im Nachstehenden zur Anwendung, — hier in gewisser Anlehnung an die Darstellung von Sohncke.

3. Deckoperationen erster und zweiter Art.

Um einen Strukturtyp, also ein zur Erklärung einer kristallographischen Symmetrie geeignetes regelmäßiges Punktsystem, zu charakterisieren, dienen die Operationen, durch die das System mit sich zur Deckung gebracht werden kann. Von diesen Deckoperationen besteht die erste Art in reinen Bewegungen, also Verschiebungen und Drehungen, im allgemeinen Fall zu Schraubungen kombiniert. Ihnen stehen gegenüber die Operationen zweiter Art, die eine Spiegelung in einem Punkt (Inversion) oder einer Ebene enthalten. Während die erste Art mit Bausteinen — die wir nach den neuen Ergebnissen allgemein als Atome auffassen und bezeichnen können — von nur einer einzigen Sorte operiert, die bei den bez. Deckoperationen Lage und Orientierung verändern, setzt die zweite Art zwei Sorten von Atomen voraus, die sich spiegelbildlich entsprechen und zu einer einzigen nur dann werden, wenn das einzelne

Atom die entsprechende spiegelbildliche Symmetrie in sich besitzt.

Die grundlegende Arbeit von Sohncke¹⁾ greift bekanntlich die Aufgabe, alle regelmäßigen Anordnungen gleicher, aber beliebiger Bausteine zu finden, welche als Bilder der Kristallstruktur gelten können, nicht in voller Allgemeinheit an, sie sucht vielmehr nur diejenigen Punktsysteme auf, die durch Operationen erster Art, also durch Schraubungen zur Deckung zu bringen sind; sie muß deshalb schließlich, um kristallographische Symmetrien zu erklären, die nicht nur Symmetrieachsen, sondern auch Spiegelungen enthalten, den Bausteinen selbst gewisse Symmetrien und spezielle Orientierungen beilegen. Sohncke hat später²⁾ Richtlinien für die Erweiterung seiner Theorie durch Heranziehung mehrerer Arten, z. B. auch spiegelbildlich sich entsprechender Bausteine gegeben, ohne doch selbst die letzten Konsequenzen dieser Vorstellung zu ziehen.

Die allgemeine Aufgabe ist nahe gleichzeitig von Fedorow³⁾ und Schönflies⁴⁾ gestellt und gelöst worden, und das Werk des letzteren wird immer die Instanz sein, an die alle zu verweisen sind, welche die Methoden der Aufsuchung aller den beiden Arten von Deckbewegungen unterliegenden Punktsysteme genauer studieren wollen.

Nach dem Gesagten entspricht es dem Gange der historischen Entwicklung, bei der Darstellung von den Systemen mit Deckoperationen erster Art, also den 65 Sohnckeschen Typen⁵⁾, auszugehen. Das Verfahren ist aber auch methodisch empfehlenswert, insofern die durch Einführung der Deckoperationen zweiter Art aus den Sohnckeschen Typen entstehenden neuen (insgesamt 165) sich auf diese Weise leidlich übersichtlich gruppieren, während ein Vorgehen in umgekehrter Richtung zu einem solchen Ergebnis nicht führt. In der Tat wird das Kristallsystem, dem ein Anordnungstyp entspricht, im allgemeinen durch seine Deckoperationen erster und nicht zweiter Art bestimmt, und es werden die ersteren Operationen aus demselben Grunde auch in der Kristallographie bei der Entwicklung der Polyedertypen an die Spitze gestellt.

4. Die 32 kristallographischen Gruppen.

Die Kristallographie gruppiert die Kristallformeln nach den Deckoperationen, welche die normalen Kristallpolyeder zulassen. Dabei werden die normalen Formen aus den zufällig in der Natur auftretenden dadurch erhalten, daß man die Flächen der letzteren parallel mit sich nach außen verschiebt, bis sie sämtlich eine und dieselbe Kugel (etwa vom Radius Eins um einen beliebigen innern Punkt) berühren. Die Gesamtheit der Berührungspunkte oder „Pole“ kann dann das Polyeder ersetzen. Die Deckoperationen erster Art sind hier reine Drehungen um Achsen durch das Kugelmittelpunkt, diejenigen zweiter Art Drehungen, mit Inversion in bezug auf das Zentrum kombiniert. Für ihre Verwertung bietet das ausreichende Rüstzeug eine Reihe elementarer Sätze über die Zusammensetzungen von Drehungen miteinander (wie das bekannte Eulersche Theorem) oder von Drehungen und Inversionen, die in jedem Werk über Kristallographie nachzusehen sind. Eine Achse, um welche Drehungen im Betrage von $h \cdot 2\pi/n$ bei $h = 1, 2, \dots, n$ zur Deckung führen, heißt eine n -zählige Symmetrieachse des Polyeders. Kristallographisch möglich sind nur die Fälle $n = 2, 3, 4, 6$. Wir bezeichnen eine solche Achse in einer Richtung r durch A_r^n . Die Fälle der mit Inversion verbundenen Drehung reduzieren sich auf drei Fälle, die verschieden bezeichnet werden. Der Fall $n = 1$ oder der reinen Inversion entspricht dem Vorhandensein eines Symmetriezentrums im Kugelmittelpunkt und soll durch C bezeichnet werden. Der Fall $n = 2$ entspricht dem Vorhandensein einer diametralen Spiegel- oder Symmetrieebene normal zur Richtung a der Drehungsachse und mag das Symbol E_a erhalten. Der Fall $n = 4$, der Deckung durch eine Drehung um $\pm 90^\circ$ und Inversion in bezug auf das Zentrum verlangt, wird als der Fall der Existenz einer Spiegelachse bezeichnet und werde durch das Symbol S_a dargestellt.

Die Polyeder der 32 kristallographischen Gruppen sind durch verschiedene Kombinationen dieser (vier bzw. sieben) Symmetrieelemente charakterisiert. Dabei kommt physikalisch nicht die Gesamtheit der am Polyeder überhaupt vorhandenen Elemente in Betracht, sondern nur eine Kombination der voneinander unabhängigen, nämlich die kleinste Anzahl, deren Anwendung ausreicht, um aus einem beliebig gewählten Flächenpol alle diejenigen andern Pole abzuleiten, auf die auch die Gesamtheit führen würde. Die unabhängigen Symmetrieelemente — die „Symmetrieelemente“ einer Kristallgruppe — können häufig aus der Gesamtheit

1) L. Sohncke, Entwicklung einer Theorie der Kristallstruktur. Leipzig 1879.

2) L. Sohncke, Zeitschr. f. Kristallogr. 14, 426, 1888.

3) E. v. Fedorow, Verh. d. k. russ. Min. Ges. 20, 1890.

4) A. Schönflies, Kristallsysteme und Kristallstruktur. Leipzig 1891.

5) Sohncke gibt zunächst 66 Typen an, von denen aber der eine Nr. 13 sich als mit einem anderen zusammenfallend erwiesen hat und später gestrichen worden ist.

auf verschiedene Weise ausgewählt werden. Da z. B. von den drei Elementen C , A_x^2 und E_x (wie leicht erkennbar) je zwei das dritte bedingen, so kann man die bez. Symmetrie durch ein beliebiges Paar derselben darstellen.

Als für die physikalischen Anwendungen besonders bequem habe ich das folgende System unabhängiger Symmetrieelemente vorgeschlagen und vielfach erprobt, das speziell an ein rechtwinkliges Koordinatenkreuz anknüpft. Besitzt das Polyeder eine ausgezeichnete Richtung, z. B. eine einzigartige Symmetrieachse, so wird dieselbe zur Z -Achse gewählt. Soll neben ihr noch eine zweite zu ihr normale Richtung ausgezeichnet werden, so wird in dieselbe die X -Achse gelegt. Unter diesen Gesichtspunkten sind die nachstehenden „Symmetrieelemente“ für die 32 kristallographischen Gruppen gebildet¹⁾, deren manche noch durch Angabe hingehörender bekannter Minerale charakterisiert sind.

I. Triklines System.

1. Holloedrie $\{C\}$ (Kupfersulfat, Axinit.)
2. Hemiedrie $\{O\}$, d. h. kein Symmetrieelement.

II. Monoklines System.

3. Holloedrie $\{C, A_x^2 \text{ oder } C, E_x\}$ (Gips, Epidot, Soda.)
4. Hemiedrie $\{E_x\}$.
5. Hemimorphie $\{A_x^2\}$ (Zucker, Weinsäure.)

III. Rhombisches System.

6. Holloedrie $\{C, A_x^2, A_y^2 \text{ oder } C, A_x^2, E_x\}$ (Topas, Baryt.)
7. Hemiedrie $\{A_x^2, A_y^2\}$ (Bittersalz, Seignettesalz.)
8. Hemimorphie $\{A_x^2, E_x\}$ (Kieselzinkerz.)

IV. Trigonaes System.

9. Holloedrie $\{C, A_x^3, A_y^3 \text{ oder } C, A_x^3, E_x\}$ (Kalkspat, Eisenglanz.)
10. Enantiomorphe Hemiedrie $\{A_x^3, A_y^3\}$ (Quarz.)
11. Hemimorphe Hemiedrie $\{A_x^3, E_x\}$ (Turmalin.)
12. Paramorphe Hemiedrie $\{C, A_x^3\}$ (Dolomit.)

13. Tetartoedrie $\{A_x^3\}$ (Natriumperjodat.)

V. Tetragonaes System.

14. Holloedrie $\{C, A_x^4, A_y^2 \text{ oder } C, A_x^4, E_x\}$ (Zirkon, Rutil.)
15. Enantiomorphe Hemiedrie $\{A_x^4, A_y^2\}$ (Nickelsulfat.)
16. Hemimorphe Hemiedrie $\{A_x^4, E_x\}$
17. Paramorphe Hemiedrie $\{C, A_x^4\}$ (Scheelit.)

18. Tetartoedrie $\{A_x^4\}$.

19. Hemiedrie mit Spiegelachse $\{S_x, A_x^2 \text{ oder } \{A_x^2, A_y^2, E_{xy}\}^1\}$ (Kupferkies).

20. Tetartoedrie mit Spiegelachse $\{S_x\}$.

VI. Hexagonales System.

21. Holloedrie $\{C, A_x^6, A_y^2 \text{ oder } C, A_x^6, E_x\}$ (Beryll.)
22. Enantiomorphe Hemiedrie $\{A_x^6, A_y^2\}$.
23. Hemimorphe Hemiedrie $\{A_x^6, E_x\}$ (Jodsilber.)
24. Paramorphe Hemiedrie $\{C, A_x^6\}$ (Apatit.)
25. Tetartoedrie $\{A_x^6\}$ (Nephelin.)
26. Hemiedrie mit dreizähliger Hauptachse $\{A_x^3, A_y^2, E_x\}$.
27. Tetartoedrie mit dreizähliger Hauptachse $\{A_x^3, E_x\}$.

VII. Reguläres System.

28. Holloedrie $\{C, A_x^4, A_y^4\}$ (Steinsalz, Flußspat.)
29. Enantiomorphe Hemiedrie $\{A_x^4, A_y^4\}$ (Sylvin.)
30. Hemimorphe Hemiedrie $\{S_x, S_y \text{ oder } A_x^2 \sim A_y^2 \sim A_z^2, E_{xy}\}^1\}$ (Zinkblende.)
31. Paramorphe Hemiedrie $\{C, A_x^2 \sim A_y^2 \sim A_z^2\}$ (Pyrit.)
32. Tetartoedrie $\{A_x^2 \sim A_y^2 \sim A_z^2\}$.

Das Symbol $\sim$ bedeutet die Gleichwertigkeit bzw. zyklische Vertauschbarkeit, wie sie durch eine in der Mittellinie der X -, Y -, Z -Achsen gelegene dreizählige Achse bewirkt wird.

5. Grundstrecken einer Atomanordnung.

Kamen im Gebiete der Kristallographie die Deckoperationen auf die reinen und die Inversions-Drehungen einer Kugel um ihren festgehaltenen Mittelpunkt hinaus, so tritt in den Strukturtheorien ein völlig neues Element durch die Forderung auf, daß das Atomsystem mit sich zur Deckung gelangen soll, wenn dasselbe derart verschoben wird, daß ein Atom an eine Stelle gelangt, die zuvor von einem beliebigen andern eingenommen war. Der einfachste Fall ist der der reinen Schiebung ohne Drehung; es kommen hinzu die Kombinationen von Schiebung einerseits mit Drehung, andererseits mit Spiegelung. Für einen Anordnungstyp werden demgemäß gewisse Grundstrecken charakteristisch sein, die mit den möglichen Deckschiebungen in Zusammenhang stehen und gleichzeitig die gleichartigen Elementarbereiche bestimmen, in welche das ganze Atomsystem zerlegt werden kann.

Diese Grundstrecken behandeln wir als von

¹⁾ Schönflies charakterisiert die 32 Gruppen durch noch kürzere Symbole, die aber zum Zwecke rechnerischer Anwendung erst in ähnliche Elemente aufgelöst werden müssen, wie sie in meinen Symmetrieelementen auftreten.

¹⁾ Das Symbol E_{xy} bezeichnet eine Symmetrieebene, welche den Winkel zwischen X - und Y -Achse halbiert. Die sonst nicht besonders bequeme, dies Symbol enthaltende Gestalt der Symmetrieelemente gewinnt Bedeutung in der Strukturtheorie.

einem geeigneten O-Punkt aus konstruierte Vektoren und bezeichnen sie mit kleinen deutschen Buchstaben

$$a, b, c, \dots \text{ oder } a_1, a_2, \dots$$

Demgemäß stellen auch

$$e = a + b \text{ bzw. } d = a - b$$

die Resultanten aus den gleich- bzw. entgegengesinnig aneinander gereihten a und b dar. e halbiert den Winkel, d den Nebenwinkel von a und b . $[a b]$ ist ein Vektor vom Betrage des Parallelogramms aus a und b mit einer Richtung normal zur Ebene durch a und b .

Ist unter den Grundstrecken, a, b, c eine ausgezeichnet, z. B. weil normal zur Ebene der beiden andern gelegen, so wird dafür jederzeit c gewählt, und, wenn ein Koordinatensystem xyz eingeführt wird, c parallel zu z gelegt.

Die Strukturtheorie von Bravais¹⁾ operiert mit Bausteinen, die mit einer der Symmetrien der 32 kristallographischen Gruppen behaftet und parallel orientiert in den Knotenpunkten regelmäßiger Raumgitter von der Symmetrie der holoedrischen Gruppe des betr. Systems verteilt sind, derart, daß ein jeder Baustein in gleicher Weise von den übrigen umgeben ist, und das ganze System durch reine Schiebungen mit sich zur Deckung gebracht werden kann. Die von Bravais als allein möglich erwiesenen derartigen Raumgitter, 14 an der Zahl, lassen sich in untereinander identische Zellen oder Elementarbereiche von der allgemeinsten Form schiefer rhomboidischer Prismen zerlegen, deren jedem nur ein Baustein zuzuzählen ist. Dann sind die Kanten a_0, b_0, c_0 dieser Zellen zugleich die primitiven Deckschiebungen, derart, daß jede andere Deckschiebung w sich mittels dreier ganzen Zahlen h, j, k aus ihnen nach dem Schema

$$w = h a_0 + j b_0 + k c_0$$

zusammensetzt. Um die Beziehungen, die zwischen den verschiedenen, demselben Kristallsystem zuzurechnenden Raumgittern bestehen, klar hervortreten zu lassen, wird indessen u. U. eine Raumteilung in größere parallelepipedische Zellen bevorzugt, deren Kanten zu den kristallographischen Achsen in Beziehung stehen und deren jeder mehrere Bausteine zuzuzählen sind. Hier sind dann die Kanten a, b, c nicht mehr primitive Deckschiebungen, und die allgemeinsten Deckschiebungen w setzen sich aus ihnen nicht rein ganzzahlig zusammen. Die Theorie der Beugung von Röntgenstrahlen durch die Atomverteilungen der Kristalle bevorzugt diese letztere Darstellung.

Die 14 Bravais'schen Gitter ordnen sich den sieben Kristallsystemen folgendermaßen zu.

1) A. Bravais, Journ. éc. polyt. 19, 1, 1850; Ostwalds Klassiker Nr. 17.

(Die in () beigesetzten Symbole bringen die Schönflies'sche Bezeichnung des betreffenden Typs.)

I. Triklines System.

1. Anordnung nach schiefen rhomboidischen Prismen mit den Kanten a_0, b_0, c_0 . Ein Molekül. (Γ)

II. Monoklines System.

2. Anordnung nach geraden rhomboidischen Prismen; $c_0 \parallel [a_0 b_0]$. Ein Molekül. (Γ_m).
3. Anordnung nach schiefen rhombischen Prismen; $|a_0| = |b_0|, c_0 \perp (a_0 - b_0)$. Ein Molekül. (Γ'_m)

III. Rhombisches System.

4. Anordnung nach leeren rechteckigen Prismen; $a_0 \perp b_0 \perp c_0$. Ein Molekül. (Γ_r)
5. Anordnung nach auf einem Flächenpaar (a, b) zentrierten rechteckigen Prismen; $a \perp b \perp c$. Zwei Moleküle. Deckschiebungen $a, b, c, \frac{1}{2}(a + b)$. (Γ'_r).
6. Anordnung nach auf allen Flächen zentrierten rechteckigen Prismen; $a \perp b \perp c$. Vier Moleküle. Deckschiebungen $a, b, c, \frac{1}{2}(b + c), \frac{1}{2}(c + a), \frac{1}{2}(a + b)$. (Γ''_r).
7. Anordnung nach raumzentrierten rechteckigen Prismen; $a \perp b \perp c$. Zwei Moleküle. Deckschiebungen $a, b, c, \frac{1}{2}(a + b + c)$. (Γ'''_r).

IV. Trigonaies System.

8. Anordnung nach Rhomboedern; $a_0 = b_0 = c_0, < b_0 c_0 = < c_0 a_0 = < a_0 b_0$. Ein Molekül. (Γ_{rh}).

V. Tetragonales System.

9. Anordnung nach leeren quadratischen Prismen; $a_0 \perp b_0 \perp c_0, |a_0| = |b_0|$. Ein Molekül. (Γ_q).
10. Anordnung nach zentrierten quadratischen Prismen; $a \perp b \perp c, |a| = |b|$. Zwei Moleküle. Deckschiebungen $a, b, c, \frac{1}{2}(a + b + c)$. (Γ'_q).

VI. Hexagonales System.

11. Anordnung nach leeren gleichseitig dreieckigen Prismen; $a_0 = b_0, c_0 \parallel [a_0 b_0], < a_0 b_0 = 60^\circ$. Ein Molekül. (Γ_h).

VII. Reguläres System.

12. Anordnung nach leeren Würfeln; $a_0 \perp b_0 \perp c_0, |a_0| = |b_0| = |c_0|$. Ein Molekül. (Γ_c).
13. Anordnung nach flächenzentrierten Würfeln; $a \perp b \perp c, |a| = |b| = |c|$. Vier Moleküle. Deckschiebungen $a, b, c, \frac{1}{2}(b + c), \frac{1}{2}(c + a), \frac{1}{2}(a + b)$. (Γ'_c).
14. Anordnung nach zentrierten Würfeln; $a \perp b \perp c, |a| = |b| = |c|$. Zwei Moleküle. Deckschiebungen $a, b, c, \frac{1}{2}(a + b + c)$. (Γ''_c).

6. Dreh- und Schraubenachsen.

Wie S. 239 auseinandergesetzt, gehen alle Symmetrieachsen, mit denen die Kristallographie operiert, durch denselben Punkt, das Zentrum der Polkugel; es gibt dort also nur eine Achse jeder Richtung. Umgekehrt treten die Dreh- und Schraubenachsen einer Atomanordnung wegen der vorausgesetzten Gleichwertigkeit der Atome einer Anordnung zu unendlich vielen parallelen auf, die im allgemeinen auch nicht sämtlich gleichartig sind, sich vielmehr in verschiedenartige Gruppen zerlegen. Daher sind die kinematischen Überlegungen und Sätze, mit denen die Strukturtheorie bei der Aufsuchung der möglichen Atomanordnungen operiert, im ganzen von wesentlich anderer Natur, als sie die Kristallographie benutzt. Sie setzen Achsen voraus, die nicht durch einen Punkt gehen, sondern sich in unendliche Scharen regelmäßig verteilter ordnen, und Kombinationen aus Drehungen und Schiebungen. Doch kommen natürlich in den Fällen, wo mehrere Drehungsachsen durch denselben Punkt gehen, auch die in der Kristallographie benutzten spezielleren Sätze zur Geltung. Um eine Vorstellung von der Art jener allgemeineren Sätze zu geben, sei hier ein aus der Kinematik starrer Körper bekanntes Theorem zitiert, das in der Strukturtheorie von ähnlich zentraler Bedeutung ist, wie der Eulersche Satz in der Kristallographie und lautet:

Die Kombination einer Drehung φ um eine in dem beweglichen System feste Achse $\mathfrak{A}$ und einer in beliebiger Richtung gegen $\mathfrak{A}$ liegenden Verschiebung w ist äquivalent einer gleich großen und gleichsinnigen Drehung um eine zu $\mathfrak{A}$ parallele Achse $\mathfrak{B}$, gelegen im Scheitel des gleichschenkligen Dreiecks, das w_n zur Basis und φ zum Winkel an der Spitze hat, zuzüglich einer Verschiebung w_a , d. h. also insgesamt einer gewissen Schraubung um $\mathfrak{B}$. Dabei bezeichnen w_n und w_a die Komponenten von w normal und parallel zu $\mathfrak{A}$.

Derartige Überlegungen ergeben u. a. (ohne Zuhilfenahme eines der in der Kristallographie dazu nötigen allgemeinen Prinzipien), daß Achsen anderer Zähligkeiten als 2, 3, 4, 6, ausgeschlossen sind. Weiter folgt, — wie hier im voraus signalisiert werden mag, — daß, wenn nur parallele zweizählige Dreh- oder Schraubenachsen vorhanden sind, diese in vier Arten auftreten, die sich allgemein in die Kanten von den Raum ausfüllenden geraden rhomboidischen Prismen ordnen, derart, daß die vier Kanten jedes Prismas von vier verschiedenen Achsen eingenommen werden. Ist drei die höchste Zähligkeit, dann treten diese dreizähligen Achsen in drei Arten, und zwar in den Kanten den Raum ausfüllender

dreieckig gleichseitiger Prismen geordnet auf, derart, daß jedes Prisma alle drei Gattungen Achsen aufweist. Ist vier die höchste Zähligkeit, so erscheinen die vierzähligen Achsen in zwei Arten in den diagonalen Kantenpaaren den Raum ausfüllender quadratischer Prismen, deren Mittellinien zweizählige Achsen sind. Sechszählige Achsen endlich treten nur in einer Gattung auf, die die Kanten von den Raum erfüllenden gleichseitigen dreieckigen Prismen bilden. In den Mittellinien der Prismen liegen dreizählige, in den Flächenmitten zweizählige Achsen. Diese Verhältnisse finden unten ausführliche Erörterung. Weiteres ergibt sich unmittelbar aus dem Deckbewegungscharakter der Drehungen, bzw. Schraubungen.

Bezeichnet c die Periode in der Richtung der Achsen, d. h. die Dicke identischer Schichten, in die sich die Atomanordnung durch Ebenen normal zu den Achsen zerlegen läßt, so kann die einer Schraubenachse zugehörige Ganghöhe ebenso wohl gleich c , als gleich einem ganzen Vielfachen von c sein.

Ist n die Zähligkeit der Achse, so liegen jedesmal n -Atome auf einem Schraubenumgang. Ist die Ganghöhe $= c$, so trägt eine einfache Schraubenwindung diese Atome in der parallel der Achse gemessenen Höhendifferenz c/n . Ist die Ganghöhe gleich $2c$, so müssen $2n$ Atome auf zwei ineinander gewundenen Schraubenlinien einander diametral gegenüberliegen, damit die Periodizität der Anordnung mit c entsteht. Ihre Höhendifferenz ist in diesem Falle $2c/n$. Im Falle einer Ganghöhe $3c$ müssen drei äquidistant ineinander gewundene Schraubenlinien und je drei in derselben zur Achse normalen Ebene liegende Atome auftreten. Die Höhendifferenz benachbarter Tripel ist jetzt $3c/n$. Man kann demgemäß nun auch die n -zähligen Schraubenachsen in 1-, 2-, 3-fache sondern.

Was schließlich die Beziehungen der Schraubenachsen zu kristallographischen Symmetrieachsen betrifft, so kann man mit den eben aufgeführten Systemen paralleler Achsen von der höchsten Zähligkeit zwei, drei, vier, sechs kristallographische Symmetrieachsen von eben diesen Zähligkeiten verbunden annehmen. Bei der, verglichen mit wahrnehmbaren Größen, außerordentlichen Kleinheit der Periode c und dem Zusammenwirken äußerst vieler Atome bei allen beobachtbaren Vorgängen kann man von dem Schraubencharakter der Achsen (woer vorhanden) für die Beurteilung der Symmetrieverhältnisse absehen; die neben den Achsen höchster Zähligkeit auftretenden niedrigeren sind aber, da sie durch die Deckbewegung der höchstzähligen Achsen zum Austausch gelangen, stets so verteilt, daß sie zusammengefaßt der angege-

benen Zähligkeit des Systems nicht widerstreiten.

Die verschiedenen Arten paralleler Achsen einer Atomanordnung bezeichnen wir weiterhin mit großen deutschen Buchstaben

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \dots$$

und fügen zur näheren Charakteristik die Zähligkeit n der Achse und die Anzahl p der Bruchteile c/n bei, um die bei der Drehung um $2\pi/n$ die Schiebung oder Hebung längs der Schraubenachse stattfindet.

$$\mathfrak{A}(n, p)$$

bezeichnet sonach eine n -zählige Achse mit einer Schiebung $p c/n$ bei der Drehung $2\pi/n$ und zugleich eine p -fache n -zählige Schraubenachse; denn bei ihr ist die Schiebung, die eine Drehung um 2π begleitet, gleich $p c$; die Ganghöhe der Schraube ist somit auch $p c$, und daraus folgt nach obigem, daß p ineinandergewundene Schraubenlinien vorhanden sein müssen.

$$\mathfrak{A}(n, 0)$$

bezeichnet demnach eine n -zählige Drehachse ohne Schraubung.

Vorläufig haben wir Schraubungen nur von einem Sinn vorausgesetzt, z. B. solche, wo mit einer positiven Drehung eine (positive) Hebung verbunden ist. Schraubenachsen von dem Charakter

$$\mathfrak{A}(2m, m)$$

entsprechen Anordnungen, die, wie die Anschauung lehrt, ebensowohl als auf positiv, wie auf negativ gewundenen Schraubenlinien untergebracht werden können. Genau ebenso ist eine Achse von dem Charakter

$$\mathfrak{A}(2m, m+1)$$

und von positivem Sinne einer Achse

$$\mathfrak{A}(2m, m-1)$$

von negativem Sinne äquivalent, oder noch allgemeiner eine Achse

$$\mathfrak{A}(n, p)$$

von positivem Sinne einer Achse

$$\mathfrak{A}(n, n-p)$$

von negativem Sinne.

Man kann demgemäß im Interesse der Anschaulichkeit immer zwei Gattungen Achsen

$$\mathfrak{A}(n, +p) \text{ und } \mathfrak{A}(n, -p) \text{ für } p \leq \frac{1}{2}n$$

von positivem und negativem Schraubungssinne zusammen betrachten als

$$\mathfrak{A}(n, \pm p).$$

Im Falle

$$\mathfrak{A}(2m, m)$$

sind die beiden Fälle identisch, und es braucht demgemäß hier das zweite Argument nicht mit einem Vorzeichen versehen zu werden.

Eine Atomanordnung, welche mehrere Scharen paralleler Dreh- und Schraubenachsen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots$ besitzt, muß um jede einzelne von ihnen die ihr entsprechende Deckdrehung oder -schraubung gestatten. Man kann die Atome der Anordnung demgemäß beliebig der einen oder anderen Achsenart zuordnen. Daneben bestehen die dem System eigenen Deckschiebungen, die natürlich jede Achse $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots$ in eine gleichartige überführen müssen. Um alle durch die Deckbewegungen aus einem Punkt (bzw. Atom) folgenden Punkte zu gewinnen, verfährt man am einfachsten so, daß man jenen Punkt der Deckdrehung oder -schraubung der nächsten Achse höchster Zähligkeit unterwirft und dann mit diesem Gebilde alle zulässigen Deckschiebungen vornimmt. Damit ist dann die gesamte, dem Achsensystem entsprechende Atomanordnung gewonnen.

Das Auftreten ausschließlich einander paralleler Achsen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots$ ist natürlich ein spezieller Fall; der nächst allgemeine ist durch das Hinzutreten von zu jenen Hauptachsen normalen zweizähligen Querachsen gegeben, die speziell mit $\mathfrak{Q}(2, p)$, $\mathfrak{P}(2, p)$ bei $p=0$ und 1 bezeichnet werden mögen. Die Lage und Art dieser Querachsen ist dadurch beschränkt, daß Lage und Art der Achsen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots$ in nach S. 247 bestimmter Weise festliegt; die Querachsen dürfen also durch ihre Deckbewegungen nicht zu neuen Achsen führen, sondern müssen die alten unter sich austauschen und dabei jede einzelne Achse in eine gleichartige bringen. Auf die dabei entstehenden Verhältnisse wird gleichfalls bei der systematischen Aufzählung der verschiedenen Typen ausführlich eingegangen werden.

Unter den Fall der Querachsen läßt sich auch der bei den Typen des regulären Systems auftretende Fall dreier zueinander normalen und einander gleichwertigen zwei- oder vierzähligen Achsensysteme subsummieren.

Auch in diesen komplizierteren Fällen beginnt die Entwicklung der vollständigen Atomanordnung aus einem Ausgangsatom mit Hilfe der Deckbewegungen passend mit der Verwertung der unabhängigen Dreh- und Schraubenachsen und schließt daran die Deckschiebungen.

Wie bei den Typen der Kristallographie „Symmetrieeformeln“, kann man für die Atomanordnungen „Strukturformeln“ bilden, welche die unabhängigen Deckoperationen zum Ausdruck bringen und damit die Anleitung geben, aus einem Atom die gesamte „Struktur“ abzuleiten. Schon Sohncke hat derartige Angaben gemacht, wenn er sich auch nicht in allen Fällen streng an die Beschränkung auf die wirklich voneinander unabhängigen Operationen gehalten

hat. Bei der nachstehenden Zusammenstellung aller möglichen Anordnungstypen ist, soweit dieselben nur Deckoperationen erster Art voraussetzen, eine Strukturformel angegeben, welche zunächst die voneinander unabhängigen Dreh- oder Schraubenachsen in den oben eingeführten Symbolen aufzählt und daran die unabhängigen Deckschiebungen schließt, ausgedrückt in den Grundstrecken der Anordnung. Es entspricht dies dem soeben als vorteilhaft geschilderten Verfahren zur Entwicklung der Gesamtstruktur aus einem Punkt oder Atom.

Der Strukturformel sind dann noch Angaben über die von den vorigen abhängigen Dreh- und Schraubenachsen zugefügt. Dies erwies sich einmal deshalb angemessen, weil zur völligen Bestimmung der mit einem Achsensystem vereinbaren Deckoperationen zweiter Art in vielen Fällen ein genauerer Einblick in die Verteilung der Elemente erster Art nötig oder nützlich ist, als ihn die bloße Angabe der unabhängigen Achsen gestattet. Sodann werden nur bei Heranziehung des gesamten Achsensystems diejenigen Veränderungen und Spezialisierungen ganz verständlich, die von Anordnungen mit rhombischer oder tetragonaler Symmetrie zu solchen des regulären Systems führen. Auf Klarstellung dieser Operationen muß aber ein gewisser Wert gelegt werden. Die strukturellen Verhältnisse gerade der Typen des regulären Systems sind sehr kompliziert, derart daß manche Bearbeiter des Gebietes auf deren geometrische Veranschaulichung ganz verzichten. Die Darstellung des Überganges von den in mancher Hinsicht einfacheren Typen rhombischer und quadratischer Symmetrie, der die unabhängigen Elemente der entsprechenden regulären Typen hervortreten und die sekundär hinzukommenden zurücktreten läßt, scheint geeignet, die vorliegenden Schwierigkeiten zu verringern; ihr soll daher trotz des prinzipiellen Verzichtes auf die Ableitung der Typen ein gewisser Raum gewährt werden.

7. Deckoperationen mit Spiegelung.

Dem Symmetriezentrum in der Kristallographie entspricht in der Strukturtheorie der Spiegelpunkt, d. h. ein Punkt, oder genauer eine Schar homologer Punkte, in bezug auf welche die Atomanordnung Inversion zuläßt. Die Lage des Spiegelpunktes ist durch die Forderung beschränkt, daß die auf ihn bezogene Inversion zu den zuvor vorhandenen Achsen keine neuen liefern, auch miteinander unvereinbare nicht zur Deckung bringen darf. Die in jedem Falle möglichen Lagen sind unten a. s. O. angegeben; dabei ist aber zu bemerken, daß

für die meisten Anordnungen eine Reihe gleichwertiger Lagen existiert, die nämlich aus dem ursprünglichen System durch Inversion gleiche vervollständigte Systeme entstehen lassen. Es sei ferner daran erinnert, daß nicht nur die Atomanordnungen, sondern mit ihnen auch die Atome selbst der Inversion unterliegen, daß also, wenn das Atom nicht von selbst ein Symmetriezentrum besitzt, die Existenz des Spiegelpunktes zwei Gattungen sich spiegelbildlich entsprechender Atome voraussetzt.

Als Symbol für den Spiegelpunkt sei der Buchstabe $\mathfrak{J}$ gewählt¹⁾. Sind, wie häufig, mehrere nicht gleichwertige Lagen möglich, so werden dieselben durch die Buchstaben $a, b, c \dots$ unterschieden.

Spiegelebenen sind solche (in paralleler Stellung durch homologe Punkte gehende) Ebenen, in bezug auf welche eine Spiegelung das Atomsystem mit sich selbst zur Deckung bringt. Sie entsprechen einer parallelen kristallographischen Symmetrieebene. Wie bei dem Spiegelpunkt ist einerseits Lage und Stellung der Spiegelebenen durch die vorhandenen Dreh- und Schraubenachsen beschränkt, andererseits können mehrere von ihnen einander äquivalent sein. Die Spiegelung muß nicht nur die Atomanordnung, sondern auch die einzelnen Atome miteinander zur Deckung bringen; letztere müssen also entweder Symmetrieebenen besitzen oder in zwei sich spiegelbildlich entsprechenden Modifikationen in angemessener Orientierung auftreten. Gleiches gilt bei den folgenden mit Spiegelung verbundenen Deckoperationen.

Als Symbol für die Spiegelebene sei der Buchstabe $\mathfrak{E}$ gewählt. Sind mehrere einander nicht äquivalente Lagen möglich, so werden dieselben durch die Buchstaben $a, b, c \dots$ unterschieden.

Gleitspiegelebenen sind solche (in paralleler Stellung durch homologe Punkte gehende) Ebenen, in bezug auf welche das Atomsystem nach einer der Ebene parallelen Verschiebung oder Gleitung g zu einer der ursprünglichen spiegelbildlich entsprechenden Lage gelangt. Die Gleitung g muß parallel einer möglichen Deckschiebung w liegen und die halbe Größe von jener besitzen, weil nur so bei zweimaliger Wiederholung der Gleitspiegelung eine Deckschiebung entsteht. Da die Gleitung gegen alle wahrnehmbaren Größen außerordentlich klein ist, und bei jedem beobachtbaren Vorgang sehr viele Atome zusammenwirken, so kann die Gleitung für die Beurteilung der kristallographischen Symmetrieverhältnisse nicht in Betracht kommen,

¹⁾ Die Symbole sind so gewählt, daß sie den in den Symmetrieformeln von § 4 benutzten nach Möglichkeit entsprechen.

und es darf die Gleitspiegelebene als Voraussetzung einer parallelen kristallographischen Symmetrieebene gelten.

Als Symbol für die Gleitspiegelebene sei der Buchstabe $\mathfrak{G}$ gewählt; sind mehrere einander nicht gleichwertige Lagen möglich, so werden sie durch die Buchstaben $a, b, c, \dots$ unterschieden. Eine als Argument in Klammern beigefügte Vektorgroße gibt ev. die Deckschiebung an, deren Hälfte die der Ebene zugehörige Gleitung darstellt;

$$\mathfrak{G}_a(c)$$

stellt somit die Gleitspiegelebene in der Lage a mit dem Gleitbetrag $\frac{1}{2}c$ dar.

Von Spiegeldrehachsen kommen, wie in der Kristallographie, nur solche von der Zähligkeit vier als selbständige Symmetrieelemente in Betracht; sie verlangen Deckung durch eine Drehung um $\pm 90^\circ$ mit daran geschlossener Spiegelung in einer zur Achse normalen Ebene. Die zweimalige Ausführung dieser Operation gibt eine Drehung um 180° ohne Spiegelung; die Spiegelachse ist also gleichzeitig eine zweizählige Drehachse. Die Wahl der Achse und Ebene ist in ähnlicher Weise beschränkt, wie das bei den übrigen Elementen dieses Abschnittes auseinandergesetzt ist. Die Spiegelachse kann demgemäß nur in eine schon vorhandene Achse gelegt werden, deren Charakter mit dem ihrigen verträglich ist. Für dergleichen kommt aber nach obigem nur eine zweizählige Drehachse in Frage, und zwar nur eine solche eines Systems von lauter zweizähligen Achsen in quadratischer Anordnung. Denn einmal müssen die übrigen Achsen durch Drehungen um Vielfache von 90° um die Spiegelachse ineinander übergeführt werden, wodurch die nach S. 242 mit zweizähligen Achsen vereinbaren drei- und sechszähligen ausgeschlossen sind. Sodann dürfen die übrigen Achsen nicht vierzählige sein, weil an ihnen eine Drehspiegelung ebenso wirkt, wie eine einfache Spiegelung, also keine selbständige Deckoperation darstellt. Andere, als die genannten Kombinationen mit zweizähligen Achsen, kommen aber nach S. 242 nicht vor.

Als Symbol für die Drehspiegelachse einer Atomanordnung sei der Buchstabe $\mathfrak{S}$ gewählt.

Zum Abschluß dieser Zusammenstellung mag noch eine allgemeine Bemerkung gemacht werden. Systeme paralleler Schraubenachsen von dem Typ $\mathfrak{U}(n, \pm m)$ mit oder ohne Querachsen geben für $n > 2m$ im allgemeinen zwei enantiomorphe, also nicht deckbare Anordnungen. Die Einführung einer Deckoperation zweiter Art hebt den Unterschied von $\pm m$ auf und führt auf eine einzige neue Kombination, die, soweit zulässig, auch von einer nicht enantiomorphen

Kombination aus zu gewinnen ist. Ähnliches gilt für die entsprechenden Anordnungen des regulären Systems. Darum werden in der folgenden Zusammenstellung enantiomorphe Typen niemals mit Symmetrieelementen zweiter Art ($\mathfrak{J}, \mathfrak{E}, \mathfrak{G}, \mathfrak{S}$) kombiniert werden.

8. Prinzip der Anordnung für die 230 Typen.

Die Anordnung der nachstehenden Zusammenstellung knüpft, wie schon oben bemerkt, an die 65 Typen von Punktgittern an, die nur Deckoperationen erster Art (Drehungen und Schiebungen) zulassen, da, von diesen ausgehend, es relativ einfach ist, durch Einfügung von Symmetriezentrum $\mathfrak{J}$, Spiegelebene $\mathfrak{E}$, Gleitspiegelebene $\mathfrak{G}$ und Spiegelachse $\mathfrak{S}$ die übrigen 165 Typen zu gewinnen. Die Reihenfolge und die Bezeichnung der 65 Grundtypen ist im Anschluß an Sohncke gewählt. Sind die von Sohncke gewählten Namen auch auf den ersten Blick etwas schwülstig, so geben sie doch immerhin eine Andeutung von dem Charakter der einzelnen Typen und erweisen sich deshalb als u. U. nützlich. Daneben ist es auch ein Akt der Pietät, sie nicht ganz fallen zu lassen. Der Sohnckeschen Ordnungszahl Z ist der Buchstabe α bzw. β, γ und δ zugefügt für diejenigen Typen, die durch Einführung von $\mathfrak{J}$, bzw. $\mathfrak{E}, \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{S}$ aus dem Grundtyp entstehen; ist diese Einführung auf mehrere Weisen möglich, so sind die bez. Fälle noch durch $a, b, c, \dots$ unterschieden. Die Komplikation der Symbolik (z. B. Nr. 35 βc) ist ersichtlich durch die Verhältnisse bedingt.

Der Vorteil dieser Anordnung liegt einmal darin, daß der geometrische Zusammenhang der verschiedenen Typen durch sie klargestellt wird, und ferner auch darin, daß alles, was einer größeren Zahl von Typen gemeinsam ist, nur ein Mal ausgesprochen zu werden braucht, für sie auch eine Figur statt mehrerer ausreicht. Der Nachteil, daß auf diese Weise die Typen nicht sogleich ausnahmslos nach den Symmetriearten der Kristallographie geordnet werden, erschien demgegenüber nicht entscheidend. Die Einordnung aller 230 Typen in die 32 kristallographischen Gruppen wird durch eine spätere kleine Tabelle geliefert; im übrigen ist zu einer vorläufigen Orientierung bereits in der ersten Tabelle für jeden der Fälle $Z, Z\alpha, Z\beta, Z\gamma, Z\delta$ die entsprechende kristallographische Symmetrie angegeben.

Der Zusammenhang mit der Schönflies'schen Bezeichnung ist dadurch hergestellt, daß jedem Typ das diesbezügliche Symbol mit dem Zusatz Sch. beigefügt ist.

Im übrigen findet sich bei jedem Sohnckeschen Typ unter „Formel“ das, was S. 244 als „Strukturformel“ definiert worden ist, nämlich eine Zusammenstellung von unabhängigen Deckoperationen, die genügen, um aus einem angenommenen Ausgangsatom die gesamte Anordnung abzuleiten. Ich lege auf diese Formeln, ebenso, wie auf die in § 4 mitgeteilten kristallographischen Symmetrieformeln, einen gewissen Wert, weil ich glaube daß sie prinzipiell und praktisch wichtig sind. Unter „abhängige Achsen“ sind dann aus den S. 244 auseinander gesetzten Gründen Drehungs- und Schraubenachsen aufgeführt, die aus der Strukturformel folgen.

Um nicht durch Wiederholungen zu ermüden, sind den 165 Typen die durch Deckoperationen zweiter Art aus den Sohnckeschen entstehen, nicht jedesmal die vollständigen Strukturformeln beige setzt. Dieselben entstehen aus denjenigen des betreffenden Sohnckeschen Typs einfach durch Zufügung des die Deckoperation zweiter Art charakterisierenden Symbols: $\beta_a, \beta_b, \dots, \mathfrak{C}_a, \mathfrak{C}_b, \dots, \mathfrak{G}_a, \mathfrak{G}_b, \dots$ S. 244/5.

Die Voranstellung und Auszeichnung der 65 Sohnckeschen Typen ist auch deshalb gewählt worden, weil (allem Anschein nach) sie ein ganz überwiegendes Vorkommen besitzen gegenüber den durch Schönflies-Fedorow ihnen zugefügten 165 Typen, die nur bei Atomen, die in sich Spiegelung gestatten oder aber in zwei sich spiegelbildlich entsprechenden Modifikationen auftreten, möglich sind. Dies dürfte aus den bisherigen Resultaten der Analyse mit Röntgenstrahlen trotz deren noch geringer Zahl ziemlich überzeugend zu schließen sein. In der Tat ist im allgemeinen die Anzahl der in einem Elementarbereich nachgewiesenen Atome erheblich kleiner, als sie sein müßte, wenn wirklich alle durch die erweiterte Theorie für die kristallographische Symmetrie charakteristischen Deckoperationen zur Geltung kämen. So hat u. a. die Beobachtung für Kupfer, Silber, Gold einfach Anordnungen nach flächenzentrierten Würfeln nachgewiesen, die jedem Würfel nur vier Atome zuteilen. Die bei diesen Substanzen erwiesene reguläre Holoedrie verlangt aber zum Aufbau aus Atomen beliebiger Symmetrie für jeden Elementarbereich die Anzahl von 48 Atomen. In der Tat fügen sich diese Substanzen vollständig der Bravais'schen Theorie ein; die Atome stehen an Stelle der Bravais'schen Moleküle, und es ist ihnen deshalb nun auch die spezielle Symmetrie der regulär holoedrischen Gruppe beizulegen. Aber auch in Fällen, wo die Bravais'schen Vorstellungen nicht mehr anwendbar sind, wie z. B. bei Diamant und Graphit, bleibt die Zahl der im Elementarbereich nachgewiesenen Atome beträchtlich unter

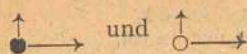
der nach der kristallographischen Symmetrie erforderlichen, und es erweist sich in Übereinstimmung damit die Struktur als die eines Sohnckeschen Typs bei spezieller Lage und Symmetrie der konstituierenden Atome. Wir werden am Schluß dieser Darstellung auf diese und einige andere Fälle näher eingehen.

9. Über die figürliche Darstellung der Typen.

Was die — sehr schwierige — figürliche Darstellung der einzelnen Typen von Punktsystemen angeht, so hat Sohncke (außer durch einige Schemata für die Lage der ihnen entsprechenden Dreh- und Schraubenachsen) die Punktsysteme durch die Darstellung ihrer Projektion auf eine oder mehrere Ebenen zu veranschaulichen gesucht. Die einzelnen Bausteine sind dabei durch kleine Kreisflächen wiedergegeben und der Eindruck verschiedenen Abstandes von der Projektionsebene durch verschieden dichte Schraffierung bewirkt. Hiermit ist unzweifelhaft eine ziemlich weitgehende Veranschaulichung erreicht. Zu beanstanden ist die verwendete Kreisform, die die Vorstellung kugelliger Symmetrie der Bausteine nahelegt, — eine Vorstellung, die zu einem Mißverständnis der ganzen Theorie zu führen geeignet ist; denn die Symmetrie der Bausteine soll ja gerade, wenigstens zunächst, vollständig beliebig bleiben. Als ein gewisser Mangel erscheint weiter, daß einerseits die Systeme der Dreh- und Schraubenachsen nicht direkt angedeutet sind, und daß andererseits über die Höhenlage der einzelnen Atome durch die Schraffierung nur Qualitatives ausgesagt wird.

Ich habe in meinen Vorträgen (zunächst für die Typen mit Hauptachsen) eine Darstellung bevorzugt, welche das Netz der Schnittpunkte der parallelen Achsen mit einer zu ihnen normalen Grundfläche als Ausgang benutzt. Ist die höchste vorkommende Zähligkeit gleich n , so werden dabei über der Grundfläche $n - 1$ ihr parallele Ebenen in Abständen c/n liegend gedacht und nun die in den verschiedenen Ebenen liegenden Atome durch Punkte mit den Ziffern $0, 1, 2, \dots, n - 1$ angedeutet.

Ist eine Querachse $\Omega(2, 0)$ oder $\Omega(2, 1)$ vorhanden, und liegt sie etwa in der Höhe h über der Grundfläche, so ordnet sie den n oben erwähnten Punkten in Höhen $0, 1 \cdot c/n, 2 \cdot c/n, \dots$ sechs weitere Punkte in um $2h$ größeren Höhen zu, die ich mit $1', 2', \dots$ bezeichne. Soll die Dissymmetrie der Atome dabei zum Ausdruck kommen, so werden die Atome durch die Figuren



dargestellt. Durch verschieden lange Pfeile sind dabei zwei ungleichwertige einseitige Achsen wiedergegeben; die schwarzen Kreise deuten an, daß eine dritte ungleichwertige Achse nach oben, die weißen, daß sie nach unten gerichtet ist. Auf diese Weise kann man alles Wesentliche der Atomanordnung einfach zur Anschauung bringen. Einige Beispiele sind der folgenden systematischen Zusammenstellung beigefügt.

Zu diesen geometrischen Darstellungen ist nun aber zu bemerken, daß sie sich nur auf die an Einfachheit ausgezeichneten Sohnckeschen Typen beziehen und schon bei Anwendung auf die durch Deckoperationen zweiter Art daraus ergänzten komplizierteren auf gesteigerte Schwierigkeiten stoßen. Auch mag darauf hingewiesen werden, daß jede figürliche Wiedergabe des Punktsystems selber die Vorstellung bereits in eine spezielle Richtung drängt, insofern bei verschiedener Lage des Ausgangspunktes oder -atoms dasselbe System von Deckoperationen zu verschieden aussehenden Punktsystemen führt; unter diesen können durch Zusammenfallen einer Reihe von Punkten spezielle Systeme von sehr vereinfachtem Aufbau sein, die sich aus dem komplizierten allgemeinen Bild nicht immer unmittelbar durch Beschauung gewinnen lassen.

Aus diesen Gründen erscheint das in verschiedener Weise von Sohncke, Schönflies und Hilton¹⁾ benutzte Verfahren, nicht die Punktsysteme selber, sondern nur ihre Symmetrieelemente in Figuren wiederzugeben, sehr beachtenswert. Wird es doch auch in der Kristallographie unter wesentlich einfacheren Verhältnissen gern benutzt. Auf Grund der unabhängigen charakteristischen Symmetrieelemente läßt sich ja von einem beliebig gelegten und orientierten Atom aus dann durch die Ausführung der Deckoperationen jederzeit das ganze System ableiten. Indessen ist es gemäß dem

S. 244 Erörterten vorteilhaft, sich bez. der Dreh- und Schraubenachsen nicht auf die Darstellung der voneinander unabhängigen zu beschränken, sondern weiter, ev. bis zur Vollständigkeit zu gehen, weil gelegentlich erst dadurch ein Bild entsteht, in das sich die Symmetrieelemente zweiter Art anschaulich einpassen lassen.

Es sind demgemäß in den nachfolgenden Typenklassen mit zwei- bis sechszähligen Hauptachsen zuerst stets die Systeme der Schnittpunkte der parallelen (vertikalen) Achsensysteme mit der (horizontalen) Grundfläche und für einfachste Typen mit und ohne Querachsen die Atomsysteme selbst nach dem oben beschriebenen Verfahren dargestellt. Im übrigen werden für die Typen mit Querachsen nur perspektivische Zeichnungen der ihnen eignen Systeme der Dreh- und Schraubenachsen innerhalb eines charakteristischen Prismas mitgeteilt. Dabei sind, nach dem Vorgang von Schönflies, Drehachsen durch ausgezogene, Schraubenachsen durch gestrichelte Linien wiedergegeben, auf der zugewandten Seite in stärkerer, auf der abgewandten in schwächerer Ausführung¹⁾. Bloße zur Erzielung plastischer Wirkung dienende Konstruktionslinien sind gepunktet. Eine mit *O* bezeichnete Ecke des Prismas dient als eine Art von Koordinatenanfang, auf den z. B. die Deckschiebungen bezogen werden können.

Was die Einpassung der Symmetrieelemente zweiter Art in die so gewonnenen Schemata angeht, so mußte auf die Einzeichnung der Spiegel- und Gleitspiegelebenen verzichtet werden, um die Figuren nicht zu überladen. Dagegen konnten Repräsentanten der verschiedenen Arten von Spiegelpunkten mit den ihnen entsprechenden Symbolen *a*, *b*, *c*, ... eingetragen werden.

1) Die Figuren, welche sich auf Typen beziehen, für welche auch Schönflies die Achsensysteme dargestellt hat, weichen nichtsdestoweniger von den Schönflieschen zum Teil ab, weil Stellungen und Begrenzungen der von den Figuren umfaßten Parallelepipede aus allgemeinen Gesichtspunkten, die z. T. mit der gewählten Voranstellung der Sohnckeschen Typen zusammenhängen, hier abweichend gewählt sind.

(Fortsetzung folgt.)

1) H. Hilton, Mathematical Crystallography. Oxford 1903.

BESPRECHUNGEN.

W. Trendelenburg, Stereoskopische Raummessung an Röntgenaufnahmen. 8°. VIII u. 136 S. mit 39 Abbildungen. Berlin, J. Springer. 1917. Geh. M. 6.80.

Zur Bestimmung der Lage von Fremdkörpern im menschlichen Körper mittels der Röntgenstrahlen gibt es eine ganze Reihe von Verfahren, unter denen die stereo-

skopischen insofern einen besonderen Platz einnehmen, als sie dem Arzt eine unmittelbare Raumschauung zu geben vermögen. Diese Verfahren haben in den Kreisen der Röntgenärzte noch nicht weitere Verbreitung gefunden, weil bei ihnen die geometrischen und physikalischen Grundlagen komplizierter sind als bei der Technik mit zwei Aufnahmen in gekreuzten Richtungen oder ähnlichen Verfahren. Um den Röntgenarzt dieser

Mühen zu entheben, hat Verf. mit Unterstützung der Firma Leitz in Wetzlar eine Apparatur durchkonstruiert, welche dem Arzt möglichst viel Arbeit abnimmt und ihm ein technisches Mittel in die Hand gibt, mit dem ohne viel Nachdenken die Aufnahme und Ausmessung der Stereogramme vor sich gehen kann. Bei der Aufnahme werden zwei photographische Platten hergestellt, die sich durch seitliche Verschiebung des das Bild erzeugenden Antikathodenbrennpunktes um den Augenabstand voneinander unterscheiden. Bei der Betrachtung werden die Augen an Stelle der Antikathodenbrennpunkte gesetzt und ein Wheatstone-Brewstersches Zweispiegelstereoskop benutzt. Man sieht in ihm den Körper in natürlicher Größe als Raumbild. Indem man dorthin, wo der Körper zu schweben scheint, als Marken zwei Zirkelspitzen bringt, kann man jede beliebige Entfernung innerhalb des Raumbildes abgreifen oder mit besonderen Hilfsmitteln zahlenmäßig bestimmen.

Das Buch gibt eine in erster Linie für den Arzt bestimmte eingehende und elementare Darstellung des Wesens der Stereoskopie und der besonderen Bedeutung des Röntgenverfahrens und kann in diesem ersten Teile als eine recht brauchbare Einleitung in die Stereoskopie im allgemeinen betrachtet werden. Im zweiten Teil wird daran anschließend die Methode des Verfassers und die von ihm angegebene Apparatur ausführlich besprochen. Ein Zahlenbeispiel mit den Messungsergebnissen bei einer Schädeluntersuchung und ein ausführliches Literaturverzeichnis bilden den Schluß.

P. Ludewig.

W. A. Roth, Physikalisch-chemische Übungen. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. 8°. VIII u. 247 S. mit 72 Abbildungen im Text. Leipzig, Leopold Voß. 1916. Geb. M. 8.50.

Das Buch ist unmittelbar aus der Laboratoriumstätigkeit hervorgegangen. Die mitgeteilten Aufgaben entsprechen im wesentlichen dem bewährten Unterrichtsgange, der in Nernsts Institut zur Einführung in die physikalische Chemie befolgt wird. Behandelt werden Dichtebestimmungen, Molekulargewichtsbestimmungen in Lösungen, thermochemische Messungen, Bestimmung optischer Konstanten, chemische Statik und Kinetik und die wichtigsten elektrochemischen Messungen. Die einführenden Bemerkungen, die Beschreibung der Apparate und des Ganges der Versuche, endlich die durchgeführten Rechenbeispiele ermöglichen die Ausführung der meisten Aufgaben ohne die Mithilfe des Assistenten. Merkwürdig unvollkommen sind einzelne Figuren; die Büretten S. 15 z. B. sind stark verzeichnet und der Dampfdichte-Apparat nach Victor Meyer S. 24 ist fast nicht zu erkennen. Seite 160 Zeile 9 v. u. sind x und y vertauscht.

Das pädagogisch vortreffliche Buch, das sich bereits bewährt hat, wird sich ohne Zweifel auch in der neuen, umfangreicheren Auflage nützlich erweisen. Für eine weitere Auflage dürfte es aber doch wohl angezeigt sein, wenigstens einige Übungsaufgaben aus dem Gebiete der Photochemie einzufügen. A. Coehn.

Tagesereignisse.

Die **Physikalisch-Technische Reichsanstalt** wird ihre Prüfungsgebühren entsprechend den gestiegenen Selbstkosten erhöhen. Die neue Gebührenordnung tritt am 1. Juli d. J. in Kraft, sie ist in einzelnen Heften enthalten:

Heft I: Präzisionsmechanik, Optik, Radioaktivität, Chemie;
„ II El: Elektrizität,

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig. Druck von August Pries in Leipzig.

Heft II Mg: Magnetismus,
„ III: Wärme und Druck,
die auf Wunsch kostenlos Interessenten zugeschickt werden.
Charlottenburg, den 22. April 1918.

Der Präsident
der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt
gez. Warburg.

Vorlesungsverzeichnis für das Sommersemester 1918.

Universität Würzburg.

Wien: Experimentalphysik II: Elektrizität und Optik, 5; Praktische Übungen im physikalischen Institut, 4 bzw. 8, für Mediziner und Pharmazeuten, 4; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. —

N. N.: Experimentalchemie II: Organische Chemie, 5; Analytisch-chemisches Praktikum (mit Emmert), tägl. außer Sonnabend; Chemisches Praktikum für Mediziner und Zahnärzte (mit Emmert und Supan), 6; Praktikum für präparative Arbeiten, tägl.; Anleitung zu selbständigen Untersuchungen (mit Emmert), tägl.; Kolloquium (mit Emmert), 14-tägig, 1 1/2 g. — **Heiduschka:** Chemische Technologie I, 4; Die Grundlagen der Warenkunde des Welthandels, 2; Pharmazeutische Präparatenkunde II: Organische Präparate und Wertbestimmung von Drogen, 3; Nahrungsmittelchemie I, mit Exkursionen, 2; Gerichtliche Chemie II, 2; Chemisches Praktikum: Praktische Übungen, einschließlich technisch-chemischer, gerichtlich-chemischer und nahrungsmittel-chemischer Arbeiten, tägl.; Pharmazeutisch-chemisches Praktikum: Praktische Übungen einschließlich der Übungen in den für den Apotheker wichtigen Sterilisationsverfahren, tägl. — **Pauly:** Tagesfragen der praktischen organischen Chemie, 1; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Emmert:** Maßanalyse (Experimentalvorlesung unter Berücksichtigung der durch das deutsche Arzneibuch vorgeschriebenen Methoden), 1. —

Rost: Integralrechnung, 4, Übungen, 1 g; Analytische Mechanik der Systeme starrer Körper, 4, Übungen, 1 g. — **v. Weber:** Analytische Geometrie der Ebene, 4; Ebene Kurven, 4; Seminar: Übungen zur Funktionentheorie, 2 g. — **Hilb:** Einleitung in die synthetische Geometrie mit Übungen, 3. —

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Gestorben: Der a. o. Professor für physikalische Chemie an der Universität Jena Dr. Robert Marc (im Kriege gefallen).

Gesuche.

Promovierter Physiker

mit mehrjährigen praktischen Erfahrungen in technischer Physik, besonders Hochspannungstechnik und elektrischen Schwingungen, **sucht Stelle** an einem Hochschulinstitut oder an einem großen industriellen Laboratorium. Angebote unter **S. H. 519** an den Verlag S. Hirzel, Leipzig, Königstraße 2.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 12.

15. Juni 1918.

Redaktionsschluß für No. 14 am 12. Juni 1918.

19. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

R. Glocker, Über die Berechnung der sekundären Röntgenstrahlung einer Platte. S. 249.

L. Meitner, Die Lebensdauer von Radiothor, Mesothor und Thorium. S. 257.

J. E. Lilienfeld, Untersuchungen

über das kontinuierliche Röntgenspektrum. S. 263.

J. E. Lilienfeld u. H. Seemann, Photographische Aufnahme des P_{α} - und P_{γ} -K-Spektrums. S. 269.

Besprechungen:

C. Fr. Gauß' Werke. Bd. X. Abt. I. S. 271.

F. M. Exner, Dynamische Meteorologie. S. 272.

H. Bauer, Physik der Röntgenologie. S. 272.

Personalien. S. 272.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die Berechnung der sekundären Röntgenstrahlung einer Platte.

Von R. Glocker.

Bei der experimentellen Bestimmung des Emissionskoeffizienten der charakteristischen Sekundärstrahlung (Fluoreszenz-Strahlung), sowie des Zerstreuungskoeffizienten ist es von Wichtigkeit zu wissen, welcher Bruchteil der gesamten entstehenden sekundären Röntgenstrahlung aus dem betreffenden Körper austritt und zur Messung gelangt. Ein zweites Problem, das die Kenntnis der im Körper selbst wieder zur Absorption gelangenden sekundären Strahlung erfordert, ist die Frage, in welchem Maße die Absorptionsmessungen an sehr durchdringungsfähigen Röntgenstrahlen durch Auftreten von Sekundärstrahlung beeinträchtigt werden und in welcher Weise dieser Einfluß der Sekundärstrahlung von der Art der Versuchsanordnung abhängt. Es ist bekannt, daß bei γ -Strahlen die auf verschiedene Weise bestimmten Absorptionskoeffizienten beträchtliche Unterschiede aufweisen, welche als Folge von verschieden starker Sekundärstrahlung erklärt werden.

Wie eine Literaturdurchsicht zeigt, hat man sich bisher bei der Berechnung der aus einem Körper austretenden Sekundärstrahlung mit Näherungsformeln begnügt. Eine strenge Behandlung findet sich nur für einen Spezialfall: Berechnung der gesamten aus der Vorderfläche einer unendlich dicken Platte austretenden charakteristischen Sekundärstrahlung¹⁾, wobei die Auswertung des Integrals nicht analytisch, sondern graphisch erfolgte.

In Anbetracht der hohen Härtegrade, welche die moderne Röntgentechnik erreicht

hat, muß die Forderung erhoben werden, daß künftighin bei allen Absorptionsmessungen an Röntgenstrahlen der Einfluß der zerstreuten Strahlung auf das Meßresultat quantitativ ermittelt werde. Da die Größe der Korrektur von der Versuchsanordnung abhängt, so ist es einfacher, an Stelle der in jedem einzelnen Falle vorzunehmenden experimentellen Bestimmung ein für allemal das Korrektionsglied als Funktion der für die Meßanordnung und die Strahlung charakteristischen Größen zu berechnen. Die Voraussetzung eines solchen Korrektionsverfahrens ist aber die Lösung folgender Aufgabe:

Auf eine Platte von beliebiger Dicke D trifft ein paralleles Strahlenbündel mit der Intensität J_0 senkrecht auf; wie groß ist die Intensität der nach P gelangenden Sekundärstrahlen, wenn von P aus der bestrahlte Teil der Platte unter dem körperlichen Winkel ω gesehen wird und wenn P der Rückseite der Platte gegenüber liegt? Der komplementäre Fall, wo P der Vorderseite der Platte gegenüber liegt, ist von Interesse für die experimentelle Bestimmung von Emissionskoeffizienten.

Da das von Bragg und Porter angegebene Integral eine Spezialisierung des letzteren Falles darstellt ($D = \infty$, $\omega = 2\pi$), so wird zuerst die Berechnung der aus der Vorderseite der Platte austretenden Sekundärstrahlung vorgenommen werden.

Den mathematischen Betrachtungen möge eine prinzipielle Bemerkung über die Definition des Absorptionskoeffizienten vorausgeschickt werden.

Eine senkrecht auf eine absorbierende Platte auffallende homogene Röntgenstrahlung (Intensität J_0) besitzt nach dem Durchgang durch die Schichtdicke x eine Intensität J

$$J = J_0 e^{-\mu x} \cdot e^{-s x}. \quad (1)$$

Der Intensitätsverlust $J_0 - J$ ist eine Folge 1. von Absorption (μ), d. h. Transformation der Strahlungsenergie in andere Energie-

¹⁾ Bragg und Porter, Proc. of the Roy. Soc. 85, 349, 1911.

Anm. bei der Korrektur: Der Spezialfall der „rückwärtigen“ Sekundärstrahlung $\omega = 2\pi$ ist mittels Reihenentwicklung behandelt bei Kohlrausch, Mitteil. d. Wiener Rad.-Inst. Nr. 99 und Jahrb. f. Rad. u. Elektron. 15, 78, 1918.

formen (charakteristische Sekundärstrahlung, Korpuskularstrahlung, Wärme),

2. von Zerstreuung (s).

Unter der Voraussetzung sehr enger Strahlenbündel, so daß kein nennenswerter Teil der entstehenden zerstreuten Strahlung in das Meßgerät gelangen kann, ergibt sich bei der Messung tatsächlich für das Verhältnis $\frac{J}{J_0}$ der Wert, der sich nach Gl. (1) ergeben sollte, wenn man Absorptionskoeffizient und Zerstreuungskoeffizient als bekannt annimmt. Arbeitet man mit weitgeöffneten Strahlenbündeln, so wird ein Teil der entstehenden zerstreuten Strahlung mitgemessen und infolgedessen $\frac{J}{J_0}$ zu groß gefunden. Wenn es nun möglich wäre, eine solche ideale Versuchsanordnung zu schaffen, daß alle entstehende Streustrahlung in das Meßgerät gelangen könnte, so wäre

$$\frac{J}{J_0} = e^{-\bar{\mu}x},$$

so daß jeder Einfluß der Streustrahlung aus dem Meßresultat von selbst eliminiert wird. Daß eine solche Anordnung praktisch nicht realisierbar ist, ist leicht einzusehen. Aus diesem Grunde ist der einfachere Fall derjenige enger Bündel, wo ein Auftreffen von Streustrahlen auf das Meßgerät praktisch vermieden wird. Messungen mit weitgeöffneten Bündeln erfordern stets eine Korrektur des experimentell erhaltenen Wertes $\frac{J}{J_0}$ durch Berechnung des auf das Meßgerät fallenden Bruchteils der gesamten entstehenden zerstreuten Strahlung.

Aus dem experimentellen und erforderlichenfalls korrigierten Wert $\frac{J}{J_0}$ erhält man immer die Summe $\bar{\mu} + s$ Gl. (1) und niemals $\bar{\mu}$ allein. Es erscheint daher zweckmäßig, die Gl. (1) in folgender Form zu schreiben

$$\frac{J}{J_0} = e^{-\mu x}, \quad (1a)$$

und den experimentellen Koeffizienten μ durch eine besondere Bezeichnung von dem wahren Absorptionskoeffizienten $\bar{\mu}$ zu unterscheiden. Wie die Gl. (1a) zeigt, gibt μ an, um welchen Betrag die Strahlung auf dem Wege x infolge Absorption und Zerstreuung geschwächt wird; μ wird daher „Schwächungskoeffizient“ genannt werden, so daß gilt Schwächungskoeffizient = Absorptionskoeffizient + Zerstreuungskoeffizient

$$\mu = \bar{\mu} + s. \quad (1b)$$

Bei weichen Strahlen ist s gegenüber von $\bar{\mu}$ sehr klein, so daß der aus Gl. (1a) berechnete Wert von μ praktisch mit dem Absorptionskoeffizienten übereinstimmt. Bei einer Wellenlänge $\lambda = 0,2 \cdot 10^{-8}$ cm erreicht aber s ungefähr die Größenordnung von $\bar{\mu}$.

Die vorgeschlagene Nomenklatur für $\bar{\mu}$ und μ wird ferner dadurch nahe gelegt, daß in den Absorptionsgesetzen¹⁾ stets $\bar{\mu}$ und niemals μ auftritt; μ als experimentellen oder rohen Absorptionskoeffizienten zu bezeichnen, erscheint demnach unzweckmäßig, da μ keine das Absorptionsverhalten eines Stoffes hinreichend charakterisierende Größe ist.

I. Die aus der Vorderseite der Platte austretende charakteristische Sekundärstrahlung.

Ist E die in der Tiefe x (Fig. 1) auf die Flächeneinheit auftreffende Energie der Pri-

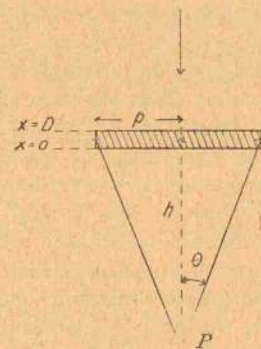


Fig. 1.

märstrahlung und α der Emissionskoeffizient der charakteristischen Sekundärstrahlung, so ist die gesamte in einem Würfel von der Grundfläche 1 und der Höhe dx erzeugte Sekundärstrahlung $\alpha E dx$. Von dieser nach allen Richtungen emittierten Energie entfällt auf den Elementarkegel von der Öffnung $d\omega$ der Betrag $\frac{d\omega}{4\pi}$. Da die Sekundärstrahlen zumeist

unter schiefen Winkeln austreten, so ist ihr Energieverlust innerhalb der Platte infolge Absorption und Zerstreuung proportional $e^{-\frac{rx}{\cos\theta}}$ anzusetzen, wobei r ihr Schwächungskoeffizient und θ der Winkel zwischen Strahl und Plattennormale ist. Der Einfachheit halber werde zunächst vorausgesetzt, daß die Primärstrahlung senkrecht auf die Vorderseite der Platte auftreffe und daß sie aus lauter parallelen Strahlen

1) Glocker, Absorptionsgesetze für Röntgenstrahlen, diese Zeitschr. 19, 66, 1918.

len bestehe. Dann gilt unabhängig vom Winkel ϑ überall die Gl. (1a).

$$E = E_0 e^{-\mu x}.$$

E_0 = die auf die Flächeneinheit der Vorderseite auftreffende Primärenergie.

Diese idealisierte Voraussetzung darf praktisch um so eher als erfüllt gelten, je größer die Fokus-Plattendistanz R gegenüber dem Plattenradius ρ und der Plattendicke D ist.

Zwischen dem körperlichen Winkel ω und dem in Fig. 1 eingezeichneten Winkel ϑ besteht die Gleichung

$$d\omega = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta. \quad (2)$$

Durch Integration über die ganze Schichtdicke $x = D$ erhält man für die gesamte Energie S der nach P gelangenden Sekundärstrahlen

$$S = \frac{1}{2} \pi E_0 \int_0^D e^{-\mu x} dx \int_0^\Theta e^{-\frac{rx}{\cos \vartheta}} \sin \vartheta d\vartheta \quad (3)$$

wobei

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\rho}{h}$$

ist.

Für das Integral $\int_0^\Theta e^{-\frac{rx}{\cos \vartheta}} \sin \vartheta d\vartheta$ haben Soddy

und Russell¹⁾ folgende Lösung gefunden:

$$\int_0^\Theta e^{-\frac{rx}{\cos \vartheta}} \sin \vartheta d\vartheta = e^{-rx} + rx Ei\{-rx\} - \cos \Theta e^{-\frac{rx}{\cos \Theta}} - rx Ei\left\{-\frac{rx}{\cos \Theta}\right\} \quad (4)$$

$Ei\{-x\}$ ist das Exponentialintegral²⁾ $\int_x^\infty \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi$.

Setzt man

$$rx = y \quad \frac{\mu}{r} = c \cos \Theta = b,$$

so ergibt sich aus (3) und (4)

$$\begin{aligned} \frac{2Sr}{\pi E_0} &= \int_0^D e^{-cy} (e^{-y} + y Ei\{-y\}) dy - \\ &- \int_0^D e^{-by} (b e^{-\frac{y}{b}} + y Ei\{-\frac{y}{b}\}) dy = \\ &= A_1 - A_2 = F(c, b, rD). \end{aligned} \quad (5)$$

In dem Ausdruck A_1 ist das zweite Integral nicht ohne weiteres integrierbar; durch partielle

Integration und darauf folgende Zerlegung des entstehenden Integrals gelingt eine Zurückführung auf

$$\int_0^{rD} \frac{e^{-(c+1)y}}{c^2 y} dy.$$

Dieses Integral ist aber

$$\int_0^{rD} \frac{e^{-(c+1)y}}{c^2 y} dy + \frac{1}{c^2} Ei\{-rD(c+1)\}.$$

Das erhaltene Integral konvergiert nicht; es läßt sich aber mit dem bei Auswertung der übrigen Teilintegrale auftretenden Integral

$$-\frac{1}{c^2} \int_0^{rD} \frac{e^{-y}}{y} dy$$

zu einem konvergenten Integral vereinigen, nämlich

$$\frac{1}{c^2} \int_0^{rD} \frac{e^{-(c+1)y} - e^{-y}}{y} dy = \frac{1}{c^2} \lg \left(\frac{1}{c+1} \right).$$

Somit ergibt sich¹⁾

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{c} - \frac{1}{c^2} \lg(c+1) - \frac{e^{-(c+1)rD}}{c} - \\ &- \frac{1+crD}{c^2} e^{-crD} Ei\{-rD\} + \frac{1}{c^2} Ei\{-(c+1)rD\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Das Integral A_2 läßt sich durch die Substitution

$$\frac{y}{b} = y'$$

auf A_1 zurückführen, wobei an Stelle des Parameters c (in A_1) cb (in A_2) tritt. Hieraus ergibt sich für Gl. (5) folgende Beziehung

$$\begin{aligned} F(c, b, rD) &= \frac{2Sr}{\pi E_0} = \frac{1-b}{c} + \frac{1}{c^2} \lg \left(\frac{cb+1}{c+1} \right) - \\ &- \frac{e^{-(c+1)rD}}{c} + \frac{b}{c} e^{-(c+\frac{1}{b})rD} + \\ &+ \frac{1}{c^2} Ei\{-(c+1)rD\} + \\ &+ \frac{1+crD}{c^2} e^{-crD} [Ei\{-\frac{rD}{b}\} - Ei\{-rD\}] - \\ &- \frac{1}{c^2} Ei\{-(c+\frac{1}{b})rD\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Spezialfälle:

1. $b=0$
d. h. $\Theta = 90^\circ$.

P (Fig. 1) liegt dicht an der Vorderseite der Platte. Die Bedingung, daß deren seitliche Aus-

1) Unter $\lg$ ist im folgenden immer $\log$ nat verstanden.

1) Phil. Mag. 19, 725, 1910.

2) Tabelle der Zahlenwerte in Jahnke und Emde, Funktionentafeln. S. 19 ff.

dehnung unendlich groß ist, ist wegen der Absorption schon bei relativ sehr kleinem Radius p praktisch erfüllt.

Weitere Spezialisierung $D = \infty$ führt auf den von Bragg und Porter graphisch behandelten Fall. Die analytische Lösung gemäß Gl. (7)

lautet ($c = \frac{\mu}{r}$)

$$\frac{2Sr}{zE_0} = \frac{r}{\mu} + \frac{r^2}{\mu^2} \lg\left(\frac{r}{\mu + r}\right). \quad (8)$$

Gegenüber der langwierigen Methode der graphischen Auswertung der Integrale, welche für jeden Zahlenwert von $\frac{\mu}{r}$ neu vorgenommen werden muß, liefert die Formel (8) infolge ihrer einfachen Struktur sehr viel schneller das gewünschte Resultat.

$$2. \quad b = 1 - \delta$$

d. h. Θ nahezu $= 0^\circ$.

δ eine kleine Größe. Der betrachtete Sekundärstrahlenkegel besitzt einen kleinen Öffnungswinkel.

Berücksichtigt man, daß nach dem Taylorschen Satz in erster Näherung

$$Ei\{-(a + \delta)\} - Ei\{-a\} = \frac{\delta e^{-a}}{a}$$

ist, so erhält man für Gl. (7) folgende Näherungsformel

$$\frac{2Sr}{zE_0} = \frac{\delta}{c + 1} \left(1 - e^{-(c+1)rD}\right), \text{ wobei } c = \frac{\mu}{r} \text{ ist.} \quad (9)$$

Die Annahme $D = \infty$ liefert die schon von Sadler¹⁾ aufgestellte Formel

$$\frac{S}{E_0} = \frac{1}{2} \frac{z}{\mu + r} \cdot \delta = \frac{\omega}{4\pi} \cdot \frac{z}{\mu + r}. \quad (10)$$

Die Beziehung

$$\delta = \frac{\omega}{2\pi}$$

ergibt sich durch Integration der Gl. (2)

$$(\delta = 1 - b = 1 - \cos \Theta).$$

II. Die aus der Vorderseite der Platte austretende zerstreute Strahlung.

Die Energie Z der zerstreuten Strahlung in P berechnet sich aus der Formel (7), wenn $\mu = r$, also $c = 1$ gesetzt und s statt z geschrieben wird:

1) Phil. Mag. 18, 107, 1909. Ableitung der Formel unter der vereinfachten Voraussetzung, daß die Sekundärstrahlen aus der Platte alle senkrecht austreten.

$$\begin{aligned} \frac{Z}{E_0} = & \frac{1}{2} \frac{s}{\mu} \left(1 - b + \lg\left(\frac{b+1}{2}\right) - e^{-2\mu D} + \right. \\ & + b e^{(1+\frac{1}{b})\mu D} + Ei\{-2\mu D\} + \\ & + (1 + \mu D) e^{-\mu D} \left[Ei\left\{-\frac{\mu D}{b}\right\} - \right. \\ & \left. \left. - Ei\{-\mu D\}\right] - Ei\left\{-\left(1 + \frac{1}{b}\right)\mu D\right\} \right) \end{aligned} \quad (7a)$$

Die Spezialfälle $b = 0$, $b = 1 - \delta$, $D = \infty$ ergeben sich ohne weiteres aus den Gl. (8), (9), (10) für $c = 1$.

III. Die aus der Rückseite der Platte austretende charakteristische Sekundärstrahlung (Fluoreszenzstrahlung).

In analoger Weise zu der Beziehung (3) ergibt sich für die rückseitige Sekundärstrahlung (Fig. 2) folgendes Doppelintegral

$$S = \frac{1}{2} z E_0 \int_0^D e^{-\mu(D-x)} dx \int_0^\Theta e^{-\frac{rx}{\cos \vartheta}} \sin \vartheta d\vartheta \quad (11)$$

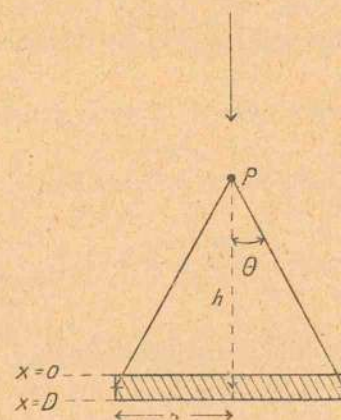


Fig. 2.

Wie sich im Laufe der Rechnung ergibt, sind hier 3 Fälle zu unterscheiden, nämlich

1. Fall: $|c| < 1$, also $\mu < r$
2. Fall: $|c| > 1$, also $\mu > r$ $1 - c$ u. $1 - cb$ haben gleiches Vorzeichen
3. Fall: $|c| > 1$, also $\mu > r$ $1 - c$ u. $1 - cb$ haben entgegengesetztes Vorzeichen.

1. Fall.

Unter Benutzung der Gl. (4) erhält man aus (11), wenn $c = +\frac{\mu}{r}$ ist,

$$c' = -\frac{\mu}{rD}$$

$$\begin{aligned} \frac{2Sr}{zE_0 e^{-\mu D}} &= \int_0^{\tau D} e^{-cy} (e^{-y} + y Ei(-y)) dy - \\ &- \int_0^{\tau D} e^{-cy} \left(b e^{-\frac{y}{b}} + y Ei\left(-\frac{y}{b}\right) \right) dy = \\ &= f_1(c', b, rD). \end{aligned} \quad (12)$$

Ein Vergleich mit (5) ergibt $f_1(c', b, rD) = F(c, b, rD)$; letztere Funktion ist in Gl. (7) durch bekannte Funktionen dargestellt. Man erhält demnach die Funktion f_1 dargestellt, wenn man in Gl. (7) überall $-c$ statt c schreibt.

2. Fall.

Das Resultat ist mit dem des 1. Falles identisch.

3. Fall.

Durch partielle Integration gelangt man zu Integralen von der Form

$$\int_0^G \frac{e^{-y} - e^{-ay}}{y} dy,$$

wobei $\alpha > 0$ ist. Durch Reihenentwicklung läßt sich beweisen

$$\int_0^G \frac{e^{-y} - e^{-ay}}{y} dy = Ei(-G) - Ei(-\alpha G) + \lg \alpha, \quad (13)$$

Als Endresultat erhält man, $c = \frac{\mu}{r}$ bezeichnet,

$$\begin{aligned} \frac{2Sr}{zE_0 e^{-\mu D}} &= \frac{b-1}{c} + \frac{1}{c^2} \lg \left(\frac{1-cb}{c-1} \right) + \\ &+ \frac{1}{c} e^{(c-1)rD} - \frac{b}{c} e^{(c-\frac{1}{b})rD} + \\ &+ \frac{1}{c^2} Ei\left\{+(c-1)rD\right\} - \frac{1}{c^2} Ei\left\{-\left(\frac{1}{b}-c\right)rD\right\} + \\ &+ \frac{1-crD}{c^2} e^{crD} \left(Ei\left\{-\frac{rD}{b}\right\} - Ei\{-rD\} \right). \\ &= f_2(c, b, rD). \end{aligned} \quad (14)$$

Die Ableitung der Spezialfälle erfolgt bei allen 3 Fällen in ähnlicher Weise wie im Abschnitt I.

IV. Die aus der Rückseite der Platte austretende zerstreute Strahlung.

Schreibt man $s = z$ und setzt man $c = 1$, also $\mu = r$, so liefern die Gl. (12) und (14) eine Beziehung für die Energie Z der nach P (Fig. 2) gelangenden zerstreuten Strahlung. Bei dem Grenzübergang ist zu beachten

$$\lim_{c \rightarrow 1} \left(\lg[(c-1)rD] - Ei\left\{\pm(c-1)rD\right\} \right) = -0,577 \quad (15)$$

(Beweis durch Reihenentwicklung.)
0,5772... Eulersche Konstante.

Sodann ist

$$\begin{aligned} \frac{2Z\mu}{sE_0 e^{-\mu D}} &= 0,5772 \dots + b + \lg(\mu D(1-b)) + \\ &+ (\mu D - 1) e^{\mu D} \left[Ei\{-\mu D\} - Ei\left\{-\frac{\mu D}{b}\right\} \right] - \\ &- b e^{-\left(\frac{1}{b}-1\right)\mu D} - Ei\left\{-\left(\frac{1}{b}-1\right)\mu D\right\} = \\ &= f(b, \mu D). \end{aligned} \quad (16)$$

Spezialfälle:

1. $b = 0$, $\Theta = 90^\circ$ Streukegel von maximaler Öffnung

$$\frac{Z}{E_0} = \frac{1}{2} \frac{s}{\mu} e^{-\mu D} (0,5772 \dots + \lg \mu D + (\mu D - 1) e^{\mu D} Ei\{-\mu D\}). \quad (17)$$

2. $b = 1 - \delta$, δ sehr klein, Streukegel mit sehr kleinem Öffnungswinkel.

In ähnlicher Weise wie unter 1 (Spezialfall 2) erhält man als erste Näherung

$$\begin{aligned} \frac{Z}{E_0} &= \frac{1}{2} \frac{s}{\mu} e^{-\mu D} \cdot \mu D \delta = \frac{\delta}{2} s D e^{-\mu D} = \\ &= \frac{\omega}{4\pi} s \cdot D \cdot e^{-\mu D}. \end{aligned} \quad (18)$$

V. Verallgemeinerung der Formeln für schief auf die Platte auftreffende Primärstrahlen.

Bildet die Einfallsrichtung der Primärstrahlen mit der Plattennormale den Winkel γ , so ist bei 1 (vorderseitige Sekundärstrahlung)

an Stelle von $e^{-\mu x}$ zu setzen $e^{-\frac{\mu x}{\cos \gamma}}$. Sind die Primärstrahlen nahezu parallel, so ist γ für alle Strahlen des Bündels gleich groß. Wird

$$\frac{\mu}{r \cos \gamma} = g$$

bezeichnet, so läßt sich das Resultat sofort aus Gl. (7) ablesen, wenn für c überall g eingesetzt wird.

Die Berechnung der rückseitigen Sekundärstrahlung und der rückseitigen Streustrahlung für den Fall schief auftreffender Primärstrahlen läßt sich leicht mit Hilfe der früher aufgestellten Formeln (11), (12), (14), (16) durchführen,

wobei $e^{-\mu(D-x)}$ durch $e^{-\frac{\mu(D-x)}{\cos \gamma}}$ zu ersetzen ist; da sie nichts prinzipiell Neues bietet, möge sie hier unterdrückt werden.

VI. Erweiterung der Formeln für divergente Primärstrahlenbündel.

Die bisher mitgeteilten Formeln waren unter der Voraussetzung abgeleitet worden, daß das

auf die emittierende Platte auftreffende Primärstrahlenbündel aus lauter parallelen Strahlen besteht. Dieser Fall ist praktisch nur dann verwirklicht, wenn der Fokusabstand der Platte ein sehr großer ist. Um die Anwendungsmöglichkeiten der Formeln zu vermehren, möge nun der allgemeinere Fall eines divergenten Strahlenbündels behandelt werden.

Um einigermaßen übersichtliche Gleichungen zu erhalten, ist die Voraussetzung unentbehrlich, daß der Fokusabstand der betreffenden Platte wenigstens so groß ist, daß der Brennfleck der Antikathode als punktförmige Strahlungsquelle betrachtet werden darf. Dann nimmt die Strahlungsenergie ab mit dem Quadrat der Entfernung, so daß, abgesehen von der Absorption, in den verschiedenen tiefen Schichten der Platte nicht mehr die gleiche Primärenergie E vorhanden ist. Da die Dicke D der Platten immer viel kleiner sein wird, als die Fokusdistanz R , so ist der Unterschied zwischen der Primärenergie auf der Vorder- und Rückseite E_v bzw. E_r ¹⁾ der Platte gering. Man setze für E_0 in die früheren Formeln überall das arithmetische Mittel von E_v und E_r ein. Wie eine überschlägige Rechnung zeigt, wird eine noch bessere Annäherung dadurch erreicht, daß bei Berechnung der vorderseitigen Sekundärstrahlung für E_0 der Wert der Primärenergie in der Tiefe $\frac{1}{3}D$ und bei der rückseitigen Sekundärstrahlung der in der Tiefe $\frac{2}{3}D$ eingesetzt wird. (Grund: Wegen der Absorption der Sekundärstrahlen in der Platte kommen im ersteren Falle hauptsächlich die oberen, im letzteren Falle die unteren Schichten für die Emission in Betracht.) Ist z. B.

$$\frac{D}{R} = \frac{1}{20}$$

so ist diese Näherung auf weniger als 1 Proz. genau.

Bei divergenten Primärstrahlen ist der Absorptionsfaktor proportional $e^{-\frac{\mu x}{\cos \psi}}$ anzusetzen, wenn der nach dem betrachteten Punkt O der Platte zielende Primärstrahl mit dem Normalstrahl den Winkel ψ bildet (Fig. 3). Es ist nun ψ als Funktion der Integrationsvariablen ϑ und x auszudrücken. Eine einfache geometrische Betrachtung liefert die Beziehung

$$\frac{1}{\cos^2 \psi} = 1 + \left(\frac{x+h}{R+D-x} \right)^2 \frac{1}{\cos^2 \vartheta} - \left(\frac{x+h}{R+D-x} \right)^2 \quad (19)$$

1) E_v und E_r ohne Berücksichtigung der Absorption berechnet.

wenn Strahlungsquelle und P auf verschiedenen Seiten der Platte liegen (Fig. 3).

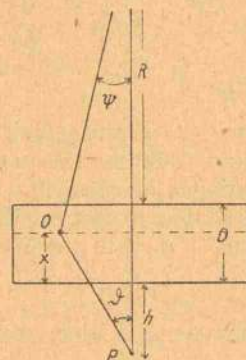


Fig. 3.

Die Möglichkeit einer einfachen Auswertung des Doppelintegrals hat zur Voraussetzung die zwei Bedingungen

$$1. \frac{D}{R} \ll 1 \text{ und } \frac{D}{h} \ll 1$$

$$2. \cos \psi \text{ und } \cos \vartheta \text{ in den Grenzen } 1 \text{ und } \frac{1}{2}$$

Voraussetzung 2 kann weggelassen, wenn $h=R$ ist [vgl. (21)].

Dann lautet Gl. (19)

$$\frac{1}{\cos^2 \psi} = 1 + \left(\frac{h}{R} \right)^2 \frac{1}{\cos^2 \vartheta} - \left(\frac{h}{R} \right)^2 \quad (20)$$

Die Näherung (erhalten durch Taylorsche Entwicklung)

$$\frac{1}{\cos \psi} = 1 + \left(\frac{h}{R} \right)^2 \frac{1}{\cos \vartheta} - \left(\frac{h}{R} \right)^2 \quad (21)$$

gilt auf etwa 1 Proz., wenn $\frac{h^2}{R^2} < 1$ und $\cos \vartheta > \frac{2}{3}$ ist.

Für $\frac{h^2}{R^2} > 1$ beträgt der Fehler einige Prozent.

Für $\cos \vartheta < \frac{1}{2}$ wird die Näherungsbeziehung ungültig.

Für den praktisch wichtigsten Fall der rückwärtigen Streustrahlung¹⁾ erhält man folgendes Doppelintegral

1) Die Ausdehnung dieser Methode auf die übrigen im Abschnitt I., II. und III. behandelten Fälle ist leicht möglich.

$$\begin{aligned} \frac{2Z}{sE_0} &= \int_0^D dx \int_0^\Theta e^{-\frac{\mu(D-x)}{\cos \psi}} e^{-\frac{\mu x}{\cos \theta}} \sin \theta d\theta - \\ &= \int_0^D e^{-\mu D(1-\alpha) + \mu x(1-\alpha)} dx \\ &\quad \int_0^\Theta e^{-\frac{\mu D\alpha - \mu x\alpha + \mu x}{\cos \theta}} \sin \theta d\theta. \end{aligned} \quad (22)$$

$\alpha = \frac{h^2}{R^2}$ bezeichnet.

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{2Z\mu}{sE_0 e^{-\mu D}} &= \frac{1}{1-\alpha} \int_0^{\mu D} e^y (e^{-y} + y Ei(-y) - \\ &\quad - b e^{-\frac{y}{b}} + y Ei(-\frac{y}{b})) dy = \\ &= \frac{1}{1-\alpha} (f(b, \mu D) - f(b, \alpha \mu D)) \end{aligned} \quad (23)$$

vgl. Gl. (16).

Unter der Annahme der Parallelität der Primärstrahlen wurde früher gefunden

$$\frac{2Z\mu}{sE_0 e^{-\mu D}} = f(b, \mu D).$$

Die Darstellung der Funktion f ist in Gl. (16) angegeben worden.

Für den Spezialfall $\alpha=1$ versagt die Formel (23); die direkte Auswertung des Integrals liefert

$$\begin{aligned} \frac{2Z\mu}{sE_0 e^{-\mu D}} &= \mu D + (\mu D)^2 e^{\mu D} Ei(-\mu D) - \\ &\quad - b \mu D e^{\mu D(1-\frac{1}{b})} - (\mu D)^2 e^{\mu D} Ei(-\frac{\mu D}{b}). \end{aligned} \quad (24)$$

Die Formeln (23) und (24) liefern für Z einen etwas kleineren Wert als Formel (16). Dies ist ohne weiteres verständlich, wenn man bedenkt, daß die Punkte der Platte, welche vom Zentralstrahl weiter entfernt sind, weniger Primärenergie erhalten, als die zentral gelegenen Punkte, und zwar relativ um so weniger, je tiefer sie liegen. Bei Ableitung der Formel (16) würde aber allen Punkten gleicher Schicht die gleiche Primärenergie beigelegt. Da die Funktion f bei einem gegebenen und festgehaltenen Wert des Parameters b für kleine μD annähernd proportional¹⁾ wächst, während bei größeren

1) Unter der Annahme kleiner Öffnungswinkel für den Streukegel ist $f(b, \mu D) = \delta \mu D$ (Gl. (16) und (18)) also $f(b, \mu D) - f(b, \alpha \mu D) = \frac{\delta \mu D - \delta \mu D \alpha}{1-\alpha} = \delta \mu D$, so-

mit $\frac{Z}{E_0} = e^{-\mu D} \cdot \frac{\delta}{2} \cdot s D$. Der gleiche Wert ergab sich

Argumentwerten μD das Wachstum von f viel kleiner ist, als es bei einer Proportionalität mit μD sein sollte, so sind die Resultate der Berechnung nach Gl. (16) bzw. (23) und (24) um so mehr verschieden, je größer μD ist.

Ist $\mu D = 1,5$ und $h=R$, also $\alpha=1$, so beträgt der Unterschied zwischen dem Resultat der Formeln (16) und (24) etwa 30 Proz., wenn der Öffnungswinkel Θ sehr groß ($\Theta=60^\circ$) angenommen wird.

VII. Anwendungen der Formeln bei Absorptionsmessungen.

Das Meßgerät, z. B. eine Ionisationskammer, befinde sich in P (Fig. 2) und ω sei der körperliche Winkel, unter dem der bestrahlte Teil der absorbierenden Schicht von der Mitte der Kammeröffnung aus gesehen wird, letztere als klein gegenüber von p vorausgesetzt, so daß ω auch für die Randpunkte der Kammeröffnung nahezu den gleichen Wert besitzt wie für den Mittelpunkt.

Ist Z die Energie der auf die Flächeneinheit der Kammeröffnung auffallenden zerstreuten Strahlung und E_0 diejenige der Primärstrahlen (gemessen beim Auftreffen auf die Flächeneinheit der absorbierenden Schicht), so lehrt die Näherungsgleichung (18)

$$\frac{Z}{E_0} = \frac{\omega}{4\pi} s \cdot D \cdot e^{-\mu D},$$

(Beschränkung auf kleine Werte von ω etwa

$$\frac{\omega}{2\pi} < 0,1, \text{ also } \Theta < 25^\circ),$$

1. daß bei gegebener Primärenergie E_0 die Stärke der zerstreuten Strahlung Z in P um so größer ist, je härter die Primärstrahlung ist¹⁾;

2) daß Z für eine homogene Primärstrahlung von gegebener Energie und Härte bei einer bestimmten Schichtdicke, nämlich $D = \frac{1}{\mu}$ einen maximalen Wert annimmt.

Bei Absorptionsmessungen ist in erster Linie das Verhältnis $\frac{Z}{E}$ von Interesse, E = Energie der Primärstrahlung, welche nach dem Durchgang durch die Schicht auf die Flächeneinheit der Ionisationskammer auffällt. Nun ist (Fig. 2)

$$E = E_0 e^{-\mu D} \frac{(A-h)^2}{A^2} \quad (25)$$

früher als Näherung für Streukegel von kleiner Öffnung aus der Hauptformel (16), welche Parallelität der Primärstrahlen zur Voraussetzung hatte.

1) Bei leichten Elementen ist $s = \text{const}$ für alle Wellenlängen, bei den Elementen höheren Atomgewichtes ist die Wellenlängenabhängigkeit von s schwach, so daß die Abnahme von s die Zunahme von $e^{-\mu D}$ mit wachsender Härte keinesfalls zu kompensieren vermag.

somit

$$\frac{Z}{E} = \frac{\omega}{4\pi} \cdot s \cdot D \cdot \frac{A^2}{(A-h)^2} \quad (26)$$

$A = \text{Fokusbildungsdistanz von } P.$

Wenn keine zerstreute Strahlung nach P gelangen würde, so berechnete sich der Schwächungskoeffizient μ der Primärstrahlung aus der Gleichung

$$E = E' e^{-\mu D}.$$

($E' = \text{Primärenergie nach Wegnahme der absorbierenden Schicht in gleicher Weise wie } E \text{ gemessen}$). Tatsächlich wird aber wegen der Streustrahlung in E nach Vorschalten der Schicht nicht E , sondern $E + Z$ gemessen.

$$\text{Aus} \quad E + Z = E' e^{-\mu_e D} \quad (27)$$

berechnet sich für den Schwächungskoeffizienten ein Wert μ_e , welcher zu dem wahren Wert μ in folgender Beziehung steht [vgl. (26)].

$$\mu - \mu_e = \frac{1}{D} \lg \left(1 + \frac{\omega \cdot s \cdot D}{4\pi} \cdot \frac{A^2}{(A-h)^2} \right) = K. \quad (28)$$

Da K für Strahlen verschiedener Härte nahezu gleich groß ist, wird der prozentuale Fehler bei der Bestimmung von μ um so größer, je kleiner μ ist (sehr harte Strahler, leichtatomige Elemente).

Bei einem Absorptionsvergleich zweier leichtatomiger Elemente ist es zweckmäßig, die Schichtdicken D_1 und D_2 so zu wählen, daß die durchstrahlten Massen gleich groß sind, d. h.

$$q_1 D_1 = q_2 D_2 \quad q_1 \text{ und } q_2 \text{ Dichte.}$$

Da $\frac{s}{q} = \text{const.}$ für leichte Elemente ist, so wird

nach Gl. (26)

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{s_1 D_1 E_1}{s_2 D_2 E_2} = \frac{q_1 D_1 E_1}{q_2 D_2 E_2} = \frac{E_1}{E_2}. \quad (29)$$

Das in P gemessene Energieverhältnis

$$\frac{Z_1 + E_1}{Z_2 + E_2}$$

ist dann direkt gleich dem ohne Wirkung der Streustrahlung vorhandenen Verhältnis $\frac{E_1}{E_2}$.

Der „Streufehler“ eliminiert sich also von selbst.

Läßt man die Beschränkung fallen, daß der Öffnungswinkel ω des Streukegels klein sein soll, so lautet der Korrektionsfaktor K in Gl. (28)

$$K = \frac{1}{D} \lg \left(1 + \frac{s}{2\mu} f(b, \mu D) \cdot \frac{A^2}{(A-h)^2} \right). \quad (30)$$

wobei $f(\mu D)$ gemäß Gl. (16) aus den Versuchsdaten zu berechnen ist. Ist das Primär-

strahlenbündel divergent, so tritt an die Stelle von $f(b, \mu D)$ in Gl. (30) der Ausdruck

$$\frac{f(b, \mu D) - f(b, \alpha \mu D)}{1 - \alpha},$$

wobei

$$\alpha = \frac{(A-h)^2}{h^2}$$

ist [vgl. Gl. (23)].

Bei Absorptionsmessungen im kurzwelligen Gebiet werden zumeist Bleifilter angewandt. Der Umstand, daß die harte K -Eigenstrahlung des Bleies von den Wellenlängen kleiner als $0,135 \cdot 10^{-8}$ cm stark angeregt wird — Hauptlinien des $Ra_{B+\delta}$ bei 0,10 und 0,16 $\cdot 10^{-8}$ cm — läßt die schweratomigen Elemente Pb , Hg usw. in dieser Hinsicht als wenig zweckmäßige Absorptionskörper erscheinen. Stoffe, deren K -Emissionsgebiet mehr im langwelligen Teile des Spektrums liegt (Cu , Zn , Ag) sind hierfür besser geeignet. Sie besitzen zwar den Nachteil, daß die erforderlichen größeren Schichtdicken eine Zunahme der zerstreuten Strahlung bedingen. Demgegenüber stellt aber die ungünstige spektrale Lage der selektiven Absorptionsstelle des Bleies und seiner Nachbarn entschieden das größere Übel dar, insofern sich diese nicht nur durch die Emission der Eigenstrahlung bemerkbar macht, sondern auch dadurch, daß die härtesten Spektralbezirke eines Strahlungsgemisches viel stärker absorbiert werden, als die unmittelbar benachbarten langwelligeren Bezirke. So kann eine γ -Strahlung, die härter ist als eine zweite Strahlung, bei Absorptionsmessung in Blei als die weniger durchdringungsfähige erscheinen. Rückschlüsse auf die Größe der Wellenlänge, welche auf Absorptionsmessungen in Blei beruhen, sind daher bei sehr harten Strahlen ($\lambda < 0,135 \cdot 10^{-8}$ cm) unzulässig.

Bei Absorptionsversuchen an γ -Strahlen ist häufig der Einfluß der Stellung der absorbierenden Schicht¹⁾ zwischen Strahlungsquelle und Ionisationskammer untersucht worden. Um wenigstens einen gewissen Überblick über die Wirkung eines solchen Stellungswechsels zu gewinnen, möge folgender Fall betrachtet werden:

Ist der Öffnungswinkel der Primärstrahlung und der Streustrahlung sehr klein, so gilt für das Verhältnis der zerstreuten Energie zu der direkt durchgegangenen Energie, beide in P gemessen (Fig. 2), die Gl. (26)

$$\frac{Z}{E} = \frac{\omega}{4\pi} \cdot s \cdot D \cdot \frac{A^2}{(A-h)^2}. \quad (31)$$

¹⁾ Keetmann, Ann. d. Phys. 52, 734, 1917; Brommer, diese Zeitschr. 13, 1037, 1912.

Nun ist

$$\frac{\omega}{2\pi} = 1 - \frac{h^2}{\sqrt{p^2 + h^2}} = \frac{p^2}{2h^2 + p^2}$$

genähert, wobei (Fig. 2) der Plattenradius p konstant gehalten und h variiert wird, also

$$\frac{Z}{E} = \frac{sD}{2} \frac{p^2}{2h^2 + p^2} \frac{A^2}{(A-h)^2} = \frac{sD}{2} \frac{p^2 A^2}{\varphi(h)} \quad (32)$$

Es ist $\varphi(h) = \max$ für $h = \frac{A}{2}$ (genähert).

also

$$\frac{Z}{E} = \min \text{ für } h = \frac{A}{2}. \quad (33)$$

* Wird die absorbierende Platte zwischen Strahlungsquelle und Meßgerät hin und her verschoben, so ist der Einfluß der Streustrahlung auf das Resultat der Absorptionsmessung in der Mittelstellung der Platte relativ am kleinsten.

Der Fall weitgeöffneter Primär- und Streukugel kann wegen der Kompliziertheit der Funktion $f(b, \mu D)$ Gl. (16) nicht allgemein diskutiert werden. Die Durchrechnung von Zahlenbeispielen zeigt aber, daß die eben aufgestellte Regel im großen und ganzen erhalten bleibt. Als sicher darf gelten, daß die Stellung der absorbierenden Platte nahe am Meßgerät oder nahe an der Strahlungsquelle bei Absorptionsmessungen weniger günstig ist, als die Mittelstellung¹⁾.

¹⁾ Vgl. hierzu Keetmann l. c. Der experimentelle Absorptionskoeffizient von Mesothorium γ -Strahlung erreicht bei Verschiebung der absorbierenden Zinkplatte seine kleinsten Werte nahe an der Strahlungsquelle und nahe an der Ionisationskammer, Streustrahlenwirkung!

(Eingegangen 25. März 1918.)

Die Lebensdauer von Radiothor, Mesothor und Thorium.

Von Lise Meitner.

1. Radiothor.

Über die Halbwertszeit des Radiothors liegen nur sehr spärliche Literaturangaben vor. Dadourian¹⁾ erwähnte in einer Arbeit über die Thoriumprodukte, daß die Halbwertszeit des Radiothors ungefähr den Wert von 2 Jahren haben müsse. Eine nähere Bestimmung wurde von G. A. Blanc²⁾ ausgeführt, der die

Abklingung eines Radiothorpräparates 281 Tage lang verfolgte und den Wert von 737 Tagen = 2,02 Jahren für die Halbwertszeit erhielt. Dieser Wert, dessen Richtigkeit der Größenordnung nach O. Hahn bestätigte, wurde allgemein als gültig angenommen, obwohl bei der verhältnismäßig kurzen Beobachtungsdauer, über die sich die Versuche erstreckt hatten, dem erhaltenen Werte keine sehr große Genauigkeit zukommen konnte.

Die von M. S. Leslie¹⁾ 6 Monate lang durchgeführte Messung der Abnahme eines Radiothor-Thoriumpräparates hatte einen ausschließlich orientierenden Charakter. Fril. Leslie hatte gemeint, aus der scheinbar zu geringen Aktivität eines von Mesothor befreiten Thoriumpräparates auf eine Lebensdauer des Radiothors von etwa drei Monaten schließen zu können und diesen Schluß in der genannten Arbeit überprüft und widerrufen.

Es schien daher nicht überflüssig, die Halbwertszeit des Radiothors durch Messungen über längere Zeiträume zu bestimmen und es wurden zu diesem Zweck im Jahre 1911 mehrere Präparate teils auf elektrolytischem Wege, teils durch chemische Abtrennungsmethoden hergestellt, die seit dieser Zeit regelmäßig auf ihre Abnahme untersucht worden sind. Bei allen erfolgte die Abnahme deutlich schneller als dem Werte von 2,02 Jahren entspricht. Da der Zweck der Untersuchung war, durch längere Meßdauer eine größere Genauigkeit zu erzielen, wurden die Resultate nicht früher veröffentlicht. Inzwischen sind zwei Abhandlungen erschienen, die sich mit der gleichen Frage befassen. St. Meyer und F. Paneth²⁾ haben die γ -Aktivität eines aus Mesothor abgetrennten Radiothoroxys 746 Tage lang gemessen und aus den direkt beobachteten Werten die Halbwertszeit T zu 1,90 bis 1,95 Jahren bestimmt. Da sich aber mit wachsender Beobachtungsdauer eine geringe Verlangsamung der Zerfallsgeschwindigkeit bemerkbar machte, wurde von den Verfassern eine Korrektur für beigemischte Mesothorspuren angebracht, die je nach der angenommenen Menge verunreinigenden Mesothors für die Halbwertszeit den Wert von 1,90 bzw. 1,85 Jahren ergab.

Kurz darauf veröffentlichte B. Walter³⁾ ähnliche Resultate. Aus den über 505 Tagen erstreckten Messungen berechnet der Verfasser für die Halbwertszeit den Wert von 685 Tagen = 1,876 Jahren. Da meine Messungen

¹⁾ M. S. Leslie, Le Radium 9, 276, 1912; 8, 356, 1911.

²⁾ St. Meyer u. F. Paneth, Wien. Ber. Abt. IIa 125, 1253, 1916.

³⁾ B. Walter, diese Zeitschr. 18, 584, 1917.

¹⁾ Dadourian, diese Zeitschr. 7, 453, 1906.

²⁾ G. A. Blanc, diese Zeitschr. 8, 321, 1907.

einen Zeitraum von fast 7 Jahren umfassen, so scheinen mir ihre Ergebnisse trotz der bereits vorliegenden zwei neueren Arbeiten nicht ohne Interesse.

Die Resultate der Untersuchung sind in den Kurven 1—6 der Fig. 1 wiedergegeben. Als Ordinaten sind die Logarithmen der Aktivität, als Abszissen die Zeiten in Tagen aufgetragen.

Die Präparate 1 und 2 wurden auf folgende Weise hergestellt. Ein ziemlich frisches Mesothorpräparat von etwa 12 mg Stärke wurde mit einer ganz geringen Menge Eisenchlorid versetzt und durch Zusatz von karbonatfreiem Ammoniak gefällt. Die Eisen-Radiothor-Fällung wurde zweimal umgefällt, um mitgerissenes Mesothor zu entfernen. Die dritte so erhaltene Fällung wurde in verdünnter Salzsäure gelöst und nach einer früher beschriebenen Methode¹⁾ elektrolysiert. Das Radiothor schlägt sich hierbei mit dem Eisen auf dem als Kathode dienenden, in unserem Fall etwa 1 cm langen und 1 mm dicken Silberdraht nieder. Da die Lösung jedenfalls nur Spuren von Mesothor enthalten konnte und außerdem Mesothor nach seinen chemischen Eigenschaften in salzsaurer Lösung nicht elektrolysiert ist, so sind die auf diese Weise erhaltenen Radiothorpräparate als sehr rein zu betrachten.

Die auf Aluminiumfolien montierten Silberdrähtchen wurden, um Störungen der Messungen durch emanieren zu verhindern, unter luftdicht verwachsenen Uhrgläsern eingeschlossen und in einem β -Strahlen-Elektroskop zur Messung gebracht.

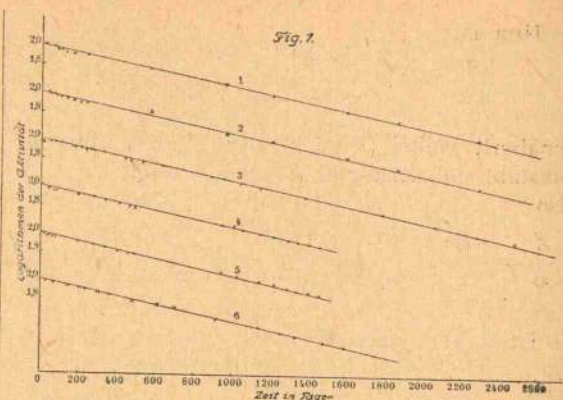
Die Präparate 3—6 wurden durch mehrmaliges sorgfältiges Abtrennen und Umfällen aus verschiedenen Mesothorpräparaten hergestellt. Präparat 3, das durch ca. 1 mm dickes Aluminiumblech abgeschlossen ist, wurde in einem β -Strahlen-Elektroskop gemessen.

Die Präparate 4 und 5 wurden mit je 0,02 mm Aluminium luftdicht verschlossen, so daß ihre α -Aktivität gemessen werden konnte.

Das Präparat 6 endlich wurde in ein dünnes Glasröhrchen eingeschmolzen und seine γ -Aktivität gleichzeitig mit einem Radiumstandard in einem γ -Elektroskop untersucht.

Zur Standardisierung der α - und β -Messungen dienten Uranstandards. Die Messungen wurden etwa vier Wochen nach der Herstellung der Präparate begonnen, so daß Thorium X schon in seiner Gleichgewichtsmenge vorhanden war.

Die Kurven zeigen einen durchaus geradlinigen Verlauf, ein Beweis, daß die Präparate sehr rein sind. Irgendein Unterschied der Ab-



klingung je nach der der Messung zugrunde gelegten Strahlenart ist nicht zu erkennen.

Aus den Kurven ergeben sich für die Halbwertszeiten des Radiothors die nachstehenden Werte.

Kurve	Halbwertszeit in Tagen
1	695
2	698
3	698
4	690
5	695
6	698

Als Mittelwert erhält man danach 696 Tage = 1,905 Jahre.

Ein gewisser Fehler könnte diesem Wert nach dadurch anhaften, daß die zur Herstellung des Radiothors benutzten Mesothorpräparate Radium enthielten und somit mit dem Radiothor auch etwas *RaD* abgetrennt wurde. Eine Übersichtsrechnung zeigt, daß dieser Umstand die Halbwertszeit des Radiothors höchstens um 1 Proz. fälschen konnte. Da den Messungen keine größere Genauigkeit als 1—2 Proz. zuzusprechen ist, so kommt dieser Fehler nicht in Betracht.

2. Mesothor 1.

Für die Halbwertszeit des Mesothor 1 liegen zwei Bestimmungen vor, eine von Mc Coy¹⁾ und eine von O. Hahn²⁾. Mc Coy beobachtete die Aktivitätsänderungen eines etwa 2 Jahre alten, von Mesothor befreiten Thoriumpräparates durch 1½ Jahre hindurch. Er extrapolierte aus den gefundenen Aktivitäten den Wert der Minimumaktivität und berechnete aus dieser, unter Zugrundelegung des G. A. Blancschen Wertes für die Zerfallskonstante

1) Mc Coy, Journ. Americ. Chem. Soc. 29, 1709 bis 1718, 1907.

2) O. Hahn, diese Zeitschr. 9, 392—404, 1908.

1) L. Meitner, diese Zeitschr. 12, 1094, 1911.

des Radiothors die Halbwertszeit des Mesothors zu 5,5 Jahren.

Der von Hahn eingeschlagene Weg zur Bestimmung der Lebensdauer des Mesothors gestattete, ohne über lange Zeitdauern Messungen vorzunehmen, gewissermaßen sofort den Wert der gesuchten Größe zu finden. Hahn untersuchte nämlich Thoriumpräparate von verschiedenem, aber bekanntem Alter unter vergleichbaren Bedingungen auf ihre Aktivität und schloß aus den erhaltenen Werten gleichfalls auf eine Halbwertszeit des Mesothors von 5,5 Jahren. Auch diesen Berechnungen lag der Wert von 2,02 Jahren für die Halbwertszeit des Radiothors zugrunde.

Da sich aus den Messungen der Abklingung des Radiothors schon nach 3 Jahren mit Sicherheit eine kürzere Halbwertszeit als 2,02 Jahre erkennen ließ, schloß ich, daß auch die Mesothorkonstante nicht den bisher geltenden Wert haben könne. Denn die zu groß angenommene Halbwertszeit des Radiothors mußte für die Halbwertszeit des Mesothors zu einem kleineren Wert als dem tatsächlichen führen.

Ich versuchte daher auch eine Neubestimmung der Halbwertszeit des Mesothors auszuführen.

Will man direkt die Abklingung des Mesothors messen, so bedarf es dazu eines radiumfreien Mesothors, das mit dem Radiothor in radioaktivem Gleichgewicht steht, also mindestens 10—15 Jahre alt ist. Da ein solches nicht zur Verfügung stand, wurde ein anderer Weg gewählt, nämlich die Nachbildung des Radiothors aus einem ursprünglich absolut radiothorfreien Mesothor zu verfolgen.

Die Nachbildung des Radiothors hängt von seiner eigenen Halbwertszeit und von der des Mesothors ab, und zwar ist die jeweilig vorhandene Radiothormenge, wenn zur Zeit Null kein Radiothor vorhanden war, durch die Gleichung bestimmt:

$$J = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

wobei λ_1 und λ_2 die Zerfallskonstanten von Mesothor bzw. Radiothor bedeuten. Da die Radiothorkonstante bekannt ist, so kann man durch Aufnahme der Anstiegskurve die Zerfallskonstante und damit die Halbwertszeit des Mesothors bestimmen.

Es ist zweckmäßig, zu diesen Untersuchungen möglichst radiumfreies Mesothor zu nehmen. Daher wurde ein aus Glühstrumpfasche hergestelltes, also radiumfreies, etwa drei Monate altes Mesothorpräparat verwendet, das die Firma Knöfler & Co. in Plötzensee in dankenswerter Weise zur Verfügung gestellt hatte. Das

Radiothor wurde durch dreimaliges Umkristallisieren im Laufe von 14 Tagen entfernt, während welcher Zeit auch das Thorium X praktisch vollständig zerfallen ist. Als Nullpunkt der Zeit wurde der Tag der letzten Umkristallisierung gewählt. Die letzte Umkristallisierung wurde eingedampft und der Eindampfrückstand in einem kleinen Glasröhrchen mit einem geeigneten Radiumstandard auf γ -Aktivitäten verglichen. Dann wurde das Mesothor wieder in Lösung gebracht und der Lösung für die verschiedenen Messungen definierte Mengen entnommen.

Um zu prüfen, wieviel Radium das zu verwendende Mesothorpräparat noch enthielt, wurde folgendermaßen verfahren.

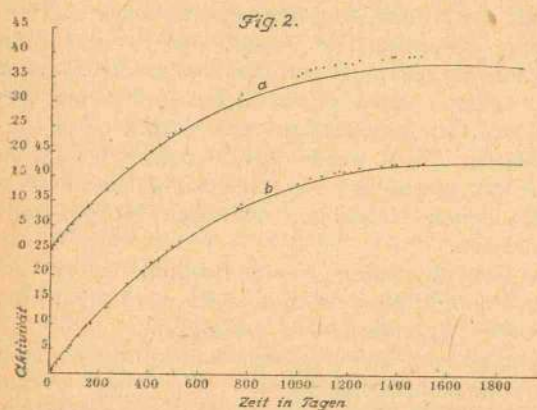
Aus zwei von der Reichsanstalt gemachten Radiumstandardlösungen, die pro 1 ccm $6,38 \cdot 10^{-5}$ mg bzw. $9,38 \cdot 10^{-5}$ mg Radium enthielten, wurden je 1 ccm entnommen und in einem Emanationselektroskop in der üblichen Weise auf Emanation geprüft. Es ergab sich, daß der Emanation von 10^{-6} mg Radium eine Aktivität von 79,45 willkürlichen Einheiten entsprach. Die gleiche Menge erzeugte, unter denselben Bedingungen wie die später verwendeten Mesothorpräparate gemessen, in einem α -Elektroskop die Aktivität 9,5 und in einem β -Elektroskop die Aktivität 0,28.

Nun wurde das Mesothor auf Radiumemanation geprüft und gefunden, daß in einem Präparat, das die β -Aktivität 138 besaß, sich eine Emanationsmenge entsprechend $3,93 \cdot 10^{-6}$ mg Radium nachweisen ließ. Diesem Radiumgehalt entspricht nach den obigen Messungen die β -Aktivität 1,1. Das Präparat enthält daher, an der β -Aktivität des Mesothors verglichen, 0,8 Proz. Radium. Wurden dem Vergleich γ -Messungen zugrunde gelegt, so ergab sich der Prozentsatz an Radium nur zu 0,62 Proz.

Für die endgültigen Messungen der durch Nachbildung des Radiothors anwachsenden α -Aktivität wurden kleinere Mengen desselben Mesothorpräparates verwendet, deren absoluter Radiumgehalt $3,74 \cdot 10^{-7}$ mg bzw. $7,43 \cdot 10^{-8}$ mg betrug. Die von diesem Radiumgehalt herrührende α -Aktivität war also 3,73 bzw. 0,743 und mußte von den gemessenen Aktivitäten in Abzug gebracht werden. Ferner mußten die gefundenen Werte auch auf die vom Mesothor 2 herrührende Aktivität korrigiert werden. Die Größe der insgesamt vorzunehmenden Korrektur wurde berechnet und dann an allen Messungen angebracht. Sie ergab sich zu 5,4 bzw. 3,36. Die für die Messungen dienenden Präparate waren auf Uhrgläsern eingedampft und mit 0,02 mm Aluminium luftdicht verschlossen.

Die Resultate einer der erhaltenen Versuchs-

reihen sind in Fig. 2 Kurve a wiedergegeben. Als Abszissen sind die Zeiten in Tagen, als Ordinaten die Aktivitäten aufgetragen.



Die glatt ausgezeichnete Kurve ist die für die Entstehung von Radiothor aus Mesothor unter der Voraussetzung berechnete Kurve, daß die Halbwertszeit des Mesothors 5,5 Jahre, die des Radiothors 1,9 Jahre beträgt. Man sieht, daß die gemessenen Werte nach etwa 2 Jahren eine merkbare Abweichung von der berechneten Kurve zeigen, die mit wachsender Zeit immer größer wird. Die gemessenen Werte liegen höher als die berechneten, was darauf hinweist, daß die Halbwertszeit des Mesothors größer sein muß als der der theoretischen Kurve zugrunde gelegte Wert. Daß die Abweichungen sich erst nach zwei Jahren deutlich merkbar machen, liegt einerseits daran, daß die Änderung der Mesothoraktivität innerhalb dieses Zeitraumes verhältnismäßig noch gering ist, andererseits aber auch an dem Umstand, daß bei der Umrechnung der experimentellen auf die theoretische Kurve die Werte nach 200 Tagen einander gleich gesetzt wurden.

Es wurden nun theoretische Kurven mit verschiedenen Halbwertszeiten für Mesothor berechnet und mit den experimentellen Kurven verglichen. Es zeigte sich, daß die beste Übereinstimmung für eine Halbwertszeit von 6,7 Jahren zu erreichen war. Für eine Halbwertszeit von 6,5 Jahren lagen die gemessenen Punkte noch etwas oberhalb der berechneten, für eine Halbwertszeit von 7 Jahren schon unterhalb der berechneten Kurve, und zwar waren im letzteren Fall die Abweichungen etwas stärker als im ersten Fall.

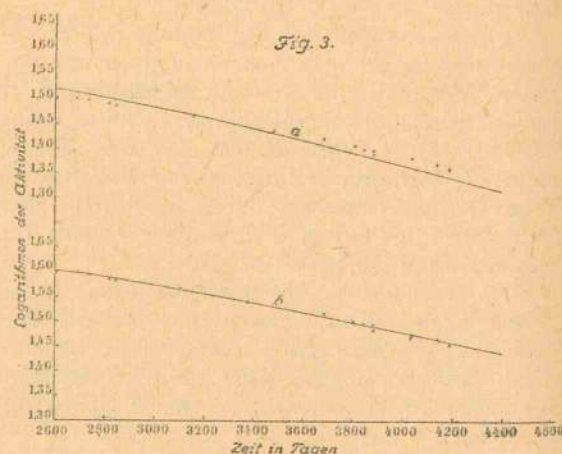
Die Kurve b der Fig. 2¹⁾ zeigt die theore-

¹⁾ Die lange Pause in den Messungen zwischen 500 und 1000 Tagen ist durch anderweitige Inanspruchnahme infolge des Krieges veranlaßt worden.

tische Kurve für eine Halbwertszeit des Mesothors von 6,7 Jahren mit den eingezeichneten experimentellen Werten. Man sieht, daß die Übereinstimmung zwischen den berechneten und den gemessenen Werten recht befriedigend ist.

Zur Kontrolle wurde noch ein zweites, mir von Herrn Prof. Hahn freundlichst überlassenes Mesothorpräparat untersucht, das aus dem Jahre 1906 stammt, jetzt also über 11 Jahre alt ist und zu Beginn der Messungen im Oktober 1913 über 7 Jahre alt war. Das Präparat war etwa im September 1906 technisch hergestellt worden, und zwar in der Weise, daß Thoriumlaugen mit NH_3 gefällt und im Filtrat nach Zugabe von Schwefelsäure mit Barium Bariumsulfat gefällt wurde. Es war demnach zu diesem Zeitpunkt radiothor- und radiumfreies Mesothor gewesen. Seine Aktivitätsänderungen seit Ende Oktober 1913 waren also mit der theoretischen Kurve für ein ursprünglich radiothorfreies Mesothorpräparat von 7,1 Jahren ab zu vergleichen.

Dieser Vergleich ist in den Kurven a und b der Fig. 3 gegeben.



Die ausgezogenen Kurven stellen die theoretische Mesothorabklingung zwischen 2600 und 4600 Tagen, und zwar Kurve a für eine Halbwertszeit von 5,5 Jahren, Kurve b für eine Halbwertszeit von 6,7 Jahren dar. Als Abszissen sind wieder die Zeiten in Tagen, als Ordinaten die Logarithmen der Aktivität aufgetragen.

In die theoretisch berechneten Kurven sind die gemessenen Werte eingezeichnet.

Man sieht, daß die Kurve a mit den experimentellen Werten nicht übereinstimmt und daß die Abweichungen im Sinne einer größeren Halbwertszeit des Mesothors erfolgen.

Die Kurve b dagegen steht mit den experi-

mentellen Befunden in sehr guter Übereinstimmung.

Die Halbwertszeit des Mesothors ist also mit 6,7 Jahren anzusetzen, welchem Wert eine Genauigkeit von 1—2 Proz. zuerkannt werden darf.

Die veränderten Halbwertszeiten von Radiothor und Mesothor bringen es mit sich, daß das Maximum der Aktivitätsstärke von Mesothorpräparaten zu einem etwas anderen Zeitpunkt eintritt als bisher angenommen wurde¹⁾.

Es berechnet sich für die α -Strahlung aus der Gleichung

$$\frac{dJ_t}{dt} = 0$$

also

$$\lambda_1 e^{-\lambda_1 T} = \lambda_2 e^{-\lambda_2 T}.$$

Setzt man für λ_1 den 6,7 Jahren Halbwertszeit entsprechenden Wert von $1,032 \cdot 10^{-1}$ Jahren, für λ_2 den 1,9 Jahren entsprechenden Wert von $3,64 \cdot 10^{-1}$ Jahren ein, so ergibt sich

$$T_{\max} = 4,83 \text{ Jahre.}$$

Ein ursprünglich radiothorfreies Mesothor erreicht also die maximale Aktivität seiner α -Strahlung nach 4,83 Jahren. Dieser Wert gilt auch für die technisch hergestellten Mesothorpräparate, denn deren Radiumgehalt beeinflusst wohl den absoluten Betrag der maximalen Aktivität und den zeitlichen Verlauf der Abklingung, nicht aber den Zeitpunkt der maximalen Strahlungsstärke.

Der angegebene Wert bezieht sich natürlich nur auf die α -Strahlung. Legt man den Messungen, wie es bei technischen Präparaten immer geschieht, die γ -Strahlung zugrunde, so ist zu berücksichtigen, daß, da Mesothor 2 eine starke γ -Strahlung besitzt, für die Aktivitätszunahme eines ursprünglich radiothorfreien Mesothors die Gleichung gilt:

$$J_t = J_0 e^{-\lambda_1 t} + k \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} J_0 (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

wobei J_0 die Aktivität zur Zeit Null und k die Beteiligung der γ -Strahlen des Radiothors und seiner Zerfallsprodukte im Verhältnis zu der des Mesothors bedeutet. Das Maximum wird durch die Gleichung bestimmt:

$$\lambda_2 e^{-\lambda_2 T} = \lambda_1 e^{-\lambda_1 T} \left[\frac{k+1}{k} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{1}{k} \right].$$

Wie O. Hahn gezeigt hat, sind die γ -Strahlen von Radiothor und Zerfallsprodukten bedeutend durchdringender, als die des Mesothors, so daß sich unter den gleichen Bedingungen die Radiothor- γ -Strahlen stärker geltend machen als die Mesothor- γ -Strahlen. Na-

türlich hängt dieses Verhältnis der Beteiligung wesentlich von der Versuchsanordnung ab¹⁾.

Die technischen Präparate werden bei ihrer Eichung in Radiumäquivalenten durch 0,5 cm Blei hindurchgemessen und für diese Anordnung wird nach St. Meyer und V. F. Hess²⁾ der Faktor $k = 1,513$.

Setzt man diesen Wert in die obige Gleichung ein, so erhält man

$$T_{\max} = 3,34 \text{ Jahre.}$$

Die γ -Strahlung des Mesothors erreicht also ihre größte Stärke 3,34 Jahre nach der Herstellung des Präparates, gleichgültig, ob das Mesothorpräparat radiumfrei oder radiumhaltig ist.

Aus den vorstehenden Messungen läßt sich auch noch ein ganz interessanter Vergleich über die relative Stärke der α - und γ -Strahlung von Radiothor und Radium gewinnen. Es wurde oben erwähnt, daß die α -Aktivität von 10^{-6} mg Radium unter den gleichen Bedingungen wie die Anstiegskurve des Radiothors gemessen, 9,5 betrug.

Aus den der Fig. 2 zugrunde liegenden Messungen berechnet man, daß, wenn zur Zeit Null das Mesothor im Gleichgewicht mit dem Radiothor gewesen wäre, dieses eine α -Aktivität von 1645 erzeugt, also dieselbe α -Wirkung wie

$$\frac{1645}{9,5} \cdot 10^{-6} \text{ mg} = 17,3 \cdot 10^{-5} \text{ mg}$$

Radium hervorgebracht hätte. Nun ist zu berücksichtigen, daß der Plattenabstand des Kondensators des α -Strahlenelektroskops keine volle Ausnützung der Reichweiten gestattet und daß die Präparate mit 0,02 mm Aluminium bedeckt waren. Dadurch wurde die α -Strahlenwirkung des Radiothors + Zerfallsprodukte im Vergleich zu der des Radiums + Zerfallsprodukte, wie sich aus weiter unten folgenden Berechnungen ergibt, im Verhältnis von 1,12:1 verstärkt. Die α -Aktivität des mit dem zur Messung verwendeten Mesothor im Gleichgewicht stehenden Radiothors ist also äquivalent der α -

$$\text{Wirkung von } \frac{17,3 \cdot 10^{-5}}{1,12} \text{ mg} = 15,4 \cdot 10^{-5} \text{ mg Ra-}$$

dium, vorausgesetzt, daß sie in einem α -Elektroskop gemessen wird, in dem alle Reichweiten vollständig ausgenutzt werden. Dieselbe Mesothormenge war nach γ -Strahlen-Messungen $6,32 \cdot 10^{-5}$ mg Radium äquivalent, und da, wie oben erwähnt wurde, sich die γ -Strahlung des Radiothors bei der zur Eichung verwendeten Meßanordnung 1,513 mal stärker beteiligt als die des Mesothors, so entsprach die Gleichgewichts-

1) O. Hahn, Strahlungstherapie 4, 154, 1914.

2) St. Meyer u. V. F. Hess, Wien. Ber. 123, 1959,

1914.

1) O. Hahn, Chem. Zeitg. 92, 845—849, 1914.

menge Radiothor in ihrer γ -Strahlenwirkung $1,513 \cdot 6,32 \cdot 10^{-5} \text{ mg} = 9,58 \cdot 10^{-5} \text{ mg}$ Radium. Dieselbe Radiothormenge, die die gleiche α -Strahlenwirkung wie $15,4 \cdot 10^{-5} \text{ mg}$ Radium erzeugt, sendet eine γ -Strahlung aus, die nur $9,58 \cdot 10^{-5} \text{ mg}$ Radium äquivalent ist.

Radium + Zerfallsprodukte hat also bei gleicher α -Aktivität eine 1,5 mal stärkere γ -Strahlung als Radiothor + Zerfallsprodukte, und eine 0,9 mal so starke γ -Strahlung als Radiothor + Mesothor im Gleichgewicht.

Ist dagegen nicht die α -Aktivität, sondern die Zahl der pro Sekunde von Radium bzw. Radiothor ausgesendeten α -Strahlen gleich groß, so ergibt sich ein anderes Verhältnis für die γ -Strahlenaktivitäten.

Nach den im folgenden Abschnitt ausgeführten Berechnungen ist für gleiche Zahl der vom Radiothor bzw. Radium ausgesendeten α -Strahlen bei voller Ausnützung aller Reichweiten die von Radiothor und seinen Zerfallsprodukten erzeugte Ionisation 1,324 mal größer als die von Radium und seinen Zerfallsprodukten. Daher ist die Radiothormenge, die die gleiche Zahl α -Teilchen emittiert, 1,324 mal größer als jene, die die gleiche α -Aktivität erzeugt, wie eine bestimmte Menge Radium.

Bei gleicher Zahl der ausgesendeten α -Strahlen ist daher auch die γ -Aktivität des Radiothor + Zerfallsprodukte 1,324 mal größer als bei gleicher α -Aktivität. Also ist bei gleicher Zahl der von Radium und Radiothor pro Sek. ausgesendeten α -Strahlen die γ -Aktivität des Radiums nur 1,13 mal stärker als die des Radiothors und 0,68 mal so stark wie die von $RdTh$ + $MsTh$ im Gleichgewicht.

3. Thorium.

Die Halbwertszeit des Thoriums ist mehrfach bestimmt worden. H. Geiger und E. Rutherford erhielten aus der Zählung der α -Teilchen von 1 g Thorium im Gleichgewicht mit seinen Zerfallsprodukten den Wert von $1,28 \cdot 10^{10}$ Jahren¹⁾. Aus Messungen des von den α -Strahlen erzeugten Stromes bestimmte Mc Coy²⁾ die Halbwertszeit zu $1,86 \cdot 10^{10}$ Jahren. B. Heiman³⁾ erhielt nach einer ähnlichen Methode den Wert $1,5 \cdot 10^{10}$ Jahren.

Die im nachfolgenden gegebene Bestimmung dieses Wertes will keinerlei Anspruch auf Genauigkeit erheben. Sie ist nur durch den gewählten Weg vielleicht von Interesse und soll deshalb kurz Erwähnung finden.

Frisch hergestelltes Thornitrat, das durch Glühen im Platintiegel in Thoroxyd umgewandelt worden war, wurde in gewogenen Mengen auf Aluminiumbleche aufgestrichen, und zwar wurden vier Präparate mit 27,5 mg, 10,65 mg, 3,35 mg und 2,7 mg Thoroxyd hergestellt. Die Präparate wurden mit 0,02 mm dicken Aluminiumfolien luftdicht abgeschlossen und im α -Elektroskop gemessen. Da 0,02 mm Al bei $15^\circ C$ und 760 mm Druck durchschnittlich 3,18 cm Luft äquivalent sind und die Reichweite der α -Strahlen des Thoriums 2,72 cm beträgt, so werden diese nicht mitgemessen. Die erzeugte Aktivität rührte also nur von den α -Strahlen des Radiothors und seiner Zerfallsprodukte her. Durch die Variation der Schichtdicken im Verhältnis von 1:10 konnte die zur Schichtdicke Null gehörige α -Aktivität extrapoliert werden. Es ergab sich, daß die mit 10 mg Thoroxyd im Gleichgewicht stehende Radiothormenge + Zerfallsprodukte in unendlich dünner Schicht die α -Aktivität 9,0 hervorruft.

Diese α -Aktivität sollte nun mit der α -Aktivität der oben erwähnten geeichten Radiumlösung verglichen werden.

Dabei war zu berücksichtigen, daß die von einem α -Teilchen erzeugte Ionenanzahl durch die Beziehung gegeben ist¹⁾:

$$N = k_0 R^{2/3},$$

wobei k_0 eine Konstante und R die Reichweite des α -Teilchens bedeutet.

Hat man nun ein Radium- und ein Radiothorpräparat von solcher Stärke, daß die Zahl der vom Radium bzw. Radiothor pro Sek. ausgesendeten α -Strahlen gleich ist, so verhalten sich die Wirkungen der α -Strahlen des Radiums + Zerfallsprodukte und des Radiothors + Zerfallsprodukte wie die Summen der $2/3$ Potenzen der Reichweiten der betreffenden α -Strahlen.

Im vorliegenden Falle war noch in Rechnung zu ziehen, daß erstens die Präparate mit 0,02 mm Al bedeckt und dadurch alle Reichweiten — bei $15^\circ C$ und 760 mm Druck gemessen — um durchschnittlich 3,18 cm verkürzt waren. Außerdem aber betrug der Plattenabstand in dem verwendeten α -Strahlenelektroskop nur 4,4 cm, wodurch die α -Strahlen des ThC'' nicht voll ausgenützt wurden. Berechnet man unter diesen Bedingungen das Verhältnis der Wirkungen der gleichen Zahl α -Strahlen des Radiums und des Radiothors, so erhält man dafür den Wert 1:1,48.

Eine bestimmte Zahl α -Strahlen des Radiothors + Zerfallsprodukte ruft also unter den hier eingehaltenen Bedingungen eine 1,48 mal

1) H. Geiger u. E. Rutherford, Phil. Mag. (6) 20, 691, 1910.

2) H. N. Mc Coy, Phys. Rev. I, 403, 1913.

3) B. Heiman, Wien. Ber. 123, 1369, 1914.

1) St. Meyer u. E. v. Schweidler, Radioaktivität S. 155, 1916.

größere Wirkung hervor, als die gleiche Zahl α -Strahlen des Radiums + Zerfallsprodukte.

Da nun die α -Aktivität von 10^{-6} mg Radium gleich 9,5, die von Radiothor im Gleichgewicht mit 10 mg Thoroxyd = 8,78 mg Thorium, gleich 9,0 gefunden worden war, so folgt unter Berücksichtigung des oben berechneten Verhältnisses der Ionisationen, daß 13,74 mg Thorium die gleiche Zahl α -Strahlen aussenden wie 10^{-6} mg Radium. Nun ist bekanntlich das Aussenden eines α -Teilchens mit dem Zerfall je eines Atoms verknüpft. Also zerfallen von 13,74 mg Thorium in der gleichen Zeit ebenso viele Atome wie von 10^{-6} mg Radium, folglich müssen sich die Halbwertszeiten von Thorium und Radium wie 13,74:10⁻⁶ verhalten, oder die Halbwertszeit des Thoriums ist

$$T = 2,37 \cdot 10^{10} \text{ Jahre.}$$

Dieser Wert ist etwas größer, als die oben angeführten. Immerhin liegt er aber den bisher gefundenen Werten so nahe, daß man in ihm eine Bestätigung dafür sehen kann, daß die gleiche Zahl α -Strahlen aussendenden Mengen zweier radioaktiver Substanzen, auch wenn sie nicht derselben Zerfallsreihe angehören, sich wie ihre Halbwertszeiten verhalten. Diese Beziehung ist verschiedentlich angezweifelt worden, obwohl sie nach dem Mechanismus des Zerfalls (Aussendung eines α -Strahles identisch mit dem Zerfall eines Atoms) zu erwarten ist.

Zusammenfassung.

1. Aus mehreren, über 7 Jahre fortgesetzten Versuchsreihen wird die Halbwertszeit des Radiothors zu 1,90 Jahren bestimmt.

2. Durch Messungen an radiumfreien, teils frischen, teils jetzt bereits 11 Jahre alten Mesothorpräparaten wird für Mesothor eine Halbwertszeit von 6,7 Jahren, statt des bisher angenommenen Wertes von 5,5 Jahren erhalten. Das Maximum der α -Aktivität tritt daher 4,83 Jahre, das der γ -Aktivität unter den üblichen Eichungsbedingungen 3,34 Jahre nach Herstellung der Präparate ein.

Bei gleicher α -Aktivität ist die γ -Strahlung des Radiums 1,5 mal stärker als die des Radiothors und 0,9 mal so stark wie die von Mesothor + Radiothor im Gleichgewicht.

3. Durch Vergleich mit Radiumstandardlösungen wird die Halbwertszeit des Thoriums zu $2,37 \cdot 10^{10}$ Jahren bestimmt und daraus gefolgert, daß die vorhandenen Mengen zweier gleich viel α -Strahlen aussendenden radioaktiver Substanzen, auch wenn sie nicht der gleichen Zerfallsreihe angehören, sich wie ihre Halbwertszeiten verhalten.

Anm. bei der Korrektur: In einer eben er-

schienenen Mitteilung von V. F. Hess und R. W. Lawson (Wien. Anz. 21. III. 1918, Mitt. Ra.-Inst. Nr. 105) wird die Lebensdauer des Radiums durch Zählung der pro Sek. von 1 g ausgesendeten α -Teilchen zu 1580 Jahren bestimmt. Legt man diesen Wert zugrunde, so berechnet sich die Halbwertszeit des Thoriums zu $2,16 \cdot 10^{10}$ Jahren.

Berlin-Dahlem, Kaiser-Wilhelm-Institut für Chemie.

(Eingegangen 25. März 1918.)

Untersuchungen über das kontinuierliche Röntgenspektrum. (Die Unabhängigkeit vom Antikathodenmetall.)

Von J. E. Lilienfeld.

Mit Tafel VI.

I. Einleitung.

Die von einer Röntgenröhre ausgesandte Strahlung wird allgemein als aus zwei Bestandteilen zusammengesetzt aufgefaßt: aus dem Eigenspektrum der Atome der Antikathode und aus dem Bremsstrahlenspektrum. Diese Einteilung enthält, wenn man sie prinzipiell verstehen will, als Einteilungsgrund die Bestimmung des Emissionszentrums der Strahlung. Sie wird auf jeden Unvoreingenommenen den Eindruck erwecken, als spräche man von den beiden Strahlungsarten je nachdem, ob das die Strahlung aussendende Elektron ein Atomelektron ist oder aber eines der Elektronen des Kathodenstrahlenbündels selbst. In der Tat ist das die ursprüngliche strenge Auffassung gewesen, wie sie z. B. den theoretischen Überlegungen über die Bremsstrahlung von W. Wien¹⁾ und Stark²⁾, aber auch denen von Sommerfeld³⁾ zugrunde lag.

Gegenwärtig haben sich aber die Begriffe merklich verschoben. Während man unter der Eigenstrahlung nach wie vor streng die mit dem Atomelektron verknüpfte, selektive Strahlung versteht, ist von verschiedener Seiten die Bremsstrahlung als ebenfalls in gewisser Weise mit dem Atomelektron verkoppelt hingestellt worden. Diese Wandlung ist infolge der neuesten Untersuchungen eingetreten, welche darauf hinzielen, einen Zusammenhang der Bremsstrahlung mit der Quantentheorie festzustellen. Die ersten, welche die Bremsstrahlung mit den Atomelektronen in Zusammenhang brachten, waren Rutherford und seine Mitarbeiter⁴⁾. Man findet einen Widerspruch ihrer Ansichten in den meisten darauf

folgenden Arbeiten, so z. B. bei Webster⁶⁾, wenn auch die experimentellen Resultate Rutherfords sich schon sehr bald nach ihrer Veröffentlichung als sehr ergänzungsbedürftig erwiesen haben. Es scheint sich dementsprechend gegenwärtig die Ansicht einbürgern zu wollen, als ob auch die Bremsstrahlung letzten Endes von einer Schwingung der Atomelektronen herrühre, indem das Kathodenstrahlelektron als solches nicht schwingungsfähig sei und die Bremsstrahlung erst dadurch entstehe, daß ein Kathodenstrahlelektron einem Atomelektron einen Anstoß gebe.

Diese Vorstellung enthält verschiedene Unklarheiten. Hier sei nur erwähnt, daß es nicht recht begreiflich ist, weshalb unter dieser Annahme eine kontinuierliche Bremsstrahlung, — also etwas ganz anderes als das selektive Eigenspektrum — entstehen sollte.

Das eine ist aber sicher: Der Einteilungsgrund in die beiden Strahlungsarten ist nunmehr nicht die Art des strahlungserregenden Elektrons, sondern man versteht schlechterdings unter der Eigenstrahlung die Linien des *M*-, *L*- und *K*-Spektrums, während unter der Bremsstrahlung einfach das kontinuierliche Spektrum verstanden wird. Ich glaube nicht, daß man sich allgemein bewußt ist, inwiefern hier allmählich eine Begriffsverschiebung Platz gegriffen hat. Die Umbildung der Begriffe ist aber doch bedeutsam; unterstellt sie doch z. B. stillschweigend, es sei von vornherein ausgeschlossen, daß die Eigenstrahlung irgendeinen Beitrag zur kontinuierlichen Aufhellung des Hintergrundes liefern könne. Andererseits ist es mit der neuen Begriffsbildung unvereinbar, daß die Bremsstrahlung an irgendeiner Stelle einen merklich diskontinuierlichen Verlauf nehme.

Im Laufe der letzten Jahre ist die Eigenstrahlung der Elemente aufs eingehendste untersucht worden. Die von ihr gewonnenen Kenntnisse bieten ein theoretisch einwandfrei zusammenhängendes Ganzes. Sehr viel anders verhält es sich mit dem zurzeit erheblich weniger betriebenen Studium der Bremsstrahlung. Ich habe vor Jahresfrist die in dieser Hinsicht bestehenden Unklarheiten in einer ausführlicheren Darstellung⁷⁾ hervorgehoben. Ich bin an jener Stelle besonders auf die älteren, vorwiegend theoretischen Arbeiten von W. Wien¹⁾, Stark²⁾ und Sommerfeld³⁾ eingegangen. Diese Arbeiten liegen allerdings mehrere Jahre zurück. Nichtsdestoweniger ist beispielsweise einer kürzlich — allerdings in einer populären Schrift — getanen Äußerung Sommerfelds⁴⁾ zu entnehmen, daß die Auffassung der Bremsstrahlung bei manchen

Autoren trotz den im folgenden Abschnitt besprochenen neueren Publikationen sich in der Zwischenzeit wenig geändert hat.

Aus allen diesen Gründen sei hinsichtlich der näheren Erörterung der bisherigen Kenntnisse und Ansichten auf meine erwähnte Darstellung verwiesen. Ich will aber dessen ungeachtet im folgenden wiederholt kurz zusammenfassend über die Ergebnisse einiger experimentellen Untersuchungen der letzten Jahre und die von den einzelnen Autoren gezogenen Schlüsse berichten. Im Anschluß daran sollen einige meiner früher ausführlich mitgeteilten Beobachtungen kurz gekennzeichnet und daraufhin einige neue Tatsachen beschrieben werden.

II. Experimentelle Untersuchungen und aus ihnen gezogene Folgerungen anderer Autoren.

Von Rutherford und seinen Mitarbeitern⁵⁾ wurde eine Coolidgeöhre mit Wolframantikathode benutzt und unter Einschaltung von Aluminium sowie von Blei in den Strahlengang der Absorptionskoeffizient gemessen. Es wurde unter anderem gefunden, daß die Impulsbreite der Strahlung von einem gewissen Grenzwerte der Elektronengeschwindigkeit an nicht mehr abnimmt: die kürzeste erzielbare Impulsbreite schien nicht merklich kürzer als die Wellenlänge der Wolfram-*K*-Strahlung zu sein. Das gab den ersten Anstoß zu der in der Einleitung erwähnten Idee, daß die Bremsstrahlung mit den Atomelektronen verkoppelt sei und von der *K*-Strahlung „kontrolliert“ werde. Die nähere Vorstellung war diejenige des vom Kathodenstrahlelektron aus einem Elektronenringe des Bohrschen Modells in den nächstfolgenden Ring geschleuderten Atomelektrons, wobei die Bremsstrahlung entstehen sollte. Eine ähnliche Auffassung kommt in jüngster Zeit bei Webster⁶⁾ vor.

Annähernd gleichzeitig mit der Rutherfordschen Arbeit wurde die Beobachtung von Duane und Hunt bekannt⁸⁾, daß die mit einer gegebenen Spannung erzielbare kürzeste Impulsbreite genau dem von der Quantentheorie verlangten Werte entspricht. Diese Verfasser arbeiteten mit spektraler Zerlegung der Strahlung. Für die von Rutherford benutzte Spannung würden sich auf Grund dieser Gesetzmäßigkeit bedeutend kürzere Wellenlängen ergeben haben (bis um 50 Proz. kürzer), als die von Rutherford tatsächlich gefundenen. Es schien also zwischen den beiden Untersuchungen ein Widerspruch zu bestehen. Kurz darauf wurden aber auch von de Broglie⁹⁾ und seinen Mitarbeitern¹⁰⁾ mit Hilfe der spektralen Zer-

legung erheblich kürzere Wellenlängen gefunden als die von Rutherford angegebenen. So klärte sich der erwähnte Widerspruch dahin auf, daß die spektrale Zerlegung härteste Komponenten geringer Teilintensität zu entdecken gestattet, die auf dem Wege der Absorptionsmethode der Beobachtung entgehen müssen, da sie eben zu wenig intensiv sind (vgl. Hull und Rice¹¹). Die Übereinstimmung mit der Quantentheorie wurde in noch weiteren Arbeiten bestätigt, so in denen von Hull¹², Webster¹³ und Hull und Rice¹¹). Auch meine gemeinsam mit H. Seemann¹⁴) angestellte Untersuchung hat das Vorhandensein äußerst kurzwelliger, wenn auch wenig intensiver Komponenten in der Röntgenstrahlung ergeben.

Im großen Ganzen schien — wenigstens für die praktischen Zwecke der Röntgentechnik — die von Rutherford vertretene Ansicht aber doch nach einer gewissen Abänderung ihrer Fassung zu Recht bestehen bleiben zu dürfen. Diese Abänderung wurde wohl zuerst von Ledoux-Lebard und Dauvillier¹⁰) vorgeschlagen; ihre Berechtigung wird besonders auch durch die von Hull und Rice¹¹) veröffentlichten Kurven erwiesen. Die abgeänderte Fassung lautet wie folgt: Es ist sehr wohl möglich, eine Röntgenstrahlung herzustellen, in welcher beliebig kurze Wellenlängen enthalten sind. Es ist aber nicht möglich, diesen hochfrequenten Strahlungskomponenten eine technisch ins Gewicht fallende Intensität zu verleihen, indem die Bremsstrahlung doch von der *K*-Strahlung des Spiegels kontrolliert wird und den bei weitem überragenden Teil der Intensität in solchen Wellenlängen abgibt, die nicht kürzer, meistens wohl aber länger sind als die *K*-Strahlung.

III. Früher veröffentlichte Untersuchungen des Verfassers und neue Beobachtungen.

Untersuchungen, die von mir in verschiedenen Richtungen vorgenommen worden waren, ließen jedoch vermuten, daß eine solche praktisch auf eine Begrenzung der Härte hinauslaufende Beherrschung der Bremsstrahlung durch die Eigen-*K*-Strahlung nur von irgendeinem Nebenumstand vorgetäuscht wird. Diese Vermutung verdankte ihr Entstehen hauptsächlich der Beobachtung⁷), daß die Verteilung der Intensität auf die einzelnen Wellenlängenbereiche der Strahlung nicht nur Funktion der Kathodenstrahengeschwindigkeit, sondern auch Funktion ihrer Dichte ist. Ich folgerte daraus, daß die Quantentheorie nicht auf die Bremsstrahlung angewandt werden könne, sondern sich

recht eigentlich auf die vom Atomelektron emittierte Strahlung zu beschränken habe.

Ich führte noch andere Beobachtungen an, welche darauf hinweisen, daß die Bremsstrahlung überhaupt nicht im Atomkraftfelde entstehe. So nannte ich als eine weitere wichtige Stütze für meine Anschauung das Vorhandensein einer sehr kräftigen Polarisation der Röntgenstrahlen, die durch eine **senkrecht** zur Richtung des Kathodenstrahles schwingende elektrische Komponente bedingt und symmetrisch um die Achse des Kathodenstrahlenbündels angeordnet ist*) [vgl.¹⁵) besonders die Tafel].

Eine einheitliche Auffassung des neuen Tatsachenkomplexes kann zurzeit noch nicht mit befriedigender Folgerichtigkeit gegeben werden. An dieser Stelle mag nur noch auf den Zusammenhang hingewiesen werden, der zwischen den angeführten Beobachtungen und denjenigen Erscheinungen besteht, welche mich vor über vier Jahren zu der Annahme einer elektrischen Doppelschicht im Brennflecke veranlaßten, und deren Kreis seit jener Zeit sich immer erweitert¹⁵) hat. Die oben gekennzeichneten Tatsachen hängen ersichtlich mit dieser Doppelschicht zusammen. In ihr ist aller Wahrscheinlichkeit nach der Entstehungsort der eigentlichen Bremsstrahlung zu suchen.

Bei der Verfolgung der Tatsachen schien es — unbekümmert um ihre theoretische Auslegung — von größtem Interesse zu sein, die an einer leichtatomigen Antikathode entstehende Röntgenstrahlung zu untersuchen. Und zwar in einer Röhre, in welcher das Kathodenstrahlenbündel möglichst sauber geführt ist, da bei Anwendung eines unvollkommen zentrierten Kathodenstrahlenbündels Erscheinungen, wie sie Rutherford⁵) beobachtet hatte, den wahren Sachverhalt trüben; Erscheinungen, die man an anderer Stelle⁷) eingehend erörtert findet.

Als Antikathodenmaterial wurde Molybdän gewählt. Von den Metallen niedrigen Atomgewichts ist es wegen seines hohen Schmelzpunktes und seiner sonstigen großen Festigkeit für die mit großen Elektronendichten anzustellenden Untersuchungen, also für hohe spezifische Belastung, besonders geeignet. Es ist auch sehr rein erhältlich. Seine *K*-Strahlung ist erheblich langwelliger als die Silberbandkante und wird von wenigen Millimetern Aluminiumfilter verschluckt. Es bleibt also ein recht ausgedehntes Spektralgebiet für die Beobachtung der Bremsstrahlung übrig.

*) Saubere Führung der Kathodenstrahlen — Parallelität im Bündel — sowie große Dichte der Kathodenstrahlelektronen ist Voraussetzung, um den Effekt zur vollen Ausbildung gedeihen zu lassen.

Gemäß den in Abschnitt II besprochenen Erfahrungen anderer Autoren stand zu erwarten, daß durchdringungsfähige Strahlen am Molybdän mit keiner nennenswerten Intensität erzeugt werden können. Jedoch das Gegenteil ergab sich bereits bei der oberflächlichen Betrachtung beliebiger Durchleuchtungsbilder am Schirme. Es konnten mit größter Intensität schwer durchzudringende Objekte jedenfalls nicht um ein Vielfaches schwieriger durchleuchtet werden, als bei den üblichen Schwermetallantikathoden.

Nichtsdestoweniger war von den unter II erörterten, in der Literatur vielfach vertretenen Gesichtspunkten aus ein ganz anderes Aussehen des eigentlichen Bremsstrahlenspektrums zu erwarten, als bei den Schwermetallen. Denn wenn die Bremsung — entsprechend den unter II dargestellten Anschauungen — im Felde der Atome des Atomschwarmes der Antikathode geschehen würde, so müßte sie von der Eigenart der Atome abhängen. Auf keinen Fall kann aber nach der üblichen Anschauung die Entstehung der Bremsstrahlung so gedacht werden, als ob die Bremsung an einer mathematischen Fläche stattfände*).

Auf der beigelegten Tafel VI findet man einige Spektralaufnahmen abgebildet. Sie sind mit dem Seemannschen Spektrographen¹⁶⁾ gemacht. Für die Überlassung eines fehlerfreien Kristalls sowie das den Aufnahmen entgegengebrachte Interesse spreche ich Herrn Seemann meinen Dank aus. Sämtliche hier wiedergegebenen Spektren wurden unter Zuhilfenahme eines Verstärkungsschirmes photographiert, um die Expositionszeiten abzukürzen und die Abnahme der Empfindlichkeit des Bromsilbers bei den kurzen Wellenlängen aufzuwiegen; somit auch einer Täuschung vorzubeugen, die übrigens eher im Sinne der unten zu vertretenden Auffassung liegen, als ihr entgegenwirken würde**).

) Wenn Sommerfeld) neuerdings vom Bremspektrum sagt: „seine Ausdehnung hängt von der Geschwindigkeit der $K\alpha$ Strahlen ab, die bei ihrem Aufprallen auf die Antikathode die Röntgenstrahlen erzeugen, und von der Art ihrer Bremsung bei Aufprall“, so ist in dieser letzten Feststellung die Abhängigkeit vom Antikathodenmaterial enthalten. Schwerlich damit vereinbar ist der unmittelbar anschließende Nachsatz: „Dagegen hängt das Linienspektrum von dem Material der Antikathode ab“.

**) Es wurden auch Kontrollaufnahmen ohne Verstärkungsschirm auf photographischen Films ausgeführt. In dem im Nachfolgenden zu besprechenden Wellenlängengebiete weichen diese Aufnahmen — abgesehen von einer Verlängerung der Expositionszeit ums Vielfache — nicht wesentlich von den mit Verstärkungsschirm gemachten ab. Der einzige auf den ersten Blick auffallende Unterschied ist die etwas größere Schärfe der Platin-Iridium- K -Linien auf den Aufnahmen ohne Verstärkungsschirm. Für die Beurteilung des Bremspektrums kommt der geringe Unterschied an Schärfe zunächst nicht in Frage. Man vergleiche hierzu die ohne Verstärkungsschirm gemachte Aufnahme bei Lilienfeld Seemann¹⁴⁾.

Als Strahlenquellen dienten zwei Röhren genau gleicher Bauart (Lilienfeld-Röhren), die sich nur durch das Antikathodenmaterial unterschieden. Die eine Röhre war mit Platin-Iridium-Spiegel versehen, die andere mit Molybdänspiegel. Die Röhren wurden im Falle der Spektren 1, 2 und 3 unter Einhaltung genau gleicher elektrischer Bedingungen mit Wechselstrom bei 29 cm Parallelschlagweite betrieben. Konstant gehalten während der Aufnahmen wird die an den Primärklemmen des Transformators gemessene Spannung. Die Hochspannung wurde nicht gleichgerichtet, vielmehr wurde der verkehrte Impuls durch die Ventilcharakter besitzende Röntgenröhre abgeschirmt („Silex“-Instrumentarium von Koch & Sterzel, Dresden). Die Belastung betrug 4 M.-A.

Beim Anblick des Spektrums mit der Platin-Iridium-Antikathode 1 gewinnt man allerdings den Eindruck, als ob die Bremsstrahlung tatsächlich im Gebiete der K -Strahlung aufhört. Die Hintergrundbeleuchtung geht an dieser Stelle auf einen Bruchteil ihrer ursprünglichen Intensität zurück, und zwar ganz sprunghaft (vgl. Lilienfeld und Seemann¹⁴⁾), um sich dann mit nur geringer Intensität nach den kürzeren Wellenlängen zu fortzusetzen: es scheint, als ob Bremsstrahlung und Eigenstrahlung in der Tat ursächlich miteinander verknüpft wären. Das unmittelbar unter dem Platin-Iridium-Spektrum wiedergegebene Spektrum 2 des Molybdänrohres belehrt aber eines anderen. Der intensive Teil der Bremsstrahlung bricht überraschenderweise im nämlichen Wellenlängenbereich ab, wie bei den Schwermetallen. Eine Eigenstrahlung ist bei Molybdän selbstverständlich an dieser Stelle nicht vorhanden.

Die dritte wiedergegebene Aufnahme, 3, ist ebenfalls mit dem Molybdänrohr gemacht, doch wurde in diesem Falle nicht das ganze Spektrum durchexponiert, sondern nur dasjenige Gebiet, in welchem die Bremsstrahlung unstetig abbricht; es fehlt also die Molybdän- K -Strahlung, die auf der zweiten Aufnahme sichtbar ist. Jedenfalls läßt die dritte Aufnahme das Phänomen noch deutlicher erkennen, als dies bei der zweiten der Fall ist.

Schließlich ist noch die Aufnahme 4 auf der Tafel reproduziert. Sie ist mit der gleichen Platin-Iridium-Röhre, aber unter von denjenigen der übrigen Aufnahmen abweichenden elektrischen Bedingungen gemacht, auf die ich in einer zukünftigen Publikation zurückzukommen gedenke. Diese Aufnahme ist mit bedeutend größerer Spaltbreite als die drei anderen hergestellt und weicht von ihnen hinsichtlich der Plattenschwärzung merklich ab. Deshalb ist sie

auf der Tafel gesondert wiedergegeben. Infolge rein äußerer Umstände ist es leider in absehbarer Zukunft nicht möglich, diese Aufnahme unter den gleichen Bedingungen wie die drei anderen herzustellen. Hier soll sie nur dazu dienen, um zu zeigen, daß es möglich ist, die Bremsstrahlungsbande ganz anders als in den anderen Spektrogrammen zu formen; insbesondere beiderseits der K -Strahlung gleiche Helligkeit des Hintergrundes zu erzeugen. Die Aufnahme hat hier nur zu bestätigen, daß der kontinuierliche Hintergrund Funktion der elektrischen Entladungsbedingungen ist. Die Möglichkeit, die scharfe Bandkante der Spektren 2, 3 und 4 festzustellen, ist demnach nicht zuletzt der sich über beliebig lange Zeiten erstreckenden Konstanz der Röhre zu verdanken.

Ist nun die Struktur (Intensitätsverteilung) des Bremsspektrums bei Platin-Iridium und bei Molybdän merklich dieselbe, so scheint auch seine Intensität in beiden Fällen keine großen Unterschiede aufzuweisen. Die Expositionszeiten für gleiche Schwärzungen gleicher Gebiete sind bei gleichen Versuchsbedingungen kaum voneinander verschieden. Doch sei dieses mit allem Vorbehalte erwähnt, da vorläufig auf die Einhaltung gleicher photographischer Bedingungen nicht streng geachtet wurde.

Die Molybdänaufnahme läßt es erkennen, daß die landläufige Auffassung, als ob es nicht möglich wäre, erhebliche Strahlungsintensitäten von einer geringeren Wellenlänge als die K -Strahlung zu erzeugen (vgl. Absatz II), auf einem Irrtum beruht. Der Irrtum ist teilweise durch eine zufällige Übereinstimmung gefördert worden. Nämlich durch die Tatsache, daß die höchste übliche Spannung der allgemein gebräuchlichen Wechselstrom-Instrumentarien aus rein äußerlichen Gründen den gleichen Wert zu haben pflegt. Sie entspricht etwa 30 cm Schlagweite zwischen Spitze und Platte und wird unter anderem auch deshalb eingehalten, weil dies die höchste Spannung ist, die sich bequem mechanisch gleichrichten läßt. Sie liegt aber auch gleichzeitig an der Grenze dessen, was man den gebräuchlichen Apparaten im Dauerbetriebe zumuten dürfte, ohne die Gefahr eines Defektes zu laufen. Es ist demnach reiner Zufall, wenn bei den hier veröffentlichten Aufnahmen die Bremsstrahlungsbandkante in das Gebiet der Platin-Iridium- K -Strahlung fällt. Meines Wissens haben allerdings frühere Beobachter eine in der abgebildeten Weise ausgeprägte Bremsstrahlungsbandkante nicht beobachtet. Die Angaben beschränken sich auf die Bemerkung, es sei nicht gut möglich, eine Strahlung von praktisch in Frage kommender Intensität bei einer die K -Strahlung übertreffenden

Härte herzustellen. Diese Unbestimmtheit liegt vermutlich zum Teil auch an der mangelhaften Zentrierung des Kathodenstrahles in den anderweitig verwandten Röhren⁷⁾.

Das Auftreten einer vom Eigenspektrum des Antikathodenmetalls unabhängigen Diskontinuität im Bremsstrahlungsspektrum widerspricht den Vorstellungen, die man sich auf Grund der Quantentheorie über die Intensitätsverteilung zu machen gewohnt ist.

So wurde Webster⁶⁾ durch den allgemeinen Charakter der bisher bekannten Röntgenspektren veranlaßt, eine Annahme vorzuschlagen, die eine noch gleichmäßigere Verteilung der Bremsstrahlungsintensität bedingen würde, als man sie von vornherein zu erwarten geneigt ist. Webster nimmt an, daß der Wahrscheinlichkeit, mit welcher ein Elektron bei wachsender Geschwindigkeit eine beliebige fest gegebene Wellenlänge zu erregen vermag, zunächst der Wert Null zukommt, solange wie das Elektron den von der Quantentheorie vorgeschriebenen Schwellenwert der Energie nicht besitzt. In dem Augenblicke aber, wo dieser Schwellenwert erreicht wird, springt die Wahrscheinlichkeit auf einen verhältnismäßig hohen Betrag, der gleichzeitig ihr Maximum darstellt. Denn mit weiter zunehmender Elektronengeschwindigkeit soll nach Webster die Wahrscheinlichkeit, daß die festgehaltene Wellenlänge erregt werde, nicht weiter wachsen, sondern im Gegenteil erst sehr schnell, dann aber langsamer abnehmen.

In der Websterschen Arbeit wird vorläufig die obige Annahme auf ihre Stichhaltigkeit nicht im einzelnen experimentell geprüft. Klar ist aber, daß, wenn daraus eine Formel abgeleitet werden würde, sie*) zu einer überaus stetigen Verteilung der Intensität im Bremsspektrum führen würde; allerdings zu einer unetig abbrechenden Bandkante nach dem hochfrequenten Ende des Spektrums zu.

Nun scheinen bisherige Beobachtungen^{8), 12), 13), 14)} eher dafür als dagegen zu sprechen, daß eine solche Bandkante, — wenn auch mit geringer Intensität, und wenn auch möglicher-

*) Immerhin ist zu beachten, daß bei der Aufstellung einer Formel große Unbestimmtheit walten und es praktisch ermöglichen würde, sich verschiedenartigsten Forderungen anzupassen [(7), S. 258]. Man muß annehmen, daß bei weitem die meisten Kathodenstrahlen erst im Metall einen Weg zurücklegen und dabei den größten Teil der Energie als Wärme abgeben, bevor der Rest der Energie als Röntgenimpuls ausgestrahlt wird. Spaltet man die Energie in solche zwei unkontrollierbaren Anteile, so wird man ganz verschiedene Theorien einem gegebenen Vorgang anpassen können. Eine Unabhängigkeit der Strahlung vom Antikathodenmaterial wird man aber gerade auf diesem Wege am allerwenigsten verständlich machen können.

weise¹⁴⁾ das Spektrum nach dem hochfrequenten Ende zu nicht mit ihr abschließt — so doch merklich an derjenigen Stelle vorhanden ist, an welcher sie auch von Webster der Quantentheorie gemäß verlangt wird. Um so weniger läßt sich die andere, bedeutend langwelligere, in den vorliegenden Aufnahmen wiedergegebene Bandkante des intensiven Teiles der Hintergrundbeleuchtung mit der üblichen Auffassung in Übereinstimmung bringen. Es sei denn, daß man sie unter gewissen Annahmen aus der Stromform abzuleiten suchen würde. Zu diesem Zwecke müßte die Entladung in der Röhre als aus einem kräftigen Stromstoß bei 65—70 Kilovolt und einem sehr viel schwächeren, bis an die volle Scheitelspannung [180 Kilovolt¹⁴⁾] heranreichenden bestehend angesehen werden. Einer solchen Annahme kommt aber keine große Wahrscheinlichkeit zu. Von ihrer näheren Erörterung mag an dieser Stelle abgesehen werden, da hier hauptsächlich auf die Unabhängigkeit der Bremsstrahlung vom Antikathodenmetall aufmerksam gemacht werden sollte.

Ein anderer Weg, sich von den Erscheinungen Rechenschaft zu geben, führt über die Annahme, daß, wie ich bereits in der Einleitung betonte, kontinuierlicher Hintergrund und Bremsstrahlung nicht schlechterdings einander gleichzusetzen sind. Daß vielmehr der kontinuierliche Hintergrund möglicherweise aus zwei Komponenten besteht: Erstens aus einem wenig intensiven, der Quantentheorie gehorchenden Anteile, der von den Atomelektronen etwa in einer Weise emittiert wird, wie sie von Rutherford und seinen Mitarbeitern zuerst erwogen wurde. Zweitens aber aus einem intensiveren Anteile, der sich über den ersterwähnten Teil überlagert und sowohl mit zunehmender Spannung als auch mit zunehmender Kathodenstrahlendichte sich nach dem hochfrequenten Ende des Spektrums verschiebt. Der zweite Anteil würde — genügend gleichmäßige Versuchsbedingungen vorausgesetzt — die aus den Aufnahmen vorliegender Publikation ersichtliche Bandkante ergeben. Dieser Teil der Strahlung würde ferner ebenso wenig der Quantentheorie unterstehen, als mit der Beschaffenheit der Atome der Antikathode etwas zu tun haben. Er wäre der Ursache und dem Orte seiner Entstehung nach so aufzufassen, wie das bereits in einer früheren Arbeit⁷⁾ von mir angegeben wurde. Ihrem allgemeinen Wesen nach würde aber die ganze Erscheinung in dasjenige Gebiet gehören, welches sich eröffnet, wenn die Elektronendichte im Raume über einen gewissen Schwellenwert hinaus gesteigert wird^{17), 18)}.

Offenbar muß, bevor man die Vorstellungen spezialisiert, eine Untersuchung angestellt werden, in welcher die Abhängigkeit der hier beschriebenen Bandkante von der Elektronengeschwindigkeit und Elektronendichte experimentell bestimmt wird. Wenn aber das Versuchsergebnis zunächst auf Grund eines recht beschränkten Tatsachenmaterials hier mitgeteilt wird, so liegt das an den Kriegsumständen. Man ist zurzeit auf einen glücklichen Zufall angewiesen, wenn auf einem technisch immerhin schwierig liegenden Gebiete auch nur wenig zahlreiche Versuche angestellt werden sollen, und man weiß niemals, ob und wann eine Untersuchung weiter fortgesetzt wird werden können.

Zusammenfassend mag noch einmal kurz erwähnt werden:

Erstens: Es ist möglich, Bremsstrahlungen großer Intensität auch in einem Gebiete solcher Wellenlängen zu erzeugen, welche sehr viel kürzer sind als die Eigen-K-Strahlung des Materials der Antikathode.

Zweitens: Der intensive Teil der Bremsstrahlungsbande bricht nach den kürzeren Wellenlängen zu an einer eigenen Grenze ab, während der weniger intensive Teil zunächst einmal scheinbar an der von der Quantentheorie verlangten Grenze einen Intensitätsabfall zeigt. Der weitere Verlauf des Spektrums nach dem hochfrequenten Ende zu bedarf¹⁴⁾ einer näheren Untersuchung.

Drittens: Die Intensität der gesamten Bremsstrahlung sowie ihre Intensitätsverteilung scheint sich mit dem Antikathodenmaterial wenig zu ändern. Daher ist es unwahrscheinlich, daß die „Abbremsung“ der Kathodenstrahlen im Atomfeld erfolgt. Außerdem ist es fraglich, ob das gesamte kontinuierliche Spektrum im Sinne der Einleitung zur vorliegenden Arbeit als Bremsstrahlung anzusprechen ist.

Die in dieser Arbeit wiedergegebenen Spektrogramme sind im Röntgenlaboratorium der Firma Koch & Sterzel, Dresden, aufgenommen worden.

Literaturverzeichnis.

- 1) W. Wien, Göttinger Nachrichten 1907.
- 2) Stark, diese Zeitschr. 8, 1907.
- 3) Sommerfeld, Münchn. Ber. 1911.
- 4) Sommerfeld, Zeitschr. d. Ver. deutscher Ingenieure 1917.
- 5) Rutherford, Barnes und Richardson, Phil. Mag. 30, 339, 1915.
- 6) Webster, Phys. Rev. 9, 220, 1917.

- 7) Lilienfeld, Ber. d. Königl. Sächs. Ges. zu Leipzig 69, 226—261, 1917.
 8) Duane und Hunt, Phys. Rev. 6, 166, 1915.
 9) De Broglie, C. R. 162, 596, 1916.
 10) Ledoux-Lebard und Dauvillier, C. R. 163, 754—757, 1916.
 11) Hull und Rice, Proc. of the Nation. Acad. of Sciences 2, 265, 1916.
 12) Hull, Phys. Rev. 1916.
 13) Webster, Phys. Rev. 1916.
 14) Lilienfeld und Seemann, diese Zeitschr. 19, 269, 1918.
 15) Lilienfeld, Ber. d. Königl. Sächs. Ges. zu Leipzig 69, 45—56, nebst Tafel, Jan. 1917.
 16) H. Seemann, diese Zeitschr. 18, 242—249, 1917.
 17) Lilienfeld, Ann. d. Phys. 32, 675—688, 1910.
 18) Lilienfeld, Ann. d. Phys. 43, 24—46, 1914.

Leipzig, Physikalisches Institut der Universität, März—April 1918.

(Eingegangen 3. April 1918.)

Photographische Aufnahme des Pt.- und Ir.-K-Spektrums.

Von J. E. Lilienfeld und H. Seemann.

Mit Tafel VII.

Im Röntgenlaboratorium der Firma Koch & Sterzel, Dresden, wurden mit Hilfe des von einem von uns bereits in dieser Zeitschrift veröffentlichten Lochkamera-Spektrographen¹⁾ Untersuchungen über das Spektrum der von den Lilienfeld-Röntgenröhren ausgesandten Röntgenstrahlung angestellt. Bei dieser Gelegenheit wurden die auf der anliegenden Tafel wiedergegebenen, unseres Wissens in dieser Form noch nicht bekannten K-Spektren des Pt und Ir gewonnen. Die Wellenlängen sind aus der folgenden Tabelle zu ersehen. In der ersten Kolonne findet man die aus den Zahlen von Ledoux-Lebard und Dauvillier²⁾ nach der Formel:

$$\lambda_{Pt \text{ bzw. } Ir} = \lambda_{W_0} \left(\frac{N_{W_0} - 1}{N_{Pt \text{ bzw. } Ir} - 1} \right)^2$$

extrapolierten Werte. Dabei ist zu beachten, daß im Original α_2 und α_1 verwechselt sind.

$\lambda \cdot 10^8$ extrapoliert	gemessen
$\beta_{2, Pt}$ 0,159	0,1593
$\beta_{1, Pt}$ 0,164	0,1642
$\beta_{2, Ir}$ 0,163 Mittel 0,1635	0,1684
$\beta_{1, Ir}$ 0,1683	0,1853
$\alpha_1 Pt$ 0,1842	0,1907
$\alpha_2 Pt$ 0,1912 Mittel 0,1904	0,1958
$\alpha_1 Ir$ 0,1895	
$\alpha_2 Ir$ 0,1962	

1) H. Seemann, diese Zeitschr. 18, 242—249, 1917. Spektrographen für die Lochkamera und Schneidenmethode werden für wiss. Institute auch jetzt im Kriege vom Mechaniker J. Wendel in Würzburg, Fleicherring 8, geliefert.

2) Ledoux-Lebard und Dauvillier, C. R. 163, 754—757, 1916.

Die obere Hälfte des als Positiv reproduzierten Spektrums ist heller als die untere. Diese Zweiteilung ist so entstanden, daß ein Aluminiumstreifen von 4 mm Stärke die untere Hälfte des Spektrums abdeckte. Wir verfolgten damit den Zweck, die Zunahme der Durchdringungsfähigkeit gegen das kurzwellige Ende des Spektrums zu veranschaulichen. Das ist nur unvollkommen gelungen; eine quantitative Bestimmung des Absorptionsexponenten durch ein Ausphotometrieren der Aufnahme scheiterte vorläufig daran, daß die Linien stark überexponiert werden müssen, wenn der Bandenhintergrund weit außerhalb der K-Serie nach den kürzeren, auf Bromsilber weniger intensiv einwirkenden Wellen zu genügend kräftig geschwärzt werden soll¹⁾. Sonst würde es Schwierigkeiten machen, den schwächeren Teil des Bandenhintergrundes vom allgemeinen Schleier zu unterscheiden. Die Schwärzung der Linien bleibt durch die Überexposition im Verhältnis zum normal belichteten Hintergrund hinter dem wahren Expositionswerte zurück und läßt sich außerdem mit dem Keil des Hartmannschen Mikrophotometers nur ungenau messen, beziehungsweise gar nicht, soweit sie über dessen Meßbereich hinausreicht. Abschwächen durch Ferrizyankalium-Abschwächer oder gar Ammoniumpersulfat führt auch zu keinem Ziel, da dadurch die Schwärzungsverhältnisse in unkontrollierbarer Weise verschoben werden. An der vorliegenden Aufnahme wurde allerdings eine solche Abschwächung vorgenommen.

Trotzdem mag der Vollständigkeit halber die Photometerkurve der auf Tafel VII reproduzierten Aufnahme des Spektralgebietes wiedergegeben werden (Fig. 1). Die ausgezogene Abszisse ist der Schwärzungswert des Schleiers. Von ihr aus ist also das Ordinatenverhältnis der beiden Kurven zu messen. Die untere Kurve zeigt den Schwärzungsverlauf der durch Absorption im Aluminiumblechstreifen geschwächten (im Positiv der Tafel VII), demnach dunkleren unteren Hälfte des Spektrums, die obere Kurve den der oberen Spektralhälfte.

Es wäre zu erwarten, daß die Schwächung, die durch das Ordinatenverhältnis beider Kurven dargestellt wird, nach kürzeren Wellen zu prozentual abnimmt. Wie man sieht, ist diese Gesetzmäßigkeit von dem gekennzeichneten

1) Unter Zuhilfenahme des bei Röntgenaufnahmen vielfach angewandten Verstärkungsschirmes (Calcium-Wolframat) läßt sich die Empfindlichkeitsabnahme der Platten im kurzwelligen Gebiet zwar kompensieren. Jedoch wird dadurch eine Einbuße an äußerster Bildschärfe bedingt. Deshalb ist bei der vorliegenden Aufnahme der Linienspektren von der Anwendung des Verstärkungsschirmes abgesehen worden.

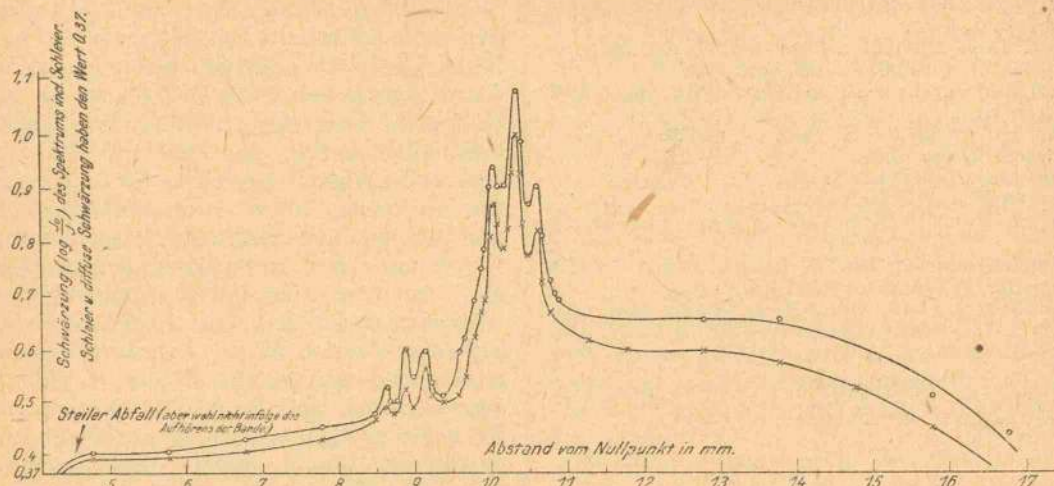


Fig. 1.

photographischen Effekt jedoch derart überlagert, daß sie kaum zu erkennen ist. Es ist vielmehr die prozentuale Schwächung der Schwärzung dort am geringsten, wo die absolute Schwärzung am größten ist, nämlich im Gebiete der Linien.

Da das Aluminiumblech ca. 6 cm von der Platte entfernt war, seine Eigenstrahlung und Streustrahlung also praktisch gleichmäßig auf beide Spektralhälften wirkte, ist die Deutung ausgeschlossen, daß diese Sekundärstrahlung das Bild der Schwärzungsverteilung im Sinne der Figur gefälscht hätte. Sie würde bei der getroffenen Anordnung vielmehr gerade die Unterschiede der am wenigsten geschwärzten Stellen am meisten ausgleichen. Tatsächlich äußert sie sich einfach als allgemeiner Schleier von ausreichend gleichmäßiger Verteilung, ist also in Fig. 1 in Abzug gebracht worden. Trotz der vorläufigen Schwierigkeiten scheint jedoch die angestrebte Bestimmung des Absorptionsexponenten bei weiterer Ausbildung des Verfahrens Aussicht auf Erfolg zu haben.

Der spektrographische Wert der Photometerkurven ist hauptsächlich darin zu erblicken, daß sie den starken Helligkeitsabfall im Gebiete der K -Strahlung nach kürzeren Wellen zu bei Platin und Iridium bestätigen, welchen man in früheren Arbeiten für das Wolfram bereits angedeutet findet, und zwar in der Fassung, es wäre nicht möglich, erhebliche Intensitäten von Strahlen zu erzeugen, die bedeutend härter wären als die K -Strahlung des Antikathodenmaterials. Das wird bei Wolfram von Ledoux-Lebard und Dauvillier (l.c.) zunächst einmal an Hand einer ganz allgemein schematischen Darstellung ohne Wiedergabe der näheren Messungsergebnisse behauptet, wäh-

rend in der Arbeit von Hull und Rice¹⁾ an Ergebnissen sehr genauer Messungen etwas Ähnliches zu erkennen ist. Schließlich folgt das Nämliche auch aus den in der Arbeit von Rutherford, Barnes und Richardson²⁾ mitgeteilten Beobachtungen. Während die genannten Autoren nach einer Erklärung für die Tatsache suchend an die Schwingung der Atom-elektronen anknüpfen, scheinen weitere im Gang befindliche Untersuchungen Lilienfelds hierüber zu einer wesentlich anderen Auffassung zu führen.

Auf dem Original-Negativ ist mit großer Deutlichkeit zu sehen, daß die Bremsstrahlungsbande weit über die K -Strahlung nach dem hochfrequenten Ende des Spektrums zu reicht; bedauerlicherweise ist das auf der Reproduktion nicht zum Vorschein gekommen. Die Schwärzung der Bremsstrahlungsbande fällt im weiteren Verlaufe ungefähr bei der Wellenlänge $0,073 \cdot 10^{-8}$ steil ab, so daß jedenfalls noch kürzere Wellen vorhanden sind. An dieser Stelle ist also die Wellenlänge erheblich kürzer, als diejenige der Radium- $C\gamma$ -Strahlung, die mit $0,1 \cdot 10^{-8}$ bis $0,09 \cdot 10^{-8}$ angegeben zu werden pflegt (vgl. z. B. Rutherford, Barnes und Richardson l.c.). Sie ist auch merklich kürzer als die kürzeste, bisher an Röntgenröhren beobachtete Wellenlänge, die mit $0,08 \cdot 10^{-8}$ von Hull und Rice l.c. angegeben wird. Es sei aber ausdrücklich hervorgehoben, daß über das weitere, an den erwähnten Intensitätsabfall nach höheren Frequenzen zu sich anschließende Gebiet an Hand der

1) Proc. Nat. Acad. Sciences 2, 265, 1916.

2) Rutherford, Barnes und Richardson, Phil. Mag. 30, 339, 1915.

vorliegenden Aufnahme noch nichts ausgesagt werden kann.

Die Röhre wurde mit vermittels einer rotierenden Scheibe gleichgerichtetem Wechselstrom betrieben. Die Spannung an der Röhre konnte leider nicht direkt gemessen werden; zur oberflächlichen Orientierung mag erwähnt werden, daß die Parallelfunkenstrecke 29 cm zwischen Spitze und Platte betrug. Aus dieser Angabe kann nicht mit Zuverlässigkeit auf die Größe der Spannung geschlossen werden, und es läßt sich nicht sagen, inwieweit der oben angegebene Intensitätsabfall der kurzwelligen Bremsstrahlung seiner Wellenlänge nach mit den Forderungen der Quantentheorie übereinstimmt. Es kann aber versucht werden, aus der mit einem Voltmeter gemessenen primären Klemmenspannung und dem Übersetzungsverhältnis des Transformators eine Schätzung vorzunehmen, obwohl das auch nur in recht unvollkommener Weise möglich ist.

Der mit einem geschlossenen, sehr gut koppelnden Eisenkern versehene Hochspannungstransformator, dessen Primärklemmen an das Städtetz angeschlossen sind, übersetzt auf eine sekundäre Effektivspannung von etwa 108 Kilovolt. Der Scheitelfaktor pflegt bei der von uns angewandten Schaltungsweise — den mir vom Transformatorenwerk der Firma Koch & Sterzel mitgeteilten Erfahrungen zufolge — meistens ganz erheblich den einer sinoidalen Stromform entsprechenden Wert von 1,4 zu

übersteigen; er wird dementsprechend von sachverständiger Seite auf 1,6—1,8 geschätzt. Wird der Mittelwert von 1,7 angenommen, so folgt eine Scheitelspannung von 183 Kilovolt. Andererseits ergibt sich aus der Quantentheorie für die Wellenlänge des Intensitätsabfalls $= 0,073 \cdot 10^{-8}$ ein zu ihrer Erregung erforderlicher Schwellenwert der Spannung von etwa 175 Kilovolt (vgl. Rutherford, Barnes und Richardson l.c.). Also eine Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung innerhalb der Fehlergrenzen.

Wenn auch trotzdem einerseits an Hand der angegebenen rohen Schätzung des Scheitelfaktors keineswegs auf eine Bestätigung der Quantentheorie geschlossen werden darf, so ist doch andererseits ersichtlich, daß zunächst ein Widerspruch zwischen unseren Aufnahmen und der Quantentheorie — allerdings nur sofern der mehrmals erwähnte Intensitätsabfall in Frage kommt — nicht festzustellen ist. Immerhin ist es aber beachtenswert, daß eine Strahlungskomponente vorhanden ist, welche ganz erheblich kurzwelliger ist, als es unter der Voraussetzung der Gültigkeit der Quantentheorie einem sinoidalen Verlaufe der Sekundärspannung entsprechen würde.

Leipzig, Physikalisches Institut der Universität.

Würzburg, Physikalisches Institut der Universität.

März 1918.

(Eingegangen 3. April 1918.)

BESPRECHUNGEN.

Carl Friedrich Gauß' Werke, zehnten Bandes erste Abteilung. Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 4^o. 586 S. nebst einer photographischen Nachbildung des „Tagebuches“. Leipzig, in Kommission bei B.G. Teubner. 1917. M 38.—, auf Schreibp. M. 46.—

Das Erscheinen eines neuen Bandes der Werke von C. F. Gauß ist ein Ereignis, welches, selbst wenn der Band nichts Physikalisches enthält, auch an dieser Stelle wenigstens kurz erwähnt werden muß. Ist doch ein großer Teil unserer heutigen Physiker auch mathematisch so ausgebildet, daß er die vielseitigen von Gauß behandelten Probleme mit Interesse verfolgen wird, und gewiß wird die Bücherei manches Physikers die ganze Reihe der neun bisher erschienenen Bände aufweisen. Nachdem die ersten sechs Bände der Reihe in rascher Folge von Prof. E. Schering, einem Schüler von Gauß, in den siebziger Jahren des vorigen Jahrhunderts der Öffentlichkeit übergeben worden waren, erlitt die Herausgabe eine längere Unterbrechung und sie wurde erst wieder intensiv gefördert, als Prof. Felix Klein die Leitung übernahm. Er gewann, der vielseitigen Betätigung von Gauß entsprechend, eine Reihe tüchtiger Mitarbeiter für die

Herausgabe des umfangreichen wissenschaftlichen Nachlasses; eine schwierige Aufgabe, da Gauß neben einer Anzahl sorgfältig geführter wissenschaftlicher Notizbücher eine Menge Berechnungen, Formeln und Bemerkungen auf losen Zetteln und auf den leeren Seiten von gedruckten Büchern hinterlassen hat, die wegen ihrer Kürze nur einem durchaus mit dem Gegenstande Vertrauten verständlich sind. Die Herausgeber erblickten ihre Aufgabe darin, alle die an diesen Stellen sowie auch in dem ausgedehnten Briefwechsel verstreuten Goldkörner zu sammeln, systematisch zu ordnen und mit Erläuterungen versehen der Allgemeinheit zugänglich zu machen. Das ist auch in dem vorliegenden Bande in musterhafter Weise gelungen. Eine außerordentliche Fülle von Einzelnotizen aus den Gebieten der Arithmetik, der Algebra, der Analysis und der Geometrie ist hier in übersichtlicher Weise geordnet und erklärt, so daß das Studium dieses Bandes eine ungewöhnliche Menge von Anregungen darbietet und interessante Einblicke in die erstaunliche Fruchtbarkeit des Gaußschen Schaffens gewährt. Eine ganz besonders wertvolle Beigabe hat der Band noch in der photographischen Reproduktion des von 1796 bis 1814 reichenden Tagebuches erhalten, in welchem Gauß seine rasch aufeinander folgenden mathematischen Entdeckungen mit dem jedesmaligen Datum eingetragen hat. Auch dem Tagebuch sind ausführliche Erläute-

rungen von den Herausgebern beigelegt. Letzteren aber — es waren in erster Linie die Herren Prof. Schlesinger (Gießen), in dessen Händen auch die Redaktion des ganzen Bandes lag, Prof. Bachmann (Weimar) und Prof. Stäckel (Heidelberg) — ist die wissenschaftliche Welt für ihre mühevollen Arbeit zu aufrichtigem Danke verbunden. Ebenso gebührt ungeteilte Anerkennung der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften sowie auch der Dieterichschen Universitätsbuchdruckerei in Göttingen, die trotz der stark gestiegenen Kosten mitten im Kriege die Fertigstellung dieses splendid gedruckten Werkes ermöglichten. Für den Physiker wird es von Interesse sein, daß sich auch der XI. Band, der den physikalischen Nachlaß enthält, bereits unter der Presse befindet. J. Hartmann.

F. M. Exner, Dynamische Meteorologie. gr. 8°. IX u. 308 S. mit 68 Figuren im Text. Leipzig, B. G. Teubner. 1917. M. 15.—, geb. M. 16.50.

Seit über 30 Jahren war kein Versuch gemacht worden, den derzeitigen Stand der theoretischen Meteorologie zusammenfassend darzustellen. Ein Buch von Prof. Exner, das diese Lücke ausfüllen will, wird daher von vornherein des hohen Interesses der physikalischen Meteorologen und meteorologisch interessierten Physiker sicher sein.

Die hochgespannten Erwartungen, mit denen diese Leser an das Buch herantreten, werden im allgemeinen sehr wohl erfüllt werden. Besonders zu begrüßen ist, daß die Arbeiten von Margules über den Ursprung der den Winden innewohnenden kinetischen Energie und über stationäre Strömungen in der Atmosphäre (7. und 8. Kap.) eingehend referiert werden. Man darf wohl hoffen, daß diese grundlegenden Abhandlungen nunmehr allgemein die ihrer Wichtigkeit entsprechende Beachtung, vor allem auch in Deutschland, finden werden. Im Kapitel über stationäre Strömungen ist auch eine wichtige, im ganzen wenig beachtete und im entgegengesetzten Falle vielfach mißverständliche Arbeit von Helmholtz über die stationäre Bewegung der Luft um die Erde in hervorragender klarer Weise referiert. Sehr gut ist auch das 9. Kapitel „Allgemeiner Kreislauf der Atmosphäre“ gelungen. In überzeugender Weise wird dort das Unzulängliche der bisherigen Theorien dargetan und die Richtung gezeigt, in der eine Weiterentwicklung versucht werden muß.

Gegenüber diesen großen Vorzügen kann man bedauern, daß der Ausdruck nicht immer so exakt ist, als man es in der neueren physikalischen Literatur gewöhnt ist, z. B. wenn es S. 87 von einer kreisförmigen Bewegung heißt: „Die Bewegung verläuft ohne Beschleunigung“. Indessen wird man diese und ähnliche kleine Mängel den erschwerten Verhältnissen zur Last legen müssen, unter denen das Buch entstand und die auch den Verf. verhinderten, seit Mitte 1915 die neuere Literatur zu verfolgen. Das bewirkt auch, daß das Buch leider schon heute nicht mehr ganz auf dem laufenden ist.

Sachlich wird man vor allem beanstanden, daß die schon wiederholt widerlegte Lehre, daß der „Sitz“ der Luftdruckänderungen in den hohen Schichten gesucht werden müsse, hier eine lehrbuchmäßige Sanktionierung gefunden hat. Im Anschluß an die dankenswerte Darlegung des Prinzips der geometrisch ähnlichen Bewegungen hätte man gern die Arbeiten von v. Kármán erwähnt gesehen, die den für die Meteorologie äußerst wichtigen Nachweis erbringen, daß die hydrodynamischen Gleichungen auch für den Fall der turbulenten Bewegung Gültigkeit haben. In den Abschnitten über Wellen wäre eine strengere Unterscheidung zwischen

den Wellen, die durch irgendeine Erschütterung an der Grenze ungleich dichter Medien entstehen und denen, die in der relativen Bewegung der beiden Medien ihre Ursache haben (das Helmholtz-Wiensche Problem) erwünscht gewesen. Auch eine schärfere Trennung der sicheren Ergebnisse der Forschung von den persönlichen Meinungsäußerungen des Verf. hätte dem Buche zum Nutzen gereicht. So wie es ist, erscheint es, zumal manche Entwicklungen etwas knapp gehalten sind, für den Lernenden weniger geeignet, als für den Forscher. Für diesen aber wird es auf Jahre hinaus ein unentbehrlicher Begleiter sein.

R. Wenger.

H. Bauer, Physik der Röntgenologie. Mit einem Vorwort von Prof. Dr. E. Kromeyer, herausgegeben von Ilse Bauer. 53 S. mit einem Bildnis. (Bibliothek der physikalisch-medizinischen Techniken, IX.) Berlin, H. Meußner. 1917. Geb. M. 3.—

Heinz Bauer hat sich in der Röntgentechnik nicht nur durch die von ihm konstruierten Röntgenröhren und den als „Bauerqualimeter“ bekannten Härtemesser einen Namen gemacht, seinem unermüdlischen Tatendrang entsprang auch der Gedanke, die Röntgentechnik in einer Anzahl Monographien darzustellen und damit dem Arzt, dem Physiker und Techniker die Möglichkeit zu geben, sich über einzelne Teile dieses Zwischengebietes der Medizin und Physik gründlich zu unterrichten. Als Bauer im Juni 1915 im Alter von 36 Jahren starb, lagen 8 Bände dieser „Bibliothek der physikalisch-medizinischen Techniken“ fertig vor. Er selbst hatte sich vorgenommen, die physikalischen Grundlagen der Röntgentechnik darzustellen. Die Aufzeichnungen, die sich bei seinem Tode voranden, hat seine Witwe in dem vorliegenden Bande herausgegeben. Sie sind naturgemäß unvollständig und undurchgesehen, werden aber seinen Freunden eine bleibende Erinnerung an den früh Verstorbenen sein.

P. Ludewig.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

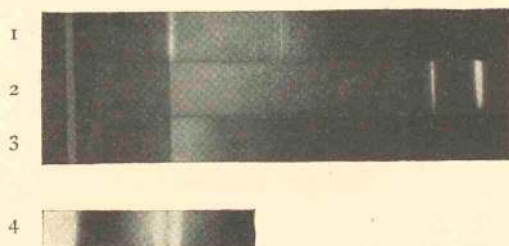
Habilitiert: An der Universität Freiburg i. Ue. (Schweiz) Dr. Fritz R. v. Hauer für Physik (mit Titel professeur agrégé).

Abgelehnte Berufung: Der ord. Professor für Geophysik und Geodäsie an der Universität Göttingen Geh. Regierungsrat Dr. Emil Wiechert wird dem (19., 176, 1918) gemeldeten Ruf an die Universität Berlin nicht Folge leisten.

Verliehen: Dem ord. Professor der Chemie an der Universität Straßburg Dr. Friedrich Rose der Titel Geh. Regierungsrat, dem ord. Professor der anorganischen und analytischen Chemie an der Bergakademie Freiberg i. S. Dr. O. Brunck der Titel Geh. Bergrat, dem a. o. Professor der chemischen Technologie an der Deutschen Technischen Hochschule Brünn Dr. Benjamin Max Margosches der Titel und Rang als ord. Professor.

In den Ruhestand: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Tübingen Dr. Alexander v. Brill.

Gestorben: Der Physiker, langjährige Mitarbeiter an der Physikalischen Zeitschrift Dr. Max Iklé in Berlin-Zehlendorf, der ord. Honorarprofessor für Meteorologie an der Universität Gießen Geh. Oberregierungsrat Dr. Richard Assmann, der frühere Professor für Chemie an der Forstakademie in Hannoversch-Münden und Begründer der Sulfidstoffindustrie Dr. Alexander Mitscherlich in Freiburg i. Br.



Staats- u. Universitäts-
Bibliothek Hamburg

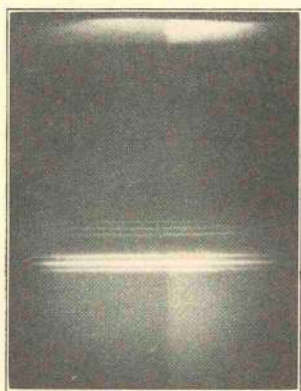


Fig. 2.

Staats- u. Universitäts-
Bibliothek Hamburg

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 13.

1. Juli 1918.

Redaktionsschluß für No. 15 am 26. Juni 1918.

19. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

B. Walter, Über die Ermittlung der zeitlichen Aufeinanderfolge zusammengehöriger Blitze sowie über ein bemerkenswertes Beispiel dieser Art von Entladungen. S. 273.

J. Parankiewicz, Ein neuerlicher Beweis für die Gültigkeit der Cunningham'schen Korrektur des Sto-

kesschen Widerstandsgesetzes. S. 280.

K. Fehrle, Über den Zusammenhang zwischen den Atomgewichten der chemischen Elemente, dem spezifischen Gewicht und der Wärmetönung. S. 281.

Zusammenfassende Bearbeitungen:

O. Deutschland, Über die An-

ordnung der Fixsterne im Raum. S. 286.

Besprechungen:

F. Kühnen, Das Mittelwasser der Ostsee und der Nordsee. S. 296.

Tagesereignisse. S. 296.

Personalien. S. 296.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die Ermittlung der zeitlichen Aufeinanderfolge zusammengehöriger Blitze sowie über ein bemerkenswertes Beispiel dieser Art von Entladungen.

Von B. Walter.

Mit Tafel VIII.

Als zusammengehörige Blitze habe ich solche Blitze bezeichnet, welche zwar in räumlich vollkommen selbständigen Bahnen verlaufen, zwischen denen aber doch ein bestimmter elektrischer Zusammenhang besteht¹⁾. Daß es nämlich derartige Blitze tatsächlich gibt, hatte ich a. a. O. schon daraus geschlossen, daß man fast bei jedem größeren Gewitter Entladungen beobachten könne, die zwar räumlich vollkommen getrennt voneinander verlaufen, zeitlich aber doch in so kurzem Zwischenraum aufeinander folgen, daß der Beobachter sofort auf den Gedanken kommen muß, daß die eine von ihnen durch die andere ausgelöst wurde, wie es ja auch aus elektrischen Gründen nicht unwahrscheinlich ist²⁾.

Solche Blitze, deren Zusammengehörigkeit sich schon durch direkte Beobachtung feststellen läßt, treten nun allerdings meist an ziemlich weit voneinander entfernten Stellen des Himmels auf, so daß sich die Ermittlung ihres zeitlichen Zusammenhangs durch das weiter unten zu beschreibende, 1910 von mir zuerst benutzte Verfahren ziemlich schwierig gestaltet und mir auch bisher nur in einem Falle gelungen ist³⁾. Dagegen ergab sich bei meinen daraufhin gerichteten Bemühungen unerwarteterweise noch eine andere Art der Zusammengehörigkeit von Blitzen, die nämlich darin besteht, daß mehr oder weniger gleichzeitig mit einem starken, zur Erde gehenden Blitz von zahlreichen andern

Stellen derselben Wolke aus mehrere vom ersten vollkommen getrennt verlaufende kleinere Blitze ausgehen, von denen einige wohl ebenfalls die Erde erreichen, die meisten aber nur aus frei in der Luft endigenden Büschelentladungen bestehen, so daß es sich also bei ihnen nach der früher von mir gegebenen Aufklärung über die Entstehungsweise der Blitzbahn sozusagen nur um Vorentladungen mehr oder weniger fertig gewordener Blitze handelt. Ein recht bezeichnendes Beispiel einer solchen Gruppe zusammengehöriger Blitze konnte ich schon 1910 a. a. O. veröffentlichen; ein zweites, noch lehrreicherer Beispiel dieser Art soll ferner hier beschrieben werden, nachdem zuvor noch die Theorie des von mir zur Ermittlung des zeitlichen Zusammenhangs derartiger Entladungen benutzten Verfahrens gegeben worden ist.

Dasselbe besteht darin, eine solche Gruppe zusammengehöriger Blitze zugleich mit zwei photographischen Apparaten aufzunehmen, von denen der eine fest aufgestellt ist, während der andere durch ein Uhrwerk mit bekannter Geschwindigkeit gedreht wird, wie ich dies zuerst in dieser Zeitschrift 3, 168, 1902 beschrieben habe. Es ist nämlich klar, daß der Zeitabstand zweier räumlich vollkommen getrennt voneinander verlaufender Entladungen niemals durch eine Aufnahme allein ermittelt werden kann, auch wenn diese mit bewegter Kamera gemacht wurde; denn auch die bewegte Platte gibt uns nur über den Zusammenhang der Vorgänge in einer und derselben Blitzbahn, nicht aber über den in zwei vollständig getrennten Bahnen Auskunft. Ein solcher Zusammenhang ist dagegen leicht zu ermitteln, wenn man die beiden Blitze sowohl mit einer ruhenden als auch mit einer mit bekannter Geschwindigkeit und um eine passende Achse gedrehten Kamera eingefangen hat.

Die Theorie des Verfahrens gestaltet sich besonders einfach, wenn die optische Achse OS' (Fig. 1) der gedrehten Kamera bei ihrer Dre-

1) B. Walter, Jahrb. d. Hamb. wiss. Anst. Bd. 27, Beiheft 5, 1910.

2) Siehe darüber B. Walter, Jahrb. d. Hamb. wiss. Anst. Bd. 20, 1902 und Ann. d. Phys. 10, 393, 1903.

3) B. Walter, diese Zeitschr. 13, 1082, 1912.

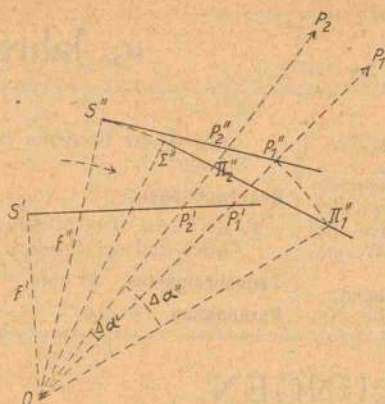


Fig. 1.

hung mit der der feststehenden OS' stets in derselben Ebene bleibt, und wenn man auch in den erhaltenen Bildern nur solche Punkte P_1 und P_2 der beiden fraglichen Blitze in Betracht zieht, welche ebenfalls in der genannten Ebene lagen. Denken wir uns nämlich in unserer Figur die Objektive der beiden Apparate in O zusammenfallend und ferner, um die lästige Bildumkehrung, die ja bei der photographischen Abbildung stattfindet, zu umgehen, statt der hinter O im Abstände der Brennweiten stehenden photographischen Platten vor O in denselben Abständen, d. h. also in den Entfernungen $OS' = f'$ und $OS'' = f''$, die Positivabdrücke davon aufgestellt (ausgezogene Linien), so werden zunächst P_1' und P_2' die Bilder der beiden Punkte P_1 und P_2 in der feststehenden Kamera darstellen. Nennen wir ferner $S'P_1' = x_1'$; $S'P_2' = x_2'$, $\angle S'OP_1' = \alpha_1'$ und $\angle S'OP_2' = \alpha_2'$, so wird

$$\Delta\alpha' = \alpha_1' - \alpha_2' = \arctg \frac{x_1'}{f'} - \arctg \frac{x_2'}{f'}, \quad (1')$$

Die Größe $\Delta\alpha'$ stellt nun den Winkel dar, unter welchem die beiden Punkte P_1 und P_2 von dem Aufnahmeorte aus erscheinen; und dieser Winkel ergibt sich aus der Lage der beiden Bildpunkte P_1' und P_2' des feststehenden Apparates stets in derselben Größe, gleichviel ob die beiden Blitze gleichzeitig oder nacheinander stattfanden. Anders dagegen verhält es sich in dieser Beziehung mit der Abbildung der beiden Punkte P_1 und P_2 in der bewegten Kamera; denn wenn OS'' und OS' die Lagen der optischen Achse der letzteren in den beiden Augenblicken darstellen, wo bzw. die durch P_1 und P_2 gehenden Blitze stattfanden, so wird das Bild von P_1 in dieser Kamera nach P_1'' , das von P_2 dagegen nicht nach P_2'' , sondern nach II_2'' fallen, da sich ja die Bildebene inzwischen von $S''P_1''$ nach $S''II_1''$ gedreht hat. Bezeichnen

wir daher auch hier wie in der feststehenden Kamera die Koordinaten $S''II_1''$ und $S''II_2''$ der beiden Bildpunkte II_1'' und II_2'' der bewegten Platte bzw. mit x_1'' und x_2'' und die zugehörigen Objektivwinkel $\angle S''OII_1''$ und $\angle S''OII_2''$ bzw. mit α_1'' und α_2'' , so daß also auch hier

$$\Delta\alpha'' = \alpha_1'' - \alpha_2'' = \arctg \frac{x_1''}{f''} - \arctg \frac{x_2''}{f''} \quad (1'')$$

wird, so wird jetzt $\Delta\alpha''$ nicht mehr den Winkel darstellen, unter welchem die beiden Punkte P_1 und P_2 vom Aufnahmeorte aus erscheinen, d. h. nicht mehr gleich $\Delta\alpha'$ sein, sondern wie die Fig. 1 zeigt, um den $\angle P_1''OII_1'' = S''O\Sigma''$, um welchen die Kamera sich in der Zeit Δt zwischen dem Auftreten der beiden Blitze gedreht hat, größer. Nennen wir also w die Winkelgeschwindigkeit der Kamera, so ist $\Delta\alpha'' = \Delta\alpha' + w\Delta t$ und mithin

$$\Delta t = \frac{\Delta\alpha'' - \Delta\alpha'}{w} \quad (2)$$

Die hier abgeleiteten Formeln gelten für jeden beliebigen Abstand der beiden Blitze P_1 und P_2 , und sie sind daher viel allgemeiner als die 1910 von mir a. a. O. gegebenen, die nämlich nur für sehr nahe beieinanderliegende Entladungen gültig waren. Hinsichtlich des Vorzeichens von Δt sei noch bemerkt, daß in dem Falle, wo die Drehung der bewegten Kamera im Sinne des in die Fig. 1 eingezeichneten Pfeiles erfolgt, ein positiver Wert von Δt die Bedeutung hat, daß die links gelegene Entladung P_2 später erfolgte als P_1 . Dabei ist allerdings Voraussetzung, daß man die Größen x und α der Gleichungen 1 mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versieht, je nachdem sie in den Positivbildern der Fig. 1 rechts oder links von den optischen Achsen OS' bzw. OS'' liegen.

Ferner sei noch bemerkt, daß die obige Theorie auch den Fall zweier in derselben Bahnlinie zeitlich nacheinander erfolgender Teilentladungen eines Blitzes umfaßt; und zwar berechnet sich in diesem Falle, wo ja P_1 und P_2 zusammenfallen, d. h. $\Delta\alpha' = 0$ wird, das gesuchte Δt aus der Gleichung

$$\Delta t = \frac{\Delta\alpha''}{w}, \quad (2a)$$

so daß also dann lediglich das Bild der bewegten Kamera in Frage kommt.

Bevor wir nun aber die obige Theorie auf die bereits in der Einleitung angekündigte, in den Fig. 4 und 5 der Tafel VIII in 1,7 facher linearer Vergrößerung wiedergegebene Doppelaufnahme anwenden, sei zunächst noch hervor-

gehoben, daß die dabei benutzte Methode der gleichzeitigen Aufnahme einer Blitzerscheinung auf ruhender und bewegter Platte auch schon deswegen von Bedeutung ist, weil die beiden so gewonnenen Bilder, wie ja auch der Vergleich der beiden Tafelbilder zeigt, sich auf das glücklichste ergänzen, insofern das mit der feststehenden Kamera aufgenommene Bild mehr die örtlichen und das mit dem bewegten Apparat erhaltene mehr die zeitlichen Verhältnisse der Blitze kennen lehrt.

Bei unserem Beispiel erschen wir nun zunächst aus ersterem (Tafelfig. 4), daß hier aus der Gewitterwolke außer dem Hauptblitze noch eine große Zahl schwächerer Entladungen erfolgt ist, die zwar örtlich von ersterem vollkommen unabhängig verlaufen, zeitlich aber doch, wie wir sehen werden, mit ihm sämtlich in innigem Zusammenhang standen. Des einfacheren Ausdrucks wegen sind diese kleineren Blitze, soweit sie sich in beiden Aufnahmen wiederfinden, in den in den Textfiguren 2 und 3 gegebenen schematischen Nachzeichnungen des oberen Teiles der Tafelbilder durch arabische Ziffern gekennzeichnet, während die einzelnen Teilentladungen des Hauptblitzes in der Fig. 3 durch römische Zahlen unterschieden wurden.

In bezug auf diesen Hauptblitz zeigt nun zunächst das Bild der ruhenden Platte (Tafelfig. 4), daß er sich im oberen Teile seiner Bahnlinie in zwei Äste gegabelt hat, die beide bis zur Erde

hinabreichen, so daß wir also hier den übrigens nicht so selten vorkommenden Fall vor uns haben, daß die Wolke sich von derselben Ausgangsstelle aus nach zwei verschiedenen Stellen der Erdoberfläche hin in beiderseits sehr kräftigen Schlägen entladet. Hinsichtlich der Entstehungsweise einer solchen verzweigten Entladung verweise ich auf meine angeführten Abhandlungen in den Annalen Bd. 10 und im Hamb. Jahrbuch Bd. 20, an welcher letzterer Stelle übrigens auch schon ein Blitz dieser Art abgebildet wurde.

In unserem Fall zeigt nun ferner das Bild der bewegten Platte (Tafelfig. 5), daß die Entladungen der Wolke über die beiden Äste des Hauptblitzes — wie übrigens auch sonst stets — nicht gleichzeitig erfolgten, sondern nacheinander; und zwar hat bei unserem Blitz die Elektrizität zunächst den rechten Ast benutzt — der Verlauf der Zeit geht nämlich in der Fig. 5 von rechts nach links —, und es erfolgte ferner darnach auch über diesen Ast nur eine einzige, in der Textfig. 3 mit I bezeichnete Teilentladung, während die sämtlichen übrigen, in Fig. 3 mit II, III, ... bezeichneten Teilentladungen sich des linken Astes bedienten, wie aus der vollkommenen Übereinstimmung der Gestalt der Bahnlinien aller dieser Teilentladungen — untereinander sowohl wie auch mit der des linken Astes des ruhenden Bildes — hervorgeht. Der auf Grund der auf den Originalplatten gemessenen Größen x_1'' und x_2'' sowie der bekannten Werte von f'' und w nach den Gleichungen (1'') und (2a) berechnete Zeitunterschied Δt zwischen diesen einzelnen Teilentladungen ist in der Tabelle I angegeben, aus der also auch folgt, daß die ganze Entladung 0,556 Sekunden gedauert hat. Der bei einigen der Teilentladungen an der Nummer derselben angehängte Index a soll bedeuten, daß dann der Beginn der betr. Entladung gemeint ist.

Tabelle I.

Zeitabstände Δt der Teilentladungen des Hauptblitzes.

	I—II	II—III	III—IVa	IVa—Va	
$\Delta t =$	0,132	0,071	0,035	0,020	sec

	Va—VI	VI—VII	VII—VIII	
$\Delta t =$	0,235	0,054	0,011	sec

Bemerkenswert ist ferner die höchst abwechslungsreiche Art der Teilentladungen unseres Blitzes, insofern sich nämlich darunter sowohl solche von zeitlich sehr kurzem als auch solche von verhältnismäßig langdauern-

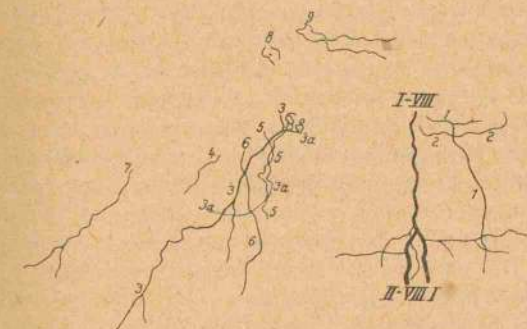


Fig. 2.

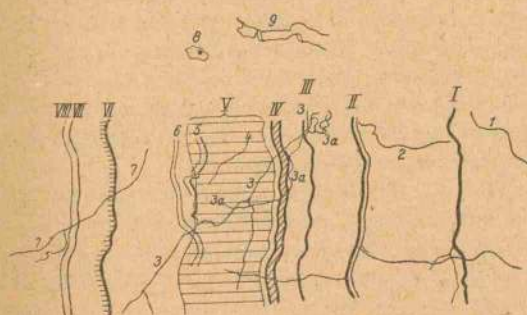


Fig. 3.

dem Verlauf befinden. Der erstere Typus wird durch die Entladungen I, II, III und VI, der letztere durch V dargestellt, während IV, die übrigens noch für sich wieder aus vier, deutlich voneinander getrennten Teilentladungen besteht, sowie auch VI, die sich ebenfalls aus zwei solchen zusammensetzt, und endlich auch VIII einen mittleren Typus vertreten.

Dieser vielgestaltige zeitliche Verlauf der Teilentladungen ist in der Hauptsache wohl durch einen entsprechenden Verlauf der Bildung der Elektrizität in der Wolke zu erklären; und in diesem Zusammenhange sei hier auch noch auf die kurze Entladungspause hingewiesen, welche man in der Tafelfig. 5 zwischen den Teilentladungen IV und V sieht, eine Pause, die sich auch schon in vielen meiner früheren Blitzaufnahmen zeigte und von mir als eine „Erschöpfungspause“ in der Bildung bzw. Nachlieferung der Wolkenelektrizität nach der Ausgangsstelle des Blitzes hin gedeutet wurde. Diese Auffassung erhält offenbar durch die jetzige Aufnahme noch eine besondere Bestätigung, insofern als die vier starken und schnell aufeinander folgenden Einzelentladungen der Teilentladung IV eine solche Erschöpfung sehr begreiflich erscheinen lassen. Die Dauer dieser Erschöpfungspause betrug hier 0,008 Sekunden.

Von der Landschaft, die ja in dem Bilde der ruhenden Platte klar und eindeutig hervortritt, zeigen sich die hervorstechendsten Teile — also vor allem der Kirchturm — auch in der bewegten Aufnahme, jedoch hier sämtlich in vierfacher Wiederholung. Dies erklärt sich natürlich so, daß hier nur die vier starken und zeitlich schroff abgerissenen Teilentladungen I, II, III und VI des Hauptblitzes ein deutliches Bild der Landschaft entwerfen konnten, und daß diese vier Bilder ferner, da sich ja die Platte inzwischen gedreht hatte, nach vier verschiedenen Stellen derselben hin fielen. Die Richtigkeit dieser Erklärung ergibt sich einfach daraus, daß sich der Zeitabstand der genannten Teilentladungen auch bis auf 0,001 Sekunden genau aus dem Abstand der betr. Kirchturmbilder ergibt.

Die Entfernung des Hauses, hinter dessen Dach der linke Ast des Hauptblitzes in den beiden Bildern verschwindet, und zu dem auch die in ihnen sichtbaren kleinen Schornsteine und die Telephonstange gehören, — vom Aufnahmeorte aus — betrug 117 m, die des über dem Dach sichtbaren Kirchturmes, der den rechten Ast des Hauptblitzes nach unten zu begrenzt, dagegen 860 m und die des in Tafelfig. 4 weiter rechts sichtbaren großen Fabrikschornsteins, der die unteren Teile des schwächeren, gleich-

falls zur Erde gegangenen Blitzes dieses Bildes z. T. verdeckt, 220 m. Die Entfernung der Blitze selbst endlich war eine viel größere, nämlich etwa 7 km, was sich hier deswegen feststellen ließ, weil die Blitze in diesem Falle außer mit der bewegten Kamera gleichzeitig mit zwei im Abstande von 2 m voneinander aufgestellten feststehenden Apparaten aufgenommen worden waren, eine Aufnahmemethode, die ich schon vor einiger Zeit zwecks gleichzeitiger örtlicher und zeitlicher Analyse der Erscheinungen vorgeschlagen habe¹⁾. Das zweite feststehende Bild ist hier nicht mit veröffentlicht, weil es sich von dem in Tafelfig. 4 wiedergegebenen in keiner wesentlichen Hinsicht unterscheidet. Aus der angegebenen Entfernung des Hauptblitzes in Verbindung mit der Brennweite der Objektive (17,7 cm) berechnet sich ferner die Höhe der Gewitterwolke, da ihr Abstand vom Horizont auf den Originalplatten etwa 4,5 cm betrug, zu rund 1,8 km.

Was nun aber den elektrischen Zusammenhang der zahlreichen kleineren Blitze unserer Erscheinung — sowohl untereinander als auch mit dem Hauptblitz derselben — angeht, so zeigt schon der bloße Vergleich der schematischen Zeichnungen 2 und 3 des Textes, daß man in dieser Hinsicht zwei Gruppen zu unterscheiden hat, von denen die eine die Blitze 1, 3, 3a, 4 und 7 und die andere die Entladungen 2, 5, 6, 8 und 9 umfaßt. Die einzelnen Blitze einer jeden dieser beiden Gruppen haben nämlich in beiden Figuren zueinander ungefähr die gleiche Lage, während diejenigen der letztgenannten Gruppe gegenüber denjenigen der andern in Fig. 3 — im Vergleich zu Fig. 2 — sämtlich um ein beträchtliches Stück nach links verschoben sind. Die Bedeutung dieser Tatsachen ist offenbar die, daß einesteils die Blitze einer jeden dieser beiden Gruppen unter sich annähernd gleichzeitig und andernteils diejenigen der Gruppe 2, 5, ... erheblich später aufgetreten sind als diejenigen der Gruppe 1, 3, ...

Betrachten wir ferner den zeitlichen Zusammenhang einer jeden dieser beiden Blitzgruppen mit dem Hauptblitz unserer Aufnahmen, so zeigt uns wieder schon der Vergleich der Textfiguren 2 und 3, daß die Blitze 1, 3, ... in Fig. 3 ungefähr dieselbe Lage zur ersten Teilentladung des Hauptblitzes haben, wie in Fig. 2 zu dem Gesamtbild aller Teilentladungen des letzteren, während die Blitze 2, 5, ... in Fig. 3 annähernd gleich zur zweiten Teilentladung des Hauptblitzes gelegen sind wie in Fig. 2 zu dem eben genannten Gesamtbild. Auch dies heißt nun offenbar wieder nichts anderes, als

1) B. Walter, diese Zeitschr. 13, 1082, 1912.

daß die Blitze 1, 3, ... sämtlich nahezu gleichzeitig mit der ersten und die Blitze 2, 5, ... sämtlich ungefähr gleichzeitig mit der zweiten Teilentladung des Hauptblitzes aufgetreten sein müssen.

Auf die Bedeutung aller dieser Tatsachen werden wir ferner durch die in der Tafelfig. 5 ebenfalls noch zu beobachtende Erscheinung hingewiesen, daß von allen Teilentladungen des Hauptblitzes nur die beiden ersten jene zahlreichen seitlichen Ausläufer haben, die, wie ich in meinen beiden angeführten Abhandlungen „Über die Entstehungsweise des Blitzes“ (Ann. 10 u. Hamb. Jahrb. 20) bewiesen habe, in innigem Zusammenhang mit der Ausbildung der Bahnlinie einer solchen Entladung stehen, und zwar genügt es hier, darauf hinzuweisen, daß sie gewissermaßen als ein Wahrzeichen der Schwierigkeiten angesehen werden können, welche die Elektrizität bei der Bildung dieser Bahnlinie zu überwinden hatte.

Auf die einzelnen Teilentladungen des Hauptblitzes unserer Aufnahmen angewandt, heißt dies also, daß solche Schwierigkeiten nur bei den ersten beiden derselben bestanden haben, und dies ist auch leicht verständlich; denn nur bei diesen beiden Teilentladungen hatte sich ja die Elektrizität den Weg von der Wolke zur Erde neu zu bahnen, während dieser Weg für die Teilentladungen III—VIII bereits vorhanden war. Mit andern Worten kann man dies auch so ausdrücken, daß die Elektrizität der Wolke bei jeder der beiden Teilentladungen I und II einen erheblich größeren Widerstand zu überwinden hatte als bei III—VIII. Je größer nun aber der Widerstand eines solchen Entladungsweges, eine um so höhere Spannung ist erforderlich, um die Entladung über diesen Weg einzuleiten — man vergleiche in dieser Hinsicht z. B. den Unterschied zwischen einer harten und einer weichen Röntgenröhre —; und so kommen wir also zu dem Ergebnis, daß die Spannung der Gewitterwolke beim Auftreten der beiden Teilentladungen I und II jedesmal eine ganz erheblich viel höhere gewesen sein muß als bei den Entladungen III—VIII.

Diese höhere Spannung der Wolke erklärt es uns nun aber weiter auch, daß von den hier zur Erörterung stehenden kleinen Blitzen unserer Aufnahmen zwar wohl der eine Teil nahezu gleichzeitig mit der Teilentladung I und der andere Teil auch ungefähr gleichzeitig mit der Teilentladung II des Hauptblitzes, keiner aber zugleich mit den späteren Teilentladungen desselben stattfand; denn nur bei den ersteren beiden erreichte die Spannung der Gewitterwolke eine solche Höhe, daß sie nicht bloß in der Richtung des ja noch nicht fertigen Weges

des Hauptblitzes, sondern auch nach vielen andern Seiten hin Blitze sprühte — grade so wie bei einer harten Röntgenröhre die zu ihrem Betriebe nötige hohe Spannung sich nicht bloß an ihren beiden Polen, sondern auch an der ganzen mit ihnen in Verbindung stehenden Drahtleitung durch starke Büschelentladungen bemerkbar macht.

Daraus ergibt sich dann aber weiter, daß das ganze Gebiet der Gewitterwolke, aus welchem alle diese kleinen und großen Blitze hervorgingen, in elektrischer Hinsicht eine einzige zusammenhängende und gut leitende Masse bildete, und zwar betrug die horizontale Ausdehnung dieser Masse sicher mehr als 1 km; denn schon der Abstand des kleinen Blitzes 7 von der Ausgangsstelle des Hauptblitzes betrug 800 bis 900 m, und es ist sehr wahrscheinlich, daß auch der in Tafelfig. 4 rechts neben letzterem sichtbare schwächere, gleichfalls zur Erde gegangene Blitz mit zu einer der beiden oben beschriebenen Gruppen der kleineren Blitze unserer Erscheinung gehörte, wenn dies hier allerdings auch deswegen nicht sicher bewiesen werden kann, weil er ja in der bewegten Kamera über den Rand der Platte hinaus gefallen ist.

Ein solches zeitliches Zusammenfallen mehrerer kleinerer, aber vollkommen selbständiger Blitze mit der „Anfangsentladung“ eines starken ist übrigens, wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, bereits i. J. 1910 von mir bei dem einen der a. a. O. veröffentlichten vier Paare von Doppelaufnahmen dieser Art nachgewiesen worden; während aber dort diese Erscheinung — entsprechend der einfacheren Beschaffenheit des Entladungsweges des Hauptblitzes — nur einmal, d. h. eben nur bei der Ausbildung der einen Bahnlinie desselben auftrat, haben wir es hier — wegen der zweimaligen Ausbildung eines solchen Weges für jeden der beiden Äste unseres Hauptblitzes — auch mit einem zweimaligen Auftreten der Erscheinung zu tun. Ja, genau genommen können wir hier sogar von einem dreimaligen Sprühen der Wolke reden, da nämlich die Teilentladung II des Hauptblitzes sowie auch die zu ihr gehörigen kleinen Blitze 5, 6 und 9 auf der bewegten Platte deutlich als doppelt, d. h. als je aus zwei, in sehr kurzen Zeitabständen aufeinander folgenden Entladungsstößen bestehend, erkannt werden können. Bei der Teilentladung II selbst handelt es sich nämlich hierbei um die in Tafelfig. 5 rechts neben ihrem oberen Teile deutlich sichtbare „Vorentladung“, während bezüglich der Verdoppelung der kleinen Blitze 5, 6 und 9 auf die schematische Nachzeichnung derselben in der Textfig. 3 verwiesen werden muß, da diese schwachen Blitze bei der Reproduktion in der

Tafelfig. 5 kaum deutlich genug werden dürften. Bemerkenswert ist dabei allerdings, daß die Zeitabstände der beiden Stöße dieser vier Entladungen nur der Größenordnung nach, nicht aber vollkommen genau übereinstimmen; denn dieser Abstand betrug bei der Teilentladung II 0,0055 Sekunden und bei den Blitzen 5, 6 und 9 bzw. 0,0078, 0,0055 und 0,0043 Sekunden, Unterschiede, die nicht etwa auf Messungsfehler zurückgeführt werden können, da nämlich bei jeder der in Rede stehenden Entladungen ihre beiden Stöße auf der bewegten Platte dicht nebeneinander verlaufen und sich daher ihr Zeitunterschied mit einer viel größeren Genauigkeit bestimmen läßt als z. B. derjenige zwischen je einem der kleinen Blitze unserer Aufnahmen und der zugehörigen Teilentladung des großen.

Außer den genannten Unterschieden in den Zeitabständen zwischen ihren beiden Teilentladungen besteht übrigens ein weiterer Unterschied der drei kleinen Doppelblitze 5, 6 und 9 auch noch darin, daß bei 5 die erste Teilentladung erheblich kräftiger war als die zweite, während bei 6 und 9 beide Teilentladungen annähernd gleiche Stärke hatten.

Was sodann die Ermittlung der genaueren Zeitunterschiede zwischen den einzelnen Blitzen unserer jetzigen Aufnahmen angeht, so wurden zu diesem Zweck zunächst von den beiden Originalplatten mehrere Abdrücke auf Diapositivplatten gemacht, um an diesen die dazu nötigen Messungen anzustellen. Hierzu wurden in die Abdrücke zunächst die horizontale und die vertikale Mittellinie der Originalplatte eingezeichnet, um danach die x -Koordinaten der Bildpunkte P_1' , P_2' , Π_1'' und Π_2'' der Fig. 1 ermitteln zu können. Von diesen Koordinaten wurde die eine in jeder Platte einfach mit Hilfe eines gewöhnlichen Maßstabes bis auf 0,1 mm, ihr Unterschied von der andern dagegen mit Hilfe eines Zeißschen Längenkomparators bis auf 0,001 mm genau gemessen, und zwar wurden dabei von den fraglichen beiden Blitzen möglichst solche Punkte herangezogen, die auf einer Parallelen zur horizontalen Mittellinie der Platte lagen, und die ferner auch dem oberen Ende der Blitze möglichst nahe waren. Dies letztere nämlich deshalb, um damit den der Fig. 1 zugrunde liegenden Voraussetzungen unserer Gleichungen (1) so nahe wie möglich zu kommen; denn die horizontale Mittellinie der Platte, für welche ja jene Voraussetzungen eigentlich nur Gültigkeit haben, verlief in beiden Platten einige Millimeter oberhalb der obersten Enden der Blitze.

Als Beispiel seien hier zwei Messungsreihen zur Bestimmung des Zeitunterschiedes zwischen

dem kleinen Blitz 3 und der Teilentladung I des Hauptblitzes angegeben. Die Punkte P_1 und P_2 der Fig. 1 bedeuten dann bzw. Punkte der Entladungen I und 3; und für ein bestimmtes, in der genannten Weise gelegenes Punktepaar dieser Blitze ergaben sich nun in dem Bilde der feststehenden Kamera die Koordinaten $x_1' = -0,96$ cm; $x_2' = -2,1041$ cm und in dem der bewegten $x_1'' = 8,21$ cm; $x_2'' = 6,8693$ cm. Da ferner die Brennweite beider Apparate $f' = f'' = 17,7$ cm war, so wird mithin $\alpha_1' = -3^\circ 6,27'$; $\alpha_2' = -6^\circ 46,76'$; $\alpha_1'' = 24^\circ 53,03'$ und $\alpha_2'' = 21^\circ 12,66'$, also $\Delta\alpha' = 3^\circ 40,49'$; $\Delta\alpha'' = 3^\circ 40,37'$ und $\Delta\alpha' - \Delta\alpha'' = -0,12'$. Da ferner die Winkelgeschwindigkeit der bewegten Kamera $w = 15,6$ Grad/sec betrug, so ergibt sich schließlich $\Delta t = -0,00013$ sec, d. h. der Blitz 3 ist hiernach 0,00013 sec vor der Teilentladung I aufgetreten.

Eine zweite Messungsreihe an zwei anderen Punkten der beiden Entladungen ergab: $x_1' = -1,01$; $x_2' = -1,9280$ cm, also $\alpha_1' = -3^\circ 15,95'$; $\alpha_2' = -6^\circ 13,00'$ und $\Delta\alpha' = 2^\circ 57,05'$; $x_1'' = 8,14$ cm; $x_2'' = 7,0561$ cm; also $\alpha_1'' = 24^\circ 41,82'$; $\alpha_2'' = 21^\circ 44,11'$ und $\Delta\alpha'' = 2^\circ 57,71'$. Demnach wird diesmal $\Delta\alpha' - \Delta\alpha'' = +0,66'$ und $\Delta t = +0,00070$ Sekunden, d. h. der Blitz 3 ist hiernach 0,00070 Sekunden nach der Teilentladung I erfolgt. Zwei weitere derartige Messungsreihen an noch anderen Punktepaaren der beiden Entladungen ergaben für Δt die Werte $-0,00032$ und $+0,00022$ Sekunden, so daß das Mittel aller vier Werte einen Zeitunterschied von $+0,00012$ Sekunden ergibt. Dieser liegt ganz innerhalb der Grenze der Messungsfehler, so daß wir also die beiden Entladungen 3 und I für unsere Analyse als vollkommen gleichzeitig ansehen können.

Die in dieser Weise gefundenen Zeitunterschiede zwischen den hauptsächlichsten kleinen Blitzen und den Teilentladungen I und II des Hauptblitzes unserer Aufnahmen sind nun in der folgenden Tabelle II zusammengestellt, und zwar bedeutet darin — anders als früher — ein positives Vorzeichen der Größe Δt , daß der betr. kleine Blitz vor der zugehörigen Teilentladung des Hauptblitzes auftrat, ein negatives, daß er nach ihr erfolgte. Die Indizes 1 oder 2 ferner, die man in der Tabelle II an die Zahlen 5, 6 und 9 angehängt findet, besagen, daß es sich dabei bzw. um die erste oder zweite der beiden bereits erwähnten Teilentladungen dieser kleinen Doppelblitze handelt. Die Werte von Δt sind sämtlich bis auf die vierte Dezimale abgerundet.

Die Werte von Δt der Tabelle II sind nun zunächst ihrem absoluten Betrage nach sämtlich kleiner als 0,007 Sekunden, d. h. also sämt-

Tabelle II.

a) Zeitunterschiede zwischen der Teilentladung I des Hauptblitzes und

Blitz	1	3	4	7	
$\Delta t =$	+ 0,0014	- 0,0001	+ 0,0003	+ 0,0003	sec

b) Zeitunterschiede zwischen der Teilentladung II des Hauptblitzes und

Blitz	2	5 ₁	5 ₂	6 ₁	
$\Delta t =$	+ 0,0013	+ 0,0049	- 0,0029	+ 0,0062	sec.

Blitz	6 ₂	8	9 ₁	9 ₂	
$\Delta t =$	+ 0,0007	+ 0,0037	+ 0,0032	- 0,0011	sec

lich kleiner als der zehnte Teil des kleinsten der nach Tabelle I zwischen den Teilentladungen I, II und III des Hauptblitzes liegenden Zeitunterschiede, so daß demnach die Zusammengehörigkeit dieser kleinen Blitze mit I bzw. II keinem Zweifel unterliegen kann.

Im einzelnen ist dann noch zu bemerken, daß die Werte von Δt für die kleinen Blitze 3, 4 und 7 schon so klein sind, daß man sie auch schon als Beobachtungsfehler ansehen kann, während die übrigen Zahlen der Tabelle II mit dem größten Teil ihres Betrages den wirklichen Werten entsprechen dürften. Danach würden also z. B. die beiden kleinen Blitze 1 und 2 kurz vor den Teilentladungen I bzw. II des Hauptblitzes, d. h. also noch zusammen mit den letzten Vorentladungen derselben stattgefunden haben. Von diesen Vorentladungen waren hier allerdings die meisten so schwach, daß sie auch auf der bewegten Platte nur durch die gleichzeitig mit der betreffenden Hauptentladung erfolgende Wiederholung ihrer seitlichen Verästelungen sichtbar wurden, wie dies schon in meinen angeführten Abhandlungen vom Jahre 1903 näher dargelegt wurde. Immerhin ist aber doch in unserem Falle bei der Teilentladung II eine Vorentladung derselben auf der genannten Platte (Tafelfig. 5) deutlich sichtbar geworden, da sie ja hier den oberen Teil dieser Teilentladung als eine deutlich davon getrennte und vollkommen damit parallel laufende helle Linie begleitet. Der Zeitunterschied zwischen dieser Vorentladung und der Teilentladung II selbst betrug, wie schon oben erwähnt wurde, 0,0055 Sekunden, eine Größe, die nach Tabelle II annähernd mit den Zeitunterschieden zwischen der Teilentladung II und den ersten Teilentladungen der drei kleinen Blitze 5, 6 und 9 übereinstimmt, so daß also danach diese ungefähr gleichzeitig mit jener Vorentladung stattfanden, während die zweiten Teilentladungen dieser Blitze wieder annähernd

gleichzeitig mit II selbst erfolgten. Daß es sich hier allerdings nur um eine ungefähre und nicht um eine vollkommene Gleichzeitigkeit handelt, wurde schon oben betont.

Schließlich sei hier noch auf eine weitere Eigentümlichkeit des Hauptblitzes unserer Aufnahmen hingewiesen. Dieselbe besteht darin, daß an derjenigen Stelle der Teilentladung I desselben, wo später die Entladung II abzweigt, noch keinerlei Andeutung des Weges dieser letzteren zu erkennen ist, während dies bei meinen früheren Aufnahmen von Blitzen mit doppelter Einschlagstelle meist sehr deutlich der Fall war (s. die Aufnahme in Bd. 10, Tafel II, Fig. 2 der Annalen, die mit der im Hamb. Jahrb. Bd. 20, Tafel III, Fig. 11 übereinstimmt, sowie auch die der Fig. 12 der letztgenannten Tafel). Der Grund des Abspringens von seiner ersten Bahnlinie ist also bei unserem jetzigen Blitze nicht, wie in den genannten früheren Fällen, darin zu suchen, daß sich gleich bei der Ausbildung der ersten Teilentladung an mehreren Stellen der Erdoberfläche Influenzladungen ausbildeten, die dann durch zeitlich aufeinander folgende Teilentladungen neutralisiert wurden, sondern vielmehr darin, daß in der Zeit zwischen der ersten und zweiten Teilentladung unseres Blitzes der untere Teil seiner Bahnlinie sozusagen verloren ging. In Zusammenhang damit steht wahrscheinlich auch die sich an seiner zweiten Teilentladung zeigende, eigentümliche Erscheinung, daß etwas unterhalb jener Stelle, wo der neue Teil der Bahnlinie beginnt, nach rechts und links je ein sich nahezu wagerecht in der Luft ausbreitender Seitenast abzweigt, während alle anderen Seitenzweige dieser und der ersten Teilentladung deutlich nach unten zu gerichtet sind, wie ja besonders schön das Bild der ruhenden Platte erkennen läßt. Die horizontale Ausbreitung der ersten beiden Äste besagt nun offenbar, daß sich in der Zeit zwischen der ersten und zweiten Teilentladung des Hauptblitzes in der betreffenden Gegend durch Influenz von seiten der darüberstehenden Gewitterwolke aus eine „Raumlade“ ausgebildet hatte, die eben durch jene Seitenäste neutralisiert wird, und die auch vielleicht die Ursache dafür war, daß der durch die erste Teilentladung bereits erreichte Zusammenhang zwischen Wolke und Erde inzwischen wieder verloren ging.

Hamburg, Physikalisches Staatslaboratorium, im März 1918.

(Eingegangen 4. März 1918.)

Ein neuerlicher Beweis für die Gültigkeit der Cunninghamschen Korrektur des Stokesschen Widerstandsgesetzes.

Von Irene Parankiewicz.

Aus Untersuchungen farbiger Schwefel- und Selenpartikel¹⁾ von der Größenordnung der Wellenlänge des Lichtes habe ich auf die Gültigkeit und Anwendbarkeit des nach Cunningham korrigierten Stokesschen Gesetzes in allen denjenigen Fällen, wo die mittlere freie Weglänge der Gasmoleküle mit den linearen Dimensionen der sich am Gase reibenden Teilchen vergleichbar ist, aus der Tatsache geschlossen, daß die bei verschiedenen Drucken nach dem genannten Widerstandsgesetz berechneten Radien verschiedener Partikel gleicher Farbe miteinander übereinstimmen.

Nun ist es mir bei der Untersuchung der photophoretischen Kräfte an Einzelteilchen des Selen gelungen, ein und dasselbe Partikel in Argon bei verschiedenen Gasdrucken zu behandeln und so ohne auf eine andere Theorie und die Bildung von Mittelwerten zurückgreifen zu müssen, die Gültigkeit der Cunninghamschen Korrektur des Stokesschen Gesetzes vollkommen exakt nachzuweisen.

Zu diesem Zwecke wurden einzelne Selenpartikel im Ehrenhaftschen Kondensator folgendermaßen behandelt: Für ein Partikel wurde zunächst die Fallgeschwindigkeit bei Atmosphärendruck gemessen; sodann wurde an die Kondensatorplatten eine elektrische Spannung angelegt und der Kondensator gleichzeitig mit größter Vorsicht so evakuiert, daß nur eine langsame Strömung der übrigen im Kondensator noch vorhandenen Partikel sichtbar war, während das betreffende Partikel durch die Wirkung des elektrischen Feldes, die ich entsprechend vergrößerte, der Strömung entgegen gezogen wurde. Nach einiger Zeit wurde die Verbindung mit der Pumpe abgestellt. Im Kondensator befand sich nun das bereits beim Atmosphärendruck behandelte Partikel, dessen Fallgeschwindigkeit jetzt bei einem niedrigeren (am Manometer ablesbaren) Drucke gemessen werden konnte. Nachher wurde der Kondensator weiter evakuiert und auf diese Weise gelang es, ein und dasselbe Partikel bei drei oder sogar vier verschiedenen Drucken

diese von 760 bis zu 340 mm Hg erniedrigend, zu behandeln.

In folgender Tabelle sind die so gewonnenen Fallzeiten sowie die Berechnungsdaten zusammengestellt.

Tabelle I.

Fallstrecke	$s = 11.4 \cdot 10^{-10}$ cm
Reibungskoeffizient des Argons bei 18°C	$\mu = 2.219 \cdot 10^{-4}$
Freie mittlere Weglänge beim normalen Druck 18°C	$\lambda = 10.29 \cdot 10^{-6}$ cm
Dichte des Selen	$\sigma = 4.3$

Partikel Nr. I.

Farbe orange, lichtnegativ.
Druck 760 mm.
Fallzeiten.
7,07, 8,87, 6,68, 7,18, 6,13, 7,33.
Druck 585 mm Hg.
Fallzeiten.
5,99, 6,04, 6,96, 6,30.

Partikel Nr. V.

Farbe orange, lichtnegativ.
Druck 760 mm Hg.
Fallzeiten.
9,00, 9,92, 10,00, 9,93, 7,22, 7,41, 5,51, 9,57, 10,48,
9,74, 6,06, 7,10.
Druck 550 mm Hg.
Fallzeiten.
7,00, 7,08, 6,98, 10,05, 7,37, 8,38, 7,43, 8,11, 8,25,
6,80, 6,81, 7,04, 6,37, 7,10.

Partikel Nr. VI.

Farbe orange, lichtnegativ.
Druck 760 mm Hg.
Fallzeiten.
6,95, 10,25, 9,90, 9,26, 6,98, 8,86, 6,75, 7,39.
Druck 490 mm Hg.
Fallzeiten.
6,90, 6,84, 6,73, 6,63.
Druck 439 mm Hg.
Fallzeiten.
3,20, 5,60, 8,10, 7,08, 9,85, 4,85, 9,83, 5,37, 5,70, 5,40.
Druck 340 mm Hg.
Fallzeiten.
5,20, 5,90, 4,12, 6,74, 5,55, 6,10, 5,90, 6,00.

Tabelle II enthält die Ergebnisse dieser Messungen.

Tabelle II.

Beobachtete Farbe	Druck in mm Hg	Fallgeschwindigkeit in $\frac{1}{\sigma} \cdot 10^3 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$	Der nach d. Stokesschen Gesetz ($f=0$) berechnete Radius $a \cdot 10^6$ cm
Partikel Nr. V.			
orange	760	1,34	14,14
	550	1,52	14,07
Partikel Nr. VI.			
orange	760	1,38	14,38
	490	1,68	14,47
	439	1,75	14,34
	340	2,00	14,34
Partikel Nr. I.			
orange	760	1,58	15,64
	585	1,80	15,82

1) I. Parankiewicz, diese Zeitschr. 18, 567, 1917. Die in dieser Arbeit veröffentlichten Ausstrahlungskurven der Schwefelpartikel wurden, da dies bei weiterer Untersuchung nötig schien, durch Berechnung einiger Zwischenpunkte für größere Werte des Argumentes α ergänzt. Dabei hat es sich herausgestellt, daß die Kurven nicht einzige Maxima sondern Wellungen aufweisen; sie gelangen auch demnächst in dieser Form zur ausführlichen Publikation. Die aus den Kurven in der vorzitierten Arbeit gezogenen Schlüsse werden aber dadurch keineswegs beeinflusst.

Man kann daraus folgende Tatsachen entnehmen: Die bei verschiedenen Drucken aus den Fallgeschwindigkeiten nach dem Stokes-Cunninghamschen Gesetze ($f=0$) berechneten Radien desselben Partikels sind auf Promille konstant; das genannte Widerstandsgesetz liefert demnach in dem untersuchten Intervalle der Gasdrucke (von 760 bis zu 340 mm Hg) von letzteren unabhängig immer dieselben Werte der Radien der gemessenen Partikel.

Für das infolge dieser Variationen des Druckes an einem und demselben Partikel resultierende Intervall der Verhältnisswerte der mittleren freien Weglänge zum Partikelradius (z. B.

bei Partikel Nr. VI: $\frac{l}{a} = 0,7$ für 760 mm Hg,

$\frac{l}{a} = 1,3$ für 340 mm Hg also für $\frac{l}{a} = 0,7$ bis

1,3) ist mithin die Gültigkeit der Cunninghamschen Korrektur der Stokesschen Widerstandsformel auf einem von den bisherigen Verfahren unabhängigen Wege, und zwar durch die Behandlung eines und desselben Versuchsobjektes nachgewiesen worden.

Zusammenfassend kann über die Prüfung der Cunninghamschen Korrektur des Stokesschen Gesetzes folgendes bemerkt werden: Da der Korrektionsfaktor des Stokesschen Gesetzes die veränderlichen l und a enthält, so ergaben sich zwei Wege zur Prüfung der Gültigkeit dieses Gesetzes. Ehrenhaft hat l konstant gehalten, a variiert, indem er verschiedene Partikel bei konstantem (normalem) Druck beobachtete, und hat auf die Richtigkeit der Cunninghamschen Korrektur aus der Übereinstimmung der mit Hilfe dieser Korrektur berechneten Radien farbiger Partikel mit den Radien, die sich für Partikel der betreffenden Farbe aus der optischen Theorie ergaben, geschlossen.

Verfasserin hat zur Prüfung des Cunninghamschen Korrektionsfaktors einen anderen Weg eingeschlagen, indem sie a konstant hielt und l durch Änderung des Druckes in der Beobachtungskammer variierte. Bisher wurde aber als Kriterium für die Konstanz von a die Voraussetzung benützt, daß Partikel gleicher Farbe gleich groß sind und auf die Gültigkeit der Cunninghamschen Korrektur wurde daraus geschlossen, daß die Radien verschiedener Partikel gleicher Farbe, bei verschiedenen Drucken beobachtet, mit den Radien, die für Partikel dieser Farbe aus der optischen Theorie folgen, übereinstimmen.

Das in dieser Mitteilung erörterte einfache Verfahren vermeidet diese Voraussetzung und

den Vergleich mit den Ergebnissen der optischen Theorie. Es wird wieder l variiert und a eben dadurch konstant gehalten, daß ein und dasselbe Partikel bei verschiedenen Drucken beobachtet und seine Größe aus den zugehörigen Fallgeschwindigkeiten und mittleren freien Weglängen der Gasmoleküle für die betreffenden Drucke berechnet wird.

Die Gleichheit der so erhaltenen Radien desselben Partikels untereinander liefert einen neuerlichen Beweis für die Gültigkeit der Cunninghamschen Korrektur des Stokeschen Gesetzes.

Wien, I. phys. Institut der Universität.
März 1918.

(Eingegangen 18. März 1918.)

Über den Zusammenhang zwischen den Atomgewichten der chemischen Elemente, dem spezifischen Gewicht und der Wärmetönung.

Von Karl Fehrle.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, mit Hilfe eines Bildes, welches, der heutigen Vorstellung entsprechend, die Molekeln sämtlicher Elemente als aus denselben Grundbestandteilen aufgebaut annimmt, das Bestehen eines gesetzmäßigen Zusammenhangs zwischen den Atomgewichten der chemischen Elemente und ihren Eigenschaften in mathematischer Form nachzuweisen.

Der gemeinschaftliche Grundbestandteil wird das „Atom“ schlechtweg genannt werden. Das Bild für die Molekel möge eine homogen mit „Atomen“ gefüllte Kugel sein. Die Zahl der „Atome“ in der Molekel eines bestimmten Elements sei N . Jedes „Atom“ möge mit der allen „Atomen“ derselben Molekel gemeinsamen Winkelgeschwindigkeit ω in einem Kreise um den gemeinschaftlichen Mittelpunkt rotieren. Es soll weder eine bestimmte Rotationsebene, noch ein bestimmter Umlaufsinn ausgezeichnet sein.

Die Energie eines „Atoms“ definiere ich als proportional dem Quadrat der Rotationsgeschwindigkeit und des Radius. Die Dichtigkeit der Atome, d. h. die Anzahl pro ccm der Molekel berechnet, sei s . Dann ist die Energie der Molekel vom Radius R

$$U = C' \cdot 4\pi s \omega^2 \int_0^R r^4 dr,$$

wo C' eine Konstante bedeutet. Mithin

$$U = C \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 s \cdot \frac{3 \omega^2 R^2}{5} = \frac{3}{5} C N \omega^2 R^2 \quad (1)$$

$$= C N \omega^2 R^2.$$

Die Energie der Molekel ist also dieselbe, als ob sich sämtliche „Atome“ auf der Kugeloberfläche mit dem Radius

$$R \sqrt{\frac{3}{5}}$$

mit der Winkelgeschwindigkeit ω bewegen würden.

Angenommen nun, aus einem Teil eines Elements, bestehend aus m Molekeln zu je N „Atomen“, könnte ein neues Element gebildet werden, bestehend aus p Molekeln vom Radius R_1 zu je N_1 „Atomen“, so ist der von einer der neuen Molekeln eingenommene Raum bei gleicher Dichte

$$\frac{4\pi R^3 N}{3N} = \frac{4\pi R_1^3}{3}$$

oder

$$R_1 = R \sqrt[3]{\frac{N_1}{N}}. \quad (2)$$

Die Energie der neuen Molekel ist

$$U_1 = C N_1 \omega_1^2 R_1^2 = C N_1 \omega_1^2 R^2 \sqrt[3]{\left(\frac{N_1}{N}\right)^2}. \quad (3)$$

Für den Fall nun, daß es möglich wäre, die Umwandlung zu vollziehen, ohne daß Energie weggenommen oder hinzugefügt wird, müßte

$$U \cdot m = U_1 \cdot p$$

oder

$$U \cdot N_1 = U_1 \cdot N \quad (3a)$$

sein, d. h. die Energie der neuen Molekel wäre proportional der „Atom“-zahl:

$$U_1 = C N_1 \omega^2 R^2. \quad (3b)$$

Aus (3) und (3a) folgt:

$$C N N_1 \omega^2 R^2 = C N N_1 \omega_1^2 R^2 \sqrt[3]{\left(\frac{N_1}{N}\right)^2}$$

oder

$$\omega_1 = \omega \sqrt[3]{\frac{N}{N_1}},$$

$$N_1 = N \sqrt[3]{\left(\frac{\omega_1 N_1}{\omega N}\right)^3}. \quad (4)$$

Die Masse der Molekel definiere ich als proportional dem Produkt aus Winkelgeschwindigkeit und Zahl der „Atome“, so daß der allgemeine Ausdruck für Masse von der Form ist

$$\mu = K N \omega,$$

wo K eine Konstante bedeutet. Das Atom ist also nicht an sich — in der Ruhe — sondern erst durch seine Bewegung Masse. Wird als

Verhältnis der Massen der Molekeln das der Molekulargewichte der Chemie genommen und werden die letzteren mit A_1 und A bezeichnet, so geht (4) über in

$$N_1 = N \sqrt[3]{\frac{A_1^3}{A^3}} \quad \text{oder} \quad A_1 = A \sqrt[3]{\left(\frac{N_1}{N}\right)^2}. \quad (5)$$

Setzt man in (5) an Stelle von $\frac{N_1}{N}$ die Verhältnisse der Schwingungszahlen der reinen Töne, so ergeben sich für $A = 16$ bzw. ein ganzzahliges Vielfaches davon die Atomgewichte einer großen Zahl von Elementen bzw. ihr ganzzahliges Vielfaches bis auf die 2. Dezimale genau. Beispiele sind:

$$Cr = 30 \sqrt[3]{\left(\frac{9}{8}\right)^2} \quad Cu = Cl \sqrt[3]{\left(2 \cdot \frac{6}{5}\right)^2}$$

$$Mn = 20 \sqrt[3]{\left(2 \cdot \frac{9}{8}\right)^2} \quad 2Al = 30 \sqrt[3]{\left(\frac{6}{5}\right)^2}$$

$$2Cl = 50 \sqrt[3]{\left(\frac{5}{6}\right)^2} \quad Ge = 40 \sqrt[3]{\left(\frac{6}{5}\right)^2}$$

$$Si = 20 \sqrt[3]{\left(\frac{5}{6}\right)^2} \quad Mg = 0 \sqrt[3]{\left(\frac{15}{8}\right)^2}$$

Die Gesamtenergie vom betrachteten Quantum des ursprünglichen Elements ist

$$U = m C N \omega^2 R^2,$$

die des Umwandlungsproduktes nach (3b)

$$U_1 = p C N_1 \omega^2 R^2$$

oder wegen (5) und

$$Am = A_1 p$$

$$U_1 = \frac{A m}{A_1} C N \sqrt[3]{\left(\frac{A_1}{A}\right)^3} \cdot \omega^2 R^2 = U \sqrt[3]{\left(\frac{A_1}{A}\right)}.$$

Die Gesamtenergie erscheint also im Verhältnis $\sqrt[3]{\frac{A_1}{A}}$ vergrößert, wenn $A_1 > A$, oder

verkleinert, wenn $A_1 < A$, immer gleiche Verteilungsdichte der „Atome“ in beiden Arten von Molekeln vorausgesetzt. Der Unterschied ist in Form von Wärme von außen aufgenommen bzw. nach außen abgegeben worden. Das betrifft jedoch nur denjenigen Effekt, der von der Rotationsenergie der Molekeln herrührt. Dazu kommt noch die Wärme, welche durch die Änderung der fortschreitenden Bewegung der Molekeln bedingt ist, ein Effekt, welcher dem ersteren entgegengesetzt ist. Daß hier immer nur von Molekeln die Rede ist, und nicht der Unterschied zwischen Molekel und Atom in der Sprache der Chemie gemacht wird, hat seinen

Grund darin, daß es für die Berechnung der Rotationsenergie der kleinsten selbständigen Teile gleichgültig ist, wie viele von ihnen etwa zu einer größeren Gruppe vereinigt sind und welches ihre Anordnung und ihre Bewegung innerhalb derselben ist, also auch, wie man sie benennt. Ebenso wie weiter unten auch der Begriff der Molekel von Verbindungen in einer Weise angewendet werden wird, die sich insofern nicht mit der in der Chemie gebräuchlichen deckt, als auch die Verbindungen aus innerlich homogen gebauten Molekeln bestehend angenommen werden. Diese Annahme wurde lediglich zur Gewinnung eines Bildes für die Berechnung der Differenz der Energie vor und nach der gedachten Umwandlung gemacht. Über ihre Berechtigung muß der Erfolg entscheiden, nachdem die Betrachtung von der Behandlung nur gedachter Umwandlungen auf die Vorgänge bei der Verbindung zweier Elemente ausgedehnt worden ist.

Die Molekeln des einen Elements, deren Zahl a sei, mögen die Masse A_1 und die „Atom“zahl N_1 besitzen, die des anderen, an Zahl b , die Masse A_2 und die Atomzahl N_2 , die der Verbindung die Masse A_3 . Dann besteht die Verbindung aus

$$\frac{a A_1 + b A_2}{A_3}$$

Molekeln. Wären letztere zum Teil aus der Art A_1 , zum Teil aus der Art A_2 allein entstanden, so hätten wir

$$\frac{a A_1}{A_3}$$

Stücke, die aus Molekeln von der Masse A_1 entstanden sind, und

$$\frac{b A_2}{A_3}$$

Stücke, die aus Molekeln von der Masse A_2 entstanden sind. Im ersten Falle wäre nach (5) die Atomzahl der Molekel A_3

$$N_1 \sqrt{\left(\frac{A_3}{A_1}\right)^3},$$

im zweiten

$$N_2 \sqrt{\left(\frac{A_3}{A_2}\right)^3}.$$

Die Gesamtenergie der Elemente ist nach (3b)

$$U_E = C \omega^2 R^2 (a N_1 + b N_2),$$

die der Verbindung

$$U_V = C \omega^2 R^2 \left[a \frac{A_1}{A_3} N_1 \sqrt{\left(\frac{A_3}{A_1}\right)^3} + b \frac{A_2}{A_3} N_2 \sqrt{\left(\frac{A_3}{A_2}\right)^3} \right]$$

oder

$$U_V = C \omega^2 R^2 \left[a N_1 \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} + b N_2 \sqrt{\frac{A_3}{A_2}} \right].$$

Die Differenz

$$U_E - U_V = C \omega^2 R^2 \left[a N_1 \left(1 - \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} \right) + b N_2 \left(1 - \sqrt{\frac{A_3}{A_2}} \right) \right]$$

stellt die Wärmetönung dar. Bezeichnet n die Anzahl der Molekeln im Mol eines Elements und verbinden sich x Mol des Elements A_1 mit y Mol des Elements vom Molekulargewicht A_2 zu z Mol der Verbindung, so ist die Wärmetönung pro Mol der Verbindung

$$W = \frac{C \omega^2 R^2 n}{z} \left[x N_1 \left(1 - \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} \right) + y N_2 \left(1 - \sqrt{\frac{A_3}{A_2}} \right) \right].$$

Da in der vorliegenden Theorie eine andere Veränderung des Zustandes, als durch Änderungen im Innern der Molekeln bedingt ist, nicht vorkommt, so kann die verschiedene Dichte der Elemente nur durch die verschiedene Dichte der Verteilung der „Atome“ innerhalb der Molekel erklärt werden. Sie ist daher umgekehrt proportional dem Volumen der Molekel zu setzen, das Quadrat des Radius also und damit die Energie der Molekel umgekehrt proportional der 3. Wurzel aus dem Quadrat der Dichte. Als Dichte muß die im festen Zustande gewählt werden, denn nur hier ist anzunehmen, daß sie durch die Dichte der „Atome“ innerhalb der Molekel richtig ausgedrückt wird. Die weiter unten folgende Ableitung liefert, solange R klein ist gegen 1 cm, für die Zahl der Molekeln im ccm im festen Zustand

$$\frac{1}{4 R^3 \sqrt{2}},$$

mithin für den von ihnen eingenommenen Raum

$$\frac{\pi}{3 \sqrt{2}}.$$

Da beim Versuch der ganze Raum — Molekeln und Zwischenraum zusammengerechnet — zugrunde gelegt wird, so ist die Dichte innerhalb der Molekel — denn in diesem Sinne wird sie in der vorliegenden Theorie verwendet — im Verhältnis

$$\frac{3 \sqrt{2}}{\pi}$$

größer. Wird als Masse eines „Atoms“ die-

jenige des Elektrons gesetzt, so sind die „Atom“-zahlen der Molekeln vor der Umwandlung $10^3 \cdot A_i$, wo die Indizes die einzelnen Elemente bezeichnen. Damit wird, wenn s_1 , s_2 und s_3 die Dichte der Elemente bzw. der Verbindung sind,

$$W = \frac{C \omega^2 R^2 n \cdot 10^3}{z \cdot 4,189 \cdot 10^{10}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\right)^2} \left[x A_1 \left(\sqrt{\frac{1}{s_1}} - \sqrt{\frac{1}{s_2}} \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} \right) + y A_2 \left(\sqrt{\frac{1}{s_2}} - \sqrt{\frac{1}{s_3}} \sqrt{\frac{A_3}{A_2}} \right) \right]. \quad (6)$$

Die Dichte sei auf Wasser bezogen.

Da durch $4,189 \cdot 10^{10}$ dividiert wurde, stellt dieser Ausdruck kg-Kalorien vor, wenn C , ω und R in abs. E. gemessen werden. Die gesamte vor dem Klammerausdruck stehende Konstante ist in diesem Falle gleich 1,534 zu setzen. Dann ergibt die Formel den Wert der Wärmetönung richtig für die Halogenwasserstoffe, die Wasserstoffverbindungen der beiden im natürlichen System benachbarten entsprechenden Reihen, sowie für Ammoniak und die Oxyde des Stickstoffs, wenn die Molekulargewichte der Chemie eingesetzt werden. Dagegen hat es sich gezeigt, daß für die Verbindungen der Metalle das Molekulargewicht der Chemie, geteilt durch die Summe der Wertigkeiten der Elemente, zu setzen ist. Letztere Zahl wird mit w bezeichnet werden. Die Formel liefert dann die Wärmetönung für $\frac{1}{w}$ Mol. Das Resultat ist daher noch

mit w zu multiplizieren, um die Wärmetönung für ein Mol der Chemie zu ergeben. Sind für je ein Element zweier Gruppen des natürlichen Systems x , y , z und w gefunden, so ergibt die Gleichung die Wärmetönung bei der Verbindung aller übrigen Elemente dieser beiden Gruppen, wie die am Schlusse angefügten Berechnungen zeigen. Die experimentell gefundenen, der 3. Aufl. von Landolt-Börnsteins Tabellen entnommenen, Werte hängen noch ab vom Wärmezustand, welcher in meine Gleichung nicht eingeht. Diese liefert vielmehr nur den auf Rechnung der Rotationsenergie zu setzenden, also von der chemischen Natur der Substanzen bestimmten Bestandteil der Wärmetönung. Dieser übertrifft jedoch fast stets den vom thermischen Zustande herrührenden so bedeutend, daß die Übereinstimmung im Gang der Wärmetönung mit Sicherheit zu erkennen ist.

Die Konstante C ist nach (1) die Rotationsenergie eines einzigen „Atoms“, das mit der Winkelgeschwindigkeit 1 und dem Radius 1 rotiert. Es liegt nahe, sie so zu definieren, daß sie diejenige der mit $\omega=1$ und $R=1$ rotierenden Masse des Elektrons ist, also

$$C = \frac{2}{2 \cdot 61 \cdot 10^{22} \cdot 2 \cdot 10^3} = 82 \cdot 10^{-29} \text{ Erg.}$$

Mit diesem Wert von C und dem der Gesamtkonstante = 1,534 ergibt sich aus (6) für Wasser

$$1,534 = \frac{82 \cdot 10^{-29} \cdot \omega^2 R^2 \cdot 61 \cdot 10^{22} \cdot 10^3}{4,189 \cdot 10^{10}} \sqrt{\frac{3,142^2}{18}}$$

oder

$$\omega R = 4 \cdot 10^5 \text{ cm sec}^{-1}. \quad (7)$$

Zur Berechnung von R ging ich von der Annahme aus, die Molekeln seien kugelförmig und berührten einander im Falle, daß die Substanz sich im festen Zustande befindet, derart, daß in einem gegebenen Raum das Maximum von Kugeln Platz findet. Ob letzteres zutrifft, kommt nicht in Betracht, da R nicht zur Berechnung von Wärmetönungen verwendet wird. Es soll lediglich darüber Auskunft gegeben werden, ob die Werte der Konstanten der Größenordnung nach sich mit den bekannten Tatsachen im Einklang befinden.

Ein Hohlwürfel von 1 cm Kantenlänge sei mit Kugeln in der angegebenen Weise gefüllt. An einer Kante liegen

$$\frac{1}{2R}$$

Kugeln. Solcher Reihen sind es

$$\frac{1-2R}{R\sqrt{3}} + 1,$$

folglich die Zahl der Kugeln auf einer Würfel- fläche

$$\left(\frac{1-2R}{R\sqrt{3}} + 1 \right) \frac{1}{2R}.$$

Solcher Lagen sind es

$$\frac{1-2R}{2R\sqrt{\frac{2}{3}}} + 1,$$

mithin die Gesamtzahl der Kugeln

$$\frac{1-2R \left(2 - \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} \sqrt{3} \right) + 2R^2 \left(2 - 2\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{3} + \sqrt{2} \right)}{4R^3 \sqrt{2}}.$$

Da der 2. und 3. Summand des Zählers im Vergleich mit 1 vernachlässigt werden können, ist die Gesamtzahl der Kugeln

$$\frac{1}{4R^3\sqrt{2}}$$

Da der ccm Wasserstoff im festen Zustand 0,076 g wiegt, so enthält er

$$\frac{61 \cdot 10^{22} \cdot 0,076}{2,016}$$

Molekeln. Damit wird

$$\frac{1}{4R^3\sqrt{2}} = \frac{61 \cdot 10^{22} \cdot 0,076}{2,016}$$

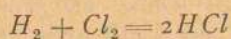
oder

$$R = 2 \cdot 10^{-8},$$

der Radius der Wasserstoffmolekel. Damit ergibt sich für Wasserstoff, wenn die Dichte auf diesen bezogen wird,

$$\omega = 4,7 \cdot 10^{13}.$$

Berechnung von Wärmetönungen.
Chlorwasserstoff.



$$x = y = 1 \quad z = 2$$

$$A_1 = 2,016 \quad A_2 = 70,92 \quad A_3 = 36,47$$

$$s_1 = 0,076 \quad s_2 = 1,73 \quad s_3 = 1,44$$

$$W = \frac{1,534}{2} \left[2,016 \left(\sqrt[3]{\frac{1}{0,076^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{1,44^2}} \sqrt{\frac{36,47}{2,016}} \right) + 70,92 \left(\sqrt[3]{\frac{1}{1,73^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{1,44^2}} \sqrt{\frac{36,47}{70,92}} \right) \right]$$

$$W = 22 \text{ kg-Kal.} \quad \text{Exper. gef.: } 22 \text{ kg-Kal.}$$

Die Daten für die weiteren Berechnungen sind in nachstehender Tabelle übersichtlich geordnet. In der vorletzten Spalte befindet sich der berechnete und, zum Vergleich damit, in der letzten der experimentell gefundene Wert nach der 3. Aufl. von Landolt-Börnsteins Tabellen.

Zusammenfassung.

Unter Zugrundelegung des Bildes einer Molekel als einer homogen mit „Atomen“ gefüllten Kugel, die mit gemeinsamer Winkelgeschwindigkeit ω um denselben Mittelpunkt rotieren, unter der Annahme ferner, daß die Energie einer Molekel vom Radius R gegeben ist durch

$$U = CN\omega^2 R^2,$$

und die Masse durch

$$m = KN\omega,$$

wo N die Zahl der „Atome“ in der Molekel bedeutet, wobei weder unter den Rotationsebenen irgendeine ausgezeichnet noch ein bestimmter Umlaufssinn bevorzugt ist, läßt sich zeigen, daß

Übersichtliche Zusammenstellung der Berechnungen.

Verb.	x	y	z	w	A_1	A_2	A_3	s_1	s_2	s_3	W kg-Kal. ber.	W kg-Kal. gem.
HCl	1	1	2	—	2,016	70,92	36,47	0,076	1,8	1,44	22,0	22,0
HBr	1	1	2	—	2,016	159,8	80,93	0,076	3,14	2,31	10,2	8,6
Hf	1	1	2	—	2,016	253,8	127,9	0,076	5,32	2,98	3,0	0,0
H ₂ S	2	1	2	—	2,016	64,14	34,09	0,076	2,07	1,01	— 1,1	2,7
H ₂ Se	2	1	2	—	2,016	158,4	81,22	0,076	4,80	2,17	— 9,1	— 19,4
H ₂ Te	2	1	2	—	2,016	255,0	129,5	0,076	6,34	2,63	— 11,3	— 35,0
H ₃ P	6	1	4	—	2,016	124,2	34,06	0,076	2,10	0,77	2,6	5,4
H ₃ As	6	1	4	—	2,016	299,8	77,98	0,076	2,40	1,37	19,0	44,2 ber.
H ₃ Sb	3	1	2	—	2,016	240,4	123,2	0,076	6,60	2,45	— 14,5	— 34,0
LiF	2	1	2	2	6,09	253,8	67,00	0,56	5,32	4,18	51,4	61,0
NaF	2	1	2	2	23,00	253,8	75,00	1,03	5,32	3,94	61,4	69,1
KF	2	1	2	2	39,10	253,8	83,00	0,85	5,32	3,10	81,0	80,1
CuF	2	1	2	2	63,57	253,8	95,25	8,93	5,32	5,50	20,0	17,0
RbCl	2	1	2	2	85,45	70,92	60,45	1,52	1,73	2,45	97,3	106,0
AgF	2	1	2	2	107,9	253,8	117,4	10,40	5,32	5,67	5,3	14,4
AgCl	2	1	2	2	107,9	70,92	71,68	10,40	1,73	5,57	24,4	29,4
CsF	2	1	2	2	132,8	253,8	129,9	1,88	5,32	4,51	145,5	Nicht gem.
CaF ₂	1	1	1	3	40,09	253,8	97,97	1,55	5,32	3,96	115,5	122,0
SrF ₂	1	1	1	3	87,63	253,8	113,8	2,54	5,32	4,55	147,6	123,0
BaF ₂	1	1	1	3	137,4	253,8	130,4	2,80	5,32	5,15	155,7	136,1
CdF ₂	1	1	1	3	112,4	253,8	122,1	8,87	5,32	5,60	76,0	49,0
ZnF ₂	1	1	1	3	65,37	253,8	106,4	7,17	5,32	4,70	57,6	49,0
HgF ₂	1	1	1	3	200,0	253,8	151,3	14,38	5,32	6,00	23,4	22,0 gelb

die Wärmetönung bei der Verbindung zweier Elemente mit dem Molekulargewicht A_1 und A_2 , dem spez. Gewicht s_1 und s_2 der Elemente, und dem Molekulargewicht A_3 und dem spez. Gewicht s_3 der Verbindung durch die Gleichung zusammenhängt

$$W = \frac{1,534}{z} \left[x A_1 \left(\sqrt[3]{\frac{1}{s_1^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{s_3^2}} \sqrt{\frac{A_3}{A_1}} \right) + y A_2 \left(\sqrt[3]{\frac{1}{s_2^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{s_3^2}} \sqrt{\frac{A_3}{A_2}} \right) \right] \text{ kg-Kal.,}$$

wenn x Mol des 1. Elements sich mit y Mol

des 2. zu z Mol der Verbindung vereinigen. Unter Molekulargewicht ist das Gewicht zu verstehen, das die Molekel bei dem Vorgang wirklich hat. Für die Verbindungen der Metalle hat sich ergeben, daß es gleich dem herkömmlichen Molekulargewicht, geteilt durch die Summe w der Wertigkeiten der Elemente zu setzen ist. Die Formel liefert dann die Wärme-

strömung für $\frac{1}{w}$ Mol. Das Resultat ist also noch mit w zu multiplizieren, um die Wärmetönung für 1 Mol der Chemie zu ergeben.

Freiburg i/B., März 1918.

(Eingegangen 3. April 1918.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Über die Anordnung der Fixsterne im Raum.

Von G. Deutschland.

I. Zur Geschichte des Problems.

Den Bau und Zustand unseres Fixsternsystems auf direktem Wege zu ermitteln, wäre gleichbedeutend mit der Bestimmung des Ortes und der Entfernung aller Sterne, sowie ihrer verschiedenen Merkmale, wie Leuchtkraft, Bewegung, Spektraltypus. An ihre Stelle können engere statistische Untersuchungen treten, welche hauptsächlich die mittleren Entfernungen, die mittleren Eigenbewegungen und Radialgeschwindigkeiten und die Anzahlen der Sterne verschiedener scheinbarer Helligkeiten für die einzelnen Teile der Sphäre betreffen. Da jedoch unsere Kenntnis der Sternparallaxen und noch mehr ihrer Bewegungen zur Ableitung von Schlüssen nicht ausreicht, kann nur die scheinbare Verteilung der verschiedenen Größenklassen, deren Feststellung auf weniger große Schwierigkeiten stößt, zugrunde gelegt werden.

Macht man über die Form der Gesetze, nach denen sich die Anordnung der Sterne im Raum vollzieht, bestimmte Annahmen, so werden ihre Konstanten derart zu bestimmen sein, daß die Projektion auf die Sphäre die beobachtete scheinbare Verteilung ergibt. Die Gesetze betreffen demnach 1) die Häufigkeit, mit welcher die Himmelskörper die verschiedenen Teile des Raumes erfüllen, 2) die Häufigkeit, in der sie nach ihrer absoluten Helligkeit an den einzelnen Stellen vorhanden sind, 3) den Intensitätsverlust des Lichtes für verschiedene Entfernungen.

Im einfachsten Falle wären offenbar die Dichtigkeit der Sternverteilung als konstant, die absolute Helligkeit aller Sterne als gleich und die Absorption des Sternenlichtes als nicht vor-

handen anzusehen. Diese Annahmen, welche eine erste Vorstellung vom Bau unseres Sternsystems geben, hatte W. Herschel zuerst gemacht; er erkannte jedoch bald, daß sie nicht aufrecht erhalten werden könne.

Die Tatsache, daß die Anzahl der Sterne von gleicher scheinbarer Helligkeit mit wachsendem Abstand von der Milchstraße abnimmt, wies auf eine Abnahme der räumlichen Stern-dichtigkeit mit der Entfernung von der Milchstraßenebene hin. W. Struve führte mit dieser Annahme die Untersuchung durch. Es zeigte sich aber, daß eine andere von Herschel beobachtete Erscheinung, das verringerte Anwachsen der Sternzahlen für die schwachen teleskopischen Sterne, hiermit nicht zu erklären war. Dies ließ erkennen, daß die absolute Helligkeit der Sterne nicht als gleich angesetzt werden kann, was auch schon die direkten Parallaxenbestimmungen unzweifelhaft erwiesen hatten. Es lag daher der Versuch nahe, den Sternen zwar eine konstante räumliche Dichtigkeit, aber verschiedene absolute Helligkeiten zuzuschreiben. Schiaparelli unternahm auf dieser Grundlage die Darstellung der scheinbaren Sternverteilung, gelangte aber ebenfalls nicht zum Ziel, obwohl er wie Struve auch die Absorption des Lichtes berücksichtigte.

Es blieb demnach nichts anderes übrig, als die vereinfachenden Voraussetzungen über die Verteilungsfunktionen fallen zu lassen, und das Problem auf allgemeinerer Grundlage zu behandeln. Diese Aufgabe hat H. v. Seeliger gelöst. Er setzt die Verteilung der Sterne nach ihrer scheinbaren Helligkeit sowie ihre mittleren Parallaxen in Beziehung zu den drei unbekannten Funktionen, der räumlichen Anordnung der Sterne nach ihrer Anzahl und absoluten Helligkeit sowie zur Absorption des Lichtes.

Als Voraussetzung dient nur, daß diese Helligkeiten nicht in größerer Anzahl jeden beliebigen Betrag erreichen können, sondern eine gewisse obere Grenze für sie besteht, und daß durchschnittlich an allen Stellen des Raumes das gleiche Mischungsverhältnis für die verschiedenen absoluten Helligkeiten vorhanden ist, also ihre Verteilung nicht auch vom Ort abhängt.

Die Ergebnisse der (in zahlreichen Veröffentlichungen der Kgl. Bayr. Akad. d. Wissenschaften niedergelegten) Untersuchungen, welche Seeliger nach sehr langwierigen Vorarbeiten zwecks Homogenisierung des vorliegenden Beobachtungsmaterials gewonnen hat, vermitteln uns ein Bild von der Verteilung der Sterne im Raum sowie von der Form und Größe unseres Fixsternsystems. Sie erstrecken sich über einen Zeitraum von etwa 30 Jahren und sind jetzt insofern zu einem gewissen Abschluß gelangt, als es dem Forscher gelungen ist, die Berechtigung seiner Voraussetzungen nachzuweisen, indem er Erscheinungen, die dem Problem ursprünglich fern liegen, mit ihnen erklären kann.

II. Die Sternzahlen und Parallaxen.

Die Verteilung der Sterne an der Sphäre nach ihrer Helligkeit läßt sich durch die Sternzahlen A_m angeben. Wenn der Sterngröße m die scheinbare Helligkeit h_m entspricht, so bedeutet A_m die Anzahl aller Sterne, deren scheinbare Helligkeit $\geq h_m$. Die Sternzahlen sind offenbar in hohem Grade von der Genauigkeit der Angaben für die Sterngrößen abhängig; insbesondere müssen alle Größen einem festen photometrischen System entsprechen. Dies ist zwar für die helleren Sterne bis zur Größe 6,5 durch die Potsdamer Durchmusterung und die Harvard Photometry erreicht; aber schon die Feststellung der A_m bis $m=9,2$, welche die Bonner Durchmusterung enthält, macht wegen der ungleichen Helligkeitsverhältnisse, denen hier die Größenunterschiede entsprechen, bedeutende Schwierigkeiten. Für die schwächeren teleskopischen Sterne lassen sich nur einige Fixpunkte durch die Sterneichungen der beiden Herschel bestimmen, welche der Größe 13,90 entsprechen, und aus den Untersuchungen Kapteyns der Sternzahlen für 11,16 und 14,84, dessen Werte aber unsicherer sind als die Herschelschen. Die meisten der Sternzahlen, deren Logarithmen unter $\log A_m$ der Tab. I angegeben sind, beruhen auf Zählungen, welche nur für die nördliche Hemisphäre ausgeführt und durch Verdoppelung auf den ganzen Himmel bezogen sind.

Die Abhängigkeit dieser beobachteten Sternzahlen von der Sterngröße m läßt sich durch die Formel

Tabelle I.
Logarithmen der Sternzahlen.

m	$\log A_m$	$B - R_1$	$B - R_2$
1,5	1,312	+ 2	+ 140
2,5	1,827	+ 3	+ 87
3,75	2,450	- 16	+ 23
4,75	2,957	- 23	- 4
5,75	3,504	+ 10	+ 16
6,75	4,008	0	- 2
7,50	4,394	0	- 4
9,20	5,268	+ 3	- 4
11,16	6,222	- 43	- 48
13,90	7,433	+ 27	+ 7
14,84	7,688	- 14	- 89

$$\log A_m = 4,394 + 0,514(m - 7,5) \quad (1)$$

wiedergeben. Die Unterschiede der mit ihr berechneten $\log A_m$ gegen die beobachteten sind bis $m=9,20$ unter $B - R_1$ aufgeführt. Bis etwa $m=11,16$ stellt diese lineare Abhängigkeit die Sternzahlen noch sehr befriedigend dar; danach aber werden die berechneten Werte viel zu groß. Die drei letzten $B - R_1$ nach (1) würden lauten $-0,050$, $-0,251$, $-0,479$. Für diese Größen, welche mit m' bezeichnet seien, muß die Formel demnach noch ein Zusatzglied erhalten. Eine genäherte Darstellung ergibt der Ausdruck

$$\log A_m' = 4,394 + 0,514(m' - 7,5) - 0,0240(m' - 10,5)^2, \quad (1a)$$

mit welchem die drei letzten Differenzen $B - R_1$ erhalten sind. Die langsamere Zunahme der Sternzahlen für die schwächeren teleskopischen Sterne gegenüber den helleren ist durch den Genauigkeitsgrad der beobachteten A_m verbürgt.

Diese verhältnismäßige Sicherheit der Sternzahlen gestattet es, sie der Untersuchung der Verteilungsfunktionen zugrunde zu legen. Die mittleren Parallaxen der Sterne, welche demselben Zweck dienen könnten, sind hingegen nicht durch direkte Beobachtung bekannt. Kapteyn erhielt für sie aus den vom Einfluß der Sonnenbewegung befreiten Eigenbewegungen der

Tabelle II.
Mittlere Parallaxen.

m	$\pi(N)$	$\pi(K)$	$\pi(A)$
0,5	0",0892	0",0892	0",0903
1,5	562	630	673
2,0	447	530	578
3,0	282	375	420
4,0	178	265	299
5,0	112	187	210
6,0	71	132	145
7,0	45	94	97
8,5	22	56	53
10,0	11	33	28

Sterne, unter Voraussetzung der Regellosigkeit dieser Eigenbewegungen, den Ausdruck

$$\log \pi''_m = \log 0,106 - 0,1505 m, \quad (2)$$

nach welchem die in Tab. II angegebenen π (K) berechnet sind.

III. Die scheinbare und räumliche Sternverteilung.

Nach der einfachsten Annahme erfüllen die Sterne den Raum überall mit gleicher Dichtigkeit, besitzen dieselbe Leuchtkraft, und ihr Licht wird mit dem Quadrat der Entfernung geschwächt. Sind dann r_m und r_{m1} die Entfernungen, in denen die Sterne die Größen m und m_1 oder die scheinbaren Helligkeiten h_m und h_{m1} haben, sowie A_m und A_{m1} die Anzahlen aller Sterne, von den hellsten bis zu denen mit den Größen m und m_1 , so müssen sich diese Sternzahlen wie die Rauminhalte der Kugeln mit den Radien r_m und r_{m1} verhalten. Aus

$$\frac{A_m}{A_{m1}} = \left(\frac{r_m}{r_{m1}}\right)^3 \quad \text{und} \quad \frac{h_{m1}}{h_m} = \left(\frac{r_m}{r_{m1}}\right)^2$$

folgt

$$\frac{A_m}{A_{m1}} = \left(\frac{h_{m1}}{h_m}\right)^{\frac{3}{2}},$$

wo nach dem gebräuchlichen photometrischen System

$$\frac{h_{m1}}{h_m} = 10^{0,4(m-m_1)}. \quad (3)$$

Demnach ist, unter Einführung zweier Konstanten c und c' ,

$$A_m = c \cdot h_m^{-\frac{3}{2}} \quad (4a)$$

oder

$$\log A_m = c' + \frac{6}{10} m \quad (4b)$$

und

$$\log \alpha_m = \log \frac{A_m}{A_{m-\frac{1}{2}}} = \frac{3}{10}. \quad (4c)$$

In diesem Falle bilden also die Sternzahlen $A_{m-\frac{1}{2}}, A_m, A_{m+\frac{1}{2}}$ eine geometrische Reihe mit dem konstanten Quotienten $10^{0,3} = 2,00$, die bis zu den schwächsten Sternhelligkeiten an der Grenze des Systems gültig ist.

Sind ferner π_m und π_{m1} die r_m und r_{m1} entsprechenden Parallaxen, so ist wegen

$$\left(\frac{\pi_{m1}}{\pi_m}\right)^2 = \left(\frac{r_m}{r_{m1}}\right)^2 = \frac{h_{m1}}{h_m},$$

unter Einführung zweier Konstanten C und C' ,

$$\pi_m = C \cdot h_m^{-\frac{1}{2}} \quad (5a)$$

oder

$$\log \pi_m = C' - \frac{2}{10} m \quad (5b)$$

und

$$\log \dot{p}_m = \log \frac{\pi_m}{\pi_{m-\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{10}. \quad (5c)$$

In diesem Falle bilden also die Parallaxen $\pi_{m-\frac{1}{2}}, \pi_m, \pi_{m+\frac{1}{2}}$ eine geometrische Reihe mit dem konstanten Quotienten $10^{-0,1} = 0,794$.

Ein Vergleich der Ausdrücke (1) mit (4b) und (2) mit (5b) zeigt nun eine andere Abhängigkeit der beobachteten A_m und π_m von der Sterngröße. Es wird sich hier vorwiegend darum handeln, unter welchen Voraussetzungen die beobachteten A_m zu erhalten sind. Die Gleichung (1) läßt sich in der Form schreiben

$$\log A_m = c' + \frac{6-2\lambda}{10} m$$

$$A_m = c \cdot h_m^{-\frac{\lambda-3}{2}} \quad (6)$$

$$\log \alpha_m = \log \frac{A_m}{A_{m-\frac{1}{2}}} = \frac{3-\lambda}{10},$$

wo $\lambda = +0,43$. Die A_m nehmen in Wirklichkeit nicht in dem Maße zu, wie es bei konstanter Dichtigkeit sein müßte. Die naheliegendste Annahme wäre nun, daß die räumliche Dichtigkeit D der Sterne selber nicht konstant ist, sondern mit der Entfernung abnimmt. Für die Anzahl $\mathfrak{A}_m$ aller Sterne von der Größe m ergibt sich

$$\mathfrak{A}_m = 4\pi r^2 D(r) dr,$$

woraus die Anzahl aller Sterne bis zur Größe m folgt

$$A_m = 4\pi \int_0^{r_m} r^2 D(r) dr.$$

Hat nun etwa das Dichtigkeitsgesetz die Form

$$D(r) = \gamma \cdot r^{-\lambda},$$

wo γ eine Konstante ist, so wird, wenn man die obere Grenze r_m durch die scheinbare Helligkeit h_m , und die Helligkeit h_0 in der Entfernung 1 ausdrückt,

$$A_m = 4\pi \gamma \int_0^{\sqrt{\frac{h_0}{h_m}}} r^{2-\lambda} dr$$

$$= \frac{4\pi \gamma}{3-\lambda} \left(\frac{h_0}{h_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} = c \cdot h_m^{-\frac{\lambda-3}{2}},$$

wo c die Größe λ enthält und hinsichtlich m konstant ist. Die für $D(r)$ aufgestellte Form führt also auf den Ausdruck (6) für die Sternzahlen; ebenso läßt sich, wenn auch umständlicher, nachweisen, daß (6) das genannte Gesetz für $D(r)$ zur Folge hat.

Auch in diesem Falle muß das Bildungsgesetz (6) der A_m sich bis auf die schwächsten Stern-

helligkeiten erstrecken. Dem widersprechen jedoch die für $m=13,9$ und $m=14,8$ beobachteten Sternzahlen, bei denen der Quotient α einen anderen, viel kleineren Wert hat; denn nach (1a) ist

$$\log \alpha_m' = \frac{3 - \lambda - 0,24(m' - 10,75)}{10}. \quad (6a)$$

Die Größe n , bei welcher diese Änderung der α eintritt, läßt sich zunächst noch nicht näher angeben. Jedenfalls aber wird hier eine zweite Erweiterung der Voraussetzungen nötig. Nimmt man an, daß die absoluten Helligkeiten der Sterne verschieden sind, und bezeichnet die Sterngröße, welche die absolut hellsten Sterne an der Grenze des Systems erreichen, mit n , so folgt, daß die Sternzahlen der schwächeren Sterne mit der Größe m' ($m' > n$) weniger stark anwachsen als die A_m ($m < n$), weil in den Entfernungen, in denen die hellsten Sterne die scheinbare Größe m' erreichen würden, keine Sterne mehr stehen. In der Tat haben auch die direkten Parallaxenbestimmungen die Verschiedenheit der absoluten Helligkeiten erwiesen.

Es hat sich somit die Notwendigkeit gezeigt, die ursprünglichen Annahmen über die räumliche Verteilung der Sterne nach Anzahl und absoluter Helligkeit fallen zu lassen. Wie spektralanalytische Untersuchungen der letzten Jahre andeuten, ist es weiterhin auch erforderlich, die dritte Voraussetzung von der Unmerklichkeit der Absorptionswirkung aufzugeben, so daß nur eine allgemeine Behandlung der Aufgabe zum Ziele führen kann.

IV. Die räumliche und scheinbare Sternverteilung.

Der scheinbaren Helligkeit h eines Sternes in der Entfernung r entspreche in der Entfernung 1 die scheinbare Helligkeit i , seine Leuchtkraft oder absolute Helligkeit. Zwischen diesen Größen besteht die Beziehung $i = hr^2$, welche bei Wirksamkeit einer Absorption zu

$$h = \frac{i}{r^2} \cdot \psi(r) \quad (7)$$

wird. Hier ist der Absorptionsfaktor $\psi(r) < 1$, da er die scheinbare Helligkeit verringert.

Auf die Gesamtheit der in der Volumeinheit enthaltenen Sterne, welche die räumliche Dichtigkeit $D(r)$ angibt, sind die Sterne verschiedener Leuchtkräfte in einem Verhältnis verteilt, das die Verteilungsfunktion $\varphi(i)$ bestimmt. Die Leuchtkräfte i haben einen gewissen endlichen Höchstwert H , so daß das Integral

$$\int_0^H \varphi(i) di = F(H) = 1 \quad (8)$$

die Anzahl der Sterne aller Leuchtkräfte umfaßt und als Maßstab für die Anzahlen der einzelnen i dient.

Die Größen D, φ, H, ψ werden im allgemeinen vom räumlichen Ort abhängig, also Funktionen der Entfernung und Richtung sein. Die Veränderlichkeit mit der Richtung kann dadurch berücksichtigt werden, daß die Funktionen für verschiedene Teile der Himmelsoberfläche erhalten werden. Die Eindeutigkeit ihrer Ermittlung macht aber die Annahme nötig, daß das Mischungsverhältnis φ der Leuchtkräfte überall das gleiche sei. Damit sind die Abhängigkeiten auf $D(r), \psi(r), \varphi(i), H = \text{const}$ zurückgeführt.

Die Anzahl der Sterne auf dem Flächenstück ω in der Entfernung r mit der Leuchtkraft i , die in diesem Abstand die scheinbare Helligkeit h_m haben, wird

$$A_m(r) = \omega r^2 D(r) dr \varphi(i) di.$$

Demnach wird die Anzahl aller Sterne in der Entfernung r , deren scheinbare Helligkeit $\geq h_m$,

$$A_m(r) = \omega r^2 D(r) dr \int_{\frac{h_m r^2}{\psi(r)}}^H \varphi(i) di,$$

und weiterhin die Anzahl aller Sterne, deren scheinbare Helligkeit $\geq h_m$,

$$A_m = \omega \int_{r_0}^{r'} r^2 D(r) dr \int_{\frac{h_m r^2}{\psi(r)}}^H \varphi(i) di, \quad (9)$$

wo die Entfernung r' , bis zu welcher zu integrieren ist, sich nach (7) zu

$$r' = \sqrt{\frac{H \cdot \psi(r')}{h_m}} \quad (10a)$$

bestimmt. In dieser Entfernung nehmen die absolut hellsten Sterne die scheinbare Helligkeit h_m an. Je kleiner h_m , desto weiter schiebt sich r' hinaus. Die scheinbare Helligkeit der hellsten Sterne an der Grenze r_1 des Systems sei h_n , wo wiederum

$$r_1 = \sqrt{\frac{H \cdot \psi(r_1)}{h_n}}. \quad (10b)$$

Rückt r' außerhalb der Grenze r_1 , was für noch schwächere Helligkeiten als h_n der Fall ist, so kann sich die Integration nur bis zu r_1 erstrecken, und für die A_m' , deren $m' > n$, ist in (9) r' durch r_1 zu ersetzen. Die untere Grenze r_0 ferner kann hier gleich Null gesetzt werden. Damit sind die beiden Bildungsgesetze für A_m und A_m' bestimmt.

Die Anzahl der Sterne von der scheinbaren Helligkeit h_m erhält man aus (9) zu

$$\frac{\partial A_m}{\partial h_m} = -\omega \int_0^r \frac{r^4}{\psi(r)} D(r) \varphi\left(\frac{h_m r^2}{\psi(r)}\right) dr,$$

und hieraus ergibt sich für die mittlere Parallaxe π_m der Sterne von der Größe m der Ausdruck

$$\begin{aligned} \pi_m \cdot \int_0^r \frac{r^4}{\psi(r)} D(r) \varphi\left(\frac{h_m r^2}{\psi(r)}\right) dr &= \\ &= \int_0^r \frac{r^3}{\psi(r)} D(r) \varphi\left(\frac{h_m r^2}{\psi(r)}\right) dr. \end{aligned} \quad (11)$$

Diese Formeln für die Sternzahlen und Parallaxen können durch passende Umformung eine Gestalt erhalten, welche sie in gewissem Grade von der Absorption unabhängig macht. Setzt man

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{\psi(r)} &= q^2, \quad r = f(q), \\ A(q) &= D(f(q)) \cdot \left(\frac{f(q)}{q}\right)^2 \cdot f'(q), \end{aligned} \quad (12)$$

so wird

$$A_m = \omega \int_0^{\sqrt{H/h_m}} A(q) q^2 dq \int_{h_m q^2}^H \varphi(i) di \quad (13a)$$

$$A_m' = \omega \int_0^{\sqrt{H/h_m}} A(q) q^2 dq \int_{h_m q^2}^H \varphi(i) di \quad (13b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi_m}{\sigma''_{,2}} &= \frac{\int_0^{\sqrt{H/h_m}} A(q) \frac{q^4}{f(q)} \varphi(h_m q^2) dq}{\int_0^{\sqrt{H/h_m}} A(q) q^4 \varphi(h_m q^2) dq} \quad (14) \end{aligned}$$

und entsprechend π_m' . Die Einheit der Entfernung ist dabei entsprechend einer Parallaxe von $\sigma''_{,2}$ gewählt. Als Spezialfall von (13b) folgt für die Anzahl aller Sterne

$$A_\infty = \omega \int_0^{\sqrt{H/h_m}} A(q) q^2 dq. \quad (13c)$$

Da in den Gleichungen (13) die Absorption nicht vorkommt, so können sie behandelt werden, ohne daß ψ bekannt ist. Die Parallaxenformel dagegen setzt die Beziehung zwischen r und q für die Ausführung der Integration voraus.

Ist ferner die Absorption unmerklich, also $\eta(r) = 1$, so nimmt (9) dieselbe Form wie (13) an. Man kann darum auch $A(q)$ als wahre räumliche Dichte $D(r)$ und q als wahre Entfernung r betrachten; gegebenenfalls läßt sich dann die Absorption durch Einführung von η in den Grenzen berücksichtigen.

Die Berechnung der unbekannten Verteilungsfunktionen vereinfacht sich außerordentlich durch die Form (6), in der die beobachteten Sternzahlen dargestellt werden konnten. Aus (13a) wird nach (8)

$$\frac{1}{\omega} A_m = \int_0^{\sqrt{H/h_m}} A(q) q^2 dq - \int_0^{\sqrt{H/h_m}} A(q) q^2 F(h_m q^2) dq, \quad (15a)$$

was durch das Dichtigkeitsgesetz $A(q) = \gamma \cdot q^{-\lambda}$ und mit $x = h_m q^2$ auf

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma \omega} A_m &= \frac{H^{\frac{3-\lambda}{2}}}{3-\lambda} h_m^{\frac{\lambda-3}{2}} - \\ &= h_m^{\frac{\lambda-3}{2}} \int_0^H x^{\frac{1-\lambda}{2}} F(x) dx = \frac{c}{\gamma} h_m^{\frac{\lambda-3}{2}} \quad (15b) \end{aligned}$$

führt. Die Beziehung:

$$A(q) = \gamma \cdot q^{-\lambda} \text{ entspricht } A_m = c \cdot h_m^{\frac{\lambda-3}{2}} \quad (16)$$

gilt also für alle q , und ebenso läßt sich das Umgekehrte beweisen. Die Abhängigkeit A_m' (h_m') wird jedoch durch den Ausdruck für q bestimmt, denn im Integral von (15b) ist hier H durch $H \cdot \frac{h_m}{h_m'}$ zu ersetzen.

Auch die Parallaxen erhalten für das Dichtigkeitsgesetz (16) eine sehr einfache Form, wofür man von dem Einfluß der Absorption absieht. Setzt man wiederum $x = h_m q^2$, so ist nach (14)

$$\frac{\pi_m}{\sigma''_{,2}} = h_m^{1/2} \cdot \frac{\int_0^H x^{\frac{2-\lambda}{2}} \varphi(x) dx}{\int_0^H x^{\frac{3-\lambda}{2}} \varphi(x) dx} = C \cdot h_m^{1/2}. \quad (17)$$

Demnach werden auch die π_m bis auf einen konstanten Faktor unabhängig vom Verteilungsgesetz φ und verlaufen proportional mit der Wurzel aus der scheinbaren Helligkeit, während für die π_m' diese einfache Abhängigkeit von h_m nicht mehr besteht. Falls die beobachteten mittleren Parallaxen von den durch (17) dargestellten normalen Parallaxen abweichen,

so müßte dies, bei Gültigkeit des Gesetzes (16), durch die Absorption verursacht sein.

Es liegt daher nahe, von den drei unbekannten Funktionen die räumliche Dichtigkeit aus den A_m , die Verteilung der Leuchtkräfte aus den A_m' und die Absorption aus den π_m zu bestimmen. Aus den A_m' ergibt sich weiterhin mit Hilfe von q die Grenzgröße h_m , während der Betrag H der größten Leuchtkraft nicht aus den Abzählungen, sondern aus den Parallaxen zu erhalten ist. Aus H und h_m aber folgt nach (10b) sofort die Grenze r_1 des Systems.

Das Dichtigkeitsgesetz $A(q)$ ist zunächst durch (16) gegeben, wo $\lambda = 0,43$, und die mit ihm dargestellten A_m sind aus $B - R_1$ der Tab. I zu ersehen. Seinen Verlauf gibt unter $A_0(q)$ die Tab. III an, wo der Faktor $\gamma = 1$ gesetzt ist. Denn da die konstanten Faktoren von A und q in (13) und (14) nur als Produkt vorkommen, sind sie nicht einzeln zu erhalten. Die durch (17) dargestellten normalen Parallaxen sind weiterhin in der Tab. II unter $\pi(N)$ angegeben, wobei zum Vergleich $\log C = 0,09$ gewählt wurde. Der Unterschied der $\pi(N)$ und $\pi(K)$ ist sehr bedeutend. Wie die Formeln (2) und (5) zeigen, beträgt der Wert des Quotienten π_m/π_{m-1} für die Kapteynschen Parallaxen 0,707, für die normalen Parallaxen dagegen 0,631. Eine Übereinstimmung kann also durch passende Wahl des Faktors C , der sich aus dem Gesetz $q(i)$ bestimmt, nicht erzielt werden. Macht man nun die Annahme einer gleichmäßigen, allgemeinen Absorption, welche durch

$$\psi(r) = \exp.(-v \cdot r) \quad (18)$$

$$q = r \cdot \exp. \left(\frac{v \cdot r}{2} \right)$$

(wo allgemein $\exp.(x)$ nach dem Vorgange von H. Bruns e^x bedeutet), oder genügend genähert durch

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \alpha + \beta \ln q \quad (18a)$$

gegeben ist, wo die Konstanten α und β aus v zu erhalten sind, so wird derjenige Wert von v zu bestimmen sein, mit welchem aus den normalen die beobachteten mittleren Parallaxen erhalten werden. Es zeigt sich mit einem vorläufigen Ansatz für q , daß erst bei etwa $v = \frac{1}{15}$ eine genügende Annäherung an die $\pi(K)$ erreicht werden kann. Das führt aber auf derartig große Absorptionsbeträge, daß sie aus verschiedenen Gründen als ganz unwahrscheinlich anzusehen sind (vgl. weiter unten).

Will man den Kapteynschen Parallaxen die nötige Sicherheit zusprechen, so bleibt nur

der Schluß übrig, daß das Gesetz (16) nicht in aller Strenge besteht, denn nur durch eine Änderung von A können andere Parallaxen als die $\pi(N)$ erhalten werden. Dadurch aber macht sich zugleich das Verteilungsgesetz $q(i)$ sowohl für die A_m wie für die π_m bemerkbar.

Es muß demnach vorläufig auf die Bestimmung der Absorption verzichtet werden. Nachdem q genähert aus den A_m' bestimmt ist, ergibt sich das nötige Zusatzglied für A , durch welches sowohl in den A_m wie in den π_m Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung erzielt wird. Mit diesem geänderten A eine zweite Bestimmung für q und danach wiederum für A auszuführen, wird sich wegen der Unsicherheit der A_m' erübrigen.

Die Ermittlung von q aus den A_m' wird durch Verbindung von (13) mit (1a) und $A(q)$ nach (16) möglich. Allgemein ist

$$\frac{\partial A_m}{\partial h_m} = - \omega \int_{r_1}^H \frac{H}{h_m} A(q) q^4 q(h_m q^2) dq. \quad (19)$$

Für A_m' steht in der oberen Grenze h_m statt h_m . Führt man $A = \gamma \cdot q^{-\lambda}$ ein, so ergibt sich nach nochmaliger Differentiation für $q(i)$ die Form

$$q(i) = \Gamma \cdot \exp. (a \log i + b (\log i)^2) \cdot [1 + c \log i + d (\log i)^2], \quad (20)$$

wo wie auch im folgenden, i in Einheiten von H ausgedrückt ist. Die Ermittlung der A_m und π_m läßt sich nun, wie aus (19) und (17) ersichtlich, auf die Berechnung des Integrals

$$J_\mu = \frac{1}{2} \left(\frac{H}{h_m} \right)^{\frac{\mu+1}{2}} \cdot \int_{\frac{h_m r_0^2}{H}}^1 x^{\frac{\mu-1}{2}} \cdot q(Hx) dx \quad (21)$$

zurückführen. Mit q nach (20) und A nach (16) läßt sich J_μ als Kramp'sches Integral bestimmen, worauf A_m und π_m zu berechnen sind. Um bei beiden eine Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung zu erzielen, ergibt sich für $A(q)$ der Ansatz

$$A(q) = \gamma \cdot q^{-\lambda} (1 - \alpha \cdot q^{\lambda - \lambda_1}) = \gamma \cdot q^{-0,49} (1 - 0,58 q^{-0,50}). \quad (22)$$

Da dieser Ausdruck für kleinere Entfernungen als $q = \frac{1}{3}$ zu negativen Werten der Dichte

führt, wird die untere Grenze zu $r_0 = \frac{1}{3}$ ($\pi = 0',6$) angesetzt. Der Verlauf von q bestimmt sich weiterhin zu

$$\frac{1}{\Gamma} \cdot q(i) = \exp. (-5,3844 \log i - 0,2301 \cdot (\log i)^2) - \exp. (\log i / \log e) \quad (23)$$

wo das zweite Glied nur für die allergrößten, bei H gelegenen Leuchtkräfte merkliche Beiträge liefert. Für $i=0$ wird offenbar $\varphi=\infty$. Es läßt sich jedoch nachweisen, daß für die vorliegenden A_m und A_m' nur die Verteilung der großen Leuchtkräfte von Einfluß ist. Die größte Leuchtkraft H entspricht der Sterngröße $-4,3$, während aus den Kapteynschen Parallaxen in guter Übereinstimmung damit $-4^m,6$ folgt.

Die aus (22) und (23) erhaltenen mittleren Parallaxen sind in Tab. II unter $\pi(A)$ aufgeführt. Mit Rücksicht auf den hypothetischen Charakter der $\pi(K)$ wäre es unzweckmäßig, durch Veränderung der angenommenen Konstanten einen besseren Anschluß zu suchen. Das Gleiche gilt für die aus denselben Ansätzen berechneten Sternzahlen. Sie sind aus Tab. I zu ersehen, wo ihre Unterschiede $B-R_2$ gegen die beobachteten Werte angegeben sind.

Die Helligkeit h_n der absolut hellsten Sterne an der Grenze des Systems ergibt sich aus den A_m' zu h_n entsprechend $10^m,5$, woraus nach (10b) $r_1=910$ oder $\pi_{(1)}=0'',00022$

folgt. Den Verlauf der räumlichen Sterndichtigkeit innerhalb dieser Grenzen gibt nach (22) die Tab. III unter $A(\varrho)$ an, wobei wiederum der Faktor γ passend gewählt ist. Es zeigt sich, daß zwischen diesem und dem ursprünglichen Dichtigkeitsgesetz $A_0(\varrho)$ nur für die nächste Umgebung der Sonne größere Abweichungen bestehen. Bereits in einer Entfernung von etwa vier Einheiten ist der Unterschied genügend gering.

Tabelle III.

Verlauf der räumlichen Sterndichtigkeit.

ϱ	$A_0(\varrho)$	$A(\varrho)$	$D_0 - A_0$
1	1,000	0,614	0,00
2	0,742	610	0
3	624	551	0
4	551	522	0
5	501	488	0
10	372	383	0
50	186	195	0
100	138	143	+1
500	69	67	+2
1000	51	51	+3

Um aus der scheinbaren räumlichen Dichtigkeit A die wahre Dichte D zu erhalten, ist die Kenntnis der Absorptionswirkung notwendig. Betrachtet man eine allgemeine Absorption von der Form (18), so wird nach (12)

$$D(r) = \gamma \cdot r^{-\lambda} \cdot \frac{\psi(r) - \frac{1}{2} r \psi'(r)}{(\psi(r))^{\frac{3-\lambda}{2}}} \quad (24)$$

$$= \gamma \cdot r^{-\lambda} \cdot \left(1 + \frac{\nu}{2} r\right) \cdot \exp\left(\frac{3-\lambda}{2} \cdot \nu r\right).$$

Für große Beträge von ν ergibt sich ein starkes Anwachsen von D gegen die Grenzen des Systems, was man im Hinblick auf das bei den Spiralnebeln beobachtete umgekehrte Verhalten als unwahrscheinlich ansehen kann. Macht man darum die Voraussetzung, daß die wahre Dichtigkeit im allgemeinen mit wachsender Entfernung nicht zunimmt, so läßt sich nach (24) für ν eine gewisse obere Grenze angeben. Dieser Höchstwert von ν folgt aus der Bedingung, daß an der Grenze des Systems die Änderung der Dichte mit der Entfernung von negativen zu positiven Werten übergeht. Für

$$x = \frac{\nu r}{2} \text{ wird nach (24)}$$

$$\frac{1}{D} \frac{dD}{dr} = \frac{3-\lambda}{r(1+x)} \left[x^2 + x \frac{2(2-\lambda)}{3-\lambda} - \frac{\lambda}{3-\lambda} \right].$$

Setzt man den Klammerausdruck gleich Null, so ist

$$x = 0,1243 = \frac{\nu r_1}{2}, \quad \psi(r_1) = 0,7800,$$

$$r_1 = 805, \quad \nu = 0,0003086.$$

Die Ausdehnung des Systems wird also von 910 auf 805 Einheiten reduziert, die Lichtschwächung beträgt nach (3) $-2,5 \log \psi(r_1) = 0^m,27$, und die nach (24) mit dem erhaltenen ν berechnete Dichtigkeit D_0 nimmt gegen A_0 um die in Tab. III, in Einheiten der zweiten Stelle angegebenen Beträge zu. Auch nach anderen Annahmen über das Absorptionsgesetz zeigt sich eine ähnlich geringe Änderung in der Verteilung der Sterne.

V. Die Sternverteilung und die Milchstraße.

Die Betrachtung der für die ganze Sphäre vereinigten Sternzahlen hatte zwei Gesetze ergeben: 1). Die Sternzahlen nehmen bis etwa zur 11. Größe zwar gleichmäßig, aber beträchtlich langsamer zu, als dies bei konstanter räumlicher Verteilung der Fall wäre. 2). Die Sternzahlen der schwächeren teleskopischen Sterne wachsen beträchtlich langsamer als die unter 1) genannten. Daraus konnten die Abhängigkeiten $A(\varrho)$ und $\varphi(i)$ abgeleitet werden. Eine wesentliche Ergänzung geben nun die Sternzahlen für die einzelnen Bezirke des Himmels, die eine starke Abhängigkeit von der Lage zur Milchstraße erkennen lassen. Diese Abhängigkeit kann in der Weise berücksichtigt werden, daß die Sphäre in 9 je 20 Grad breite, symmetrisch zur Milchstraße liegende Zonen eingeteilt wird, für deren jede eine besondere Sternverteilung erhalten wird. Das verfügbare Beobachtungsmaterial bezieht sich jedoch hauptsächlich auf die Himmelshälfte nördlich des Äquators und ist daher im wesent-

lichen auf die nördliche galaktische Hemisphäre beschränkt. Die Anordnung der Sterne hat sich aber für je zwei symmetrisch liegende galaktische Zonen so weit als gleich ergeben, daß man berechtigt ist, die Verteilung auf der nördlichen galaktischen Halbkugel als maßgebend für die ganze Sphäre zu betrachten. Das typische Sternsystem, welches den Einfluß der Lage zur Milchstraße auf die Sternverteilung berücksichtigt, besteht daher aus fünf galaktischen Zonen A bis E , von denen A bis D je 20, E 10 Grad Breite haben, und deren Flächeninhalt in Quadratgraden in Tab. IV unter F angegeben ist.

Die Konstanz der Quotienten α , die sich für die Sterne verschiedener Größen bis zur neunten Größe ergeben hatte, besteht nun auch innerhalb jeder Zone. Sie weichen für die Durchmusterungssterne sechster bis neunter Größe nur wenig von ihrem Mittel ab, das für jede Zone unter $\log \alpha(D)$ aufgeführt ist, und ähnliche Werte folgen aus den hellen Sternen bis zur sechsten Größe. In dem gleichmäßigen Anwachsen dieser Beträge zeigt sich deutlich der Einfluß der Milchstraße. Außer den in Tab. I angegebenen Sternen lassen sich hier noch Zählungen benutzen, welche Celoria innerhalb einer schmalen Deklinationszone ausgeführt hat. Bildet man die Verhältnisse C/D der Sternzahlen nach Celoria und nach der Durchmusterung für jede Zone, so ergeben sich, wie die Tab. IV zeigt, gleichlaufende Werte. Die Größe der C -Sterne ist unbekannt, man kann sie zu etwa 11^m ansetzen. Das führt auf das folgende Gesetz: 3). Die Zahl der hellen Sterne bis etwa zur 11. Größe wächst mit der Sterngröße um so langsamer, je weiter die betrachtete Gegend von der Milchstraße entfernt ist.

Tabelle IV.

Die scheinbare typische Sternverteilung.

Z	F	$\log \alpha(D)$	C/D	H/D	K/H
A	1243	0,218	—	50	2
B	3583	228	20	64	2
C	5488	251	20	79	2
D	6730	264	20	122	2
E	3583	272	20	272	2

Während die helleren Kapteyn-Sterne sich ähnlich wie die Celoria-Sterne verhalten, zeigen die Sternzahlen nach Herschel und die der schwächeren Kapteyn-Sterne (K) einen wesentlich anderen Verlauf. Bildet man aus den Zählungen von W. und J. Herschel, welche allerdings für die Milchstraße divergieren, das Mittel H , so ergeben sich aus H , D und K die Quotienten der Tab. IV. Sie lassen das Gesetz erkennen: 4). Das Anwachsen der Sternzahlen

mit der Sterngröße verringert sich für die schwächeren Sterne mit der Entfernung von der Milchstraße verhältnismäßig viel stärker, als für die helleren Sterne bis etwa 11^m .

Das verschiedene Verhalten der Sternzahlen für die einzelnen Zonen muß sich auch in den Verteilungsgesetzen A und φ äußern. Da aber die Verteilung der Leuchtkräfte als unabhängig vom Ort vorausgesetzt war, so wird sie folgerichtig auch für alle Zonen als gleich anzusehen sein. Im typischen System hat daher nur die Dichtigkeit einen zonenweise verschiedenen Verlauf.

Unter Voraussetzung der strengen Gültigkeit von (16) für das Dichtigkeitsgesetz würde man aus den $\alpha(D)$ der Tab. IV nach (6) die Exponenten λ erhalten. Diese Werte sind als λ_0 in Tab. VI angegeben. Sie zeigen, daß die Dichtigkeit an den galaktischen Polen mit der Entfernung viel stärker abnimmt als in der Nähe der Milchstraße. Es ist jedoch für die Verteilung der Sterne und die Begrenzung des Systems der Ansatz (22) zugrunde zu legen. Das empirische Material liefern die in Tab. V angegebenen Sternzahlen, welche die ungenaueren Kapteyn-Sterne nicht enthalten.

Tabelle V.

Logarithmen der Sternzahlen.

m	A	B	C	D	E
3,5	0,659	1,153	1,458	1,451	1,393
4,5	0,984	1,728	1,930	2,083	1,862
5,5	1,714	2,202	2,431	2,622	2,454
6,5	2,250	2,691	2,928	3,146	2,983
7,5	2,740	3,153	3,415	3,659	3,519
9,2	3,440	3,937	4,263	4,565	4,426
13,9	5,140	5,742	6,164	6,650	6,860

Die Aufgabe läßt sich auch hier auf die Berechnung des Integrals J_μ nach (21) zurückführen, in dem φ nach (23) ersetzt wird, und das eine Funktion von m und λ ist. Die A_m sind alsdann in einfacher Weise aus den J_μ zu erhalten; und die A'_m unterscheiden sich von den nach dem Bildungsgesetz der A_m berechneten A_m um einen Betrag $\Delta A'_m$, der sich mit den Argumenten $m' - n$ und λ erhalten läßt und die Anzahl derjenigen Sterne darstellt, welche in einer größeren Entfernung als r_1 eine Helligkeit $\geq h'_m$ besitzen würden. Demzufolge sind zunächst die Sternzahlen für $m = 3,5, 4,5, \dots 9,2$ mit verschiedenen Werten von λ zu berechnen und mit den aus der Beobachtung gewonnenen A_m der Tab. V zu vergleichen. Dadurch läßt sich für jede Zone der zugehörige Exponent λ bestimmen, dessen Beträge in Tab. VI aufgeführt sind und mit den λ_0 befriedigend übereinstimmen. Mit Hilfe der bekannten λ können

auf dieselbe Weise für jede Zone das A_m' für $m' = 13,9$ und die zugehörigen $\Delta A_m'$ berechnet und von den $\Delta A_m'$ dasjenige ausgesucht werden, welches von A_{m_0}' auf das beobachtete A_m' führt. Dadurch ist für jede Zone das zugehörige n festgelegt, und mittels (10b) ergibt sich die entsprechende Entfernung r_1 der Grenze des Systems. Die Werte von n und r_1 enthält ebenfalls Tab. VI. Sie sind besonders für die Milchstraße als noch unsicher zu bezeichnen, da hier die A_m nach W. Herschel doppelt so groß sind als nach J. Herschel.

Tabelle VI.
Konstanten des Systems der Milchstraße.

Z	λ_0	λ	n	r_1	$\eta \cdot r_1$
A	0,82	0,89	8,3	327	5,3
B	72	74	8,0	380	6,2
C	49	62	9,0	457	7,5
D	36	44	9,8	645	10,6
E	28	34	11,9	1700	27,7

Jedenfalls steht die starke Abplattung des Systems außer Frage. Sein Durchmesser in der Milchstraßenebene würde sich zu 3400, seine Achse durch die galaktischen Pole zu 654 Einheiten ($\pi = 0'',2$) angeben lassen; und die hellsten Sterne, die in der Entfernung 1 die Sterngröße — 4,3 besitzen, haben an den Polen die Größe 8,3, in der Milchstraße 11,9. Die Spalte $\eta \cdot r_1$ gibt r_1 in Einheiten von 1000 Lichtjahren.

Die mit den erhaltenen Verteilungsfunktionen für die einzelnen Zonen zu berechnenden mittleren Parallaxen können nicht mit der Beobachtung verglichen werden, da die Kapteynschen Parallaxen nur für den ganzen Himmel ermittelt sind. Ihre Haupteigenschaft jedoch, welche die Rechnung ergibt, die gleichförmige Veränderlichkeit mit der galaktischen Breite, scheint auch in anderen Beobachtungen angedeutet, die noch zu erwähnen sind.

VI. Die Verteilungsfunktionen.

Obwohl unsere Kenntnis der mittleren Parallaxen und mittleren räumlichen Bewegungen der Sterne sowie der Verteilung der Spektraltypen nicht zur selbständigen Ableitung der Verteilungsgesetze ausreicht, ermöglicht sie es doch, zu prüfen, ob der für diese erhaltene Verlauf mit ihnen vereinbar ist. Die wichtigste Voraussetzung, auf der die angegebenen Resultate beruhen, betrifft die Möglichkeit, das eigentliche Verteilungsgesetz der Sterne, welches eine Funktion von ihrem Ort und ihrer Leuchtkraft ist, in ein Produkt von zwei Funktionen A und φ zu zerlegen, deren eine vom Ort, deren andere von der Leuchtkraft abhängt. Während die

Abhängigkeit $A(\varrho)$ durch die Definition gegeben ist, entspricht die Reduktion von $\varphi(i, \varrho)$ auf $\varphi(i)$ der Annahme, daß an allen Stellen des Raumes die Sterne von gleicher Leuchtkraft in der gleichen Prozentzahl, wenn auch wegen der verschiedenen Dichte nicht in gleicher Anzahl vorkommen.

Hiergegen scheint nun die Beobachtung zu sprechen, daß die Sterne der früheren Spektraltypen gegenüber denen der späteren verhältnismäßig um so zahlreicher vorkommen, je näher sie an der Milchstraße stehen. Den früheren Typen kommt aber eine größere Flächenhelligkeit und daher im Durchschnitt eine größere Leuchtkraft zu. Bildet man von den Anzahlen der Sterne bis zur sechsten Größe, welche einem bestimmten Pickeringischen Typus angehören, die Quotienten für die galaktische Äquatorial- und Polarzone, so erhält man nach Pickering die Q_B der Tab. VII für die verschiedenen Typen T . Sie zeigen deutlich die genannte ungleichmäßige Verteilung. Es ist jedoch zu erwarten, daß sich diese mit den für φ und A gemachten Annahmen erhalten läßt. Die Bereiche, innerhalb welcher zwei Leuchtkräfte $i_1 > i_2$, die zu den Sternzahlen A_m Beiträge liefern, stehen können, sind zwei konzentrische Kugeln mit den Radien $\varrho_1 > \varrho_2$. In der Richtung der Polarzone A nimmt die Dichtigkeit A viel rascher ab als in der Zone E , indem etwa $A(E):A(A) = \varrho^{-0,34}:\varrho^{-0,89}$ mit $\sqrt{\varrho}$ wächst. Die Verhältnisse aus den Anzahlen der Sterne einer bestimmten Leuchtkraft i_μ , $\mathfrak{A}(E, i_\mu):\mathfrak{A}(A, i_\mu) = Q_\mu$, müssen darum für wachsende Leuchtkräfte i_μ ebenfalls wachsen, indem $Q_\mu = c \cdot \sqrt{\varrho_\mu}$ wird. In der Tat ergibt die Rechnung mit den Ansätzen für φ und A die in Tab. VII aufgeführten Q_R , welche mit den von Pickering beobachteten Werten nahe übereinstimmen. Sie werden dadurch erhalten, daß sich mit Hilfe der gemessenen Parallaxen die den einzelnen Typen zukommenden mittleren Leuchtkräfte ungefähr angeben lassen.

Eine andere Folge aus den Annahmen für φ und A ist die Abhängigkeit der mittleren Parallaxen π_m von der galaktischen Breite. Die Sterne der scheinbaren Größe h_m , deren mittlere Entfernungen zu bilden sind, liegen je nach ihrer Leuchtkraft auf verschiedenen konzentrischen Kugelschalen. Da nun am galaktischen Äquator die Dichtigkeit weit langsamer als am Pol abnimmt, so ist das Verhältnis für die Anzahlen der in der Milchstraße stehenden absolut hellen Sterne der äußeren Kugelschalen zu den gleichen am Pol befindlichen weit größer als das Verhältnis der näheren Sterne schwächerer Leuchtkraft am Äquator zu denen am Pol. Die mittlere Entfernung aller Sterne der Größe m

schiebt sich darum in der Richtung der Milchstraße weiter hinaus. Da für größere m auch die Entfernungen q und damit die genannten Verhältnisse ständig wachsen, müssen die π_m mit wachsendem m am galaktischen Äquator und Pol stärker divergieren.

Die Berechnung der π_m mit q und Δ ergibt die in Tab. VII aufgeführten Verhältnisse q_R der Parallaxen für die galaktische Polar- und Äquatorialzone, aus denen beispielsweise hervorgeht, daß die mittleren Entfernungen der Sterne 10. Größe in der Milchstraße 2,5 mal so groß sind als am Pol. Eine direkte Bestätigung durch die Beobachtung ist bisher nicht möglich, doch stimmen andere Beobachtungen mit diesen Ergebnissen überein. Wären nämlich die mittleren Eigenbewegungen der Sterne ihrer absoluten Größe nach in allen Zonen gleich, so müßten sie wegen der Verschiedenheit der Parallaxen an den Polen etwa doppelt so groß erscheinen als in der Milchstraße. Nach den Untersuchungen von Boss und Comstock ist dies für die Größen 6 und 9,5 der Fall.

Tabelle VII.

Verteilung der Spektraltypen, Parallaxen und Radialgeschwindigkeiten.

T	Q_B	Q_R	m	q_R	m	V_B	V_R
B	5:	1,70	5,0	1,9	2,1	11	11
A	1,25	1,36	6,0	2,1	3,1	13	12
FG	0,74	0,98	7,0	2,2	4,1	13	12
K	0,70	0,69	8,0	2,3	5,1	14	13
M	0,60	0,43	9,0	2,4	6,1	19	13
			10,0	2,5			

Während die Beträge der Eigenbewegung der Sterne mit wachsender Sterngröße abnehmen, was offenbar eine Folge ihrer zunehmenden mittleren Entfernung ist, hat die Beobachtung für die Radialgeschwindigkeiten das umgekehrte Verhalten erwiesen, wie aus den V_B der Tab. VII hervorgeht, die die Radialbewegungen in km/sec angeben. Dies steht mit der ebenfalls von W. W. Campbell beobachteten Tatsache in Zusammenhang, daß Sternen von vorgeschrittenem Spektraltyp im Durchschnitt größere Geschwindigkeiten im Visionsradius zukommen; was sich darauf zurückführen läßt, daß das Fortschreiten der Typen durch kleinere Massen begünstigt wird, daß aber geringeren Massen grö-

ßere Geschwindigkeiten zukommen. Die Ansätze für q und Δ ermöglichen nun, die Abhängigkeit $V(m)$ auf diese Veränderlichkeit $V(T)$ zurückzuführen. Infolge der Beziehung zwischen Typ und Leuchtkraft kann aus $V(T)$ nach der Beobachtung $V(i)$ ermittelt werden und hieraus läßt sich das Gesetz $V(m)$ in ähnlicher Weise wie die π_m nach (11) ableiten. Es ergeben sich die V_R der Tab. VII, welche nur für $m=6,1$ von V_B erheblich abweichen. Das kann durch die geringe Zahl der hier für V_B verfügbaren Sterne verursacht sein. Weiterhin lassen sich noch ähnliche Betrachtungen wie für die Parallaxen anstellen, aus denen hervorgeht, daß die räumlichen Geschwindigkeiten der Sterne von der Größe m in der Milchstraße ihren kleinsten Wert erreichen und von da nach den Polen zu wachsen, sowie daß diese Unterschiede sich mit zunehmendem m vergrößern müssen.

Es genügt also für alle betrachteten Fälle durchaus, eine allorts gültige Verteilungsfunktion der Leuchtkräfte anzunehmen. Dadurch können sowohl q wie Δ in eindeutiger Weise erhalten werden. Diese Eindeutigkeit ist auch der Grund für die weitere Voraussetzung, daß $q(i)$ bereits für ein endliches $i=H$ den Wert 0 erreicht. Sieht man dagegen Leuchtkräfte von beliebiger Größe als vorhanden an, so vereinfachen sich zwar die Ansätze für A_m und π_m . Die Integration würde in jedem Falle bis zur Grenze des Systems zu erstrecken sein, da die Sterne von einer bestimmten scheinbaren Helligkeit in allen Entfernungen stehen können; und für alle A_m und π_m bestände demnach nur je eine Integralgleichung. Die Lösung wird aber nicht eindeutig, denn es lassen sich unendlich viele Systeme von zusammengehörigen Werten für Δ , q und r_1 finden, die den Gleichungen genügen. Unter der Annahme $r_1=\infty$, die Schwarzschild verfolgt hat, wird der Verlauf von q und Δ sehr ähnlich dem oben erhaltenen. Diese Voraussetzungen $H=\infty$ und $r_1=\infty$ sind jedoch nur rechnermäßig zulässig, ihre Bedeutung liegt in der Vereinfachung der Aufgabe. Die Ansätze Seeligers passen sich den natürlichen Verhältnissen an. Sie gestatten nicht nur die Anordnung der Sterne in unserem Fixsternsystem, sondern auch dessen Begrenzung zu erkennen.

(Eingegangen 4. März 1918.)

BESPRECHUNGEN.

F. Kühnen, Das Mittelwasser der Ostsee bei Travemünde, Marienleuchte, Wismar, Warnemünde, Arkona, Swinemünde, Pillau, Memel und das Mittelwasser der Nordsee bei Bremerhaven in den Jahren 1898—1910. Lex. 8°. III u. 207 S. und zwei Tafeln. Veröffentlichung des Kgl. Preuß. Geodät. Instituts. Neue Folge Nr. 70. Berlin, P. Staniewicz' Buchdruckerei. 1916. M. 9.—

Der Inhalt dieses starken Heftes bildet eine Fortsetzung der früher von Seibt und von Westphal bearbeiteten Aufzeichnungen der Wasserstände an der Küste der Ostsee, an den Pegeln zu Travemünde, Marienleuchte, Wismar, Warnemünde, Arkona, Swinemünde, Pillau und Memel. Zu diesem Material sind noch hinzugenommen die Beobachtungen der Wasserstände in Bremerhaven. Die Ablesungen sind an selbstregistrierenden Pegeln nach Seibtscher Konstruktion geschehen und umfassen etwas über ein Jahrzehnt. Bei der endgültigen Bearbeitung dieser Daten konnten noch die kurz nach der Fertigstellung der ersten Rechnung in einer eigenen Abhandlung publizierten Angaben von 10 Pegeln der dänischen Küste hinzugenommen werden. Dadurch wurde eine wesentliche Verschärfung der Resultate erzielt. Der Verf. gibt zunächst eine Beschreibung der Vorkehrungen, die für die Sicherung der Beziehungen zwischen den Nullpunkten der verschiedenen Pegel durch jährliche Nivellierung getroffen wurden, wodurch im wesentlichen die Konstanz derselben dargetan wird. Daran schließt sich das sehr umfangreiche, fast Dreiviertel des ganzen Heftes umfassende tabellarische Zahlenmaterial. Die sehr ausführlich behandelten mathematischen Grundlagen der Ausgleichung der einzelnen nach Monatsmitteln geordneten Pegelablesungen zeigen, daß die Ableitung aller wünschenswerten Konstanten für die Bewegung der Wasseroberfläche des Beobachtungsgebietes nicht gelingen kann, weil das in Betracht kommende Areal doch zu klein und daher die Abweichung der sphäroidischen Gestalt der Wasseroberfläche von der Kugel zu unbedeutend ist. Das schließlich gefundene, geophysikalisch interessante Resultat legt der Verf. etwa in folgenden Sätzen dar:

Die Lage des Mittelwassers hat bei allen Pegelstationen, abgesehen von unregelmäßigen Schwankungen, eine konstante Höhenlage. Die Veränderungen in der Höhe des jeweiligen Wasserstandes lassen sowohl eine jährliche als auch eine halbjährige Periode, die mit den Schwankungen des Luftdrucks zusammenhängt, erkennen. Der mittlere Wasserstand im Flächenschwerpunkt des durch die Pegelstationen definierten Areals — bei $+55^{\circ}13'$ und $29^{\circ}49'$ östlich von Paris — liegt 38,1 mm unter Normal-Null bei 760 mm Luftdruck, diesen als gleich hoch über dem ganzen Gebiet angenommen.

Die Wasseroberfläche steigt oder fällt um 10 mm, wenn der Barometerstand um 1 mm ab- bzw. zunimmt; was bis auf die überhaupt zu erlangende Genauigkeit dem Verhältnis zwischen der Dichte von Quecksilber zu dem des Wassers entspricht.

Außerdem fand sich, daß das Wasser in der Ostsee und Nordsee um rund 30 mm höher oder tiefer steht, je nachdem der Luftdruck bei den Aalandsinseln um 1 mm höher oder tiefer ist, als an dem oben näher bezeichneten Referenzpunkte. Dazu ergeben sich

noch interessante Beziehungen zwischen dem Zu- und Abflusse des Wassers aus Nord- und Ostsee, die mit dem Unterschiede im spezifischen Gewicht des Wassers beider Gebiete zusammenhängt. Im ganzen zeigt aber die Bearbeitung des ganzen Materials, daß die von Windwirkung und den Eigentümlichkeiten der lokalen Verhältnisse abhängigen Schwankungen der Höhe des Wasserspiegels sehr erheblich die einzelnen Angaben der Pegel zu beeinflussen vermögen. L. Ambronn.

Tagesereignisse.

Preisaufgaben der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig. Die Gesellschaft hat folgende mathematisch-physikalische Aufgaben gestellt:

1. Die Theorie der linearen Funktionaldifferentialgleichungen ist in irgendeiner Richtung zu fördern. Besonders wünschenswert wäre eine ganz durchgreifende Behandlung neuer Spezialfälle.
Einlieferung bis zum 31. Oktober 1918; Preis 1500 M.
2. Übersicht und experimentelle Erweiterung der Erfahrungen über die Rolle leicht flüchtiger Bestandteile von Schmelzflüssen.
Einlieferung bis zum 31. Oktober 1918; Preis 1500 M.
3. Es sind die Dielektrizitätskonstante und die lösenden und dissoziierenden Eigenschaften des flüssigen Fluorwasserstoffs zu untersuchen und die erhaltenen Resultate mit den bestehenden Theorien der elektrolitischen Dissoziation in Verbindung zu bringen.
Einlieferung bis zum 31. Oktober 1919; Preis 1500 M.
4. Die Gesellschaft wünscht eine Übersicht der Leptonenkunde hinsichtlich ihrer Anwendung auf kristalline Materie und eine experimentelle Fortführung der einschlägigen Forschung mittels Röntgenstrahlen auf mineralogisch bedeutsame Stoffe.
Einlieferung bis zum 31. Oktober 1920; Preis 1500 M.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der a. o. Professor an der Böhmischen Universität Prag Dr. Emanuel Formanek zum ord. Professor der medizinischen Chemie und der Privatdozent an derselben Hochschule Dr. Anton Hamsik zum a. o. Professor der medizinischen Chemie an der Böhmischen Universität Prag, der Privatdozent der Mathematik an der Universität Wien Dr. Wilhelm Groß zum a. o. Professor ebenda, der ord. Professor der Mathematik an der Universität Kopenhagen Dr. Paul Heegaard in gleicher Eigenschaft an der Universität Kristiania, speziell für Geometrie, der Privatdozent an der Universität Göttingen Dr. Horst v. Sanden zum ord. Professor der Mathematik und Mechanik an der Bergakademie Clausthal, der a. o. Professor an der Universität Basel Dr. Wilhelm Matthies zum ord. Professor der mathematischen Physik an derselben Hochschule, Dr. P. Harrer zum a. o. Professor für aromatische Chemie an der Universität Zürich.

Verliehen: Dem Abteilungsvorstand bei der Firma Carl Zeiß in Jena Dr. Otto Henker und dem Privatdozent für medizinische Chemie an der Böhmischen Universität Prag Dr. Karl Cerny der Titel Professor.

Gestorben: Der a. o. Professor für angewandte Physik an der Universität Jena Dr.-Ing. Karl Vollmer (als Fliegerleutnant gestürzt), der ord. Professor der Mathematik an der Nationaluniversität in Athen Dr. C. Stephanos, der ord. Professor für analytische Geometrie an der Universität Padua Dr. Giuseppe Veronese.



Fig. 4.



Fig. 5.

B. Walter, Über die Ermittlung der zeitlichen Aufeinanderfolge zusammengehöriger Blitze sowie über ein bemerkenswertes Beispiel dieser Art von Entladungen.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

Staats- u. Universitäts-
Bibliothek Hamburg

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 14.

15. Juli 1918.

Redaktionsschluß für No. 16 am 12. Juli 1918.

19. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

- A. Sommerfeld, Atombau und Röntgenspektren. I. Teil. S. 297.
J. Kroo, Der erste und zweite Elektronenring der Atome. S. 307.
W. Porstmann, Die Theorie der Formatreform. S. 311.

- T. Heurlinger, Über die Störungen in den Linienserien der Bandenspektren. S. 316.

Besprechungen:

- J. M. Eder, Johann Heinrich Schulze. S. 318.

- R. Grammel, Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges. S. 319.

- L. Lucas, Die Akkumulatoren und galvanischen Elemente. S. 320.

- Personalien. S. 320.

- Gesuche. S. 320.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Atombau und Röntgenspektren. I. Teil.

Von A. Sommerfeld.

§ 1. Einleitung.

In der Theorie der Röntgenspektren¹⁾ bin ich von der Tatsache der genauen Wasserstoffähnlichkeit der Röntgendoublets ausgegangen, die sich mit großer Schärfe durch das ganze System der Elemente hindurch verfolgen läßt. Diese Tatsache führte zur Isolierung des L -Terms. Während nämlich die Schwingungszahl ν der Linie L_α gleichzeitig von dem L - und M -Term oder diejenige von K_α gleichzeitig von dem K - und L -Term abhängt, bestimmt sich die Schwingungsdifferenz $\Delta\nu$ der L -Doublets aus dem L -Term allein. Während also auf die absolute Lage der Linien L_α , K_α die Bestimmungsstücke je zweier Bahnen Einfluß haben, wird die relative Lage der Linien des L -Doublets durch die Bestimmungsstücke der einzigen L -Bahn gegeben. Dieser Umstand bringt für die Rechnung offenbar einen großen methodischen Vorteil mit sich, indem die Zahl der Unbekannten dadurch verkleinert, die Sicherheit ihrer Ermittlung vergrößert wird.

Meine frühere Behandlung führte auf die folgende Darstellung der L -Doublets bzw. des L -Terms:

$$\Delta\nu = \frac{N\alpha^2}{2^4} (Z - 3,5)^4, \quad L = \frac{N}{2^2} (Z - 3,5)^2,$$

(N = Rydberg-Frequenz, Z = Ordnungszahl; beide Formeln geben nur die ersten Glieder von Reihenentwicklungen nach der kleinen Größe

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc} = 7,26 \cdot 10^{-3}$$

und sind durch Glieder mit höheren Potenzen dieser Größe [höheren Relativitätskorrekturen] zu ergänzen). Es ergab sich also der unganze

Kernladungsdefekt 3,5; Herr Swinne fand¹⁾ durch eine ähnliche, aber von der meinigen unabhängige Rechnung 3,6. Dieser unganze Kernladungsdefekt bildete eine in die Augen fallende Schwierigkeit für meine frühere Auffassung. Während eine ganzzahlige Abweichung von Z unmittelbar als Abschirmung der Kernladung durch Elektronen, die der Kernladung benachbart sind, gedeutet werden kann, blieb eine unganze Abweichung unverständlich, solange an der Annahme festgehalten wurde, daß die L -Bahn von einem einzelnen Elektron beschrieben werden sollte. Allerdings war schon von Moseley und Bohr die an sich befriedigendere Möglichkeit ins Auge gefaßt worden, daß die Bahn von mehreren (n) Elektronen besetzt sein könnte. Dann tritt bekanntlich als Folge der abstoßenden Wirkung dieser Elektronen eine unganze Abschirmung der Kernladung auf im Betrage

$$s_n = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin \frac{\pi k}{n}}.$$

Diese Vorstellung schien aber nur auf den Fall der Kreisbahnen zu passen, auf welche man ja n -Elektronen ohne Schwierigkeit äquidistant verteilen kann. Nun ging aber aus meiner Theorie einwandfrei hervor, daß außer den Kreisbahnen auch Ellipsenbahnen auftreten und daß diese in einem reinen Keplerschen (Coulombschen) Felde verlaufen. Eine Verteilung von n -Elektronen auf eine Ellipsenbahn schien aber unmöglich, ohne daß der Coulombsche Charakter des Feldes aufgehoben und die Ellipsenbahn des einen Elektrons durch das Vorhandensein der anderen Elektronen gestört würde. Die Schwierigkeit beruht indessen nur auf einer falschen Verallgemeinerung. Man

1) Ann. d. Phys. 51, 125, 1916, Teil III.

1) R. Swinne, diese Zeitschr. 17, 481, 1916.

muß¹⁾ sich die n -Elektronen nicht auf derselben Ellipse verteilt denken, sondern muß jedes Elektron seine eigene, den übrigen kongruente Ellipse um den Kern als Brennpunkt beschreiben lassen, wobei jede Ellipse um den Winkel $2\pi/n$ gegen die Nachbarellipsen gedreht ist. Die so entstehende Konfiguration wollen wir einen „Ellipsenverein“ nennen. Verbindet man dann die jeweilige Lage der n -Elektronen durch einen Linienzug, so erhält man stets ein reguläres n -Eck, dessen Größe sich erweitert oder verengert, je nachdem die n -Elektronen sich ihrem Aphel oder Perihel nähern, was sie im genau gleichen Rhythmus tun. Aus der Vorstellung des regulären n -Ecks ergibt sich dann ohne weiteres, daß die Abstoßungen, die ein Elektron von den $n-1$ übrigen erfährt, eine Resultante haben, die dauernd durch den Kern geht und daher durch eine Schwächung der Kernladung nach der Regel $Z-s_n$ dargestellt wird. Bei dieser Anordnung der Elektronen bleibt also der Kepler-Charakter der Bahnen streng erhalten. Der Fall der mehrfach besetzten Kreisbahn hat nur die Besonderheit vor dem allgemeinen Falle des Ellipsenvereins voraus, daß hier die n -Bahnen sich für das Auge überdecken zu einer gemeinsamen Kreisbahn.

Nachdem hiernach die Tatsache der wasserstoffähnlichen Dubletts nicht mehr als Schwierigkeit der Vorstellung mehrfach besetzter Ringe im Wege steht, wird man nicht nur an die Erklärung der unganzen Kernladungsdefekte, sondern auch an die allgemeine Frage herantreten: Wie baut sich das Atom aus seinen Elektronenringen auf? Welche Elektronenzahl entfällt auf jeden Ring? Dabei wird man, an ältere Ansätze J. J. Thomsons und an die systematischen Ausführungen W. Kossels²⁾ anknüpfend, die Frage des Atombaues im Zusammenhang mit dem Aufbau des periodischen Systems betrachten. Wenn auch die Valenzverhältnisse, auf die sich das periodische System gründet, nur etwas über die äußerste Hülle der Atome lehren und über die Elektronenanordnung im Innern nichts aussagen, so wird man immerhin, wenigstens probeweise, an die Frage der Elektronenzahlen in den ein-

zelnen Ringen mit der Vermutung herantreten: sie möchten übereinstimmen mit den Periodenzahlen der Elemente im natürlichen System. Man wird also vermutungsweise dem K -Ring 2, dem L -Ring 8, dem M -Ring 8, dem N -Ring 18 usw. Elektronen zuschreiben. Bei dieser Zählung der Perioden ist H und He zu einer ersten Periode vereinigt, die zweite Periode beginnt mit Li und jede folgende je mit dem nächsten Alkali. Das besondere Interesse der Röntgenspektren liegt dann darin, daß sie uns Material liefern, um diese Vermutung zu prüfen.

Eine starke Stütze findet diese Vermutung zunächst in dem Abbrechen der K -Linien bei kleinen Ordnungszahlen. Die Linie K_γ ist beobachtet bis herunter zu $Z=20$, Ca , die Linie K_β bis $Z=12$, Mg . Da K_γ dem Übergang eines Elektrons aus dem N -Ring in den K -Ring, K_β demjenigen aus dem M -Ring in den K -Ring entspricht, dürfen wir sagen: Bei Ca tritt der N -Ring, bei Mg der M -Ring zuerst auf. Nach unserer Vermutung und nach dem Vorgange von W. Kossel würden wir den N -Ring zuerst bei $Z=19$, K , den M -Ring zuerst bei $Z=11$, Na , erwarten, und zwar mit je nur einem Elektron vertreten. Wie aber bereits R. Swinne¹⁾ bei Na bemerkt, kann man ungezwungen annehmen, daß sich das eine äußerste Elektron in dem (als Salz untersuchten) Alkali als Valenzelektron betätigt und sich daher außerhalb des Atomverbandes befindet. Mit Rücksicht auf diese Korrektur des Beobachtungsbefundes bestätigt also das Abbrechen von K_γ sowohl wie das von K_β durchaus unsere Annahme über die Besetzung der ersten Ringe. Dabei wäre noch dem Einwand entgegenzutreten: Es beweise nichts, daß K_β bei Na nicht beobachtet sei, weil hier die Beobachtungen überhaupt wegen der Weichheit der Strahlen unsicher werden. Tatsächlich ist K_β härter als K_α ; wenn also K_α gemessen werden konnte, liegt kein Grund vor, weshalb sich K_β der Messung entzogen haben sollte. Die größere Lichtschwäche von K_β dürfte für die Messung durch seine größere Härte etwa kompensiert werden. Unter diesem Gesichtspunkte gewinnt die Verfolgung der verschiedenen Linien auch bei der L - und M -Serie nach den kleinen Ordnungszahlen hin und der Ort ihres Abbrechens ein hervorragendes Interesse für die Topologie des Atoms.

Eine anderweitige allgemeine Stütze findet unsere Auffassung in der wohlbekannten Kurve der Atomvolumina. Wie ich nämlich an an-

1) Den Hinweis auf diesen Bewegungsmodus, der übrigens in der theoretischen Astronomie nicht unbekannt sein dürfte, verdanke ich Herrn F. Pauer. Herr Swinne zeigte mir dann, daß er auch schon bei Nicholson, Phil. Mag. 27, 557, 1914 vorkommt. Für mein Gefühl hat die kunstreiche Aneinanderpassung der n Elektronenbahnen in unserem „Ellipsenverein“ nichts Unnatürliches, vielmehr sehe ich darin ein Anzeichen für die hohe Bewegungsharmonie, die im Atominnern herrschen muß.

2) W. Kossel, Über Molekülbildung, Ann. d. Phys. 49, 229, 1916.

1) Diese Zeitschr. I. c. S. 487.

derer Stelle¹⁾ demnächst ausführen werde, kann man die „Größe der Atome“, d. h. den Radius ihres äußersten Ringes, bestimmen und erhält, wenn man sie zur Ordnungszahl als Abszisse aufträgt, eine Kurve, die in vieler Hinsicht einen analogen Gang besitzt, wie die Kurve der Atomvolumina. Dabei wird — in Übereinstimmung mit unserer obigen Vermutung — angenommen, daß mit jedem neuen Alkali ein neuer Elektronenring ansetzt. Allerdings ist diese Bestätigung unserer Auffassung — wegen der etwas problematischen Beziehung zwischen Atomgröße und Atomvolumen — weniger sicher wie die vorherige; auch sagt sie, ähnlich wie die Valenz, nichts über die Besetzung der inneren Elektronenringe aus, sondern betrifft nur die Peripherie des Atoms.

Allgemein sei folgendes bemerkt: Die Stabilitätsverhältnisse in dem äußersten Atomringe brauchen nicht dieselben zu sein, wie in demselben Ring, wenn er beim Fortschreiten im periodischen System durch Anlagerung neuer Elektronen zu einem inneren Ring geworden ist. Vielmehr ist es sehr gut denkbar, daß der Ring im letzteren Falle mehr Elektronen aufnehmen kann, wie wenn er die Atomperipherie bildet. Wenn dem so ist, so müßte das neue Elektron, welches beim Übergang zum nächsten Elemente jeweils hinzukommen muß, nicht immer im äußersten Ring angesetzt werden, sondern könnte an gewissen Stellen des periodischen Systems einem inneren Ring aufgedrückt werden. Stellen, die dafür in Betracht kommen, sind die Triaden *FeNiCo*, *RuRhPd*, *Os*, *Ir*, *Pt*, sowie die ganze Gruppe der seltenen Erden, weil hier offenbar wegen der chemischen Ähnlichkeit derselben der regelmäßige Fortschritt im äußeren Wachstum des Atomes vorübergehend unterbrochen ist. Wir schließen dementsprechend folgendes: Die Periodenzahlen des natürlichen Systems der Elemente geben nur einen allgemeinen Anhalt für die zu erwartenden Besetzungszahlen der entsprechenden inneren Ringe; insbesondere wäre es verständlich, wenn sich die letzteren als etwas größer herausstellen würden, wie die ersteren.

Was ergibt nun die quantitative Durchrechnung der Röntgenspektren bezüglich der Elektronenzahl der einzelnen Ringe? Debye²⁾, der diese Frage bei K_α zuerst angegriffen hat, findet, daß der K -Ring aus 3 Elektronen gebildet sei; der L -Ring, der im Elektronenaus-

tausch mit dem K -Ring steht, soll dabei im Anfangszustand ein, im Endzustand kein Elektron besitzen. Die letztere Auffassung werden wir sogleich durch eine andere ersetzen, die sich unserer Erwartung besser fügt. Andererseits liegt das Debyesche Ergebnis bezüglich des K -Ringes wenigstens in der Nähe der von uns vermuteten Elektronenzahl 2. Des Genaueren wäre dazu folgendes zu bemerken: Debye sieht den Anfangszustand des K -Ringes (Besetzungszahl 2) als den ungesättigten, den Endzustand (Besetzungszahl 3) als den normalen an. Demgegenüber könnte man zunächst auch meinen: der Anfangszustand (2) sei der normale, der Endzustand (3) ein übersättigter Zustand, bei dem dem K -Ring ein fremdes Elektron aufgezwungen ist. Man denke an die Erzeugung der Röntgenspektren durch die anregenden Kathodenstrahlen. Ein fremdes Elektron wird in das Atom hineingeschossen. Soll K_α entstehen, so müßte es im L -Ring abgefangen werden und in den K -Ring hineinfallen. Von hier aus könnte es natürlich scheinen, daß der Anfangszustand des L -Ringes und der Endzustand des K -Ringes der übersättigte ist. Als normale Besetzungszahl des K -Ringes würde dann aus Debyes Berechnung 2 folgen, wie wir es ursprünglich erwarteten. Indessen darf nicht übersehen werden, daß die fundamentale Tatsache der K -Absorptionsgrenze dieser Auffassung der K_α -Emission entscheidend entgegensteht. Man deutet sie bekanntlich nach Kossel so, daß die Entfernung eines Elektrons aus dem K -Ring Vorbedingung ist für die Entstehung von K_α , K_β , K_γ , wobei also der Anfangszustand im K -Ring ein unnormaler, untersättigter sein muß, wie Debye es annimmt. Die Entscheidung ist von einer genauen formelmäßigen Deutung der K -Absorptionsgrenze zu erwarten, oder von derjenigen der L_α -Linie, bei deren Erzeugung der K -Ring sicher in seinem natürlichen Zustande sich befindet.

In teilweisem Gegensatz zu Debye findet Herr Kroo (vgl. die nachfolgende Arbeit, von deren Ergebnis er mir freundlicherweise schon im vorigen Jahre Mitteilung gemacht hatte), daß bei K_α der L -Ring anfangs 9 Elektronen enthalte, und im Endzustande auf 8 Elektronen heruntergehe. Nicht nur die etwas bessere numerische Übereinstimmung mit den Beobachtungen, sondern vor allem die innere Wahrscheinlichkeit spricht meiner Meinung nach für das Kroosche Ergebnis. Den mathematischen Grund dafür, daß die Annahmen 8 und 9 für den Endzustand des L -Ringes zu nahezu denselben Folgerungen für K_α führen müssen, werden wir in § 4 besprechen. Andererseits schreibt

1) In der Festsitzung der D. Physik. Gesellschaft zum 60. Geburtstag von M. Planck. Die dort gehaltenen Vorträge erscheinen demnächst in Karlsruhe, C. F. Müller'sche Hofbuchhandlung.

2) Diese Zeitschr. 18, 276, 1917.

Herr Vegard¹⁾ dem L -Ring bei der Entstehung von L_α 7 Elektronen als normale Besetzungszahl zu (für die Entstehung von K_α hält er dagegen an den Debyeschen Annahmen fest). Soviel ich sehe, beansprucht aber die Vegardsche Arbeit keine große Genauigkeit; auch setzt sie sich mit der Tatsache der Dubletts nicht auseinander.

Um sicher zu gehen, muß man zunächst die Theorie der mehrfach besetzten Elektronenringe mathematisch fundieren. Deshalb betrachte ich in § 2 das Atom als ein mechanisches System von soviel Freiheitsgraden als es Elektronenringe besitzt. Die Koordinaten dieses Systems sind die Radien der Ringe; sie werden durch die (am bequemsten in Hamiltonscher Form zu schreibenden) Gleichgewichtsbedingungen des Systems bestimmt, in die alle Wechselwirkungen zwischen den Ringen eingehen. Das Endresultat für die Energie ist in seinem Hauptbestandteil überraschend einfach: Jeder Ring liefert einen Beitrag, der sich so berechnet, als ob die zu ihm äußeren Ringe nicht vorhanden, die inneren auf den Kern zusammengezogen wären. Die Wechselwirkungskorrekturen, die genau ermittelt werden, erweisen sich in dem besonderen Falle von K_α (§ 4) als belanglos; auch in anderen Fällen dürfte ihr Beitrag nicht erheblich sein. Das Resultat läßt sich auch so aussprechen: Man kann der Hauptsache nach ganz so rechnen, wie man es bisher nach Debye usw. getan hat, und kann die Genauigkeit der Rechnung durch Angabe der Korrekturen prüfen.

Soweit wurden die Ringe als komplanar, das ganze Atom also als ebene Anordnung angenommen. In § 3 wird diese Annahme fallen gelassen. Indem man beliebige Neigungswinkel zwischen den Ringen berücksichtigt, steigert sich die Zahl der Unbekannten des Systems, die durch Gleichgewichtsbedingungen zu berechnen sind. Bei zwei und drei Ringen erweist sich die zueinander normale Lage der Ringe als stabil, die komplanare Lage als instabil. Der Energieausdruck behält aber auch bei geneigten Ringen die soeben beschriebene einfache Form: Die Neigungswinkel gehen nur in die Wechselwirkungskorrekturen ein, der Hauptbestandteil ist derselbe wie bei komplanaren Ringen. Insoweit also, als der Korrektionsbestandteil belanglos ist, kann die Beobachtung nichts über die gegenseitige Neigung der Ringe im Atom lehren. Die Beobachtungsgenauigkeit müßte noch erheblich gesteigert werden, wenn es durch Vermittelung der Wechselwirkungskor-

rektion möglich sein soll, die gegenseitige Neigung der Ringe aus den Beobachtungen zu berechnen.

Die Behandlung des Problems in diesem ersten Teile ist durchaus unvollständig und soll in einem zweiten Teile weitergeführt werden. Die gegenwärtige Veröffentlichung möge wesentlich als theoretische Unterlage für die nachfolgende Arbeit von Herrn Kroo angesehen werden. Bei der weiteren Verfolgung des Problems treten eine Reihe von Schwierigkeiten auf, die möglicherweise die Grundlage der Theorie umzugestalten zwingen werden. Diese Schwierigkeiten betreffen, außer der numerischen Darstellung der einzelnen Linien und Absorptionskanten, einerseits die Dubletttheorie, andererseits die Abweichungen vom Kombinationsprinzip.

1. Durch unsere Vorstellung des Ellipsenvereins ist zwar die Möglichkeit wasserstoffähnlicher Dubletts bei mehrfach besetzten Ringen dargetan. Die Erklärung des Kernladungsdefekts 3,5 beim L -Dublett und die Deutung des A -Dubletts steht aber noch aus. Überdies führt der Ausbau der Dublett-Theorie zu einigen unerwarteten Folgerungen: Die Linie K_β muß, ähnlich wie die Linie K_α , ein Dublett sein; ferner: Das L -Dublett ist nicht lediglich relativistischen Ursprungs, sondern teilweise auch begründet in den Wechselwirkungskorrekturen.

2. Als besonders schwerwiegend sehe ich die Abweichungen vom Kombinationsprinzip an. Nach den allgemeinen Vorstellungen von Kossel sollte, in Schwingungszahlen gerechnet, $K_\alpha + L_\alpha = K_\beta$ sein. In Wirklichkeit ist, wie ich schon früher betont habe, stets $K_\alpha + L_\alpha > K_\beta$. Wir wollen als „Kombinationsdefekt“ bezeichnen die Differenz

$$\Delta = K_\alpha + L_\alpha - K_\beta.$$

Es lassen sich noch andere solche Kombinationsdefekte bilden, nämlich

$$\Delta = K_\alpha + L_\gamma - K_\gamma$$

$$\Delta = L_\alpha + M_\alpha - L_\gamma$$

usw. Alle diese Δ sind ausnahmslos positiv; ihr Zahlenwert ist natürlich, da es sich um eine kleine Differenz zwischen zwei großen Zahlen handelt, nicht sehr genau. Immerhin läßt er ein allgemeines Gesetz deutlich hervortreten: Es ist $\partial\Delta/\partial Z$ in allen Fällen konstant und etwa gleich 0,8. Dieses allgemeine empirische Resultat läßt auf eine Irreversibilität, auf eine Art Hysterese beim Elektronenübergang schließen und ist mit der allgemeinen Grundlage unserer Theorie kaum verträglich, wonach die Frequenz der entstehenden Röntgenlinie einfach durch die Energiebilanz des ganzen Atoms

¹⁾ Ber. d. Deutschen Physik. Ges. 1918, 8.

zwischen Anfangs- und Endzustand gegeben sein würde.

§ 2. Allgemeine Formel für die Energie eines ebenen Systems von Kreisringen.

Sei p_k Elektronenzahl, a_k Radius, ω_k Winkelgeschwindigkeit im k ten-Ringe. Die kinetische Energie des ganzen Ringsystems ist dann

$$T = \sum_k p_k \frac{m}{2} a_k^2 \omega_k^2. \quad (1)$$

Indem wir den k ten-Ring als k -quantig erklären, entnehmen wir ω_k der azimutalen Quantenbedingung

$$m a_k^2 \omega_k = \frac{h}{2\pi}. \quad (2)$$

Führen wir noch die Bezeichnungen ein

$$\alpha_k = \frac{a_k}{a_0}, \quad a_0 = \frac{h^2}{(2\pi e)^2 m}, \quad (3)$$

wo a_0 den Radius des ersten Ringes bei Wasserstoff und α_k den verhältnismäßigen Radius unseres k ten-Ringes bedeutet, so können wir die kinetische Energie auch schreiben

$$T = \sum_k p_k \frac{h^2}{8\pi^2 m a_0^2 \alpha_k^2} = \frac{e^2}{2a_0} \sum_k p_k \frac{k^2}{\alpha_k^2}. \quad (4)$$

Die potentielle Energie des Kernes gegen den k ten-Ring ist (Ze = Kernladung)

$$- p_k \frac{e^2 Z}{a_k}, \quad (5a)$$

diejenige des k ten-Ringes gegen sich selbst

$$+ p_k \frac{e^2 s_k}{a_k}, \quad (5b)$$

wo in Bohrscher Bezeichnung (vgl. Einleitung) bedeutet

$$s_k = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{\sin \frac{n\pi}{p_k}}.$$

(Daß als Index von s abkürzend k statt p_k geschrieben ist, wird kein Mißverständnis hervorrufen.)

Wir fassen beide Beiträge (5a, b) zusammen zu

$$U_k = - p_k \frac{e^2 (Z - s_k)}{a_k}. \quad (5)$$

Sodann bilden wir die wechselseitige potentielle Energie des k ten- und j ten-Ringes. Hierbei werden wir die Ringe gleichförmig mit Ladung belegt denken (was bei der vorangehenden Berechnung des Selbstpotentials der Ringe natürlich nicht erlaubt gewesen wäre). Wir erhalten so

$$V_{jk} = \frac{p_j p_k e^2}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \frac{1}{\sqrt{a_j^2 + a_k^2 - 2a_j a_k \cos(\varphi - \psi)}} \\ = \frac{p_j p_k e^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_j^2 + a_k^2 - 2a_j a_k \cos \varphi}}.$$

Sei $a_k > a_j$. Durch Potenzentwicklung nach a_j/a_k (Kugelfunktionen-Reihe) ergibt sich

$$V_{jk} = \frac{p_j p_k e^2}{a_k} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{a_j}{a_k}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \left(\frac{a_j}{a_k}\right)^4 + \dots \right). \quad (5a)$$

Das erste Glied dieser Reihe fassen wir mit U_k zusammen, alle höheren Glieder vernachlässigen wir gegen das zweite. Wir erhalten so als Hauptbestandteil und als Korrektionsglied der gesamten potentiellen Energie des Systems

$$U = -e^2 \sum_k p_k \frac{Z_k}{a_k}, \quad Z_k = Z - \sum_{j=1}^{k-1} p_j - s_k, \quad (6)$$

$$V = \frac{e^2}{4} \sum_{j < k} \sum p_j p_k \frac{a_j^2}{a_k^3}. \quad (7)$$

Die Definition der „wirksamen Kernladungszahl“ Z_k für den k ten-Ring, die sich durch unsere Ableitung bemerkenswerterweise von selbst ergibt, ist nachträglich leicht verständlich: Die eigentliche Kernladung Z wird um so viel ganze Ladungseinheiten abgeschirmt, als die Besetzung der inneren Ringe beträgt ($j < k$), außerdem um einen gewissen Bruchteil s_k von der Ladung des k ten-Ringes selbst.

Unser Ringsystem hat soviel Freiheitsgrade, als es Ringe gibt. Jeder Freiheitsgrad wird — nach Erfüllung der Quantenbedingungen (2) — je durch eine Unbekannte α_k gekennzeichnet. Es handelt sich nun darum, diese Unbekannten simultan zu bestimmen.

Man kann dies etwa so machen, daß man, die a_k als System-Koordinaten auffassend, die Lagrangesche Funktion $L = T - U - V$ in diesen anschreibt. Die Gleichgewichtsbedingungen, wie sie als Spezialfall der allgemeinen Lagrangeschen Bewegungsgleichungen folgen, lauten dann:

$$\frac{\partial L}{\partial a_k} = 0, \quad \text{also} \quad \frac{\partial T}{\partial a_k} = \frac{\partial}{\partial a_k} (U + V), \quad (8)$$

d. h. wegen (1), (6), (7) nach Fortheben des gemeinsamen Faktors p_k :

$$m a_k \omega_k^2 = \frac{\partial}{\partial a_k} \left(-e^2 \frac{Z_k}{a_k} + \frac{e^2}{4} \sum_{j < k} p_j \frac{a_j^2}{a_k^3} + \frac{e^2}{4} \sum_{j > k} p_j \frac{a_j^2}{a_k^3} \right). \quad (9)$$

Die linke Seite ist nichts anderes wie die gewöhnliche Zentrifugalkraft, und die ganze Gleichung nichts anderes als das Gleichgewicht zwischen Zentrifugalkraft und elektrischer Anziehung bzw. Abstoßung. Auf der rechten Seite sind nur diejenigen Glieder von U und V hingeschrieben, welche a_k enthalten. In V sind dies teils solche Glieder, für die $j < k$ ist, teils solche Glieder, für die $j > k$ und für die daher in (7) die Benennung von j und k zu vertauschen ist. Führt man die Differentiation in (9) aus, so folgt

$$\frac{m a_k^3 \omega_k^2}{e^2} = Z_k - \frac{3}{4} \sum_{j < k} p_j \left(\frac{a_j}{a_k} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{j > k} p_j \left(\frac{a_k}{a_j} \right)^3.$$

Mittels der Quantenbedingung (2) und der Abkürzungen (3) schreibt sich die linke Seite:

$$\frac{k^2 \hbar^2}{4 \pi^2 m e^2 a_k} = \frac{k^2 a_0}{a_k} = \frac{k^2}{\alpha_k}.$$

Unsere Bestimmungsgleichungen für die Unbekannten α_k nehmen also die einfache Form an

$$\left. \begin{aligned} \frac{k^2}{\alpha_k} &= Z_k + A_k, \\ A_k &= -\frac{3}{4} \sum_{j < k} p_j \left(\frac{\alpha_j}{\alpha_k} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{j > k} p_j \left(\frac{\alpha_k}{\alpha_j} \right)^3. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Man gelangt noch etwas direkter zu diesen Gleichungen, wenn man von dem Ausdruck (4) für T ausgeht, in dem die Geschwindigkeitskoordinaten ω_k bereits mittels der Quantenbedingungen durch die entsprechenden Impulskoordinaten ausgedrückt sind. Man muß dann aber statt der Lagrangeschen Funktion L die Hamiltonsche Funktion $H = T + U + V$ benutzen; die Gleichgewichtsbedingungen schreiben sich dann, wenn wir statt der a_k sogleich die α_k einführen, in der Form:

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha_k} = 0, \quad \text{also} \quad \frac{\partial T}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial}{\partial \alpha_k} (U + V). \quad (11)$$

Vermöge (4), (6) und (7) ist diese Gleichung nach Fortheben des gemeinsamen Faktors $e^2/a_k \alpha_k^2$ in der Tat identisch mit (10).

Die Gleichungen (10) würden uns vor ein umständliches Eliminationsproblem stellen, wenn wir nicht näherungsweise vorgehen und in A_k die ersten Näherungen

$$\alpha_k = \frac{k^2}{Z_k}, \quad \alpha_j = \frac{j^2}{Z_j} \quad (12)$$

einsetzen dürften. Nach (10) und (12) hat man

$$A_k = -\frac{3}{4} \sum_{j < k} p_j \frac{j^4 Z_k^2}{k^4 Z_j^2} + \frac{1}{2} \sum_{j > k} p_j \frac{k^6 Z_j^3}{j^6 Z_k^3}.$$

Unsere weitere Aufgabe ist es, den Energieausdruck, unter Elimination der α_k , allein durch die Z_k auszudrücken. Wir bilden zu dem Ende zunächst nach (4) und (6)

$$T + U = -\frac{e^2}{2 a_0} \sum_k \frac{p_k}{\alpha_k} \left(2 Z_k - \frac{k^2}{\alpha_k} \right).$$

Indem wir aus (10) einsetzen, ergibt sich

$$\begin{aligned} T + U &= -\frac{e^2}{2 a_0} \sum_k \frac{p_k}{k^2} (Z_k + A_k) (Z_k - A_k) \\ &= -N h \left(\sum_k p_k \frac{Z_k^2}{k^2} - \sum_k p_k \frac{A_k^2}{k^2} \right). \end{aligned}$$

In der Tat ist nach Definition von a_0 :

$$\frac{e^2}{2 a_0 h} = \frac{2 \pi^2 m e^4}{h^3} = N = \text{Rydbergfrequenz}.$$

Entsprechend berechnet sich V durch Eintragen von (12) in (7)

$$V = \frac{N h}{2} \sum_{j < k} \sum p_j p_k \frac{j^4 Z_k^3}{k^6 Z_j^2}.$$

Schließlich schreibt sich die Gesamtenergie W :

$$-\frac{W}{N h} = \sum_k p_k \frac{Z_k^2}{k^2} + R_1 + R_2, \quad (13)$$

$$R_1 = -\frac{1}{2} \sum_{j < k} \sum p_j p_k \frac{j^4 Z_k^3}{k^6 Z_j^2}, \quad (14)$$

$$R_2 = -\sum_k p_k \frac{A_k^2}{k^2}. \quad (15)$$

Die drei Glieder, aus denen sich W zusammensetzt, sind bez. von der zweiten, der ersten und der nullten Ordnung in Z . Daraus, daß das Glied zweiter Ordnung die übrigen weit überwiegt, erklärt sich der wasserstoffähnliche Charakter der einfacheren Röntgenspektren.

Wir wollen zunächst dieses Resultat benutzen, um damit die Ergebnisse einer früheren Arbeit¹⁾ teils zu bestätigen, teils zu berichtigen. Damals wurde die Energie eines Elektrons berechnet, das sich bewegt

- a) im Felde eines Kernes und eines inneren Ringes (§ 3, l. c.),
- b) im Felde eines Kernes und eines äußeren Ringes (§ 5, l. c.).

Im Falle a) wird unser früheres Resultat (l. c. Gl. (28) und (29)) durch unser jetziges Ergebnis in Gl. (13) bestätigt, wenn man die frühere Rechnung auf Kreisbahnen spezialisiert, nach Potenzen von n entwickelt und die beiderlei Bezeichnungen einander anpaßt.

Anders im Falle b). Um hier das frühere Resultat (l. c. Gl. (52)) mit der jetzigen Gl. (13) in Übereinstimmung zu bringen, muß man die früheren Definitionen (51) folgendermaßen abändern:

1) A. Sommerfeld, Münchn. Akad. 1916, S. 131.

$$q = -\frac{5}{8} \frac{E'}{E} \left(\frac{a_1}{a}\right)^3 \quad (16)$$

$$[n, n'] = (n + n')^6 \left(1 - \frac{3}{5} \frac{n^2}{(n + n')^2}\right). \quad (17)$$

In der Tat war die früher angegebene Form des mit q behafteten Korrektionsgliedes durch Rechenfehler entstellt. Aus der nunmehr berichtigten Form dieses Gliedes erkennt man aber, daß es in keiner Weise dazu dienen kann, die von Debye vorgeschlagene Darstellung von K_β mit den Beobachtungen über K_β in Einklang zu bringen. Während nämlich Debye eine Proportionalität des Korrektionsgliedes mit Z^2 nötig hat, ergibt sich nach unserer Berichtigung nur mehr eine Proportionalität desselben mit Z .

§ 3. Energie eines Systems von gegeneinander geneigten Kreisringen.

Die Bezeichnungen $p_k, a_k, \alpha_k, s_k, \dots$ des vorigen Paragraphen werden beibehalten. Offenbar ist an der Berechnung der kinetischen Energie T und der potentiellen Energie U_k nichts zu ändern, auch wenn die Kreisringe nicht mehr alle in einer Ebene liegen. Nur die wechselseitige Energie V_{jk} zwischen den Ringen j und k ist neu zu berechnen.

Es werde die Ebene des Ringes k zur x - y -Ebene, die Schnittlinien der Ebenen der Ringe k und j zur x -Achse gemacht; der Winkel zwischen beiden Ebenen sei ϑ . Bedeuten φ und ψ Azimute in der Ebene k und j , so werden die Koordinaten eines laufenden Punktes im einen oder anderen Ring

$$x_k = a_k \cos \varphi, \quad y_k = a_k \sin \varphi, \quad z_k = 0,$$

$$x_j = a_j \cos \psi, \quad y_j = a_j \sin \psi \cos \vartheta, \quad z_j = a_j \sin \psi \sin \vartheta,$$

$$\text{somit} \quad (x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2 + (z_k - z_j)^2 = a_k^2 + a_j^2 - 2a_k a_j \cos \Theta,$$

$$\cos \Theta = \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta.$$

Denkt man beide Ringe gleichförmig mit den Ladungen $p_k e$ bzw. $p_j e$ belegt, so ergibt sich als wechselseitige Energie

$$V_{jk} = \frac{p_j p_k e^2}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \frac{1}{\sqrt{a_j^2 + a_k^2 - 2a_j a_k \cos \Theta}} = \frac{p_j p_k e^2}{a_k} \left(1 + \frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{8} \left(\frac{a_j}{a_k}\right)^2 + \dots\right), \quad (18)$$

wenn wir, unter der Annahme $a_k > a_j$, nach Potenzen von a_j/a_k entwickeln und höhere Potenzen wie die zweite vernachlässigen. Für $\vartheta = 0$ nimmt das zweite Glied der Klammer den früheren Wert [Gl. (5a)]

$$\frac{1}{4} \left(\frac{a_j}{a_k}\right)^2$$

an; für $\vartheta = \pi/2$ hat es seinen kleinsten Wert

$$-\frac{1}{8} \left(\frac{a_j}{a_k}\right)^2.$$

Man schließt daraus, daß nicht die komplanare, sondern die normale Lage zweier Ringe die stabile sein wird.

Wie früher fassen wir das erste Glied von (18) mit dem Ausdrucke (5) von U_k zusammen und erhalten durch Summation über alle k den früheren Hauptbestandteil U der potentiellen Energie des Ringsystems. Das zweite Glied von (18) summieren wir über alle j und k , wobei $j < k$ vorausgesetzt und statt ϑ weiterhin ϑ_{jk} geschrieben werden möge. Wir erhalten dann statt (7) als Korrektionsglied der gesamten potentiellen Energie

$$V = \frac{e^2}{2} \sum_{j < k} \sum c_{jk} p_j p_k \frac{a_j^2}{a_k^3}, \quad c_{jk} = \frac{3 \cos^2 \vartheta_{jk} - 1}{4}. \quad (19)$$

Unser System bestehe aus n Ringen. Es hat dann zunächst die n Freiheitsgrade α_k . Für diese lauten die Gleichgewichtsbedingungen, nach dem Lagrangeschen Schema (8) oder dem Hamiltonschen Schema (11) gebildet, ähnlich wie in (10):

$$\left. \begin{aligned} \frac{k^2}{\alpha_k} &= Z_k + A_k, \\ A_k &= -\frac{3}{2} \sum_{j < k} p_j c_{jk} \left(\frac{\alpha_j}{\alpha_k}\right)^2 + \sum_{j > k} p_j c_{jk} \left(\frac{\alpha_k}{\alpha_j}\right)^3 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Hierzu kommen die Freiheitsgrade der gegenseitigen Lage der Ringe. Ihre Zahl ist $2n - 3$. Die Lage jedes Ringes ist nämlich durch zwei Parameter, z. B. die Koordinaten seines Poles auf der Einheitskugel, bestimmt. Es kommen aber drei von diesen Parametern in Fortfall, nämlich die willkürlich zu wählenden Parameter eines „ersten“ Ringes und das Azimut, unter dem dieser erste Ring von der Ebene eines „zweiten“ Ringes geschnitten wird. Andererseits ist die Anzahl unserer Neigungswinkel ϑ_{jk} gleich $\frac{n(n-1)}{2}$. Nun stimmen die Zahlen

$$2n - 3 \quad \text{und} \quad \frac{n(n-1)}{2}$$

überein für $n = 2$ und $n = 3$. Nur in diesen Fällen können wir die ϑ_{jk} als unabhängige Lagenkoordinaten wählen, während sie für $n > 3$ überzählige Lagenkoordinaten darstellen, zwischen denen Bedingungsgleichungen bestehen. Die Lagrangeschen Gleichgewichtsbedingungen für die ϑ_{jk} lauten nun, da T und U von den ϑ unabhängig sind, für $n \leq 3$ einfach:

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta_{jk}} = \sin \vartheta_{jk} \cdot \cos \vartheta_{jk} = 0.$$

Die Ringe müssen also entweder komplanar ($\sin \vartheta = 0$) oder normal ($\cos \vartheta = 0$) liegen. Indessen gilt dies Resultat, wie hervorgehoben, nur im Falle $n=2$ oder $n=3$, wo es unmittelbar aus der Anschauung folgt. Da wir die komplanare Lage aus Stabilitätsgründen ausschlossen, haben wir also das Resultat: zwei oder drei Ringe stellen sich mit ihren Ebenen wechselweise senkrecht gegeneinander. In diesem Falle wird wegen $\cos \vartheta = 0$ nach (19) und (20)

$$V = -\frac{e^2}{8a_0} \sum_{j < k} \sum_{i < k} p_j p_k \frac{\alpha_j^2}{\alpha_k^3},$$

$$A_k = +\frac{3}{8} \sum_{j < k} p_j \left(\frac{\alpha_j}{\alpha_k}\right)^2 - \frac{1}{4} \sum_{j > k} p_j \left(\frac{\alpha_k}{\alpha_j}\right)^3,$$

und es berechnet sich, ähnlich wie am Ende des vorigen Paragraphen:

$$-\frac{W}{Nh} = \sum_k p_k \frac{Z_k^2}{k^2} + R_1 + R_2, \quad (21)$$

$$R_1 = \frac{1}{4} \sum_{j < k} \sum_{i < k} p_j p_k \frac{j^4 Z_k^3}{k^6 Z_j^2}, \quad (22)$$

$$R_2 = -\sum_k p_k \frac{A_k^2}{k^2}. \quad (23)$$

Für $n \geq 4$ wird das Problem der Lagenbestimmung der Ringe unübersichtlich. Zwar lassen sich die erforderlichen Bestimmungsgleichungen unschwer hinschreiben. Ihre Lösung aber ist nicht allgemein durchführbar; vielmehr hängt dieselbe von der Zahl p_k von Ladungseinheiten ab, die wir jedem der Ringe beilegen. Statt des Senkrechtstellens der Ringe tritt nach Maßgabe des Gewichtes, mit dem jeder Ring vermöge seiner Ladungszahl wirkt, eine möglichst senkrechte Stellung aller Ringe gegeneinander. Natürlich ist die komplanare Stellung aller Ringe auch jetzt eine mögliche, aber instabile Auflösung des Gleichgewichtsproblems.

Glücklicherweise hängt das Hauptglied des Energieausdrucks, auf das es praktisch allein ankommen scheint, von der gegenseitigen Lage der Ringe in keiner Weise ab. Der in (13) angegebene Wert desselben behält seine Gültigkeit für beliebig gegeneinander geneigte Ringe; nur die Korrekturen R_1 , R_2 hängen von der Lage der Ringe ab. Es hat den Anschein, als ob wir diese Korrekturen und die Lagenbestimmung der Ringe für das Studium der vorliegenden Beobachtungen entbehren können. Daraus folgt zugleich, daß wir über die Lagenanordnung der Ringe aus den Beobachtungen scheinbar nichts erfahren können werden, es sei denn, daß die Beobachtungsgenauigkeit noch erheblich gesteigert wird.

Vom Einfluß der relativistischen Massen-

veränderung wurde bis hierher abgesehen. Es hat aber keine Schwierigkeit, das Problem beliebig vieler und beliebig geneigter Ringe auch im Sinne der Relativitätstheorie zu behandeln. Als Resultat ergibt sich mit der von mir früher eingeführten, bereits in der Einleitung benutzten Bezeichnung α

$$-\frac{W}{Nh} = \frac{2}{\alpha^2} \sum_k p_k \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{k^2} Z_k^2}\right) + R_1 + R_2 \\ = \sum_k \frac{p_k}{k^2} Z_k^2 \left(1 + \frac{\alpha^2 Z_k^2}{4 k^2} + \frac{\alpha^4 Z_k^4}{8 k^4} + \frac{5 \alpha^6 Z_k^6}{64 k^6} + \dots\right) + R_1 + R_2, \quad (24)$$

$$R_1 = -\sum_{j < k} \sum_{i < k} c_{j k} p_j p_k \frac{j^4 Z_k^3}{k^6 Z_j^2} \frac{1 - \frac{\alpha^2}{j^2} Z_j^2}{\left(1 - \frac{\alpha^2}{k^2} Z_k^2\right)^{3/2}}, \quad (25)$$

$$R_2 = -\sum_k \frac{p_k}{k^2} \frac{A_k^2}{\left(1 - \frac{\alpha^2}{k^2} Z_k^2\right)^{3/2}}. \quad (26)$$

Unsere Formel (24) unterscheidet sich von der früheren (13) nur dadurch, daß jetzt Z_k^2 um die aus meiner früheren Arbeit¹⁾ bekannte Relativitätskorrektur vermehrt ist. Auch die früheren Ausdrücke für R_1 und R_2 sind relativistisch in gewisser Weise zu korrigieren; indessen werden diese Zusatzglieder und a fortiori ihre relativistischen Korrekturen praktisch keine Rolle spielen.

Schließlich muß noch auf eine durchgehende Ungenauigkeit unserer Theorie hingewiesen werden. Indem wir die Ringe als starre Kreise behandeln, geben wir bei komplanarer Lage ihre allgemeine Gestalt richtig wieder. Wir sehen dabei nur von kleinen periodisch wiederkehrenden Einbuchtungen der Bahn ab, die durch die größere oder geringere augenblickliche Entfernung der Ringelektronen von den Elektronen der Nachbarringe hervorgerufen werden. Nicht so bei geneigter Lage der Ringe. Hier wird die Abweichung der Elektronenbahn von der Kreisgestalt eine systematische sein. Z. B. wird bei zwei zueinander senkrechten Ringen der innere Ring abgeplattet sein, da wo er die Ebene des äußeren Ringes schneidet. Es ist nicht versucht worden, den Einfluß dieses Umstandes auf die Energieformel zu ermitteln.

§ 4. Die Linie K_α .

Nach der anschließenden Arbeit von Herrn Kroo wird die Linie K_α mit großer Schärfe dargestellt durch das Schema:

1) Ann. d. Phys. I. c., III, Gl. (10) und II, Gl. (17).

$$\begin{array}{cc} & K & L \\ \text{Endzustand} & + \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \\ \text{Anfangszustand} & - \end{array}$$

Hier und im folgenden geben die vorangestellten Vorzeichen an, ob die betreffenden Beiträge in die Darstellung der Schwingungszahl positiv oder negativ eingehen.

Wie schon in der Einleitung bemerkt, haben wir den Anfangszustand des L -Ring und den Endzustand des K -Ring als die natürliche, mit Elektronen gesättigte Besetzung anzusehen. Wie ebenfalls in der Einleitung begründet wurde, braucht es uns nicht wunder zu nehmen, daß die betreffenden Zahlen (3 und 9) die Periodenzahlen 2 und 8 je um eine Einheit übertreffen.

Nach Debye lautet das Schema für K_α :

$$\begin{array}{cc} & K & L \\ & + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Wir wollen zunächst den Grund aufweisen, weshalb auch dieses Schema eine gute Darstellung der Beobachtungen ermöglicht. Wir betrachten zu dem Zwecke, indem wir der bequemeren Schreibweise wegen vorübergehend $p_1 = p$, $p_2 = q$ setzen, das allgemeine Schema

$$\begin{array}{cc} & K & L \\ & + \begin{pmatrix} p+1 & q \\ p & q+1 \end{pmatrix} \end{array}$$

welches ohne Relativität liefert:

$$\frac{\nu}{N} = (p+1)(Z-s_{p+1})^2 - p(Z-s_p)^2 + \frac{q}{4}(Z-p-1-s_q)^2 - \frac{q+1}{4}(Z-p-s_{q+1})^2 \quad (27)$$

oder, nach Potenzen von Z entwickelt:

$$\frac{\nu}{N} = \frac{3}{4}Z^2 - 2Z\left(D_{p+1} - \frac{p}{4} + \frac{q-D_{q+1}}{4}\right) + \dots \quad (28)$$

Hier ist die Abkürzung eingeführt

$$D_x = x s_x - (x-1) s_{x-1}.$$

Über den Verlauf von D_x orientiert die folgende Tabelle:

x	s_x	$x s_x$	D_x	$x - D_x + 1$
0	0	0	—	0
1	0	0	0	0,50
2	0,25	0,50	0,50	0,77
3	0,577	1,73	1,23	0,90
4	0,957	3,83	2,10	0,94
5	1,377	6,89	3,06	0,92
6	1,828	10,97	4,08	0,83
7	2,305	16,14	5,17	0,70
8	2,805	22,44	6,30	0,49
9	3,328	29,95	7,51	0,32
10	3,863	38,63	8,68	0,05
11	4,416	48,58	9,95	-0,22
12	4,984	59,80	11,22	-0,66

Sie zeigt in der letzten Spalte ein Maximum für $x=4$ und gleiche Werte für $x=8$ und $x=1$. Man kann daher den gleichen Anstieg von ν wie für $q=8$ auch erzielen mit dem Werte $q=1$. Der Debyesche Ansatz benutzt $q=0$, und die Berechnungen von Kroo zeigen, daß nicht nur im Anstieg, sondern auch in den absoluten Werten von ν die Ansätze $q=0$ und $q=8$ nahe übereinstimmen. Dies gilt nicht nur für kleine Werte von Z , sondern auch für große Werte, bei denen die Relativitätskorrektur wesentlich wird. Wenn wir nämlich Gl. (26)

um das erste mit $\frac{\alpha^2}{4}$ behaftete Glied der Relativitätskorrektur [vgl. (24)] vervollständigen und dieses nach Potenzen von Z entwickeln, so ergibt sich als relativistische Korrektur von Gl. (28) in erster Näherung

$$\frac{\alpha^2}{4} \left(\frac{15}{16} Z^4 - 4Z^3 \left(D_{p+1} - \frac{p}{16} + \frac{q-D_{q+1}}{16} \right) + \dots \right);$$

es tritt also hier dieselbe Verbindung $q-D_{q+1}$ auf, wie im Hauptgliede der Formel, woraus sich die genäherte Brauchbarkeit des Debyeschen Ansatzes auch für große Z erklärt.

Unsere Theorie liefert nun insofern eine willkommene Ergänzung der Krooschen Rechnungen, als sie zeigt, daß die dabei nicht berücksichtigten Wechselwirkungsglieder R_1 und R_2 in der Tat vernachlässigt werden dürfen.

Wir zeigen dies in der folgenden Tabelle, in der wir willkürlich die Elemente $Z=12, 35, 50$ und 74 herausgegriffen haben. In der ersten und zweiten Spalte sind die Energiebeträge $p_1 Z_1^2$ und $p_2 Z_2^2/4$ eingetragen und zwar für den Endzustand des Krooschen Schemas (+) je in der ersten Zeile und für den Anfangszustand (—) in der zweiten. Darunter steht in der dritten Zeile die algebraische Summe beider. In der dritten und vierten Spalte sind die relativistischen Korrekturen angegeben, die zu den betr. Hauptenergiebeträgen hinzukommen und sich (vgl. [24]) aus den einzelnen Summanden

$$p_k \frac{\alpha^2 Z_k^4}{4 k^4} \left(1 + \frac{\alpha^2 Z_k^2}{2 k^2} \left(1 + \frac{5 \alpha^2 Z_k^2}{8 k^2} + \dots \right) \right)$$

zusammensetzen. (Die hier gewählte Schreibweise soll andeuten, wie man am bequemsten rechnet: aus der ersten Relativitäts-Korrektur erhält man die zweite durch Multiplikation mit $\frac{\alpha^2 Z_k^2}{2 k^2}$, aus dieser die dritte durch Multiplikation mit $\frac{5 \alpha^2 Z_k^2}{8 k^2}$). Ein Strich zeigt an, daß die betr. Korrektur nicht in Betracht kommt. In der dritten Zeile ist bei jedem Element wieder die algebraische Summe der darüber stehenden Korrekturen gezogen. Die algebraische Summe

	$p_1 Z_1^2$	$p_2 \frac{Z_2^2}{4}$	$p_1 \frac{e^2}{4} Z_1^4 + \dots$	$p_2 \frac{e^2}{4} \frac{Z_2^4}{4} + \dots$	$p_1 p_2 \frac{1^4}{2^6} \frac{Z_3^3}{Z_1^2}$	$p_1 p_3 \frac{1^4}{3^6} \frac{Z_3^3}{Z_1^2}$	$p_1 p_3 \frac{2^4}{3^6} \frac{Z_3^3}{Z_2^2}$	ber.	beob.
$Mg, Z=12$	+391,5 -276,1 +115,4	+76,8 -99,9 -23,1	— — —	— — —	0,7 -0,6 0,1	— — —	— — —	92,3	92,1
$Br, Z=35$	+3554,7 -2415,1 +1139,6	+1704,7 -1980,9 -276,2	+56+2 -39-1 +18	+5 -6 -1	+8 -6 +2	— — —	15 -17 -2	880	880
$Sn, Z=50$	+7328 -4950 +2378	+3907 -4489 -582	+237+15+1 -162-11-1 +79	+25 -30 -5	+13 -10 +3	+0,6 -0,4 —	+34 -37 -3	1870	1871
$W, Z=74$	+16173 -10878 +5295	+9302 -10609 -1307	1155+165+30 -784-113-20 +435	+143+4 -165-5 -23	+22 -17 +5	+1,3 -0,9 —	+66 -73 -7	4400	4490

der Hauptglieder und der relativistischen Korrektionsglieder ist in der vorletzten Spalte aufgeführt (unter „ber.“) und mit dem Beobachtungswerte von ν/N (unter „beob.“, letzte Spalte) zusammengestellt. Die Übereinstimmung liegt bei den drei ersten Elementen vollkommen innerhalb der Beobachtungsfehler und übersteigt auch bei dem letzten Element Wolfram (Messung von de Broglie, mit der Coolidge-Röhre $\lambda_a = 0,203 \cdot 10^{-8}$) kaum die Fehlergrenze. Dieses letzte Element, welches bei Herrn Kroo nicht aufgeführt wird, ist durch einen weiten Zwischenraum von den übrigen Elementen, für die die K-Serie bekannt ist, getrennt; es zeigt, daß das Kroosche Schema extrapolierbar ist.

Indessen besteht der Zweck unserer Tabelle nicht in dem Vergleich von Rechnung und Beobachtung. Hierfür würde die Anzahl der herausgegriffenen Beispiele nicht ausreichen; außerdem wird der Vergleich in der nachfolgenden Arbeit von Kroo vollständig durchgeführt. Vielmehr beabsichtigt unsere Tabelle lediglich, die Größe der Wechselwirkungs-Korrektion R_1 festzustellen. Sie ist zerlegt in die Wechselwirkung zwischen dem ersten und zweiten Ring (fünfte Spalte), dem ersten und dritten Ring (sechste Spalte) und dem zweiten und dritten Ring (siebente Spalte). Als Besetzungszahl des dritten Ringes ist dabei $p_3 = 8$ gewählt. (Nur bei Mg hat man offenbar mit

$$p_3 = 1_1 Z_3 = 1$$

zu rechnen.) Man könnte noch höhere Wechselwirkungs-Korrektionen in Betracht ziehen, indessen genügen die angeführten bereits, um die allgemeine Behauptung zu erhärten: Die Wechselwirkungs-Korrektionen können praktisch vernachlässigt werden. Sie sind zwar in ihren einzelnen Beträgen keineswegs durchweg klein. Aber ihre Differenz zwischen Anfangs- und Endzustand und erst recht die algebraische Summe der Differenzen der verschiedenen Wechselwirkungs-Korrektionen liegt überall innerhalb der Fehlergrenze.

Dieses Resultat scheint mir sehr befriedigend und für die Einfachheit der Theorie willkommen. Im einzelnen zeigt sich folgendes: Die Wechselwirkung zwischen dem zweiten und dritten Ringe ist unter den hier betrachteten Fällen am größten (wegen des relativ kleinen Abstandes beider Ringe und wegen der großen Besetzungszahlen), sie ist am kleinsten zwischen dem ersten und dritten Ringe (insbesondere wegen des großen Abstandes beider). Dabei kommt die relative Größe der Ringradien zum Ausdruck in dem Zahlenfaktor, den wir früher allgemein j^4/k^6 schrieben. Wie sich hier zeigt, ist die Summe der Wechselwirkungsdifferenzen viel kleiner als ich früher angenommen habe (vgl. den Schluß von § 2)

und kann die Wasserstoff-Unähnlichkeit der höheren Röntgenspektren kaum erklären. Unsere Korrektur R_1 ist ohne Rücksicht auf die Relativität berechnet, die offenbar an der ohnehin verschwindenden Größenordnung nichts ändern kann. Von der Korrektur R_2 , die ihrerseits von kleinerer Größenordnung wie R_1 ist, ist ganz abgesehen worden; Einzelberechnungen zeigten, daß dies berechtigt war.

Insbesondere bestätigen die Erfahrungen bei K_α , daß wegen des Verschwindens der Wechselwirkungs-Korrekturen über die gegenseitige Lage des K - und L -Ring (ob in gleicher Ebene oder in zueinander senkrechten) aus K_α nichts zu erfahren ist.

(Eingegangen 6. April 1918.)

Der erste und zweite Elektronenring der Atome.

Von Jan Kroo.

Der älteste modellmäßige Ansatz der Quantentheorie der Hochfrequenzspektren beruht auf der Annahme, daß auf einer Bohrschen Quantenbahn mehrere Elektronen kreisen, und daß der Strahlungsvorgang durch den Sprung aller Elektronen, aus einem Außenring in einen Innenring erzeugt wird¹⁾. Auf Grund dieser Vorstellung erhält bekanntlich Moseley eine roh angenäherte Darstellung für die Hauptlinie der K -Serie, indem er ihre Entstehung dem Übergang von 4 Elektronen, aus dem zwei-quantigen in den einquantigen Kreis, zuschreibt. Befriedigender aber wird der Bau der K_α -Serie durch den Gesichtspunkt wiedergegeben, daß der Strahlungsvorgang ausgelöst wird, indem nur ein einziges²⁾ Elektron, von der zwei-quantigen auf die einquantige Bahn, überspringt. Es zeigt sich dann in der Tat, wie Debye³⁾ nachgewiesen hat, daß die Annahme von 3 Elektronen, im Normalzustande auf dem einquantigen Bohrschen Kreise, zu einer K_α -Darstellung führt, die fast ebenso gut ist, wie die empirische Formel, welche Sommerfeld auf Grund seiner tief sinnigen Untersuchungen über die Feinstruktur der Röntgenspektren angegeben hat⁴⁾.

Das Bedürfnis nach besseren Seriendarstellungen empfiehlt indessen — wie wir durch die folgenden Überlegungen dartun möchten —

den Ausgangspunkt zu verallgemeinern. Wir bilden uns daher die recht nahe liegende Vorstellung, daß alle Bohrschen Kreise mit Elektronen beladen sind. Das Zentralproblem ist dann, die Anzahl der Elektronen auf den Ringen aus der Beobachtung zu entnehmen. Inwieweit unser Standpunkt die Theorie der Röntgenspektren verbessert, möge an dieser Stelle nur für die K_α -Serie untersucht werden. Wir schreiben sie dem Spiele eines Elektrons zwischen dem ein- und zwei-quantigen Kreise zu, und dürfen daher von ihr näheren Aufschluß über die beiden innersten Ringe erwarten.

Auf die K_α -Linie gehen wir im folgenden nicht ein. Sie gehört vor das Forum der Sommerfeldschen Feinstruktur-Theorie, welche in der vorangehenden Arbeit durch die Vorstellung „eines Ellipsenvereins“ und die zugehörigen strengen Lösungen des n -Körper-Problems bereichert wird. Die Entstehung von K_α wird nämlich durch den Umlauf auf Ellipsenbahnen bedingt, welche durch die Elektronen so beschrieben werden, daß deren Verbindungslinien dauernd ein reguläres sich ähnlich bleibendes Polygon bilden, in dessen Mittelpunkte der Kern liegt.

§ 1. Berechnung der Frequenz.

Es trage in der Normalanordnung der erste Bohrsche Quantenkreis, K -Kreis, k Elektronen, der zweite Bohrsche Kreis, L -Kreis, l Elektronen, in gleichen Winkelabständen voneinander. Die Wechselwirkung zwischen den Ringen berechnen wir so, als wäre die elektrische Ladung gleichmäßig auf den Ringen verteilt, und als wäre der Radius b des äußeren Ringes im Verhältnis zu a , demjenigen des inneren Ringes, so groß, daß man in den Entwicklungen des Potentials der Ringbelegung nach Kugelfunktionen die Glieder zweiter und höherer Ordnung in $\frac{a}{b}$ vernachlässigen dürfte. Dies entspricht

der ersten Approximation im Sinne der von Sommerfeld ausgearbeiteten Behandlung des Atomfeldes¹⁾, und kommt auf die Annahme hinaus, daß einerseits das System Kern und K -Ring nach außen hin so wirkt, wie ein durch die K -Ring-Ladung abgeschirmter Kern, und daß andererseits der L -Ring nach innen zu keine Kraft ausübt. Wir haben somit für jedes Elektron auf dem K -Kreise die Bedingung

$$\frac{Z \cdot e^2}{a^2} - \frac{s_k \cdot e^2}{a^2} = \frac{m v_a^2}{a}, \quad (1)$$

welche ausdrückt, daß sich die Anziehung des

1) H. Moseley, Phil. Mag. 26, 1024, 1913.

2) Eine andere Auffassung vertritt Vegard, Verh. d. D. Phys. Ges. 1917.

3) Debye, diese Zeitschr. 18, 276, 1917.

4) Sommerfeld, Ann. d. Phys. 51, 1, 1916.

1) Sommerfeld, Münch. Ber. 1916, S. 155 und 175.

Kernes und die Abstoßung der übrigen Elektronen des K -Kreises mit der Zentrifugalkraft das Gleichgewicht halten. Dabei bedeuten: Z die Ordnungszahl des Atoms, e Ladung, m Masse des Elektrons, a den Radius des Kreises, v_a die Umlaufgeschwindigkeit. Die Funktion s_k kommt schon bei Bohr vor und ist dort tabelliert¹⁾. Es ist bekanntlich

$$s_k = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\sin i \frac{\pi}{k}}.$$

Für ein Elektron auf dem L -Kreise, dessen Radius b sei, ist dagegen

$$\frac{(Z-k)e^2}{b^2} - \frac{s_l e^2}{b^2} = \frac{m v_b^2}{b}, \quad (2)$$

unter v_b die Umlaufgeschwindigkeit auf dem L -Kreise verstanden, da jetzt der Kern durch k Elektronen abgeschirmt ist. Außerdem gilt nach der quantentheoretischen Forderung, unter h das Wirkungsquantum verstanden,

$$m v_a \cdot a = \frac{h}{2\pi} \quad (3)$$

für jedes Elektron auf dem K -Kreise,

$$m v_b b = 2 \cdot \frac{h}{2\pi} \quad (4)$$

für jedes Elektron auf dem L -Kreise. Berechnen wir a und v_a aus (1) und (3), und führen wir sie in den Ausdruck für die Gesamtenergie der k Elektronen des K -Kreises

$$W_K = \frac{m v_a^2}{2} k - \frac{(Z-s_k)e^2}{a} k,$$

ein, so ergibt sich

$$W_K = N h k (Z-s_k)^2, \quad (5)$$

wenn

$$N = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3} \quad (6)$$

die Rydbergsche Konstante bedeutet. Ähnlich folgt für die Gesamtenergie der l Elektronen auf dem L -Kreise

$$W_L = \frac{N h l}{4} (Z-k-s_l)^2. \quad (7)$$

Nach (5) und (7) berechnet sich also die gesamte Energie des Ringsystems

$$W = W_K + W_L$$

zu

$$W = N h \left\{ k (Z-s_k)^2 + \frac{l}{4} (Z-k-s_l)^2 \right\}. \quad (8)$$

Nun soll sich der Vorgang der K_α -Emission zwischen dem K - und L -Ringe abspielen, indem der Zustand, in welchem die Anzahl der Elek-

tronen auf dem K -Kreise um eine Einheit abgenommen, diejenige auf L um eine Einheit zugenommen hat, wieder in den Normalzustand zurückfällt. Ist also $\bar{W}$ die Energie bei ersterer Konstellation der Elektronen,

$$\bar{W} = N \bar{h}$$

$$\left\{ (k-1)(Z-s_{k-1})^2 + \frac{l+1}{4} (Z-k+1-s_{l+1})^2 \right\}, \quad (9)$$

so wird nach dem Bohrschen Ansatz die Frequenz der ausgelösten Strahlung

$$\nu = \frac{W - \bar{W}}{h}. \quad (10)$$

Aus (8), (9) und (10) ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \frac{\nu}{N} &= k(Z-s_k)^2 + \frac{l}{4} (Z-k-s_l)^2 \\ &\quad - (k-1)(Z-s_{k-1})^2 \\ &\quad - \frac{l+1}{4} (Z-k+1-s_{l+1})^2 \end{aligned} \right\} \dots \quad (11)$$

Von den Elektronen auf den übrigen Bohr-Kreisen dürfte abgesehen werden, da ihre Energie unverändert konstant bleibt.

Beziehung (11) schreiben wir mit Benutzung der Bezeichnungen

$$A = \frac{\nu}{N} - \frac{3}{4} Z^2, \dots \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} A_n &= 2n s_n - 2(n-1)s_{n-1} - \frac{n-1}{2}, \\ B_n &= \frac{n}{2}(s_n+1) - \frac{n+1}{2}s_{n+1}, \\ C_n &= n s_n^2 - (n-1)s_{n-1}^2 - \frac{(n-1)^2}{4}, \\ D_n &= \frac{n}{4}(s_n^2-1) + \frac{n+1}{4}s_{n+1}(2-s_{n+1}), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

in der Form

$$A = -(A_k + B_l)Z + C_k + D_l + k B_l. \quad (14)$$

Das zweite Glied in der Klammer, sowie der vorletzte und letzte Term bedeuten die „Korrektion“, welche der zweiquantige Ring an der Debyeschen Formel anbringt. Diese geht aus (14) für $l=0$ hervor. Die Funktionen (13), für einige n -Werte berechnet, sind in Tabelle I ein-

Tabelle I.

n	A_n	B_n	C_n	D_n
1	0	0,25	0	0,031
2	0,5	0,3839	-0,25	0,147
3	1,4641	0,4518	-0,125	0,498
4	2,6927	0,4732	0,414	0,990
5	4,0710	0,4588	1,803	1,592
6		0,4152	4,313	2,284
7		0,3472	8,149	3,031
8		0,2436	13,503	3,792
9		0,161		4,678

¹⁾ Bohr, Phil. Mag. 1913, S. 482. Man vergleiche auch Debye l. c.

getragen. A_n und C_n kommen schon bei Debye vor, wo sie bzw. mit B_p und C_p bezeichnet sind.

Wir wenden uns jetzt zur Aufgabe, aus den Beobachtungen über Schwingungszahlen die Elektronenbelegung des K - und L -Ringes zu entnehmen. Um zunächst einen ungefähren Anhaltspunkt zu bekommen, betrachten wir die 3 ersten Werte der A , welche aus den Messungen von Moseley, Siegbahn¹⁾ u. a. hervorgehen, und nach (12) durch Debye berechnet wurden. Sie sind in Spalte 2 der Tabellen III und IV fast für alle Elemente von Na bis Nd (mit einigen Berichtigungen) angeführt²⁾. Der Berechnung ist der Wert

$$N = 109740$$

in Wellenzahlen zugrunde gelegt worden.

Für

$$Z = 11, \quad 12, \quad 13$$

beträgt A bzw.

$$A = -14,5 \quad -16,1 \quad -17,7.$$

Wir folgern hieraus, daß im Mittel ungefähr

$$\frac{\partial A}{\partial Z} = -1,59 \quad (15)$$

sein müßte. Aus (14) ergibt sich aber

$$\frac{\partial A}{\partial Z} = -(A_k + B_l).$$

Nehmen wir jetzt Tabelle I zu Hilfe, so finden wir, daß man mit

$$A_3 + B_9 = -1,625$$

dem beobachteten Werte (15) am nächsten käme. Um näheren Aufschluß über unseren vorläufigen Befund

$$k=3, \quad l=9 \quad (16)$$

zu erhalten, stellen wir uns die bezügliche A -Formel her. Nach (14) folgt für

$$k=3, l=9: A = -1,6251 Z + 5,036. \quad (17)$$

Wir stellen daneben noch die Formeln für

$$k=3, l=8: A = -1,7077 Z + 4,398 \quad (18)$$

und

$$k=3, l=7: A = -1,8113 Z + 3,947. \quad (19)$$

Eine Probe der nach (17)–(19) berechneten $-10 \cdot A$ -Werte enthält Tabelle II. In der ersten Spalte stehen die Ordnungszahlen der Atome, in der zweiten die beobachteten $-10 \cdot A$. Außerdem sind angeführt: die $-10 \cdot A$ -Werte, berechnet nach der von Debye vorgeschlagenen Formel

$$A = -1,4641 Z - 0,125,$$

welche aus der Vorstellung eines einquantigen Dreieringringes gewonnen wurde, sowie auch berechnet nach der empirischen Formel von Sommerfeld:

$$\frac{v}{N} = \frac{(Z-1,6)^2}{1^2} - \frac{(Z-3,5)^2}{2^2}.$$

Tabelle II.

Z	$-10 A$ beob.	$-10 \cdot A$ ber. nach (14)			$-10 A$ Debye	$-10 A$ Sommerfeld
		$k=3, l=7$	$k=3, l=8$	$k=3, l=9$		
11	145	159,7	143,8	128,4	162	164
12	161	177,8	160,9	144,6	177	179
13	177	195,99	178,0	160,9	192	193

Wie man sieht, ergibt

$$k=3, \quad l=8,$$

also die Annahme eines einquantigen Dreieringringes und eines zweiquantigen Achterringes einen recht guten Anschluß an die Erfahrung. Für höhere Ordnungszahlen der Atome ist die Berücksichtigung der relativistischen Massenveränderlichkeit unumgänglich.

§ 2. Berücksichtigung der Massenveränderlichkeit.

Dies führt uns dazu an Stelle von (1) und (3) zu setzen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{m}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \frac{v^2}{a} &= \frac{(Z-s_k)e^2}{a^2}, \\ \frac{m}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} va &= \frac{h}{2\pi}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

wo m die Ruhmasse, c die Lichtgeschwindigkeit, v die Umlaufgeschwindigkeit ist. Der relativistische Ausdruck für die Energie eines Elektrons auf dem K -Kreise lautet

$$W = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right) - \frac{(Z-s_k)e^2}{a}.$$

Führen wir hierin a und v aus (20) ein, so resultiert

$$W = -\frac{2hN}{\alpha^2} \left(1 - \sqrt{1 - \alpha^2 (Z-s_k)^2} \right), \quad (21)$$

wo N die Rydbergsche Konstante (6) bedeutet, und

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{ch}$$

ist. Die Größe α ist auch für die Theorie der Feinstruktur der Spektren wichtig. Den Rechnungen werden wir den Sommerfeldschen Wert

$$\alpha^2 = 5,3 \cdot 10^{-5}$$

zugrunde legen¹⁾. Ähnlich folgt für ein Elek-

¹⁾ Zusammengestellt bei Siegbahn, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 13, 296, 1916 und Wagner, diese Zeitschr. 18, 405, 1917.

²⁾ Vgl. Debye l. c.

¹⁾ Vgl. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 51, 1, 1916.

tron auf dem zweiquantigen L -Kreise der Energieausdruck

$$W' = -\frac{2hN}{\alpha^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}(Z-k-s_l)^2} \right). \quad (22)$$

Nach (21) und (22) ist also die Gesamtenergie der k Elektronen des K -Kreises und der l Elektronen des L -Kreises

$$W = -\frac{2hN}{\alpha^2} \left\{ k \left(\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}(Z-s_k)^2} \right) + l \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}(Z-k-s_l)^2} \right) \right\} \quad (23)$$

während bei einer Elektronenanordnung, in welcher k und l um eine Einheit bzw. ab- und zugenommen haben, die Energie

$$\bar{W} = -\frac{2hN}{\alpha^2} \left\{ (k-1) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}(Z-s_{k-1})^2} \right) + (l+1) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}(Z-k+1-s_{l+1})^2} \right) \right\} \quad (24)$$

ist. Führen wir noch die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} F_1 &= (Z-s_{k-1})^2 \\ F_2 &= \left(\frac{Z-k+1-s_{l+1}}{2} \right)^2 \\ F_3 &= (Z-s_k)^2 \\ F_4 &= \left(\frac{Z-k-s_l}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

ein, so folgt aus (10), (23) und (24)

$$\frac{\nu}{N} = \frac{2(k-1)}{\alpha^2} \sqrt{1 - \alpha^2 F_1} + \frac{2(l+1)}{\alpha^2} \sqrt{1 - \alpha^2 F_2} - \frac{2k}{\alpha^2} \sqrt{1 - \alpha^2 F_3} - \frac{2l}{\alpha^2} \sqrt{1 - \alpha^2 F_4} \quad (25)$$

Nach Potenzen von α^2 entwickelt, ergibt (25)

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{N} &= \left[-(k-1)F_1 - (l+1)F_2 + kF_3 + lF_4 \right] \\ &+ \frac{\alpha^2}{4} \left[-(k-1)F_1^2 - (l+1)F_2^2 + kF_3^2 + lF_4^2 \right] \\ &+ \frac{\alpha^4}{8} \left[-(k-1)F_1^3 - (l+1)F_2^3 + kF_3^3 + lF_4^3 \right] \\ &+ \frac{5\alpha^6}{64} \left[-(k-1)F_1^4 - (l+1)F_2^4 + kF_3^4 + lF_4^4 \right] \\ &+ \dots \quad (26) \end{aligned}$$

Für die numerische Rechnung bis $Z=60$ genügt es, die 4 angeschriebenen Glieder zu gebrauchen. Der Fehler, den wir damit begehen, kommt bei der hier benutzten Genauigkeit nicht zum Vorschein.

Mit $c=\infty$, also $\alpha=0$ reduziert sich offenbar (26) auf die in § 1 abgeleitete Formel (11), welcher wir die Gestalt (14) gegeben haben. Führen wir also die Bezeichnung

$$A = \frac{\nu}{N} - \frac{3}{4} Z^2$$

ein, und verstehen wir unter A^0 den Ausdruck (14)

$$A^0 = -(A_k + B_l)Z + C_k + D_l + k B_l, \quad (27)$$

so können wir (26) auch in der Form schreiben

$$A = A^0 + R, \quad (28)$$

unter R die Relativitätskorrektur verstanden.

§ 3. Vergleich mit der Erfahrung.

Mit Hilfe der Formel (26) soll nun die Vorstellung des einquantigen Dreieringes und des zweiquantigen Achteringes, zu der wir in § 1 gelangt sind, der weiteren Prüfung unterzogen werden. Dies soll zunächst bis $Z=38$ geschehen. Das Ergebnis der Rechnung ist in Tabelle III angeführt. Zusammengestellt sind dort: die Ordnungszahl Z , die beobachteten $-A$ -Werte, die nach (25) berechneten, mit $k=3$, $l=8$, die Abweichung zwischen den beobachteten und berechneten $-A$, und schließlich die $-A$ berechnet nach der Debyeschen, sowie nach der Sommerfeldschen Formel. Erstere geht aus (25) hervor, indem man $k=3$, $l=0$ setzt; letztere lautet

$$\frac{\nu}{N} = \frac{2}{\alpha^2} \left(\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}(Z-3,5)^2} - \sqrt{1 - \alpha^2(Z-1,6)^2} \right)$$

Tabelle III.

Z	$-A$ beob.	$-A$ berech. nach (25) für $k=3, l=8$	Ab- weichung	$-A$ Som- mer- feld	$-A$ Debye
11	14,5	14,3	0,2		
12	16,1	15,9	0,2		
13	17,7	17,5	0,2		
14	19,2	19,2	0,0		
15	21,0	20,7	0,3	21,5	22,3
16	21,99	22,3	-0,31		
17	23,3	23,8	-0,5		
19	26,7	26,8	-0,1		
20	28,4	28,2	0,2	29,1	27,6
21	29,8	29,5	0,3		
22	30,7	30,8	-0,1		
23	31,9	32,0	-0,1		
24	33,0	33,2	-0,2		
25	33,3	34,2	-0,9	33,2	31,4
26	34,4	35,2	-0,8		
27	35,1	36,1	-1,0		
28	36,7	36,9	-0,2		
29	38,6	37,5	1,1		
30	39,1	38,1	1,0	35	33,5
32	43,1	38,8	4,3		
33	37,9	38,9	-1,0		
34	41,6	38,8	2,8		
35	38,3	38,6	-0,3	34,9	33,1
37	38,4	37,7	0,7		
38	36,8	36,8	0,0		

Die Übereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten A -Werten kann für

die Mehrzahl der Atome recht gut, in den 7 Fällen dagegen, wo die Abweichung ungefähr eine Einheit beträgt, noch immer gut genannt werden. Die Vorstellung des einquantigen Dreieringes und des zweiquantigen Achterringes bewährt sich hier aufs beste. Die beiden größeren Abweichungen, welche bei $Z=32$ und 34 vorkommen, fallen deutlich aus dem allgemeinen Gange der beobachteten Δ -Werte heraus.

Die Fortsetzung der Atomreihe enthält Tabelle IV, welche in Spalte 2 die beobachteten,

Tabelle IV.

Z	$-\Delta$ beob.	$-\Delta$ berechnet nach (25) für $k=3, l=8$	$-\Delta$ Sommerfeld	$-\Delta$ Debye
39	50	36		
40	44	34	30	29
41	44	33		
42	40	31		
44	39	27		
45	37	24	20	20
46	33	21		
47	35	18		
48	34	14		
49	14	10		
50	4	5	0	-2
51	4	0,6		
53	22	-10		
55	-21	-23	-31	-26
56	3	-31		
57	-13	-39		
58	-44	-47		
59	-53	-56		
60	-61	-66	-74	-77

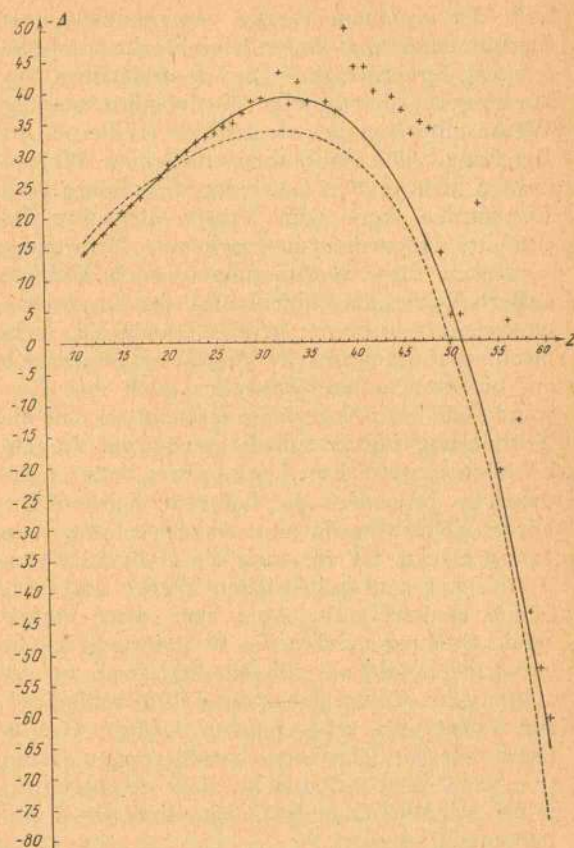
in Spalte 3 die bei Zugrundelegung des einquantigen Dreieringes und zweiquantigen Achterringes berechneten $-\Delta$ enthält. Für $Z=50$ und 55, sowie für die 3 letzten Ordnungszahlen erreicht die Übereinstimmung zwischen den beiden Zahlenreihen nicht mehr den früheren Genauigkeitsgrad; sie ist aber immerhin noch bemerkenswert. Für die übrigen Z kommen zwar schon erhebliche Abweichungen, aber der Vorzug der Formel (25) gegenüber den Formeln von Sommerfeld und Debye ist nicht zu verkennen. Es ist im übrigen zu bemerken, daß die beobachteten Δ außerhalb einer möglichen Kurve zu liegen scheinen.

Die Verbesserung, welche durch Hinzunahme des zweiquantigen Achterringes zum einquantigen Dreiering erzielt wird, möge schließlich durch das beigegefügte Kurvenbild veranschaulicht werden. Die gestrichelte Kurve entspricht der Debyeschen Formel, also unserer Formel (25) für

$$k=3, l=0,$$

die ausgezogene Kurve der Formel (25) für

$$k=3, l=8.$$



Die beobachteten $-\Delta$ -Werte sind als Kreuze eingetragen.

Zusammenfassung.

Aus der theoretischen Verwertung der K_{α} -Serie entnimmt man, daß der einquantige Ring 3 Elektronen, der zweiquantige Ring 8 Elektronen enthält.

Krakau, März 1918.

(Eingegangen 5. April 1918.)

Die Theorie der Formatreform.

Von W. Porstmann.

Das Kgl. Fabrikationsbureau in Spandau sah sich genötigt, Normen für die gesamte deutsche Industrie aufzustellen, um die Deckung des Bedarfs an Heeresgerät aller Art in der für den Bestand des Reiches notwendigen Menge zu sichern. Zunächst handelte es sich um Normen für den deutschen Maschinenbau. Schrauben, Keile, Muttern, Bohrungen, Bolzen, Zeichnungen, kurz die Elemente der Maschinen und Geräte waren bisher wohl inner-

halb der einzelnen Werke vereinheitlicht, die Zusammenfassung vieler Einzelwerke zur Lieferung der Elemente an Zentralstellen für Heeresgerät aber brachte die Zersplitterung der Werke untereinander als größtes Hindernis zur Betonung. Die Schrauben des einen Werkes paßten nicht zu den Gewinden des andern usw. Es wurden dann vom Verein deutscher Ingenieure Normalien ausgearbeitet. Notwendig berührten diese Normierungen auch Gebiete außerhalb des Maschinenbaues, der Interessentenkreis wurde immer größer, Behörden, technische und industrielle Verbände schlossen sich an, machten andererseits aber auch ihre Einwände und neue Vorschläge geltend, so daß die Normierung immer schwieriger wurde. Augenblicklich umfaßt der „Normenausschuß für die deutsche Industrie“ die hauptsächlichsten Behörden (Reichsmarineamt, Reichspostamt, viele Ministerien u. a.) wie auch die maßgebendsten technischen und industriellen Werke und Verbände Deutschlands. Aber eben diese umfassende Stellung machte die Normierung immer verwickelter, da sie immer objektiver zu gestalten war. Dieser Umstand führte schließlich zur Forderung wissenschaftlicher Grundlagen für die einzelnen Normierungen, denn nur dann besteht Aussicht, daß sie allgemein unter Hintanstellung von Einzelinteressen angenommen werden.

Wir wollen uns hier mit der Aufstellung von Normen für die Formate beschäftigen. Als hauptsächlichste Vorarbeiten wissenschaftlicher Art auf diesem Gebiete kommen in Frage die Ergebnisse der von Wilhelm Ostwald seinerzeit geleiteten „Brücke“ in München, Institut zur Organisation der geistigen Arbeit, wie die vom Verfasser in seiner „Normenlehre“ gegebenen theoretischen Klärungen. Die praktische Technik brachte indes so viele neue Gesichtspunkte zu einzelnen der dort behandelten Probleme, daß eine den erweiterten Ansprüchen gerecht werdende Fortsetzung dieser Arbeiten nach der wissenschaftlichen Seite dringend notwendig geworden ist, wenn die Arbeiten des Normenausschusses sich nicht zersplittern und ergebnislos verlaufen sollen.

Es handelt sich um Normen für Längen, für rechteckige Flächen und rechteckige Räume. Der nächstliegende Gedankengang ist nun der: wenn wir Längennormen aufstellen wollen, so schließen wir uns an das Längenmaßsystem an. Dies gibt uns als Haupttype das Meter. Als Längenmaße werden die millimalen Ableitungen benutzt: $\mu\mu$, μ , mm, m, km. Damit haben wir abgeleitete Längentypen. Die Wissenschaft benutzt noch das Zentimeter, die

Technik allerdings fast nicht. Es können aber auch die gesamten dezimalen Ableitungen als Typen benutzt werden. Und somit kann grundsätzlich „die dezimale Ableitung“ als Prinzip zur Gewinnung verschiedener Typen aus der Hauptnorm Meter festgestellt werden. Auf diese Weise würde auch der beste Anschluß an unser Zahlensystem erreicht. Was die rechteckigen Flächen anlangt, so wird man zunächst schließen: Flächen beurteilen oder messen wir nach Länge und Breite, also haben wir im Quadrat mit der Längeneinheit als Kante die nächstliegende Rechtecktype. Das Quadratmeter ist die Urtype der Flächen. Abgeleitete Flächentypen gewinnen wir ähnlich oder genau so, wie wir die Flächenmaße ableiten. Und wir stellen so letzten Endes die Flächenmaße als längst vorhandene Flächentypen auf. Derselbe Gedankengang wiederholt sich für den Raum. Den rechteckigen Raum beurteilen wir nach Länge, Breite und Tiefe, also ist das Kubikmeter die Haupttype für den Raum, und Ableitungen lassen sich etwa so gewinnen, wie die jetzigen metrischen Raummaße gewonnen sind.

Mit dieser Schlußfolgerung sind wir aber nicht über die Typen des metrischen Maßsystems hinausgekommen. Es sind Maße aufgestellt, aber keine Formattypen. Es sind mit andern Worten grundsätzlich neue logische Elemente zur Gewinnung von Typen für die Technik, für Handel und Industrie, für die Volkswirtschaft notwendig. Naturgemäß ist das Quadrat eine Flächentype, der Würfel eine des Raumes, aber diese Typen sind zur Befriedigung vieler Bedürfnisse unbrauchbar, sie sind die Formtypen für Meßzwecke, aber nicht für Gebrauchszwecke.

Die Längennormen sollen zur Beseitigung willkürlicher und zersplitternder Freiheiten bei der Festlegung von Längen irgendwelcher Art dienen, z. B. bei langen Waren, die hauptsächlich durch das Überwiegen der einen Dimension in ihrer Gestalt bestimmt sind, während der Querschnitt die verschiedensten Gebrauchs- und Herstellungsformen haben kann. Prüfen wir hier die durch die dezimale Ableitung aus der Längeneinheit gewonnene Reihe, so ergeben sich ihre Zwischenräume teilweise als zu groß. Mit einer auf Zehn aufgebauten Potenzreihe ist der Praxis nicht gedient. Zwischen 1 m und 10 m benötigt sie Zwischennormen, erst recht zwischen 1 mm und 10 mm. Dagegen werden Normen zwischen 100 m und 1000 m für die Praxis kaum erforderlich sein, von wenigen Spezialfällen abgesehen, die aber wohl auch durch technische Momente endgültig geregelt werden. Ebenso wenig werden Zwischennormen zwischen 1 $\mu\mu$ und 1 μ erforderlich sein, die

ja beide durch den Anschluß der Längenmessung an das Zahlensystem bedingt sind, aber nicht als praktische Maßstäbe im Alltag benutzt werden. Die Meßtechnik benutzt überhaupt, um dies nochmals zu betonen, nicht dezimal, sondern millesimal abgestufte Maße.

In erster Annäherung ist allgemein die arithmetische Reihe für unseren Zweck zu untersuchen. Für einen kleinen Bereich ist sie offenbar brauchbar. In zweiter Annäherung liefert die geometrische Reihe für einen größeren Bereich typische Längen. Aber auch sie ist, soweit sich schon jetzt sagen läßt, kaum für den Gesamtbereich brauchbar, selbst bei günstigster Wahl der Basis und des Exponenten. — Es soll am Schluß noch einmal auf diese Frage zurückgekommen werden.

Die Normierung der Flächen ist erheblich weiter gediehen als die der Längen; von ihr geht die Formatreform aus in ihrer Entwicklung. Die „Brücke“ vertrat bestimmte Flächenformate, die Normierung des Raumes schloß sich dann als unvermeidbar an und zuletzt wurde von technischer Seite die Regelung derselben Frage auch für die Längen gefordert. Zur Auswahl bestimmter Formate werden schließlich als Ergebnis der vielerlei Einzelvorschläge folgende Grundsätze aufgestellt:

1. Die Formate sollen einander geometrisch ähnlich sein.
2. Die Formate sollen durch Halbierung (oder Verdoppelung) auseinander hervorgehen.
3. Zur Gewinnung einer Ausgangsnorm ist eine quantitative Bestimmung nötig: Anschluß an das metrische System.

Diese Sätze gelten für alle drei Bereiche, sie sollen gewissermaßen die Grundlage abgeben, auf die sich alle nötigen Ergänzungen aufbauen können. Der erste Satz enthält das Ähnlichkeitsprinzip. Es ist dies ein vielfach als selbstverständlich angenommenes ökonomisches Prinzip der Technik, ja streng genommen des gesamten Naturhaushaltes, das erst in den letzten Jahren in den Bewußtseins-horizont der Menschheit hereingerückt ist. Es ist das zweite Fundamentalprinzip der Technik. Das erste ist das Gleichheitsprinzip. Unsere Maschinenarbeit wie überhaupt jede ge-regelte Tätigkeit beruht in erster Linie darauf, daß etwas wiederholt getan oder angefertigt wird. Eine Maschine liefert lauter gleiche Stücke; auch die Tätigkeit der Handwerker, ja der gesamten Natur ist in erster Annäherung durch die Wiederholung ein und derselben Arbeit charakterisiert. Die Technik hat dies Prinzip bewußt bis zum genauesten Extrem ausgebeutet. Da aber, wo eine Wiederholung der

gleichen Form und Größe nicht erwünscht ist, weil sie das gesetzte Ziel nicht erreichen läßt, dort müssen neue Prinzipien in der Auswahl der Formen eingreifen. Wo wir auch hinsehen, tritt hier das zweite ökonomische Prinzip in Kraft, das der Ähnlichkeit. Es wird die Größe variiert, aber die Form beibehalten. Die Größe kann nicht gleich bleiben, weil sonst das Gleichheitsgesetz schon alle Bedürfnisse befriedigen würde. Die Beibehaltung der Form gestattet eine weitgehende Beibehaltung auch der Herstellungsweise, des Gebrauchs, kurz des Umganges eben mit dieser Form. Mit der Beibehaltung der Form ist vielfach die des Stoffes verbunden. Als Beispiele für die Wirksamkeit des Ähnlichkeitsprinzips seien erwähnt: dieselbe Form der Flächenmaße, der Raummaße (das Quadrat, der Würfel); ein Gewichtssatz enthält im allgemeinen verschieden große Gewichte gleicher Form. Überhaupt ist der Begriff des „Satzes“ das Zeichen der Ähnlichkeit. Die Münzen haben bei verschiedener Größe geradezu internationale Gleichheit der Form. — Wenn man will, kann man auch das Ähnlichkeitsprinzip als eine Modifikation des der Gleichheit ansehen: Gleichheit der Form ist gewahrt. Doch soll dieser Gedanke nicht weiter ausgesponnen werden. — Die Blätter eines Baumes haben durchgängig dieselbe Form; eine Tierart hat und erzeugt dieselbe Form von Tieren. Die Himmelskörper haben annähernd die gleiche Form. Die Technik hat sich des Prinzips schon seit langem bemächtigt. Die Geschosse, vom Infanteriegeschöß bis zur Riesengranate, haben in erster Annäherung gleiche Form. Eine Motortype wird in verschiedenen Größen, aber gleicher Form geliefert. Es bedarf also kaum noch weiterer Begründung, daß und warum dieses Ähnlichkeitsprinzip als erster Grundsatz zur Normierung der Formate aufgestellt wurde. (Da eine jede Gerade der andern geometrisch ähnlich ist, fallen die Längennormen von allein in den Wirkungsbereich des Prinzips.)

Auch der zweite Grundsatz entspringt der technischen Praxis. Das Halbieren eines Körpers oder Verdoppeln durch Aneinanderlegen zweier gleicher Körper kommt so oft im praktischen Leben vor, daß der Satz eine nähere Begründung überflüssig macht. Ist uns ein Stück Papier zu groß, so falzen wir es auf die Hälfte. Die Halbierung ist die primitivste und sicherste Teilung, die wir vornehmen können, weit sicherer als etwa die Drittelung. Zu bemerken ist aber, daß wir uns hier von der dezimalen Teilung entfernen, die im Zahlensystem vorherrschend geworden ist. Wir bleiben wohl bei der Potenzreihe, aber nicht bei der mit der

Basis 10, sondern 2. Dies ist ein grundsätzlicher Unterschied zwischen den Maßen und den Formaten. Letztere sind Objekte der Praxis, für sie kommt einzig und allein die fortgesetzte Hälftelung in Frage. Die Maßpotenzreihe benutzt außerdem noch die Fünftelung, im ganzen also die dezimale Ableitung. Die Gründe hierfür sind theoretischer Natur und nicht maßgebend für die Praxis. Auch irgendwelche Widersprüche sind nicht zu erwarten, wenn hier die Zweierpotenzen, dort die Zehnerpotenzen benutzt werden. Denn unsere Formate stehen in keinerlei Berührung mit den Maßen, auch werden ihre Abmessungen in keiner Weise maßtechnisch benutzt, so daß Konflikte mit der Zahlenreihe entstehen könnten.

Auf Grund der beiden ersten Sätze lassen sich alle Verhältnisse der Formate festlegen. Für die Längen gelten beide Sätze fast selbstverständlich, hier werden die grundlegendsten Ergänzungen notwendig sein, um eine brauchbare Auswahl bereitzustellen. Für die Flächen ergibt sich die Frage: Welches Seitenverhältnis muß ein Rechteck haben, so daß seine Hälfte ihm wieder geometrisch ähnlich ist. Die Ausrechnung ergibt, daß sich die kurze Seite zur langen verhalten muß wie $1:2^{1/2}$, d. i. $1:1,414\dots$. Damit ist die Form der Flachformate endgültig festgelegt, denn es sollen sich alle Formate geometrisch ähnlich sein. Für die Räume sind ebenfalls die Verhältnisse gegeben. Die Aufgabe lautet hier: welche Kantenverhältnisse hat ein Raumrechteck (Parallelepiped), das durch Halbieren der Längsrichtung zwei Teile liefert, die dem Ausgangskörper geometrisch ähnlich sind? Die Ausrechnung ergibt die Kantenverhältnisse $2^0:2^{1/2}:2^{1/2}$. Nehmen wir ein solches Raumrechteck und halbieren fortgesetzt die jeweilige Längsrichtung, so bekommen wir eine Reihe von Raumformaten, die den beiden ersten Grundsätzen genügen.

Zur endgültigen Festlegung der Hauptformatreihen brauchen wir noch eine dritte Bestimmung, die die letzte quantitative Freiheit regelt. Zur Gewinnung einer Ausgangsnorm ist in allen drei Gebieten eine quantitative Bestimmung notwendig. Der Anschluß an das metrische Maßsystem ist in solchen Fällen von jeher benutzt worden als Organisationsprinzip. Wir werden demgemäß sagen: Längen werden durch die Längeneinheit, Flächen durch die Flächeneinheit, Räume durch die Raumeinheit dem metrischen System angeschlossen, also ist die Ausgangsnorm für die Längennormen gleich der Längeneinheit, die Ausgangsnorm für die Flachformate gleich der Flächeneinheit und die Aus-

gangsnorm der Raumformate gleich der Raumeinheit. Oder wenn wir dem dritten Satz ebenfalls die knappste Form geben wollen: Die Ausgangsnorm ist gleich der Einheit.

Die Seiten der Flachformatnorm seien x und $x \cdot 2^{1/2}$. Aus dem letzten Satz folgt eindeutig $x \cdot x \cdot 2^{1/2} = 1$ oder $x = 2^{-1/4}$. Die beiden Seiten der Flachformatnorm sind $2^{-1/4}$ und $2^{+1/4}$.

Die Kanten der Raumformatnorm seien x , $x \cdot 2^{1/2}$ und $x \cdot 2^{1/2}$, dann gilt nach dem dritten Satz $x \cdot 2^{1/2} \cdot x \cdot 2^{1/2} \cdot x = 1$ oder $x = 2^{-1/3}$. Die drei Kanten der Raumformatnorm sind somit $2^{-1/3}$, 1 und $2^{+1/3}$.

Nun handelt es sich bloß noch um die Benennung. Die Wissenschaft betrachtet herkömmlich das Zentimeter als Ausgangsnorm ihrer Systeme. Dieser Vorgang ist logisch unhaltbar, da das Meter die internationale Norm ist. Außerdem fällt das Zentimeter aus der millesimalen Reihe der tatsächlich benutzten Maße vollständig heraus. Die Technik arbeitet andererseits von jeher nicht mit dem Zentimeter, sondern mit Millimeter und Meter. So unwillkommen es daher dem Wissenschaftler sein mag, es werden für die Technik nur Systeme in Frage kommen, die auf dem Meter oder einer millesimalen Ableitung davon aufgebaut sind. Folgerecht haben wir also hinter die oben gefundenen Abmessungen der Ausgangsnormen „Meter“ zu setzen.

Aus der Flachformatnorm mit den Seiten 840,9 mm und 1189,2 mm können wir durch fortgesetztes Halbieren oder Verdoppeln die Reihe der abgeleiteten Flachformatnormen gewinnen. Die Formate sind alle einander ähnlich. Der Theoretiker ist nun geneigt, unbittlich die Beschränkung aller Flachformatfreiheiten auf Formate dieser Reihe zu fordern. Also für Bücher, Zeitschriften, Briefe, Karten, Zeichnungen usw. immer nur Formate dieser Reihe. Aber schon die ersten Reformversuche der Brücke mußten doch Nebenreihen zulassen, einmal Reihen schmal-langer Formate, die aus der Hauptreihe durch (ev. wiederholtes) Längshalbieren zu gewinnen sind, dann Hüllformate, die größer sind als die Hauptformate. Auf den ersten Blick ergeben sich zwei verschiedene Hüllreihen, die eine entsteht durch prozentuale Vergrößerung (z. B. Briefumschläge), die andere durch für alle Formate konstante Vergrößerung (z. B. Verpackungsschachteln). Doch auch die Hauptreihe selbst hat Änderungen erlebt. Es wurde z. B. vom Normenausschuß betont, daß für alle Bedürfnisse der Technik die Hauptreihe zu wenig Formate enthalte. Es wurde daher vorgeschlagen, zwischen je zwei Formate ein neues einzuschieben, und zwar das geometrische Mittel zwischen beiden,

so daß eine Verdoppelung der zur Verfügung stehenden Anzahl entsteht.

Die Hauptnorm ist $2^{-1/4} \times 2^{+1/4}$,
das nächst kleinere Format ist dann $2^{-3/4} \times 2^{-1/4}$,
das zwischengeschobene Format
hat demnach $2^{-1/4} \times 2^0$

als Seiten (also kommt auch die Längeneinheit einmal als Kante vor). Die kombinierte Reihe beginnt:

$$\begin{array}{l} 2^{-1/4} \times 2^{+1/4} \\ 2^{-3/4} \times 2^0 \\ 2^{-1/4} \times 2^{-1/4} \\ 2^{-3/4} \times 2^{-3/4} \end{array}$$

Beispielsweise hat der Normenausschuß die Reihe der zwischengeschobenen Formate als Rohmaße für die technischen Zeichnungen vorläufig angenommen, während die ursprüngliche Hauptreihe zweifellos günstigere Formate für den Briefverkehr liefert.

Naturgemäß erfordert eine Normierung des Raumes mehr Möglichkeiten, daher wird die gewonnene Raumformatreihe ebenfalls nicht die einzige bleiben. Abgesehen vom Zwischenschieben einer zweiten Reihe, wie wir es eben bei den Flachformaten erlebt haben, sind hier auch noch andere Formen erwünscht. Beispielsweise gibt es ein großes Anwendungsgebiet für Raumnormen bei den Verpackungen der Flachformate. Da aber die Kantenverhältnisse der Raumformate ($1:2^{1/2}:2^{1/2}$) das der Flachformate ($1:2^{1/2}$) nicht enthalten, so entstehen durch Stöße von Flachformaten neue Raumformate, die ein Flachformat als eine Seite haben. Wollte man diesen Umstand zur Aufstellung einer Sonderreihe benützen, so muß einer der beiden ersten Sätze verändert werden. Es lassen sich zwei Möglichkeiten hier angeben:

- a)
 1. Die Raumformate sollen einander ähnlich sein.
 2. Die Raumformate sollen ein Flachformat zu einer Seite haben.
- b)
 1. Die Raumformate sollen ein Flachformat zu einer Seite haben.
 2. Die Raumformate sollen durch Verdopplung auseinander hervorgehen.

Der dritte Satz bleibt naturgemäß beide Male bestehen. Also auch diese Reihen stehen bereit. Es wird für jede reichlich Anwendungsgebiete geben. Dies in einer knappen Übersicht zu ordnen, ist unmöglich.

Zum Schluß noch einen Blick auf die Längennormen, sie sind noch das unentwickeltste Gebiet. Aus unseren Sätzen ergibt sich lediglich die durch fortgesetzte Halbierung oder Ver-

doppelung des Meters entstehende Reihe. Diese ist für die Technik als Normalreihe viel zu umfanglos. Ja, die Technik hat hier einen neuen Gedanken gebracht¹⁾, nämlich die Aufstellung einer Normalzahlenreihe. Nicht nur als reale Längen gebraucht die Technik und auch der Alltag unzählig oft innerhalb gewisser Grenzen willkürliche Abmessungen, sondern auch als Dimensionen ganz allgemein, z. B. als Durchmesser, als Längen an Dingen, die nicht unmittelbar durch die Längennormen normiert werden, als Abstände usw. Zur Behebung der dadurch bedingten vermeidbaren Zersplitterung hat Heilandt einen Entwurf zu einer Normalzahlenreihe aufgestellt, der zunächst noch der eingehenderen theoretischen Verarbeitung harret. Falls eine Gesetzmäßigkeit herangezogen wird, kommt in erster Linie eine geometrische Reihe in Betracht mit sehr kleinen Zwischenräumen. Doch liegt hier eine praktische Lösung wohl näher, nämlich der Anschluß an unsere Zahlenreihe unter systematischer Auslassung einzelner Zahlen, wobei noch den Normalzahlen verschiedenes Gewicht zu geben ist, nachdem ihre Anwendbarkeit im speziellen Fall in erster Linie, in zweiter oder dritter zu untersuchen ist. So geht Heilandt vor. Sein Entwurf beginnt wie folgt:

μ : 1, 2, 3 . . . 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 . . .
100, 110, 120, 130, 140, 150 . . . 400, 420, 440,
460, 480, 500, 550, 600, 650, 700 . . . 1000,
in mm: 1,0, 1,1, 1,2, 1,25, 1,3, 1,4, 1,5 . . .
3,0, 3,2, 3,4, 3,5, 3,6, 3,8, 4,0 usw.

Das System ist, daß zunächst die ungeraden Zahlen, mit Ausnahme der Fünfer (Hälften) wegb bleiben. Ein solches Verfahren liefert die beste Anwendungsmöglichkeit in der Technik. Offenbar enthält diese Reihe reichlich, ja für die meisten Fälle überreichlich viele Werte. Hier bewertet nun Heilandt seine Zahlen nach drei Klassen, je nach ihrer systematischen Reinheit. Für einen speziellen Fall sucht dann der Techniker eine Zahl der ersten Klasse zu verwenden. Ist dies aus äußeren Gründen unmöglich, so zieht er die zweite Klasse mit heran, und nur im Notfall greift er zu Zahlen der dritten Klasse. Wir haben in diesem Verfahren eine Kombination der Theorie mit der Praxis zu sehen. Es müßten notwendig Abrundungen der Glieder der zu benützenden geometrischen Reihe stattfinden, so daß letzten Endes eine ähnliche Reihe entstünde, wie die Heilandtsche.

Es ist bei diesem knappen Abriß der Theorie der Formatreform nicht möglich, auf

1) Dr.-Ing. Heilandt vertrat diesen Gedanken in einer Sitzung des Normenausschusses.

die vielen sich anschließenden Fragen all-orts einzugehen. Es soll die Wissenschaft lediglich in weitestem Kreise mit der theoretischen Grundlage vertraut gemacht werden, da die ganze Frage immer wieder auf theoretische Erwägungen zurückkommt, sobald die Praxis an Scheidewegen steht. Von der Wissenschaft wird dann Klärung gefordert und die Angabe von Richtlinien, auf denen sich die von der Praxis aufgestellten Bedürfnisse am einwandfreiesten befriedigen lassen.

Einige Literaturangaben:

Literatur der „Brücke, Intern. Inst. zur Organisation der geistigen Arbeit“, München (eingegangen).

Literatur des „Normenausschusses der deutschen Industrie“, Geschäftsstelle: Berlin, Sommerstr. 4a.

„Normenlehre“ des Verfassers, Verlag A. Haase, Leipzig 1917. (Vgl. die Anzeige, diese Zeitschr. 19, 55, 1918.)

(Eingegangen 30. März 1918.)

Über die Störungen in den Linienserien der Bandenspektren.

Von T. Heurlinger.

Die Linien eines Systems von Banden können nach Deslandres durch drei ganze Zahlen, m , n , p , bestimmt werden. Jedem Wertsystem n , p entsprechen im allgemeinen mehrere Serien von Bandenlinien (welche Serien zweckmäßig durch eine vierte Zahl unterschieden werden könnten). Es gibt, wie ich früher gezeigt habe¹⁾, eine Klasse von Bandenspektren, die den Bjerrumschen Doppelbanden sehr ähnlich sind. In dieser Klasse entspricht jedem Wertsystem n , p , von der Feinstruktur abgesehen, eine und nur eine Serie, deren Frequenzen wenigstens für kleine m eine Gleichung von der Form

$$\nu = \nu_0 + c_1 m + c_2 m^2 + c_3 m^3 + \dots, \quad (1) \\ (m = \dots - 2, -1, 0 + 1, \dots)$$

befriedigen. Damit die Eigenschaften des Bandenspektrums ihre einfachsten Ausdrücke erhalten, muß die Zahl 0 einer ganz bestimmten, durch ihre geringe Intensität ausgezeichneten Linie gegeben werden. Dies gilt auch für komplizierter gebaute Banden, deren Serien nur durch Entwicklungen nach steigenden und fallenden Potenzen von m dargestellt werden können.

¹⁾ T. Heurlinger, Über die Struktur einer Klasse von Bandenspektren, Arkiv för Mat., Astr. och Fysik 12, 4.

In einer Serie von Bandenlinien sind im allgemeinen einige Linien von ihren erwarteten Lagen verschoben. Nach Deslandres¹⁾ sollen die Linien, welche denselben Werten von m und p entsprechen, dieselben Störungen zeigen. Dies Gesetz hat sich bei meinen Untersuchungen bewährt, bedarf aber einer Modifikation. Es gilt nämlich nur, wenn man die Ordnungszahl m von der schwächsten Linie an rechnet, nicht wenn man, wie Deslandres es tut, von der Kante an rechnet. Als Beleg sei nur angeführt: In den sog. Cyanbanden $\lambda 3883$ und 4216 zeigen die Linien $+59$ sowie die Linien -60 dieselben Störungen. Von der Kante gerechnet haben diese Linien die Ordnungszahlen 87 bzw. 32 in 3883 , 82 bzw. 37 in 4216 . Die Beispiele für dieses Verhalten könnten vermehrt werden.

Bei den bisher untersuchten (nach Violett abgeschattigten) Banden gilt außerdem: Die Linien $+m$ und $-(m+1)$ zeigen dieselben Störungen. Als Beleg hierfür dienen die Fig. 1, 2 und die Tabelle I über die Störungen in den sog. Cyanbanden. Der Diskussion dieses Materials schicke ich eine qualitative Bestätigung voraus: In der negativen Stickstoffbande $\lambda 3914$ sind die Linien $+3$, $+5$, $+7$ und -4 , -6 , -8 abnorm weite Dublette; dasselbe gilt von den Linien $+3$, -4 in $\lambda 4237$ [nach einer Zeichnung von Deslandres²⁾]. Daß in der Bande $\lambda 3246$ des Phosphorbogens Linien, deren Ordnungszahlen numerisch ungefähr gleich sind, ungefähr denselben Komponentenabstand haben, geht aus einer Abhandlung von P. Geuter³⁾ hervor. Diese Banden sowie die Cyanbanden gehören der genannten Klasse von Banden mit einfachen Serien an. In den Kohlebanden ($\lambda 6187$, 5635 , 5165 , 4737) entsprechen jedem Wertsystem n , p 6 Serien, die aus zwei Zweigen bestehen, welche dem positiven und negativen Zweige der Cyanbanden entsprechen, aber kompliziertere Gleichungen als (1) befriedigen⁴⁾. Hier gilt für alle bisher untersuchten Störungen: die Linien $+m$ und $-(m+k)$ zeigen identische Störungen. k ist eine kleine Zahl; ob sie gleich eins ist, mag vorläufig dahingestellt werden.

Wir betrachten nun die Störungen in den Cyanbanden. Die Linien sind im allgemeinen enge Dublette. Der Komponentenabstand, in Schwingungszahlen (Einheit cm^{-1}) gemessen, ist in Fig. 1 dargestellt. Für die Bande $\lambda 3883$

¹⁾ H. Deslandres, C. R. 139, 1176, 1904; H. Deslandres et L. D'Azambuja, C. R. 157, 671, 1913.

²⁾ H. Deslandres, C. R. 139, 1174, 1904.

³⁾ P. Geuter, Zeitschr. für wiss. Phot. 5, 41, 1907.

⁴⁾ Diese Auffassung, welche von der bisher geltenden abweicht, wird an anderer Stelle begründet.

Tabelle I.

Bande		3883		4216		4606	3590	3883		4216		4606
Serie	m	Δ_m	$\Delta_{-(m+1)}$	Δ_m	$\Delta_{-(m+1)}$	$\Delta_{-(m+1)}$	δ_m	δ_m	$\delta_{-(m+1)}$	δ_m	$\delta_{-(m+1)}$	$\delta_{-(m+1)}$
A	15	-0,10	-0,17	-0,05 ²⁾	—	—	—	—	—	—	—	—
"	59	+0,17	+0,25 ¹⁾	+0,17	+0,12	—	—	1,41	1,51 ¹⁾	1,43	1,34	—
"	81	-0,13	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
B	44	-0,1	-0	-0,15	-0,1	-0,2	0,29	0,30	0,44	0,38	0	0
"	45	-0,3	-0	-0,2	-0,1	-0,3	0,0	0,0	0,23	0,0	0	0
"	46	+0,25	+0,25	+0,3	+0,3	+0,25	3,13	3,00 ¹⁾	3,19	3,15	3,2	3,2
"	47	+0,15	+0,2	+0,2	+0,2	+0,1	0,58	0,47	0,56	0,47	0,5	0,5
"	48	+0,05	+0,05	+0,05	+0,05	+0,05	0,46	0,41	0,53	0,47	0,5	0,5
"	72	-0,6	—	-0,65	—	—	0,0	—	0,0 ¹⁾	—	—	—
"	90	+0,55	—	+0,55	—	—	0,43	—	0,59	—	—	—
C	28	—	—	—	—	—	3,06	3,11	3,25 ¹⁾	—	—	—
"	29	—	—	—	—	—	0,32	0,36	0,29	—	—	—
"	30	—	—	—	—	—	0,37	0,37	0,37	—	—	—
"	31	—	—	—	—	—	0	0	0	0 ¹⁾	—	—
"	32	—	—	—	—	—	0,72 ¹⁾	0,80	0,88 ¹⁾	0,82	—	—
"	33	—	—	—	—	—	0	0,10	0,38	0 ¹⁾	—	—

1) Diese Zahlen sind wegen Überlagerung von anderen Linien etwas unsicher.

Anmerkung. Gewisse Störungen scheinen von folgender Form zu sein: $v_m = f(m)$ für $m \leq m_1$, $v_{m_1} = f(m_1) + \Delta_{m_1}$, $v_m = f(m) + \Delta_{m_1}'$ für $m > m_1$, die oberen Zeichen für positive, die unteren für negative m genommen. Unter dieser Annahme sind die Verschiebungen 3883 A n:r 15 und 81 bestimmt. Man findet $\Delta_{15}' = +0,07$, $\Delta_{16}' = -0,07$, $\Delta_{81}' = +0,04$.

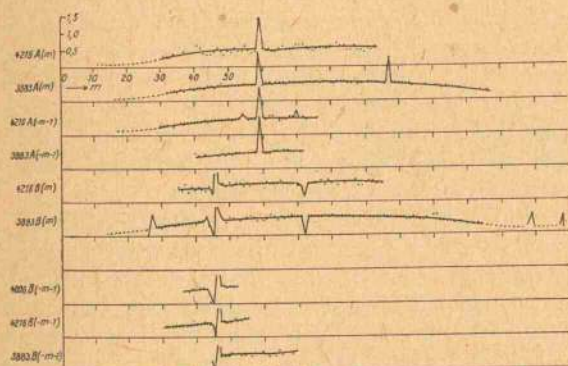


Fig. 1.

benutze ich die Messungen von Uhler und Patterson⁴⁾, für die übrigen Banden Messungen, welche Herr J. Östner auf meine Veranlassung ausgeführt hat. Die von der 1., 2., 3. Kante ausgehenden Serien werden mit A, B, C bezeichnet. Der Komponentenabstand variiert unregelmäßig, aber so, daß man eine normale Aufspaltung definieren kann, welche mit der Ordnungszahl stetig variiert. Die wirklichen Komponentenabstände stimmen, von wenigen Ausnahmen abgesehen, nahe mit dem normalen überein. Die genannten Gesetze für die Störungen gelten sowohl für die normalen wie für die abnormen Komponentenabstände.

4) H. S. Uhler und R. A. Patterson, A. J. 42, 434, 1915.

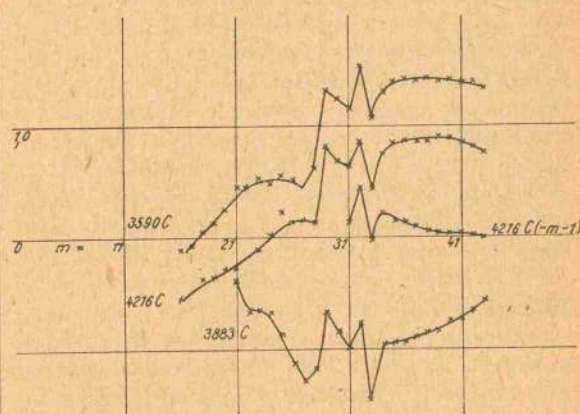


Fig. 2.

Die Tabelle I enthält teils einige Komponentenabstände (δ), teils die graphisch ermittelten Abweichungen (Δ) gewisser Linien von einer stetigen Kurve, in Schwingungszahlen gemessen. Diese Abweichungen beziehen sich auf die Mittelwerte beider Komponenten. Die leeren Plätze entsprechen Linien, welche wegen Überlagerung von anderen Linien nicht untersucht werden konnten. Eine komplizierte Störung in den C-Serien wird in Fig. 2 veranschaulicht. Als Funktion von m ist $v - a - bm - cm^2$ dargestellt, wo a , b , c für die verschiedenen Serien verschiedene Konstante sind, welche so gewählt sind, daß die darzustellende Größe klein bleibt. Die Tabelle und die Figur zeigen eine gute Übereinstimmung zwischen den Störungen der Linien $+m$ und

Tabelle II.

Bande	c_1			100 c_2			Serie A			Serie B			Serie C		
	A	B	C	A	B	C	ν_0	1. Diff.	2. Diff.	ν_0	1. Diff.	2. Diff.	ν_0	1. Diff.	2. Diff.
3590		3,88	3,80		4,5	4,1				27 921,4			27 962,8		
3883	3,84	3,81	3,88	6,8	6,4	5,6	25 797,95			25 879,1	2042,3		25 945,6	2017,2	
4216	3,83	3,80	3,78	8,5	8,2	7,6	23 755,55	2042,40		23 863,1	2016,0	26,3	23 956,6	1989,0	28,2
4606	3,85	3,82		10,1	9,7		21 739,64	2015,91	26,49	21 873,5	1989,6	26,4			

— ($m+1$) sowie zwischen den Störungen entsprechender Linien in einer Serie von Banden¹⁾. In mehreren Fällen liegen die Linien so dicht, daß ohne die Regeln für die Störungen Zweifel über die Zugehörigkeit der Linien zu den Serien herrschen können, und in der Tat habe ich in der Bande 3883 mehrere Veränderungen in der Anordnung von Uhler und Patterson vorgenommen. Die Möglichkeiten sind zwar nicht so viel, daß die erzielte Übereinstimmung ihren Wert verliert, aber die Feststellung von Ausnahmen wird erschwert.

Nur in den Serien 3883 A, B, 4216 A können die Ordnungszahlen ganz unabhängig von den Regeln für die Störungen mit einiger Sicherheit bestimmt werden. In den übrigen Serien müssen eine oder beide dieser Regeln herangezogen werden, um die Nulllinien zu bestimmen. Mit den hier gewählten Ordnungszahlen ergeben sich für die Cyanbanden nach einer präliminären Berechnung folgende Werte für die Konstanten ν_0 , c_1 , c_2 der beim 3. Glied abgebrochenen Entwicklung (1). (Vgl. Tab. II.)

Aus dieser Tabelle geht folgendes hervor. Während c_2 um mehr als 100 Proz. variiert, ist c_1 eine für das ganze System von Banden angenähert konstante Größe. Nach Analogie mit den ultraroten Banden sowie mit dem Zeeman-Effekt in Linienspektren liegt es nahe, zu erwarten, daß diese Konstante, ev. nach Multiplikation mit einer einfachen rationalen Zahl gleich $h/4\pi^2 J c$ ist, unter J das Trägheitsmoment des Moleküls verstanden. Die fortgesetzten Untersuchungen werden hoffentlich über die

Richtigkeit dieser Vermutung entscheiden. Aus einer Zeichnung bzw. Formel von Deslandres berechne ich $c_1 = 4,0$ bzw. 3,95 für die negativen Stickstoffbanden $\lambda\lambda$ 3914, 4237. Die angenäherte Übereinstimmung mit dem Werte bei den Cyanbanden war zu erwarten, da wahrscheinlich beide Bandensysteme von dem Stickstoffmolekül emittiert werden.

Für die Nulllinien der Serien A, B, C der Cyanbanden gilt nach Tab. II mit großer Genauigkeit

$$\nu_0 = F(p) + bn + cn^2,$$

wo b und c von n und p unabhängig sind. Nach Deslandres soll dieselbe Formel (mit anderen Werten der Konstanten) für die Kanten gelten. Ein Vergleich zwischen der Tabelle der Kantenserien in Kaysers Handbuch II, S. 482 und Tab. II lehrt, daß die Übereinstimmung in der letzteren sehr viel besser ist. Die gesetzmäßige Anordnung der Nulllinien kann wohl als eine Bestätigung von der Richtigkeit der gewählten Ordnungszahlen gelten.

Bei dieser Untersuchung benutzte ich Platten, welche von mir in Gemeinschaft mit den Herren E. Hulthén, J. Östnér und J. Hallenborg mit dem Konkavgitter des hiesigen Instituts aufgenommen wurden. Auch hier möchte ich diesen Herren für ihre Mitarbeit herzlichst danken. Es ist mir auch ein Vergnügen, dem diensttuenden Direktor des Instituts, Herrn Privatdozenten Dr. M. Siegbahn, für sein freundliches Interesse und sein bereitwilliges Entgegenkommen meiner Wünsche in bezug auf Apparate verbindlichst zu danken. — An anderer Stelle wird ausführlich über die Resultate der Untersuchungen berichtet werden.

Lund, Physikalisches Institut, April 1918.

(Eingegangen 8. April 1918.)

BESPRECHUNGEN.

J. M. Eder, Johann Heinrich Schulze. Der Lebenslauf des Erfinders des ersten photographischen Verfahrens und des Begründers der Geschichte der Medizin. 4^o. VI u. 79 S. mit 1 Abbildung und 4 Tafeln. Wien, k. k. Graphische Lehr- und Versuchsanstalt. (Im

Kommissionsverlag bei R. Lechner (W. Müller) in Wien und bei Wilhelm Knapp in Halle a/S.). M. 6.—

Dem Verfasser der vorliegenden Schrift ist es im Jahre 1881 gelungen, eine in Vergessenheit geratene Abhandlung Johann Heinrich Schulzes aus dem Jahre 1727 aufzufinden, in der mit vollem Bewußtsein

¹⁾ Die Störung 33 C 3883 scheint indessen nicht vollkommen mit den entsprechenden Störungen in 4216 und 3590 übereinzustimmen.

von der Tragweite der Entdeckung die Lichtempfindlichkeit der Silbersalze zur Herstellung von Abbildungen benutzt wird. Verf. hat aus näherer Beschäftigung mit dem Leben des merkwürdigen Mannes, der von erstaunlicher Vielseitigkeit war — er war Professor der Medizin und der griechischen und arabischen Sprache — eine höchst interessante Studie gemacht, die einen Einblick gewährt in die rege Forschertätigkeit an den deutschen Hochschulen des 18. Jahrhunderts und eine Reihe wichtiger Ergebnisse deutscher Gelehrter in ihrem Werden zeigt. Die Drucklegung der biographisch-historischen Studie wurde in den „Invalidenkursen“ der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien von daran teilnehmenden Setzern, Buchdruckern und Reproduktions-Technikern unter der Leitung von Lehrern der Anstalten durchgeführt und hat ein wertvolles typographisches Meisterwerk ergeben.

A. Coehn.

R. Grammel, Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges. Heft 39/40 der Sammlung Vieweg (Tagesfragen aus den Gebieten der Naturwissenschaften u. Technik.) V u. 136 S. mit 83 Abbildungen. Braunschweig, F. Vieweg & Sohn. M. 5.60.

Bei den meisten neuen Erfindungen und bedeutenden Fortschritten der Technik pflegt die praktische Tätigkeit des Ingenieurs zunächst die Hauptarbeit zu leisten, während die wissenschaftlich theoretische Durchdringung des Gegenstandes noch zurückbleibt. So ist es auch in der Flugtechnik gewesen, und hier ist dies besonders verständlich zu einer Zeit, für die der unmittelbare Erfolg schon mit Rücksicht auf die Forderungen des Krieges allein maßgebend ist und die nur selten warten kann, bis die systematisch aufbauende wissenschaftliche Forschung ihre Ergebnisse herausbringt. Immerhin gibt es eine große Zahl von Einzelarbeiten und wertvollen theoretischen Sonderuntersuchungen, die auch schon manche Schwierigkeiten und Widersprüche in den Anschauungen der Praxis aufgeklärt haben und ihr auch sonst wiederholt zugute gekommen sind.

Das vorliegende Buch stellt einen Versuch zu einer Zusammenfassung solcher Forschungsergebnisse zu einem einheitlichen Ganzen von allgemeinem Standpunkt aus dar. Es will den jetzigen Stand unseres Wissens vom Fluge zurückführen auf die als gesichert anerkannten Hauptsätze der hydrodynamischen Theorie und auf diesen ein festes Gebäude errichten, in dem das reiche Material der Praxis systematisch und übersichtlich bearbeitet Platz finden kann.

Es darf gleich gesagt werden, daß der Versuch im wesentlichen gelungen ist, wenigstens vom Standpunkt des Theoretikers. Dem in der Praxis stehenden Ingenieur werden allerdings die mit der mathematisch eleganten, aber technisch noch recht wenig eingebürgerten vektoranalytischen Auffassung verbundenen Schwierigkeiten das Studium des Buches nicht leicht machen. Dazu kommt eine in knappster Form gehaltene Darstellungsweise, die den Leser zu beständiger, scharfer Mitarbeit nötigt und ihm dadurch allerdings wieder den Vorteil des wirksameren Eindringens in den Gegenstand bietet.

Im ersten Abschnitt bringt Verf. zunächst die bekannten hydrodynamischen Grundlagen der Potentialströmung, wobei alles Überflüssige sorgfältig vermieden wird. An die Besprechung des dynamischen Auftriebes und die Einführung des wichtigen Begriffes der Zirkulation schließt sich die Entwicklung der Blasiuschen Formeln für den Auftrieb und das

Moment desselben. Ihre Anwendbarkeit für jede Art von Profilmrissen wird an einigen allgemein gehaltenen Beispielen erwiesen und dabei gezeigt, wie die Berechnung des Auftriebes auf ein vektoriell oder komplexes Randintegral zurückgeführt werden kann. Die hiermit verknüpften Schwierigkeiten umgeht der Verf. durch eine geschickte Reihenentwicklung (die Fundamentalreihe der Geschwindigkeit), welche er auch in den folgenden Kapiteln wiederholt benutzt. Schon in diesem Abschnitt findet sich eine praktisch bedeutsame Anwendung, auf die Strömungserscheinungen an Propellern, die sich zwanglos den allgemein gegebenen Grundformeln unterordnen lassen und für welche die Zirkulation berechnet werden kann.

Mit einer kurzen Einführung in die Methode der konformen Abbildung beginnt der den besonderen flugtechnischen Einzelproblemen gewidmete zweite Abschnitt. Eingehend werden hier nach einem Hinweis auf die heuristischen Schwierigkeiten bei der Anwendung auf beliebige Konturen die Kunstgriffe gezeigt, welche in einzelnen, gerade für die Flugtechnik bedeutsamen Sonderfällen eine Durchbrechung ermöglichen. Solche Beispiele sind die kreisförmige Kontur, die ebene und die gebogene Tragfläche, dann die Kombinationen zweier ebener Tragflächen hintereinander, Doppeldecker und zuletzt die schon erwähnte Anwendung auf Propeller (Tragflächen in Gitteranordnung).

Die Behandlung aller dieser Probleme führt jedesmal auf die Berechnung des Auftriebes und seiner Angriffslinie, es bietet sich dabei Gelegenheit auch verschiedene flugtechnisch-wichtige Besonderheiten, wie die Abrundung der Vorderkante (Joukowskische Konturen) und die gegenseitige Beeinflussung von Tragflächen praktisch zu besprechen.

Im letzten Abschnitt wird der für die Entwicklung der modernen Hydrodynamik so wichtige Übergang von der ebenen Potentialströmung der idealen Flüssigkeit zu den Verhältnissen des wirklichen bewegten Mediums unternommen. Wir erkennen dabei die physikalische Bedeutung und große praktische Wichtigkeit der Prandtl'schen Grenzschichtentheorie, welche wir als Ursache für das Entstehen und Unterhalten der Zirkulation ansehen können, deren grundsätzliche Bedeutung für die flugtechnische Aerodynamik aus den bisherigen Ausführungen erkannt wurde.

Die Darstellung, welche der Verf. von der Ablösung der Wirbel und des dadurch bedingten Eintretens der Zirkulationsströmung gibt, ist sehr anschaulich und trotz aller Kürze eine der besten, die dem Referenten bekannt geworden sind. Sie führt auch unter folgerichtiger Verwertung des in früheren Abschnitten Besprochenen zu sofortiger praktischer Anwendung auf die flugtechnische Bewertung der Flügelprofile, wobei auf den Vorzug der gewölbten vor der ebenen Fläche und die günstige Wirkung der vornüber geneigten Vorderkante hingewiesen wird. Interessant ist auch die Feststellung, daß zwar die Oberseite des Flügels möglichst glatt sein soll, die Unterseite aber eine gewisse Rauigkeit besitzen darf, zur Begünstigung der Zirkulation. In kurzer Übersicht wird dann der für den Stirnwiderstand und die Ökonomie des Fluges entscheidende Vorgang des Ablösens und Abrückens der Wirbel gezeigt, bei welcher Gelegenheit auch nach einem Hinweis auf die verdienstvollen Arbeiten von Föppl, v. Kármán und Rubach die gerade hier vorhandenen Lücken der Theorie hervorgehoben werden.

Daß die „das System begleitenden Wirbel“ einen schädlichen Einfluß in einer Verringerung des Auftriebes haben, bespricht der Verf. im letzten Paragraphen. Hier wird der Schritt vom sogenannten „ebenen Pro-

blem“ (der unendlich lang gedachten Tragfläche) zu der in Wirklichkeit eintretenden räumlichen Strömung getan durch entsprechende Einführung des Einflusses der die Tragflächen begleitenden Wirbelzöpfe. Diese treten, wie Verf. wohl zum erstenmal zeigt, nicht bloß an den Enden der Flügel auf, sondern sie entstehen bei veränderlicher Auftriebsdichte entlang der ganzen Fläche.

Hier konnte nun der Verf. eine Reihe neuer Gedanken entwickeln, die wohl ursprünglich von Professor Prandtl stammen, und die hier zu einem praktisch wertvollen Mittel zur Berechnung der Auftriebsziffer für endliche Seitenverhältnisse und veränderliche Auftriebsdichte ausgestaltet wurde. Mit diesen Ausführungen ist in der Tat die Theorie soweit es sich um die Frage des Auftriebes handelt auch den verfeinerten Anforderungen der Praxis nachgekommen. Dagegen konnten allerdings die besonderen mit dem Widerstande zusammenhängenden Fragen nur etwas summarisch behandelt werden; hier ist die Theorie allein noch nicht im Stande, die praktischen Forderungen zu erfüllen und auf diese Lücke ist auch vom Verf. ausdrücklich hingewiesen worden. Aus dem weiteren Inhalt dieses Paragraphen sei erwähnt, die zahlenmäßige Berücksichtigung des gegenseitigen Einflusses von Doppeldeckerflächen bei beliebiger Anordnung der Tragflächen über- oder hintereinander (wonach also auch der wichtige Fall gestaffelter Systeme ohne weiteres erledigt werden kann) und andere Beispiele mehr.

Zahlreiche Literaturhinweise, die am Schlusse in einer guten Übersicht der neueren Arbeiten auf diesem Gebiete zusammengefaßt sind, sind für das weitere Studium von Wert.

Dem Gram melschen Buche hat offensichtlich auch die Absicht zugrunde gelegen, die Theorie soweit als möglich den praktischen Aufgaben gerecht werden zu lassen. Mit oberflächlicher Anpassung war das nicht zu erreichen, es mußte tiefer gegangen werden, und darum ist auch das Werk nicht ganz leicht zu lesen. Aus der hier gegebenen Übersicht möge man aber ersehen, wie vielfache Früchte die erst so allgemein gehaltenen Ansätze des Buches tragen. Sie werden dem Leser die Mühe reichlich lohnen, mit der er sich vielleicht durch die anfänglichen Schwierigkeiten hat durcharbeiten müssen.

Eine weitere Empfehlung des für den mathematisch geschulten Flugtechniker wie für den theoretischen Aerodynamiker gleich wertvollen Werkes erscheint nach dem Gesagten überflüssig.

A. Pröll.

L. Lucas, Die Akkumulatoren und galvanischen Elemente. Theorie, Konstruktion und Anwendung. Zweite umgearbeitete und erweiterte Auflage. 8°. VIII u. 141 S. mit 92 Abbildungen. Leipzig, Dr. Max Jänecke. 1917. Geb. M. 6.—

Das vortreffliche kleine Buch ist aus der reichen Erfahrung heraus geschrieben, über die der Verf. als Obergeringieur der größten deutschen Akkumulatorenfabrik verfügt. Er ist an der praktischen Ausgestaltung des Bleiakкумуляtors selbst hervorragend beteiligt gewesen.

Die Fabrikation der Akkumulatoren umfaßt auch heute noch eine große Reihe empirisch gefundener Einzelheiten, die von den Fabrikanten sorgfältig geführt werden. Der Verfasser verweist ausdrücklich darauf, daß er in der Mitteilung von Vorschriften usw. zurückhaltend sein wolle, weil er niemand verführen möchte, auf Grund weniger Studien ohne die außer-

ordentlich große praktische Erfahrung, welche die Akkumulatorenfabrikation erfordert, sich an die Herstellung von Akkumulatoren im großen zu wagen. Das Buch ist also nicht für solche Leser, welche Akkumulatoren bauen wollen, sondern welche sie auf Grund eingehender Kenntnis ihrer Eigenart rationell benutzen wollen. Unter diesem Gesichtspunkt wird die Konstruktion der Akkumulatoren und die Verwendung der Akkumulatoren behandelt. Als besonders instruktiv sei daraus hervorgehoben die durch sehr übersichtliche Figuren unterstützte Darstellung der für eine Reihe von Zwecken geeigneten Schaltungsmöglichkeiten bei Akkumulatorenanlagen. Ein kurzes Kapitel behandelt die alkalischen Akkumulatoren (Edison, Jungner) und etwas dürftig sind die Angaben über die Primärelemente einschließlich der Normalelemente. Nachdem der Verf. dann noch ein Kapitel über allgemeine elektrochemische Theorien gebracht hat, kehrt er zu seinem Hauptthema zurück und gibt eine recht gute Zusammenfassung dessen, was über die Theorie des Bleiakкумуляtors bekannt ist. Das immer wiederkehrende „Helmholz“ statt „Helmholtz“ sollte aber in der dritten Auflage verbessert werden.

A. Coehn.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Wien Dr.-Ing. Moritz Dolch für Technologie der Brennstoffe, an der Universität Breslau Dr. Richard Meißner für Pharmakologie, an der Universität Zürich Dr. K. Agthe für Chemie.

Ernannt: Der Privatdozent für Agrarkulturchemie an der Universität Jena Dr. Hubert Kappen zum ord. Professor an der landwirtschaftlichen Akademie in Tetschen, der ord. Honorarprofessor und Dozent für Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Darmstadt Dr.-Ing. Waldemar Petersen zum ord. Professor der Elektrotechnik an derselben Hochschule.

Berufen: Der ord. Professor für Mathematik an der Technischen Hochschule Aachen Dr. Georg Hamel in gleicher Eigenschaft an die Universität Tübingen.

Verliehen: Den Observatoren am Meteorologischen Institut in Berlin Dr. Hermann Henze, Dr. Wilhelm Kühl und Dr. Oswald Venske der Titel Professor.

Gestorben: Der ord. Professor für Mathematik an der Universität Bern Dr. Johann Heinrich Graf, der Privatdozent für anorganische Chemie an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Gerhard Grüttner, der Physiker und Entdecker der Schwingungen bei elektrischen Entladungen Geh. Hofrat Dr. Berend Wilhelm Feddersen in Leipzig, der Professor der analytischen Chemie an der Technischen Hochschule Zürich Dr. Frederick Pearson Treadwell.

Gesuche.

Promovierter Physiker

mit mehrjährigen praktischen Erfahrungen in technischer Physik, besonders Hochspannungstechnik und elektrischen Schwingungen, **sucht Stelle** an einem Hochschulinstitut oder an einem großen industriellen Laboratorium. Angebote unter **S. H. 519** an den Verlag S. Hirzel, Leipzig, Königstraße 2.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 15.

1. August 1918.

Redaktionsschluß für No. 17 am 26. Juli 1918.

19. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

E. Budde, Über die Bildung von Kombinationstönen und Obertönen. S. 321.

A. Korn, Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes. IX. S. 327.

A. Haas, Über eine Beziehung

der Gravitationskonstante zu den Grundgrößen der Elektrizitätstheorie. S. 330.

Zusammenfassende Bearbeitungen:

W. Voigt, Die Resultate der geometrischen Strukturtheorien und die Ergebnisse der Analyse durch

Röntgenstrahlen. Spezieller Teil I. S. 331.

Besprechungen:

H. Usner, Der Kreisel als Richtungsweiser, seine Entwicklung, Theorie und Eigenschaften. S. 343.

Personalien. S. 344.

Angebote. S. 344.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die Bildung von Kombinationstönen und Obertönen.

Von E. Budde.

In meinem Referat über die Resonanztheorie des Hörens¹⁾ ist eine Abhandlung von F. Küstner „Untersuchungen über den Schalldruck“²⁾ nicht berücksichtigt, in welcher der von Waetzmänn vermutete Zusammenhang zwischen Schalldruck und Bildung von Kombinationstönen auf korrekter Grundlage erörtert wird. Wenn auch die Durchführung der Küstnerschen Theorie im folgenden nur mit einem Grade der Annäherung geleistet wird, der kaum über qualitative Ergebnisse hinausführt, so ist ein kritischer Vergleich derselben mit den übrigen Theorien doch geeignet, gewisse Grundfragen, die der Experimentator zunächst beantworten muß, schon jetzt deutlich hervortreten zu lassen. Ich bitte daher, das Folgende als Nachtrag zu meinem Referat anzunehmen.

§ 1. Vorbemerkungen.

a) Will man die verwickelteren Resonanzerscheinungen im menschlichen Ohr beurteilen lernen, so wird man zunächst objektive Beobachtungen an Apparaten außerhalb des Ohres anstellen müssen. Dabei sind natürlich zunächst möglichst einfache Verhältnisse zu wählen, insbesondere wird man Resonatoren zu untersuchen haben, deren Abweichung von der Symmetrie entweder verschwindet oder meßbar und reproduzierbar ist; die Waetzmännischen Töne im Mikrophon-Telephonkreis kommen erst in zweiter Linie in Betracht, weil die durch das Mikrophon hervorgerufene Asymmetrie diese letztere Eigenschaft nicht hat.

b) Benutzt man ausgedehnte Objekte (z. B. Platten oder Saiten) als Resonatoren, so wird

man in der Regel nur ihre Grundtöne oder bestimmt ausgewählte Obertöne beobachten. Die verwickeltere Form, in der die Schwingungsgleichungen derartiger Objekte auftreten, ist darin begründet, daß die Theorie die Möglichkeit bieten muß, die Verteilung der Amplituden über die einzelnen Elemente des Objekts anzugeben. Da aber alle diese Elemente im gegebenen Fall nach derselben periodischen Zeitfunktion schwingen, kommt für die Resonanz eben nur die Periode dieser Schwingung in Betracht, und da genügt es für die Darstellung, wenn man das Objekt durch einen Punkt von einer Koordinate ersetzt, dem man eine mittlere Masse, eine mittlere Elastizitätskonstante und mittlere Reibungseffekte zuschreibt.

c) Es ist zu bemerken, daß, auch wenn man das tut, der Begriff der Resonanz nicht ganz eindeutig ist. Dies möge an dem Beispiel eines Massenpunktes, der auf eine einfache Schwingung reagiert, erläutert werden. Derselbe schwinde (die Bezeichnungen wie üblich) nach der Gleichung

$$x'' + 2bx' + px = A \sin nt. \quad (1)$$

Die Integration ergibt für erzwungene Schwingungen, wie bekannt,

$$x = \frac{A}{\sqrt{(p^2 - n^2)^2 + 4b^2n^2}} \sin(nt + \text{const}). \quad (2)$$

Die „Resonanz“ im engeren Sinne tritt ein, wenn der Nenner auf der rechten Seite ein Minimum wird. Helmholtz¹⁾ läßt das Minimum eintreten, wenn $p = n$ wird, und zieht den Schluß:

„Das Mitschwingen ist um so stärker, je genauer die Schwingungszahl der zugeleiteten Bewegung mit der Schwingungszahl der reibungsfreien Eigenbewegung des erregten Körpers übereinstimmt.“

1) E. Budde, Über die Resonanztheorie des Hörens, diese Zeitschr. 18, 225 u. 249, 1917.

2) F. Küstner, Ann. d. Phys. 50, 941, 1916.

1) Helmholtz, Tonempfindungen, 4. Aufl. Braunschweig 1877, 638. Auch Vorlesungen III, Leipzig 1898, 48.

Verschiedene Autoren, darunter auch ich¹⁾, haben geglaubt, diesen Satz für unrichtig erklären zu sollen; denn wenn man den Nenner nach n differenziert, erhält man als Bedingung für das Minimum die Gleichung

$$n^2 = p^2 - 2b^2. \quad (3)$$

In Wirklichkeit zeigt diese Diskrepanz nur, daß zwei verschiedene Fragestellungen möglich sind. Die erste lautet: Gegeben ist eine Saite, deren freie Schwingung nach der Gleichung

$$x'' + 2bx' + p^2x = 0$$

vor sich gehen würde, deren Kreisfrequenz also bei freier Schwingung

$$\sqrt{p^2 - b^2}$$

wäre; wie groß muß die Kreisfrequenz desjenigen Tones n gewählt werden, der die Saite zum maximalen Mitschwingen bringen soll? In diesem Falle ist n die Variable, von der die Erscheinung abhängt, und die Antwort lautet: Es muß sein $n^2 = p^2 - 2b^2$.

Die zweite Fragestellung lautet: Gegeben ist ein objektiver Schallwellenzug von der Kreisfrequenz n und eine Harfe mit unendlich vielen Saiten der Kreisfrequenzen p . Welche von diesen Saiten schwingt mit maximaler Amplitude mit? In diesem Falle ist p die bestimmende Variable, und die Antwort lautet: Es muß $p = n$ sein.

Für die Resonanz im Ohr liegt offenbar der zweite Fall vor; die von Helmholtz gegebene Antwort ist also für die von ihm behandelte Frage richtig. Handelt es sich um ein außerhalb des Ohres angestelltes Experiment, so wird die Art der Fragestellung von der Anordnung der Apparate abhängen. Übrigens wird im praktischen Falle meistens b so klein gegen p sein, daß der Unterschied ziemlich belanglos ist, daß man also in der Rechnung die mathematisch bequemere Formel benutzen kann.

d) Hat man mit zwei Tönen der Kreisfrequenzen p und q zu tun, so ist zu bedenken, daß die Bestimmung einer Schwingungszahl nur mäßige Genauigkeit hat; einen Fehler von $1/10000$ anzunehmen, ist sicher zulässig; und die Stetigkeit der akustischen Erscheinungen berechtigt zu der Annahme, daß man charakteristische Beziehungen nicht übersehen oder verunstalten wird, wenn man für eine der beiden Größen p oder q eine Ungenauigkeit von so kleinem Betrage zuläßt. Infolgedessen kann man p und q immer als kommensurabel ansehen. Dann braucht man aber nur die Zeiteinheit passend zu wählen, um p und q zu ganzen Zahlen zu machen. Man beeinträchtigt

1) E. Budde, Verh. d. D. phys. Ges. 13, 130, 1911.

also die Allgemeinheit nicht, wenn man p und q als ganze Zahlen behandelt. Ist dann r der größte gemeinschaftliche Divisor von p und q , so ist offenbar $\frac{2\pi}{r}$ die Periode der Gesamterscheinung, welche durch die Kombination von p und q hervorgerufen wird. Eine endliche oder unendliche Summe von Cosinus und Sinus der Argumente $(\mu p + \nu q)t$, wo μ und ν beliebige ganze Zahlen sind, Null und negative Werte nicht ausgeschlossen, kann immer als Fouriersche Reihe mit dem Grundargument rt angesehen werden.

e) Schon Helmholtz¹⁾ hat mit voller Deutlichkeit auf den innigen Zusammenhang zwischen Obertönen und Kombinationstönen hingewiesen: Ein resonierender Körper, der Kombinationstöne liefert, wenn er von zwei gleichzeitigen Wellenzügen getroffen wird, bildet Obertöne, wenn ihn ein einfacher Wellenzug trifft, und umgekehrt. Infolgedessen kann man vielfach, namentlich wenn es sich um wesentlich qualitative Erörterungen handelt, die Formeln dadurch kürzen, daß man nach Obertönen statt nach Kombinationstönen fragt. Von dieser Freiheit wird im folgenden Gebrauch gemacht.

§ 2. Der ursprüngliche Gedankengang Waetzmans tritt am deutlichsten hervor aus den beiden Abhandlungen „Über die Bewegungsform elastischer Körper unter der Einwirkung auftretender Schallwellen“²⁾ und „Über unsymmetrische Schwingungen einseitig belasteter Gummihäute“³⁾.

Waetzmans sagt:

Man pflegt die Gleichung⁴⁾

$$x'' + 2bx' + p^2x = F \sin 2\pi nt \quad (4)$$

als mathematische Formulierung des Vorganges anzusehen, der sich abspielt, wenn eine einfache Tonwelle auf ein (durch einen schwingenden Punkt ersetzbares) Objekt auffällt. Da aber, wie bekannt, eine Tonwelle, die auf eine reflektierende Wand auftrifft, neben den periodischen Druckschwankungen noch einen einseitigen Überdruck auf die Wand ausübt, so stellt dieser Ansatz den physikalischen Vorgang nicht vollständig dar.

Waetzmans fügt daher auf der rechten Seite noch ein additives Druckglied zu und schreibt

1) H. Helmholtz, l. c. S. 263.

2) E. Waetzmans, Verh. d. Deutsch. phys. Ges. 16, 424, 1914.

3) E. Waetzmans u. W. Moser, Verh. d. D. phys. Ges. 18, 13, 1917.

4) Die Gleichung ist hier gegen das Original durch Division mit der Masse m gekürzt.

$$x'' + 2b x' + p^2 x = F \sin 2\pi n t + D. \quad (5)$$

Dieser Gedankengang scheint mir prinzipiell unrichtig; denn der Rayleighsche Schalldruck geht — soweit er überhaupt vorhanden ist — erst aus der Schwingungsgleichung (4) bzw. aus modifizierten Formen derselben hervor. Er besteht also nicht neben der Gl. (4), sondern Gl. (4) stellt den ganzen Vorgang einschließlich des Schalldruckes dar, solange man dem schwingenden Punkt eine lineare Differentialgleichung zuschreibt¹⁾.

Aber selbst wenn es anders wäre, würde sich aus Gl. (5) kein Oberton ergeben, solange die Schwingungsgleichung linear ist; denn in Gl. (5) braucht man nur D auf die linke Seite zu bringen, so erhält man

$$x'' + 2b x' + p^2 \left(x - \frac{D}{p^2}\right) = F \sin 2\pi n t, \quad (6)$$

und wenn man darin setzt

$$x - \frac{D}{p^2} = y, \quad (7)$$

ergibt sich

$$y'' + 2b y' + p^2 y = F \sin 2\pi n t, \quad (8)$$

also wieder eine symmetrische Schwingung, die sich von der durch Gl. (4) dargestellten nur dadurch unterscheidet, daß sie nicht um den Mittelpunkt $x=0$, sondern um den Mittelpunkt $x = \frac{D}{p^2}$ stattfindet.

Aus der Zufügung eines asymmetrischen konstanten Gliedes zur Schwingungsgleichung ergibt sich also nichts weiter als eine „Nullpunktverschiebung“ der Schwingung. Und diese tritt in der Tat aus den von Waetzmann und Moser gegebenen Kurven sehr schön hervor. Die Kurven b und c ihrer Fig. 1 bleiben aber dabei, soviel man mit bloßem Auge sehen kann, einfache Sinusoiden, wie es der Gl. (8) entspricht. Ob die Kurven der Fig. 3 Kombinationstöne enthalten, ist fraglich; wäre es der Fall, so würde darin nichts weiter liegen als der Beweis, daß die Schwingungen der einseitig belasteten Gummihaut durch die Gl. (5) nicht vollständig dargestellt werden.

1) Außerdem ist zu bemerken, daß der konstante Rayleighsche Schalldruck, welchen das Glied D darstellt, aus einer Mittelbildung über unendliche Zeit oder, was dasselbe sagt, über eine ganze Periode hervorgeht. Und wenn man eine lineare Sinusfunktion über eine ganze Periode integriert, erhält man als Mittelwert stets Null. Wenn ich Herrn Waetzmann richtig verstehe, ist er der gleichen Ansicht, solange es sich um eine einfache harmonische Schwingung handelt, glaubt aber, daß ein endlicher Schalldruck zustande kommt, wenn zwei Töne miteinander schweben. Aber auch in diesem Fall ergibt die Mittelbildung, wie auf der folgenden Seite gezeigt wird, den Rayleighschen Schalldruck Null, solange man nur mit linearen Gleichungen rechnet, und liefert nichts, was für die Erklärung der Kombinationstöne brauchbar wäre.

Asymmetrische Gestalt des schwingenden Objekts genügt nicht, um Obertöne und Kombinationstöne hervorzurufen; dazu ist vielmehr, wie Helmholtz¹⁾ bereits mit gewohnter Schärfe hervorgehoben hat, erforderlich, daß die positiven und negativen Verschiebungen, bzw. die durch diese hervorgerufenen Kräfte, gegen die Ruhelage des Körpers asymmetrisch seien.

Um weiteren Mißverständnissen vorzubeugen, ist es vielleicht zweckmäßig, noch folgende Erwägung anzustellen: Es seien zwei Druckwellen gegeben, die zusammen dargestellt werden durch die Gleichung

$$p = F \sin 2\pi m t + G \sin 2\pi n t. \quad (9)$$

Es sei r der größte gemeinschaftliche Divisor von m und n , und zwar sei

$$m = \mu r, \quad n = \nu r,$$

so daß die vorstehende Gleichung sich schreiben läßt

$$p = F \sin 2\pi \mu r t + G \sin 2\pi \nu r t,$$

wo μ und ν ganze relative Primzahlen sind.

Dann ist $\frac{1}{r}$ die Gesamtperiode der Erscheinung.

Bildet man nun das Zeitmittel über eine ganze Periode, so erhält man selbstverständlich

$$r \int_{t=0}^{t=\frac{1}{r}} (F \sin 2\pi \mu r t + G \sin 2\pi \nu r t) dt = 0.$$

Mittelt man aber nur über die halbe Periode, so ergibt sich

$$2r \int_0^{\frac{1}{2r}} (F \sin 2\pi \mu r t + G \sin 2\pi \nu r t) dt = -\frac{F}{\pi \mu} (\cos \mu \pi - \cos 0) - \frac{G}{\pi \nu} (\cos \nu \pi - \cos 0).$$

Von den beiden Zahlen μ und ν ist notwendig wenigstens eine ungerade. Nehmen wir an, μ sei diese ungerade Zahl, so ergibt sich für den Druck der mittlere Wert

$$\bar{p} = \frac{2F}{\pi \mu} + \frac{G}{\pi \nu} [1 - (-1)^\nu].$$

Selbstverständlich ergibt sich der entgegengesetzte Wert, wenn man das Mittel über den Zeitraum

$$t = \frac{1}{2r} \text{ bis } t = \frac{1}{r}$$

bildet. Im allgemeinen ergibt sich also wäh-

1) H. Helmholtz, l. c. S. 652.

rend der ersten Halbperiode ein mittlerer Überdruck nach der einen, und während der darauf folgenden Halbperiode ein ebenso großer Druck nach der anderen Seite. Man erhält also tatsächlich zwei entgegengesetzte „Schalldrucke“ (das Wort in etwas weiterem als dem Rayleighschen Sinne genommen), von denen jeder während der Hälfte einer Periode andauert. Es wäre aber durchaus falsch, daraus nun den Schluß zu ziehen, daß diese beiden Schalldrucke nunmehr der Gl. (9) zuzurechnen wären, daß man also in Wirklichkeit zu schreiben hätte

$$p = F \sin 2\pi mt + G \sin 2\pi nt + \frac{2F}{\pi\mu} \text{ usw.};$$

denn die fraglichen Drucke bestehen ja nicht neben der Gl. (9), sondern sind schon in ihr enthalten.

Ebenso leicht ist nachzuweisen, daß man keine Kombinationstöne erhält, wenn man in Gl. (9) auf der rechten Seite noch ein konstantes Glied D zuffügt.

Das Gesagte bestätigt den allgemein angenommenen Helmholtz-Cl. Schäferschen Satz: Ohne quadratisches Glied liefert die Theorie weder Obertöne noch Kombinationstöne.

§ 3. Die Theorie von Küstner unterscheidet sich nun von der Helmholtz-Cl. Schäferschen dadurch, daß sie dieses quadratische Glied nicht in die Schwingungsgleichung des resonierenden Körpers, sondern in diejenige des schallleitenden Mediums (Luft) verlegt. Die Bewegung wird eindimensional behandelt. Ist x die Koordinate, Φ das Geschwindigkeitspotential in der Luft, p der veränderliche Druck in derselben, p_0 der Druck in der Ruhe, so leitet Küstner in Abwesenheit äußerer Kräfte für die Luft die Gleichungen ab (a eine Konstante)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0, \quad (10)$$

$$p = p_0 e^{-\frac{1}{a^2} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \right]}. \quad (11)$$

Hierbei sind folgende Vereinfachungen eingeführt: 1. Es sind die Schwingungsgleichungen eines reibungsfreien Gases benutzt. Das ist sicher unbedenklich, hat aber die (gleichfalls unbedenkliche) Nebenwirkung, daß in der späteren Formel für das Geschwindigkeitspotential ein Divisor auftritt, der es verbietet, Schall-schwingungen zu verwenden, die in der benutzten Röhre (siehe unten) Resonanz erregen. 2. Es ist isotherme Leitung in der Luft vorausgesetzt.

In freier Luft wäre wohl eher adiabatische Leitung anzunehmen. Ich gehe auf den adiabatischen Fall nicht ein, da Herr Cl. Schäfer mir mitgeteilt hat, daß er demnächst in Verbindung mit Herrn F. A. Schulze eine kritische Arbeit über Schalldruck bei beliebigem Druckgesetz veröffentlichen will.

Macht man nun, wie gewöhnlich, die Annahme, die Amplitude der behandelten Schwingungen sei unendlich klein, so sind die Glieder zweiter Dimension in Φ und p zu vernachlässigen. Man erhält dann aus den Gl. (10) und (11) die gewöhnliche Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \quad (12)$$

und die Druckgleichung

$$p = p_0 \left(1 - \frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right). \quad (13)$$

Diese werden auf folgenden Fall angewendet: Ein Rohr von der Länge 1 liege mit seiner Achse parallel der x -Achse. Das hintere Ende $x=1$ sei durch eine starre Wand verschlossen; am vorderen Ende $x=0$ werde dem Gase zwangsweise eine Wellenbewegung erteilt, so daß dort die Geschwindigkeit $nA \cos nt$ stationär herrscht. Es gelten also für die beiden Enden des Rohres die Randbedingungen

$$\text{Für } x=0 \text{ ist } \frac{\partial \Phi}{\partial x} = nA \cos nt, \quad (14)$$

$$\text{Für } x=1 \text{ ist } \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0. \quad (15)$$

Zunächst wird nun nachgewiesen, daß der Rayleighsche Schalldruck unter den Bedingungen (12) und (13) Null ist. Dann aber wird die Entwicklung von

$$e^{-\frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}}$$

um ein Glied weiter getrieben als in Gl. (13). Es wird also gerechnet mit den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0, \quad (16)$$

$$p = p_0 \left[1 - \frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2a^4} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \right]. \quad (17)$$

Hierin liegt eine neue Vernachlässigung; wenn man nämlich die Glieder zweiten Grades in Gl. (17) beachtet, so darf man folgerichtig auch die entsprechenden Glieder in Gl. (10) und (11) nicht vernachlässigen. Küstner weist aber in einem Nachtrage nach, daß sein Hauptergebnis nicht geändert wird, wenn man diese Vernachlässigung fallen läßt. Er findet mit den angegebenen Mitteln einen von Null verschie-

denen Rayleighschen Schalldruck, Obertöne und Kombinationstöne.

Wir wollen hier auch die letzte von Küstner eingeführte Vernachlässigung beibehalten; man wird leicht sehen, daß die unten zu ziehenden Vergleiche dadurch nicht wesentlich beeinträchtigt werden. Wir setzen aber nun an die Stelle der starren Wand, die bei Küstner am Ende $x=1$ die Röhre verschließt, eine bewegliche, zum Mitschwingen befähigte Platte. Die Platte könne Schwingungen in der x -Richtung machen und sei elastisch an ihre Ruhelage gebunden; es werde ihr auch eine gewisse Dämpfung zugeschrieben, so daß sie für sich allein, wenn sie frei wäre, eine Schwingungsgleichung

$$x'' + 2b x' + p^2(x-1) = 0 \quad (18)$$

haben würde. Im Experiment wird die wirkliche Platte in der Regel in der Lage sein, Energie an die Luft abzugeben, und diese Abgabe kann je nach der Art des Versuchs recht verschieden sein. Um die daraus für die Rechnung entstehenden Komplikationen zu vermeiden, fingieren wir, das Rohr beginne links bei $x=0$, die resonierende Platte liege bei $x=1$, das Rohr sei verlängert und auf der rechten Seite der Platte sei eine zweite Anregung vorhanden, die das Spiegelbild der links gegebenen mit genau umgekehrter Phase ist, so daß also zu der Zeit, wo die Verdichtung der Luft auf der linken Seite der Platte ihr Maximum hat, auf der rechten Seite die stärkste Verdünnung herrscht usw. Der Gesamtdruck auf die Platte ist dann in jedem Augenblick das Doppelte von dem, der von der bei $x=0$ eintretenden Anregung herrührt.

Unter den hier vorausgesetzten Umständen ist die zweite Randbedingung, Gleichung (15) für $x=1$ offenbar nicht mehr brauchbar. Da die Luft sich von der Platte nicht entfernen kann, muß die Bewegung derjenigen Luftschicht, welche der Platte unmittelbar anliegt, mit derjenigen der Platte selbst übereinstimmen. Von vornherein läßt sich aber nicht behaupten, daß die resonierende Platte dieselbe Phase haben wird, die in der Luft an der Stelle $x=1$ vorhanden sein würde, wenn die Platte nicht vorhanden wäre. Es ist also vorauszusetzen, daß die Luft an der Stelle $x=1$ in irgendeiner noch nicht bekannten Phase schwingen wird. Ferner ist von vornherein darauf Rücksicht zu nehmen, daß die resonierende Platte möglicherweise Obertöne bilden kann; wir wollen aber nur den ersten Oberton berücksichtigen, schreiben also der Platte eine Bewegung zu, welche durch trigonometrische Funktionen von nt und $2nt$ dargestellt werden

kann. Dann lautet die zweite Randbedingung offenbar:

Für $x=1$ ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = Bn \cos nt + Cn \sin nt + 2Dn \cos 2nt + 2En \sin 2nt, \quad (19)$$

wo B, C, D, E vorläufig unbekannte Konstanten sind. Die beiden Randbedingungen (14) und (19) sind erfüllt, wenn man setzt

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{aA \cos \left[\frac{n}{a}(x-1) \right] - aB \cos \frac{n}{a}x}{\sin \frac{n}{a}} \cos nt - \\ & - \frac{aC \cos \frac{n}{a}x \sin nt - \frac{aD}{\sin \frac{2n}{a}} \cos \frac{2n}{a}x \cdot \cos 2nt -}{\sin \frac{2n}{a}} \\ & - \frac{aE}{\sin \frac{2n}{a}} \cos \frac{2n}{a}x \cdot \sin 2nt. \end{aligned} \quad (20)$$

Wir schreiben hierfür abkürzend

$$\Phi = f_1(nt) + f_2(2nt).$$

Berücksichtigt man nun in der Reihenentwicklung von

$$e^{-\frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}}$$

noch das quadratische Glied, so hat man gemäß Gl. (17) zu setzen

$$p - p_0 = p_0 \left[-\frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2a^4} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \right];$$

also wird der variable Druck auf die Platte

$$\begin{aligned} 2(p - p_0) = & -\frac{2p_0}{a^2} \left[f_1'(nt) + f_2'(2nt) \right] - \\ & - \frac{1}{2a^2} \left[f_1'(nt) - f_2'(2nt) \right]^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Man sieht ohne weiteres, daß das quadratische Glied nach den bekannten Formeln

$$\cos^2 \eta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\eta,$$

$$\sin^2 \eta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\eta,$$

$$\cos \eta \cos \vartheta = \frac{1}{2} \cos(\eta + \vartheta) + \frac{1}{2} \cos(\eta - \vartheta)$$

usw.

erstens konstante Anteile, zweitens Cosinus und Sinus von $2nt$, drittens solche von $(2+1)nt$, also auch solche von $3nt$, viertens solche von $4nt$ liefert. Da wir überhaupt nur bis zu Gliedern zweiter Ordnung rechnen wollen, erhalten wir schließlich einen Ausdruck, von der Form

$$2(p - p_0) = F + G \cos nt + H \sin nt + I \cos 2nt + K \sin 2nt. \quad (22)$$

Das ist nun der Druck, unter dem die Platte schwingt. Ihre Schwingungsgleichung wird also

$$x'' + 2bx' + q^2(x-1) = 2(p-p_0), \quad (23)$$

wo $2(p-p_0)$ zur Abkürzung für den Ausdruck auf der rechten Seite von Gl. (22) steht. Die erzwungenen Schwingungen, welche aus ihr hervorgehen, sind in bekannter Weise leicht zu ermitteln; die Lösung hat die Form

$$x - \left(1 + \frac{F}{q^2}\right) = P \cos nt + Q \sin nt + R \cos 2nt + S \sin 2nt. \quad (24)$$

Bedenkt man nun, daß $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ für $x=1$ identisch mit $\frac{dx}{dt}$ sein muß, so liefert die vorstehende

Gleichung offenbar die Mittel, die Größen G , H usw., und damit auch die B , C , D , E der Gl. (20) durch A auszudrücken. Die Ausrechnung kann hier übergangen werden, da Gl. (23) mit (22) ausreicht, um die uns interessierenden Folgerungen abzuleiten. Man erhält offenbar

1. einen konstanten Schalldruck, also eine „Nullpunktsverschiebung“ der schwingenden Platte,

2. Grundtöne n ,

3. Obertöne $2n$,

qualitativ dasselbe, was sich aus Küstners Originalrechnung für den Abschluß der Röhre durch eine feste Wand ergibt. Über diese qualitativen Ergebnisse soll hier nicht hinausgegangen werden; zu quantitativen Feststellungen reichen die Grundlagen meines Erachtens noch nicht aus. Man ersieht das schon aus den vielen eingeführten Vernachlässigungen, es hat aber auch noch tiefere Gründe, auf die ev. später einzugehen sein wird.

§4. Vergleich der verschiedenen Theorien. Einstweilen ergeben sich folgende Schlüsse:

A. Theorie von Helmholtz. Die Bildung von OT und KT hat ihren Grund in einer besonderen Eigenschaft des resonierenden Körpers. Eine gegen die Schallrichtung asymmetrische Gleichgewichtsgestalt, wie sie z. B. in der Waetzmann-Moserschen Gummihaut gegeben ist, reicht an sich noch nicht aus, um OT und KT hervorzurufen; vielmehr muß dazu die Schwingung selbst asymmetrisch gegen die irgendwie gestaltete Gleichgewichtslage sein. Da sich in den Helmholtzschen Gleichungen auf der rechten Seite konstante Glieder¹⁾ finden, ist die Resonanz-

schwingung mit einer Nullpunktsverschiebung verbunden.

B. Theorie von Helmholtz mit der Abänderung von F. A. Schulze. Es wird eine Differentialgleichung angenommen, die gleich der Helmholtzschen ein quadratisches Glied qx^2 enthält; Schulze nimmt aber an, daß die Konstante q bei jedem Durchgang durch die Ruhelage einen Vorzeichenwechsel erleidet. Die Schwingung wird dann natürlich symmetrisch. Mir scheint aber, daß für diese Annahme bei den Resonatoren gewöhnlicher Art keine rechte mechanische Begründung vorliegt. Will man einem schwingungsfähigen Körper symmetrische Schwingungen zuschreiben, die ihrer Größe wegen nicht mehr mit einer rein linearen Schwingungsgleichung verträglich sind, so ist es wohl das Nächstliegende, anzunehmen, daß sie ein Glied qx^3 enthält. Man ersieht ohne weiteres, daß diese Annahme zu nahe denselben Folgerungen führt, wie die Schulzesche Abänderung: Der resonierende Körper bildet die OT und KT ; die Schwingung wird symmetrisch.

C. Von der Theorie von Cl. Schäfer betrachten wir nur den von Schäfer selbst bevorzugten Fall der quadratischen Dämpfung; die Schwingungsgleichung enthält ein Glied qx'^2 . Daß dieses Glied beim Richtungswechsel der Schwingung sein Vorzeichen ändert, ist eine naturgemäße Annahme. Auch hier ist der resonierende Körper das Organ, welches die OT und KT bildet. Eine mittlere Nullpunktsverschiebung kann offenbar nicht eintreten; denn selbst wenn die Einzelbewegung eine solche Verschiebung enthielte, würde sie ja von einer Halbschwingung zur anderen das Vorzeichen wechseln, im Mittel also den Betrag Null ergeben. Der bezeichnende Unterschied gegen Helmholtz besteht, wie schon früher erwähnt, darin, daß die Amplitude der KT nach Helmholtz einfach dem Produkt AB aus den Amplituden A und B der beiden kombinierten Töne m und n , daß sie aber nach Schaefer mit $ABmn$ proportional ist; sie wächst also mit der Höhe der Primärtöne. Entsprechendes gilt für die Intensität der OT .

In meinem Referat habe ich einen Versuch von Waetzmann angeführt, der objektive KT in einer Telephonmembran im Vakuum hervorgerufen hat und daraus schließt, daß die Kombinationstöne auch unter Bedingungen auftreten, wo die quadratische Dämpfung nahe verschwindet. Ferner habe ich den Versuch

1) Z. B. l. c. S. 651 in x_2 das Glied $-\frac{b}{2a}(u^2 + v^2)$. Diese Gleichung ist übrigens, wenigstens in der vierten

Auflage der „Tonempfindungen“, stark verdruckt; im dritten Gliede auf der rechten Seite steht u^2 statt v^2 , und in allen Gliedern mit Ausnahme des ersten fehlt der Faktor b . (Schreibweise des Originals.)

von Waetzmann und Mücke zitiert, bei welchem die *KT* um so stärker hervortraten, je höher die Primärtöne lagen. Herr Cl. Schäfer hat mich mit Recht darauf aufmerksam gemacht, daß diese Versuche ohne nähere Nachprüfung nicht zu bestimmten Schlüssen führen, weil bei ihnen Mikrophone verwendet worden sind, die Asymmetrie der Wirkungen also wenigstens teilweise diesen Mikrophonen zuzuschreiben ist.

D. Die Küstnersche Theorie verlegt die Ursache der *OT* und *KT* nicht in den resonierenden Körper, sondern in das leitende Medium. Es folgt unmittelbar, daß jeder resonierende Körper, einerlei ob symmetrisch oder asymmetrisch, *OT* und *KT* liefern muß. Die *OT* und *KT* sind dabei objektiv in der Luft vorhanden, müssen also auch mit Helmholtz'schen Resonatoren nachweisbar sein. Ferner müssen die bekannten Nebenwirkungen der Schalleitung mit quadratischem Glied eintreten:

1. Die Schallgeschwindigkeit in der Luft wird von der Intensität des Tones abhängig¹⁾,
2. ein einfach erzeugter Ton wird nicht als solcher fortgeleitet, sondern bildet in der Luft von selbst Obertöne.

Hiermit ist offenbar schon eine ganze Reihe von Aufgaben und Anhaltspunkten für die experimentelle Untersuchung gegeben. Handelt es sich um die Deutung einer gegebenen konkreten Erscheinung, so treten alle im Vorstehenden aufgezählten Möglichkeiten in Wettbewerb; es ist auch durchaus denkbar, daß mehrere der theoretisch möglichen Ursachen zusammenwirken. Im übrigen besteht zwischen der Küstnerschen Theorie und den anderen ein für den Versuch prinzipieller Unterschied: Hat die Luftleitung bei gegebener Intensität der Primärtöne nichtlineare Glieder, so läßt sich diese ihre Eigenschaft nicht ausschalten; erfolgt die Luftleitung nach einer linearen Gleichung, so können die Apparate vielleicht so eingerichtet werden, daß die eine oder andere der möglichen Ursachen, wenn auch nicht ausschließlich, so doch vorwiegend in Wirkung tritt.

1) Vgl. H. Kayser, Wied. Ann. 6, 465, 1879; das Ergebnis dieser Arbeit spricht nicht für einen erheblichen Betrag des quadratischen Gliedes der Luftleitung. Andererseits läßt die Empfindlichkeit des von H. Rubens konstruierten Schallradiometers keinen Zweifel an seiner Merkhlichkeit.

(Eingegangen 2. April 1918.)

Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes.

Von A. Korn.

IX.

Die Grundlagen der mechanischen Theorie der Reibung.

Wie die universelle Grundschiwingung (man vgl. Abh. VIII)¹⁾:

$$u = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \sin \frac{t}{T_0} 2\pi, \quad v = \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \sin \frac{t}{T_0} 2\pi, \\ w = \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \sin \frac{t}{T_0} 2\pi,$$

bei welcher in erster Annäherung (*R* Radius, *r* Abstand vom Zentrum des Teilchens):

$$\Phi_0 = \text{const} \frac{\sin k_0 r}{r}, \text{ in jedem Teilchen,}$$

$$\Phi_0 = \text{const} \frac{1}{r} \text{ in der Nähe des Teilchens im Äther}$$

und

$$k_0 = \frac{\pi}{2R}, \quad T_0 = \left| \frac{2\pi\alpha}{k_0} \right|,$$

wo α^2 eine den schwach kompressiblen Teilchen zugehörige Konstante ist, eine Wechselwirkung je zweier Teilchen bedingt, für welche in erster Annäherung das Newton'sche Gravitationsgesetz gilt, so werden sich natürlich infolge der universellen Oberschwingungen weitere Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Teilchen ergeben. Man kann von vornherein übersehen, daß diese weiteren Wechselwirkungen einer höheren Potenz der Zentralsdistanz, als der zweiten umgekehrt proportional sein werden, so daß das Newton'sche Gesetz überwiegen wird, solange die Entfernung zweier Teilchen eine gewisse Größe übersteigen wird; wenn sich aber zwei Teilchen einander weiter nähern, werden die neuen Gesetze in Geltung treten, so z. B., wenn wir zwei Teilchen, wie in einem Gase, betrachten, welche aufeinander zufliegen. Die Erfahrung weist uns schon darauf hin, daß das Anziehungsgesetz dann in einer gewissen Entfernung in ein Abstoßungsgesetz übergehen wird; Maxwell hat dieses Gesetz für seine Gastheorie postuliert, und auch in der Theorie der elastischen Stöße kann man ja die elastische Zurückstoßung bei dem Stoße zweier Teilchen, wenn man will, so deuten, daß es gar nicht zu einem wirklichen Zusammenstoße kommt, sondern daß schon vorher abstoßende Kräfte die Zurückwerfung besorgen.

Man kann nun zeigen, daß sich das Maxwell'sche Abstoßungsgesetz (Abstoßung zweier

1) Diese Zeitschr. 19, 234, 1918.

Teilchen umgekehrt proportional der fünften Potenz ihrer Entfernung) auf Grund der ersten Oberschwingung der universellen Schwingungen herleiten läßt.

Betrachten wir zunächst wieder ein einziges kugelförmiges Teilchen im Äther, so ist die Lösung des Problems

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Phi_1 &= 0, \text{ im Äther,} \\ \Delta \Phi_1 + k_1^2 \Phi_1 &= 0, \text{ in dem Teilchen,} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

wenn k_1 der kleinste positive mögliche Wert

$$> k_0 = \frac{\pi}{2R}$$

ist:

$$k_1 = \frac{\pi}{R} \quad (2)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= c \frac{\cos(rh)}{r^2}, \text{ im Äther,} \\ \Phi_1 &= \frac{c \sin k_1 r - k_1 r \cos k_1 r}{\pi r^2} \cos(rh), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

in dem Teilchen,

wenn wir mit c eine beliebige Konstante, mit h eine beliebige Richtung, mit R den Radius des Teilchens und mit r die Entfernung und Richtung

Zentrum des Teilchens $\rightarrow (x, y, z)$ bezeichnen¹⁾.

Die erste Oberschwingung entspricht einer Oszillation des Teilchens in der im übrigen beliebigen (Oszillations-)Richtung h . Die Bewegungen in dem Teilchen weichen natürlich ein wenig von den Bewegungen einer starren Oszillation ab, die Bewegung der Oberfläche ist aber dieselbe, wie die einer starren Oszillation, und die Bewegungen im Äther gehen ebenso vor sich, wie die Bewegungen einer inkompressiblen Flüssigkeit, in welcher ein starres Teilchen oszilliert.

Wenn wir nun wieder an Stelle eines Teilchens eine Vielheit solcher annehmen, bei der Voraussetzung, daß die Radien R der Teilchen — die wir wieder alle gleich voraussetzen — gegen die Zentralsdistanzen klein sind, so wird sich die dann entstehende erste Oberschwingung in jedem Teilchen und in der Nähe jedes Teilchens in erster Annäherung so bestimmen, als ob das betreffende Teilchen im Äther allein vorhanden wäre, d. h. in erster Annäherung wird das Potential Φ_1 wieder in jedem Teilchen mit dem Zentrum (x_j, y_j, z_j) und dem Radius R und in der Nähe des Teilchens von der Form sein:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= c_j \frac{\cos(r_j h_j)}{r_j^2}, \text{ im Äther in der Nähe} \\ &\quad \text{des Teilchens } j, \\ \Phi_1 &= \frac{c_j \sin k_1 r_j - k_1 r_j \cos k_1 r_j}{\pi r_j^2} \cos(r_j h_j), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

in dem Teilchen j ,

und in erster Annäherung wieder:

$$k_1 = \frac{\pi}{R}, \quad (5)$$

wobei die c_j Konstanten, die h_j gewisse Richtungen vorstellen; unter r_j wird der Abstand und die Richtung

$$(x_j, y_j, z_j) \rightarrow (x, y, z)$$

verstanden. Wenn wir eine weitere Annäherung berechnen, ergeben sich zunächst zwischen den c_j den Richtungskosinussen

$$\cos(h, x), \cos(h, y), \cos(h, z)$$

und k_1 die 3 j Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} c_j \cos(h, x) \sin k_1 R &= \frac{3}{\pi} R^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_i c_i \frac{\cos(q_{ji} h_i)}{q_{ji}^3}, \\ c_j \cos(h, y) \sin k_1 R &= \frac{3}{\pi} R^3 \frac{\partial}{\partial y_j} \sum_i c_i \frac{\cos(q_{ji} h_i)}{q_{ji}^3}, \\ c_j \cos(h, z) \sin k_1 R &= \frac{3}{\pi} R^3 \frac{\partial}{\partial z_j} \sum_i c_i \frac{\cos(q_{ji} h_i)}{q_{ji}^3}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

wenn wir mit q_{ji} die Entfernung und Richtung $(x_j, y_j, z_j) \rightarrow (x_i, y_i, z_i)$

bezeichnen und die Summen $\sum_i$ über alle Teilchen mit Ausnahme des Teilchens j erstrecken. Die Gleichungen bestimmen in zweiter Annäherung k_1 , die Richtungen h_j und die Verhältnisse der c_j ¹⁾.

Es ist nunmehr einfache Rechnungssache, auch wieder Φ_1 in zweiter Annäherung in den Teilchen und im Äther in der Nähe der Teilchen zu berechnen und dann mit Hilfe der Formeln:

$$X_j = -\mu \frac{k_1^2}{4} \int \Phi_i^2 \cos(vx) d\omega, \dots \quad (7)$$

die scheinbaren Kräfte zu finden, welche jedes Teilchen i auf jedes Teilchen j ausübt. Es ergibt sich das Resultat:

Vernachlässigt man bereits Größen, in denen q_{ji}^5 im Nenner vorkommt, so übt jedes Teilchen i auf jedes Teilchen j die scheinbaren Kraftkomponenten aus:

¹⁾ Eine mechanische Theorie der Reibung. (Ferd. Dümmers Verlag, Berlin 1901), S. 154–156.

¹⁾ Eine mechanische Theorie der Reibung, S. 156 bis 176. Es bleibt dabei eine große Willkürlichkeit für die Bestimmungsstücke, wie von vornherein zu erwarten ist, abgesehen von k_1 , für das in zweiter Annäherung $\sin k_1 R$ wirklich bestimmt wird.

$$X_j^i = 2\pi\mu c_i c_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\cos(h_j h_i) - 3 \cos(\varrho_{ji} h_i) \cos(\varrho_{ji} h_j)}{\varrho_{ji}^3} \right], \dots \quad (8)$$

vernachlässigt man aber erst Größen, in denen bereits die ϱ_{ji}^6 im Nenner vorkommen, so kommen für jedes Teilchen j noch die Kraftkomponenten

$$E_j = -\mu\pi R \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sum_i c_j \frac{\cos(\varrho_{ji} v_i)}{\varrho_{ji}^2} \right], \dots \quad (9)$$

hinzu¹⁾.

Die ersten Kraftkomponenten sind dieselben, welche ein magnetisches Teilchen i mit der magnetischen Achse h_i auf ein magnetisches Teilchen j mit der magnetischen Achse h_j ausüben würde, bei geeigneter Definition der magnetischen Momente, nur mit den umgekehrten Vorzeichen, in Übereinstimmung mit früheren Resultaten von C. A. Bjerknes; für unsere Theorie der Reibung werden diese Komponenten X_j^i, Y_j^i, Z_j^i gar nicht in Betracht kommen, sondern im wesentlichen nur die Komponenten E, H, Z . Wir wollen in der Tat nicht die Wechselwirkung zweier einzelner oszillierender Teilchen berechnen, sondern zwei Komplexe von oszillierenden Teilchen betrachten; jeder Komplex soll aus einer großen Anzahl von ungeordnet durcheinander fliegenden Teilchen bestehen, so daß auch die Oszillationsrichtungen der Teilchen alle möglichen Richtungen einnehmen werden. Man könnte zunächst denken, daß die Gerade, welche die Schwerpunkte der beiden Komplexe verbindet, eine wesentlich bevorzugte Richtung für die Oszillationen sein wird, doch kann man leicht erkennen, daß, wenn nur die Entfernungen der Teilchen des einen Komplexes von den Teilchen des anderen Komplexes gegen die Dimensionen innerhalb jeden Komplexes groß sind, auch in zweiter Annäherung keine Bevorzugung einer Richtung innerhalb jeden Komplexes angenommen zu werden braucht. Da in jedem Komplex Oszillationen nach allen möglichen Richtungen stattfinden, ohne Bevorzugung einer Richtung, so werden sich bei der Berechnung einer Gesamtwirkung des einen Komplexes auf den anderen die linearen Kräfte (8) gegenseitig aufheben, und es werden nur die mit quadratischen Gliedern behafteten Kraftkomponenten (9) in Betracht zu ziehen sein. Wir müssen dabei noch eine genaue Erklärung darüber hinzufügen, was wir unter einer Gesamtwirkung eines Komplexes auf den anderen verstehen wollen: Wir wollen als Kraftkomponenten der Gesamtwirkung auf einen Komplex diejenigen translatorischen Kraftkomponenten verstehen, welche sich aus den Einzelkräften er-

geben würden, wenn in dem betreffenden Momente alle Teilchen des Komplexes als Teilchen eines starren Körpers zu betrachten wären, so daß sich also die Kraftkomponenten der Gesamtwirkung aus den Einzelkräften additiv zusammensetzen. Zunächst sind bei unseren Voraussetzungen natürlich keinerlei physikalische Grundlagen dafür vorhanden, jeden Komplex auch nur annähernd wie einen starren Körper zu behandeln, man kann sich aber vorstellen, daß infolge höherer universeller Schwingungen Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Teilchen des Komplexes vorhanden sind, welche dafür sorgen, daß die Mittellagen der Teilchen sich nur wenig von den Mittellagen der Teilchen eines starren Komplexes entfernen, und man kann die mechanische Theorie solcher annähernd starren Körper vorläufig verschieben; in der Tat kann die Theorie der elastischen Körper, sowie die Theorie der Kapillarität auf Grundlage der Theorie der universellen Schwingungen behandelt werden. Indem wir bereits die Möglichkeit einer solchen Erklärung antizipieren, können wir sagen, daß nicht bloß die Bewegung des Schwerpunktes jedes Komplexes, sondern die Bewegung jedes Komplexes selbst durch die Kraftkomponenten der Gesamtwirkung bestimmt wird, und wir kommen nach den Formeln (9) zu dem Resultate, daß infolge der universellen Oszillationen der eine Komplex auf den anderen eine Gesamtwirkung ausübt, welche der fünften Potenz der Entfernung umgekehrt proportional abstoßend wirkt.

Diese mechanische Ableitung des Maxwell'schen Abstoßungsgesetzes gestattet nach dem Vorgange Maxwells nunmehr auch eine mechanische Theorie der Gase unter Berücksichtigung der Reibung und Wärmeleitung aufzustellen, indem wir die Bausteine des Gases als solche Komplexe mit universellen Oszillationen begabter Teilchen auffassen. Sie kann überhaupt als Grundlage jeder mechanischen Theorie der Reibung¹⁾ in kontinuierlichen Massensystemen gelten, wenn wir allgemein Massensysteme als kontinuierlich bezeichnen, deren Dichtigkeit μ und Geschwindigkeit u, v, w in sehr kleinen Raumteilen Mittelwerte besitzen, welche in erster Annäherung als stetige Funktionen der Zeit und der Stelle betrachtet werden können.

Wenn zwischen den Bausteinen solcher Massensysteme Abstoßungen stattfinden, welche der fünften Potenz der Entfernung umgekehrt

1) Eine mechanische Theorie der Reibung I. c.

1) Eine mechanische Theorie der Reibung, S. 196 bis 212.

proportional sind, und wenn wir das System als inkompressibel oder als schwach kompressibel voraussetzen, erhalten wir an Stelle der Bewegungsgleichungen

$$\mu \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \dots$$

in zweiter Annäherung die Bewegungsgleichungen¹⁾:

$$\mu \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{p}{3k\mu} \Delta u, \dots \quad (10)$$

wobei k eine spezifische Konstante des Mediums ist. $\frac{p}{3k\mu}$ wird auch als Reibungskoeffizient an der Stelle (x, y, z) zur Zeit t bezeichnet.

Bewegt sich in einem solchen mit Reibung begabten Medium ein starres Teilchen mit einer Geschwindigkeit V in einer Richtung s , so wird durch das Medium auf das Teilchen eine verlangsamende Kraft ausgeübt, welche der absoluten Geschwindigkeit proportional ist. Dieses Resultat brauchen wir hier nicht mehr besonders abzuleiten, da es eine bekannte Errungenschaft der Mechanik ist¹⁾; daß wir zu demselben auf wirklich rein mechanischem Wege gelangt sind, ist das Hauptresultat dieser Untersuchung.

1) Man vgl. z. B. das betr. Kapitel in Kirchhoffs Mechanik.

(Eingegangen am 3. April 1918.)

Über eine Beziehung der Gravitationskonstante zu den Grundgrößen der Elektrizitätstheorie.

Von Arthur Haas.

Die wenigen dimensionslosen universellen Konstanten, die die Physik aufweist, sind deshalb von besonderer Bedeutung, weil sie von unseren Maßeinheiten völlig unabhängige, reine Zahlenverhältnisse darstellen. Unter ihnen sind namentlich zwei wichtig. Die eine Zahl, die Z_1 genannt werde, ist das Verhältnis zwischen der spezifischen Ladung negativer Elektronen, also zwischen dem (elektrostatisch gemessenen) Quotienten e/m und der Quadratwurzel aus der Gravitationskonstante (κ). Die zweite Zahl, die mit Z_2 bezeichnet werde, ist das Verhältnis der Masse des Wasserstoffatomkernes (M) zu der Masse des negativen Elektrons (m). Es ist also

$$Z_1 = \frac{e}{m\sqrt{\kappa}} \quad (1)$$

und

$$Z_2 = \frac{M}{m}. \quad (2)$$

(Z_2 ist um Eins, also nur unwesentlich kleiner

als das Verhältnis m_H/m , wenn m_H die Masse des Wasserstoffatoms ist.)

Zwischen den beiden Zahlen Z_1 und Z_2 scheint nun eine einfache Zahlenbeziehung in der Form der Gleichung zu bestehen

$$Z_1 = \pi \sqrt{Z_2}. \quad (3)$$

Setzt man mit Flamm¹⁾

$$\frac{e}{m} = 5,304 \cdot 10^{17} \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} \text{ sec}^{-1}, \quad (4)$$

und mit Richarz und Krigar-Menzel²⁾

$$\kappa = 6,685 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ sec}^{-2}, \quad (5)$$

so wird, nach Gl. (3) berechnet,

$$\frac{M}{m} = 1837,7 \quad (6)$$

und somit (auf eine ganze Zahl abgerundet)

$$\frac{m_H}{m} = 1839. \quad (7)$$

Dieser Wert unterscheidet sich um weniger als $\frac{1}{2}$ Proz. von den Werten, die auf Grund experimenteller Forschungsergebnisse für das Verhältnis m_H/m angegeben werden: 1844 bei P. Epstein³⁾, 1846,9 (auf Grund der strittigen Millikanschen e -Bestimmungen) bei Flamm⁴⁾ und 1843, welcher Wert sich auf Grund des von Paschen⁵⁾ für e/m gefundenen Wertes ($1,7649 \cdot 10^7$ mal Lichtgeschwindigkeit) nach der Methode von Flamm ergibt⁶⁾.

Löst man die Gl. (3) nach der Gravitationskonstante auf, so findet man

$$\kappa = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \pi^{-2} \sqrt{\frac{M}{m}}. \quad (8)$$

Mittels dieser Gleichung wäre die Gravitationskonstante durch die Grundgrößen der Elektrizitätstheorie ausgedrückt, nämlich durch die beiden Quotienten e/m und M/m , während das elektrische Elementarquantum selbst in der Gleichung nicht auftritt⁷⁾.

1) Diese Zeitschr. 18, 515, 1917.

2) Wied. Ann. 66, 190, 1898. — Der in Rieckes Lehrbuch in sämtlichen Auflagen angegebene Wert von $6,658 \cdot 10^{-8}$ ist offenbar auf einen Druckfehler zurückzuführen, der durch Verwechslung zweier Ziffern herbeigeführt wurde.

3) Die Naturwissenschaften 6, 238, 1918 (Planck-Heft).

4) l. c.

5) Ann. d. Phys. 50, 936, 1916.

6) Mit dem Werte von e/m ändert sich allerdings auch die linke Seite der Gl (3). Doch wird dadurch das Ergebnis der Berechnung von Z_2 aus dieser Gleichung nicht merklich beeinflusst.

7) Die physikalische Bedeutung der Zahl Z_1 besteht darin, daß die elektrische Kraft zwischen den Ladungen zweier negativer Elektronen Z_1^2 mal so groß ist wie die Gravitation zwischen ihren Massen.

Leipzig, am 9. Juli 1918.

(Eingegangen 12. Juli 1918.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Die Resultate der geometrischen Strukturtheorien und die Ergebnisse der Analyse durch Röntgenstrahlen.

Von W. Voigt.

Spezieller Teil I¹⁾.

I. Klasse. Achsenloses Raumgitter.

Die Bausteine oder Atome liegen, parallel orientiert, in den Knotenpunkten eines Raumgitters mit den beliebig gegeneinander geneigten und beliebig langen Grundstrecken a , b , c . Die

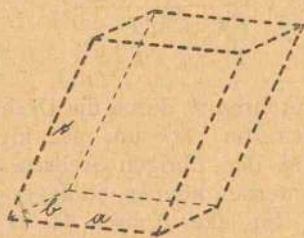


Fig. 1. (Nr. 1.)

parallelepipedischen Zellen mit den Kanten a , b , c (Fig. 1) stellen das Elementargebiet dar, durch dessen Wiederholung der Strukturbau entsteht. Das Zentrum der Symmetrie, das, wie jedes regelmäßige Raumgitter, so auch die eben beschriebene Zelle rein geometrisch besitzt, ist durch die allgemein azentrisch zu denkende Konfiguration der in den Gitterpunkten liegenden Bausteine oder Atome aufgehoben.

Nr. 1. Kein Symmetrieelement.

Formel: a , b , c . (Sch. $\mathcal{C}_i$)²⁾

Nr. 1a. Spiegelpunkt

in beliebiger Lage; somit also zwei sich spiegelbildlich entsprechende Arten von Bausteinen in spiegelbildlichen Lagen. (Sch. $\mathcal{C}_1$.)

Diese beiden Typen entsprechen den kristallographischen Symmetrien $\{O\}$ und $\{C\}$.

1) Vorbemerkung. Nachdem in dem ersten, allgemeinen Teil die Grundvorstellungen, Definitionen und Symbole der Strukturtheorie auseinandergesetzt worden sind, bringt der zweite, spezielle Teil zunächst die systematische Aufzählung und Beschreibung der durch die Theorie gelieferten Strukturtypen, sodann die Vergleichung einiger beobachteten Strukturen mit den Ergebnissen der Theorie. Die Typen sind in Klassen geordnet, die durch die Art der bei ihnen auftretenden Dreh- und Schraubenachsen charakterisiert werden.

2) (Sch. ...) bezeichnet das Schönfliessche Symbol des Typs.

Von dem allgemeinen Typ Nr. 1 sind zwei Spezialisierungen von Bedeutung.

Gerades rhomboidisches Raumgitter; $c \parallel [a b]$.

Die geometrische Form hat eine zweizählige Drehachse $\mathcal{U}'$ parallel c (Fig. 2).

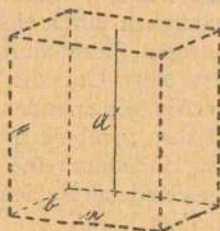


Fig. 2. (Nr. 1'.)

Nr. 1'β. Spiegelebene

a) normal zu $\mathcal{U}'$, in sonst beliebiger Lage. (Sch. $\mathcal{C}_s^1$.)

Nr. 1'γ. Gleitspiegelebene

a) ebenso gelegen; Gleitbetrag $\frac{1}{2}a$ oder $\frac{1}{2}b$. (Sch. $\mathcal{C}_s^1$.)

Schiefes rhombisches Raumgitter; $|a| = |b|$,
 $c \perp a - b$.

Die geometrische Form hat eine zweizählige Drehachse $\mathcal{U}''$ normal zur Ebene durch c und $a + b = e$ (Fig. 3).

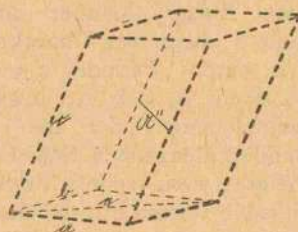


Fig. 3. (Nr. 1'')

Nr. 1''β. Spiegelebene

a) normal zu $\mathcal{U}''$, sonst beliebig gelegen. (Sch. $\mathcal{C}_s^3$.)

Nr. 1''γ. Gleitspiegelebene

a) ebenso gelegen; Gleitbetrag $\frac{1}{2}c$ oder $\frac{1}{2}e = \frac{1}{2}(a + b)$. (Sch. $\mathcal{C}_s^4$.)

Die Typen unter 1' und 1'' entsprechen sämtlich der kristallographischen Symmetrie $\{E\}$.

II. Klasse. Zweizählige Hauptachsen.

Parallele zweizählige Dreh- oder Schraubenachsen treten für sich allein nach S. 242 jederzeit in vier Schären von im allgemeinen untereinander verschiedenen Arten auf, die mit $\mathfrak{A}(2,p)$, $\mathfrak{B}(2,q)$, $\mathfrak{C}(2,r)$, $\mathfrak{D}(2,s)$ bezeichnet werden sollen. Wir denken sie vertikal gestellt und wählen eine horizontale Ebene zur Grund- oder Nullfläche. Das System der Schnittpunkte der Achsen mit der Ebene bildet ein rhomboidisches Netz, von dem jede Masche in den vier Ecken Schnittpunkte mit vier verschiedenen Achsen trägt. (Siehe Fig. 4, in der die Zweizähligkeit durch eine kurze gerade Strecke [zweispitzigen Stern] durch jeden Netzpunkt angedeutet ist.) Um die verschiedenen Achsen gleicher Art voneinander unterscheiden zu können, sind ihre Symbole in der Figur für Achsen derselben Horizontalreihe durch obere, für diejenigen verschiedener Reihen durch untere Indizes ausgezeichnet.

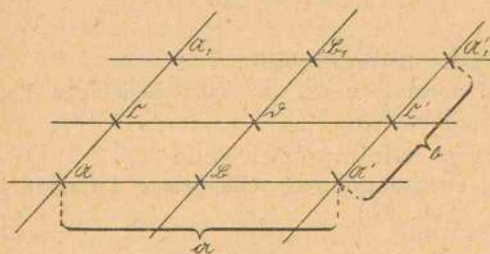
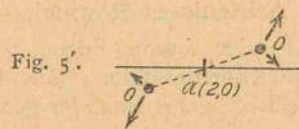


Fig. 4.

Die Anordnung der Achsen charakterisieren wir durch die Abstände a und b einer Achse (z. B. $\mathfrak{A}$) von den beiden ihr zunächst benachbarten Achsen gleicher Art; $\frac{1}{2}a$ und $\frac{1}{2}b$ sind dann die Seiten einer Masche des oben erwähnten rhomboidischen Netzes. Außer den Grundstrecken a und b dient zur Charakteristik der Struktur noch deren „Periode“ c parallel den Vertikalachsen $\mathfrak{A}$ bis $\mathfrak{D}$, d. h. der Abstand homologer Horizontalebenen oder aber die Dicke der untereinander identischen Schichten, in die das ganze Atomsystem zerlegt werden kann. Das rhomboidische Prisma mit den Kanten a, b, c ist ein Elementargebiet, dessen Wiederholung das ganze System bildet. Allerdings gilt das letztere hier nicht in demselben einfachen Sinne, wie bei dem entsprechenden Parallelepiped der ersten Klasse.

Eine zweizählige Dreh- oder Schraubenachse, z. B. $\mathfrak{A}$, liefert durch ihre Deckbewegung innerhalb der Periode c zu einem Ausgangspunkt P nur einen einzigen weiteren Punkt P' in einer um 180° gedrehten Meridianebene und im gleichen Abstand von $\mathfrak{A}$ wie P . Im Falle der Drehachse liegen beide Punkte in gleicher Höhe, im

Falle der Schraubenachse in um $\frac{1}{2}c$ verschiedenen. Diese beiden Arten von Atompaaren, die als diametral und verschränkt-diametral unterschieden werden mögen, bilden die Elemente, aus denen alle nur auf zweizähligen Achsen beruhenden Anordnungen sich aufbauen. Für den Fall, daß das eine Atom in einer Null-ebene liegt, sind sie in der früher festgesetzten Weise durch Fig. 5' und 5'' veranschaulicht.



Da alle Achsen $\mathfrak{A}$ durch die Drehungen und Schraubungen von 180° um eine kleinere oder größere Zahl der übrigen Achsen ineinander übergeführt werden können, so liegen die Punktpaare PP' für alle Achsen $\mathfrak{A}$ in parallelen Meridianen; sie können aber in um $\frac{1}{2}c$ verschiedenen Höhen liegen, da eine zweizählige Schraubenachse bei dem Drehungswinkel 180° eine Hebung um $\frac{1}{2}c$ bewirkt¹⁾. Daraus folgt, daß die um zwei benachbarte Achsen $\mathfrak{A}$ geordneten Punkte, oder kurz diese Achsen selbst entweder durch eine Schiebung a bzw. b oder durch eine solche $a + \frac{1}{2}c$ bzw. $b + \frac{1}{2}c$ zur Deckung gebracht werden können. (Im letzteren Falle sind dann $2a$ und $2b$ Deckschiebungen.)

Aus dem Gesagten folgt zugleich, warum, wie oben bemerkt, das Parallelepiped mit den Kanten a, b, c nicht in demselben einfachen Sinne ein Elementarbereich der Struktur ist, wie bei der I. Klasse. Sind nämlich die den vier Achsen $\mathfrak{A}$ des genannten Parallelepipeds zugehörigen Punktpaare PP' nicht sämtlich in gleicher Höhe, so kann man diesen Bereich nicht durch eine bloße Schiebung a oder b mit dem Nachbarbereich zur Deckung bringen, sondern muß dazu eine kombinierte Schiebung $a + \frac{1}{2}c$ oder $b + \frac{1}{2}c$ verwenden.

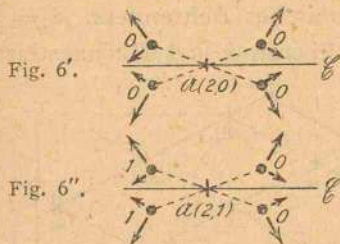
Ist allen Achsen einer Art, z. B. $\mathfrak{A}$, je ein Punktpaar P, P' zugeordnet, so muß sich dies System entsprechend auch auf jede andere Achsenart, z. B. $\mathfrak{B}$, beziehen lassen, wobei diese nicht notwendig dieselbe (Dreh- oder Schrauben-) Natur zu haben brauchen, wie $\mathfrak{A}$.

Zur Veranschaulichung der Wirkung, welche

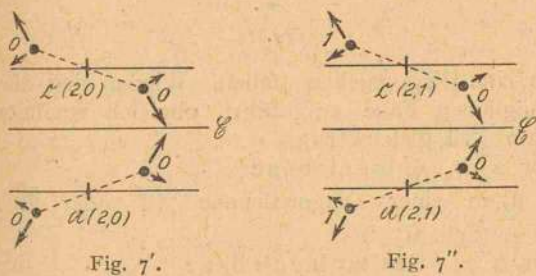
¹⁾ Hierbei ist berücksichtigt, daß, wegen der Periodizität um c , Hebungen um ein ganzes Vielfaches von c bezüglich der Anordnung der Punkte PP' nicht wirksam werden.

die Kombination einer Spiegelebene, Gleitspiegelebene und Spiegelachse mit einer zweizähligen Dreh- oder Schraubenachse liefert, sei folgendes dargelegt.

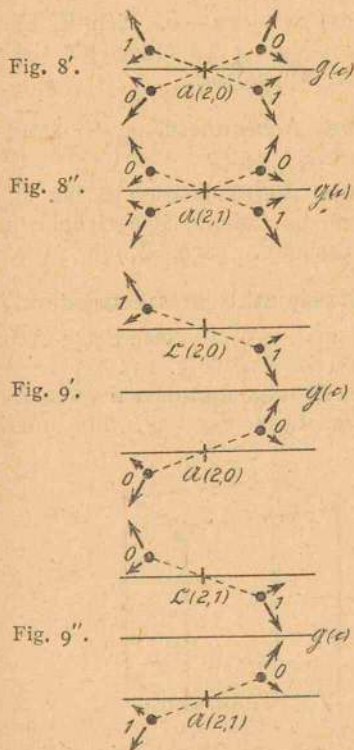
Eine durch eine Achse $\mathfrak{A}$ hindurchgehende Spiegelebene $\mathfrak{C}$ ergänzt die Konfigurationen Fig. 5' und 5'' zu den in Fig. 6' und 6'' wieder-



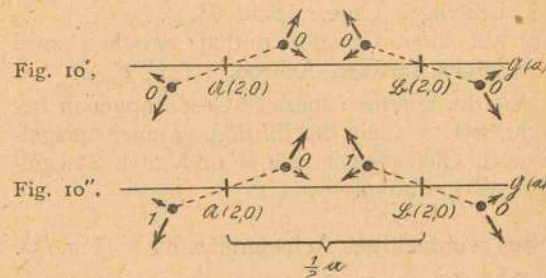
gegebenen. Eine an $\mathfrak{A}$ vorbeigehende Ebene $\mathfrak{C}$ ergibt die Konfigurationen Fig. 7' und 7''.



Die Fig. 8' und 8'', 9' und 9'' stellen das Ent-



sprechende für Gleitspiegelebenen $\mathfrak{G}$ mit dem vertikalen Gleitbetrag $\frac{1}{2}c$ dar, wobei wieder benutzt ist, daß eine Höhe über der Grundebene, die um h größer ist, als c , einer Lage in der Höhe h selbst äquivalent ist. Fig. 10' und 10'' endlich veranschaulichen die Wirkung einer



durch $\mathfrak{A}$ gehenden Gleitspiegelebene mit horizontaler Gleitung $\frac{1}{2}a$. Wo durch die Deckoperation die Achse $\mathfrak{A}$ nicht mit sich zur Deckung kommt, muß sie nach S. 244 nachher in eine andere Achse fallen, wie das in den Fig. 7, 9 und 10 durch Einzeichnung der Buchstaben $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}$ angedeutet ist. Nach dem hier in einem einfachen Falle Ausgeführten läßt sich das in komplizierteren Fällen eintretende leicht beurteilen.

Die Wirkung einer in eine Drehachse fallenden Spiegelachse $\mathfrak{C}$ auf ein Paar des Typs Fig. 5' veranschaulicht Fig. 11. In allen diesen Fällen

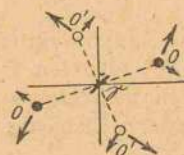


Fig. 11.

treten den ursprünglichen spiegelbildlich entsprechende Atome auf.

Abteilung A. Ohne Querachsen.

Nr. 2. Zweizähliges Säulensystem.

Formel: $\mathfrak{A}(2,0)$, a , b , c . Abhängige Achsen $\mathfrak{B}(2,0)$, $\mathfrak{C}(2,0)$, $\mathfrak{D}(2,0)$ (Fig. 12).

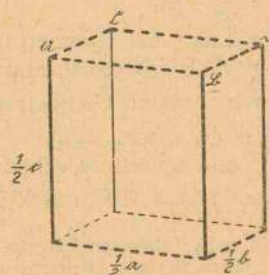


Fig. 12. (Nr. 2.)

Alle Achsen $\mathfrak{A}$ tragen diametrale Atompaaire vom Typ Fig. 5', und zwar innerhalb einer Periode c sämtlich in derselben Höhe¹⁾. (Sch. $\mathbb{C}_{2,v}^1$.)

Nr. 2 α . Spiegelpunkt

- a) auf einer Achse $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{D}$ in sonst beliebiger Lage. (Sch. $\mathbb{C}_{2,h}^1$),
- b) auf einer Geraden mitten zwischen zwei ungleichartigen Achsen. (Sch. $\mathbb{C}_{2,h}^1$.)

Wieder kommen spezielle Gestaltungen in Betracht, welche allein die Einfügung einer Spiegelebene $\mathbb{C}$, Gleitspiegelebene $\mathbb{G}$ und auch Spiegelachse $\mathbb{S}$ gestatten.

Erstes rechteckiges Achsennetz. $a \perp b$ (Fig. 13).

Da die Deckoperationen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{G}$ keine neuen Achsen zu den alten $\mathfrak{A}$ bis $\mathbb{D}$ hinzubringen dürfen, sind nur Stellungen zulässig, die ein Paar benachbarter Achsen (z. B. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{A}$, $\mathbb{C}$) enthalten oder mitten zwischen zwei derartige Paare

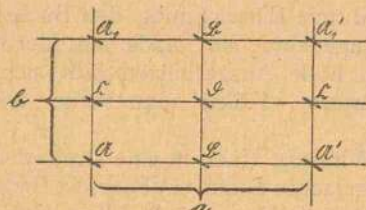


Fig. 13.

hineinfallen. Zur Illustration sollen hier alle möglichen so zu gewinnenden Typen aufgeführt werden, wenn auch mehrere — wie leicht festzustellen — einander gleichartig sind.

Nr. 2' β . Spiegelebene

- a) in der Ebene zweier benachbarter ungleicher Achsen z. B. $\mathfrak{A}\mathbb{C}$ oder $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$. (Sch. $\mathbb{C}_{2,v}^1$),
- b) mitten zwischen zwei nächsten derartigen Ebenen, z. B. $\mathfrak{A}\mathbb{C}$ und $\mathfrak{B}\mathbb{D}$ oder $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathbb{C}\mathbb{D}$. (Sch. $\mathbb{C}_{2,v}^1$.)

Nr. 2' γ . Gleitspiegelebene

- a) in einer Ebene benachbarter ungleicher Achsen, z. B. $\mathfrak{A}\mathbb{C}$ oder $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, Gleitbetrag $\frac{1}{2}c$. (Sch. $\mathbb{C}_{2,v}^3$.)

Die analoge Lage bei Gleitbetrag $\frac{1}{2}b$ oder $\frac{1}{2}a$ gibt mit Nr. 2' β b Übereinstimmendes.

- b) in derselben Ebene; Gleitbetrag $\frac{1}{2}(a+c)$ oder $\frac{1}{2}(b+c)$. (Sch. $\mathbb{C}_{2,v}^6$),
- c) in einer Ebene mitten zwischen zwei nächsten Achsenebenen $\mathfrak{A}\mathbb{C}$ und $\mathfrak{B}\mathbb{D}$ oder $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$

1) Gemäß dem S. 247 allgemein Festgesetzten werden in den perspektivischen Figuren Drehachsen durch ausgezogene (—), Schraubenachsen durch gestrichelte (---) Linien dargestellt.

und $\mathbb{C}\mathbb{D}$; Gleitbetrag $\frac{1}{2}b$ oder $\frac{1}{2}a$. (Sch. $\mathbb{C}_{2,v}^8$),

- a) ebenso mit Gleitbetrag $\frac{1}{2}(b+c)$ oder $\frac{1}{2}(a+c)$. (Sch. $\mathbb{C}_{2,v}^{10}$.)

Der Fall des Gleitbetrages $\frac{1}{2}c$ stimmt mit Nr. 2' γ b überein.

Erstes rhombisches Achsennetz. $|a| = |b|$.

(Fig. 14.) Ebenen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{G}$ können hier nur

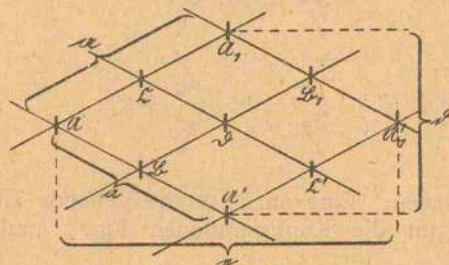


Fig. 14.

in eine Diagonalebene fallen. Wieder sind alle möglichen Fälle aufgeführt, obgleich einander zum Teil gleichwertig.

Nr. 2'' β . Spiegelebene

- a) in einer Diagonalebene $\mathfrak{A}\mathbb{D}$ oder $\mathfrak{B}\mathbb{C}$. (Sch. $\mathbb{C}_{2,v}^{11}$.)

Nr. 2'' γ . Gleitspiegelebene

- a) in einer Diagonalebene $\mathfrak{A}\mathbb{D}$ oder $\mathfrak{B}\mathbb{C}$ mit Gleitbeträgen $\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{2}(c+c)$ oder $\frac{1}{2}(b+c)$ bei $c=a+b$, $d=a-b$. (Sch. $\mathbb{C}_{2,v}^{13}$.) Der Fall der Gleitung $\frac{1}{2}c$ oder $\frac{1}{2}b$ ist mit Nr. 2'' β a äquivalent.

Quadratisches Achsennetz. $|a| = |b|$, $a \perp b$.

Nr. 2''' δ . Spiegelachse

- a) in einer der Vertikalachsen $\mathfrak{A}$ bis $\mathbb{D}$; die begleitende horizontale Spiegelebene in beliebiger Stellung. (Sch. $\mathbb{C}_4^1$.)

Nr. 3. Zweipunktschraubensystem.

Formel: $\mathfrak{A}(2,1)$, a, b, c . Abhängige Achsen: $\mathfrak{B}(2,1)$, $\mathbb{C}(2,1)$, $\mathbb{D}(2,1)$. (Fig. 15).

Alle Achsen $\mathfrak{A}$ tragen diametral verschränkte Atompaaire des Typs Fig. 5'', die innerhalb

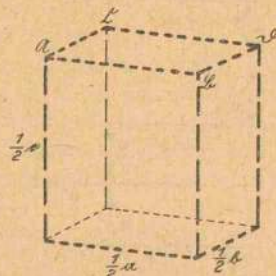


Fig. 15. (Nr. 3.)

einer Periode c sämtlich in derselben Höhe liegen. (Sch. $\mathbb{C}_{2,1}^2$)

Nr. 3 α . Spiegelpunkt

- a) auf irgendeiner Achse $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{D}$. (Sch. $\mathbb{C}_{2,h}^2$),
- b) auf einer Geraden mitten zwischen zwei benachbarten verschiedenen Achsen. (Sch. $\mathbb{C}_{2,h}^5$).

Auch hier gibt es spezielle Fälle, die wie diejenigen von Nr. 2 behandelt werden sollen.

Erstes rechteckiges Achsennetz. $a \perp b$. (Fig. 13.)

Nr. 3' β . Spiegelebene

- a) in der Ebene zweier benachbarter Achsen, z. B. $\mathbb{AC}$ oder $\mathbb{AB}$. (Sch. $\mathbb{C}_{2,v}^2$),
- b) um $\frac{1}{4}a$ oder $\frac{1}{4}b$ aus diesen Stellungen gerückt. (Sch. $\mathbb{C}_{2,v}^7$).

Nr. 3' γ . Gleitspiegelebene

- a) in einer Ebene $\mathbb{AC}$ oder $\mathbb{AB}$; Gleitbetrag $\frac{1}{2}b$ oder $\frac{1}{2}a$. (Sch. $\mathbb{C}_{2,v}^9$). Der Fall der Gleitung $\frac{1}{2}c$ ist mit Nr. 3' β a, der $\frac{1}{2}(b+c)$ oder $\frac{1}{2}(a+c)$ mit Nr. 3' β b äquivalent,
- b) in einer Ebene mitten zwischen zwei nächsten Achsenebenen $\mathbb{AC}$ und $\mathbb{BD}$ oder $\mathbb{AB}$ und $\mathbb{CD}$; Gleitbetrag $\frac{1}{2}b$ oder $\frac{1}{2}a$, sowie $\frac{1}{2}(b+c)$ oder $\frac{1}{2}(a+c)$. (Sch. $\mathbb{C}_{2,v}^9$). Der Fall der Gleitung $\frac{1}{2}c$ ist mit Nr. 3' γ a äquivalent.

Erstes rhombisches Achsennetz. $|a| = |b|$. (Fig. 14.)

Nr. 3'' β . Spiegelebene

- a) in einer Diagonalebene $\mathbb{AD}$ oder $\mathbb{BC}$. (Sch. $\mathbb{C}_{2,v}^{12}$).

Die Fälle ebenso gelegener Gleitspiegelebenen mit dem Gleitbetrag $\frac{1}{2}c$ weiter, $\frac{1}{2}e$ oder $\frac{1}{2}b$, endlich $\frac{1}{2}(e+c)$ oder $\frac{1}{2}(b+c)$ sind dem Fall Nr. 3'' β a äquivalent.

Nr. 4. Klinorhombisches Säulensystem.

Formel: $\mathbb{A}(2,0)$ $a, b + \frac{1}{2}c, c$. Abhängige Achsen: $\mathbb{B}(2,0)$, $\mathbb{C}(2,1)$, $\mathbb{D}(2,1)$. (Fig. 16.)

Alle Achsen $\mathbb{A}$ tragen diametrale Polpaare des Typs Fig. 5', die innerhalb einer Periode c für

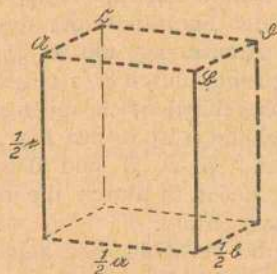


Fig. 16. (Nr. 4.)

$\mathbb{A}$ und $\mathbb{A}'$ in der Höhe 0, für $\mathbb{A}_1$ und $\mathbb{A}_1'$ in der Höhe $\frac{1}{2}c$ liegen. (Sch. $\mathbb{C}_{2,1}^3$).

Nr. 4 α . Spiegelpunkt

- a) auf einer der Achsen $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{D}$. (Sch. $\mathbb{C}_{2,h}^3$),
- b) auf einer Geraden mitten zwischen zwei verschiedenen Achsen beliebig gelegen. (Sch. $\mathbb{C}_{2,h}^6$).

Das Problem der Einführung von Spiegel- und Gleitspiegelebene kompliziert sich hier gegenüber den unter Nr. 2 und 3 entstandenen durch die Verschiedenartigkeit der Achsen $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ einer, $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ andererseits. Die Spiegelungen dürfen ja nicht verschiedenartige Achsen zur Deckung bringen.

Erstes rechteckiges Achsennetz, $a \perp b$. (Fig. 13.)

Das Grundrechteck mit den Seiten a und b trägt auf den zu a parallelen Seiten nur Drehachsen, auf der zu a parallelen Mittellinie nur Schraubenachsen.

Nr. 4' β . Spiegelebene

- a) in einer Ebene benachbarter ungleichartiger Achsen, z. B. $\mathbb{AC}$ oder $\mathbb{AB}$. (Sch. $\mathbb{C}_{2,v}^{14}$),
- b) in einer Ebene mitten zwischen zwei dergleichen. (Sch. $\mathbb{C}_{2,v}^{16}$).

Nr. 4' γ . Gleitspiegelebene

- a) in einer Ebene wie $\mathbb{AC}$ oder $\mathbb{AB}$; Gleitbetrag $\frac{1}{2}c$. (Sch. $\mathbb{C}_{2,v}^{15}$),
- b) in einer Ebene $\mathbb{AB}$; Gleitbetrag $\frac{1}{2}(a+c)$. (Sch. $\mathbb{C}_{2,v}^{17}$).

Dieselbe Lage mit dem Gleitbetrag $\frac{1}{2}a$ gibt zu Nr. 4' β b Äquivalentes. Die Lage in einer Ebene mitten zwischen $\mathbb{AC}$ und $\mathbb{BD}$ bei Gleitung $\frac{1}{2}c$ stimmt im Effekt mit Nr. 4' γ b überein.

Zweites rechteckiges Achsennetz.

$a - b \perp b$. (Fig. 17.)

Das Grundrechteck mit den Seiten b und $b' = a - b$ trägt in seinen Ecken Dreh-, in seinen Seitenmitten Schraubenachsen.

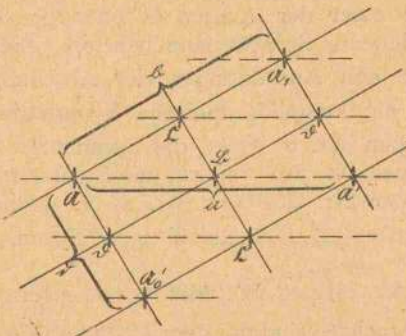


Fig. 17.

Nr. 4'' β . Spiegelebenea) in einer Ebene $\mathcal{UC}$ oder $\mathcal{UD}$. (Sch. $\mathcal{C}_{2,v}^{18}$)Nr. 4'' γ . Gleitspiegelebenea) in $\mathcal{UC}$ oder $\mathcal{UD}$, Gleitbetrag $b + \frac{1}{4}c$ oder $b + \frac{1}{4}c$. (Sch. $\mathcal{C}_{2,v}^{19}$)

Zweites rhombisches Achsennetz.

$$b = \frac{1}{2}a \perp a. \quad (\text{Fig. 18.})$$

Der Grundrhombus hat a zur Diagonale. Die Verteilung der Dreh- und Schraubenachsen ist symmetrisch zu den beiden Diagonalen,

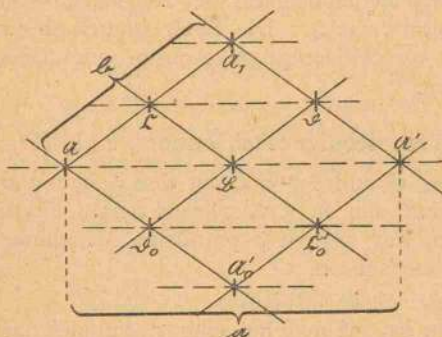


Fig. 18.

welche die einzigen möglichen Stellungen von Spiegel- und Gleitspiegelebene bezeichnen.

Nr. 4'' β . Spiegelebenea) in einer der beiden durch eine Achse $\mathcal{U}$ gehenden Diagonalebenen. (Sch. $\mathcal{C}_{2,v}^{20}$),b) in einer zu a normalen Diagonalebene $\mathcal{UD}$. (Sch. $\mathcal{C}_{2,v}^{22}$)Nr. 4'' γ . Gleitspiegelebenea) in einer der beiden durch eine Achse $\mathcal{U}$ gehenden Diagonalebenen, Gleitbetrag $\frac{1}{2}c$. (Sch. $\mathcal{C}_{2,v}^{21}$)

Die Lage in der zu a parallelen Diagonalebene $\mathcal{UB}$ mit dem Gleitbetrag $\frac{1}{2}a$ führt auf den Fall Nr. 4'' β b.

Quadratisches Achsennetz. $|a| = |b|, a \perp b$.Nr. 4''' δ . Spiegelachsea) in einer der Achsen $\mathcal{U}$ oder $\mathcal{B}$; die begleitende Spiegelebene beliebig. (Sch. $\mathcal{C}_i^1$)

Von den Anordnungen der Abteilung II A haben die kristallographische Symmetrie $\{A_x^2\}$ die Typen Nr. 2, 3, 4, die Symmetrie $\{CA_x^2\}$ die Typen Nr. 2 α , 3 α , 4 α , die Symmetrie $\{S_x\}$ die Typen Nr. 2'' δ und Nr. 4''' δ , endlich die Symmetrie $\{A_x^2, E_x\}$ alle übrigen Typen.

Abteilung B. Mit Querachsen.

Querachsen sind mit dem S. 332 und Fig. 4 dargestellten System von möglichen parallelen zwei-

zähligen Achsen nur dann vereinbar, wenn das durch die vier Achsenarten $\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ in der Grundebene bestimmte Rhomboid die speziellen Formen des Rechtecks oder des Rhombus besitzt; denn nur in diesem Falle führt die Umklappung um eine (geeignet gewählte) Querachse zu keinen neuen Achsen. Dabei können je nach Art und Lage der Querachse die drei Fälle eintreten, daß bei der Umklappung 1. jede der vier Achsenarten $\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ in sich selbst übergeführt wird, 2. zwei der Achsenarten in sich selbst übergeführt werden, die beiden andern sich austauschen, 3. alle vier Achsen sich paarweise austauschen. Der letzte Fall zerfällt dabei in zwei Unterfälle 3' und 3'', je nachdem der Austausch zwischen benachbarten oder einander diagonal gegenüberliegenden Achsen stattfindet. In den Fällen 1, 3 ist das Rhomboid $\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ ein Rechteck, in 2 ein Rhombus. Von den im folgenden besprochenen Anordnungen fallen Nr. 5 bis 8 unter das erste, Nr. 9 bis 11 unter das zweite, Nr. 12 und 13 unter das dritte Schema. —

Über die Konfiguration der auf eine zwei-zählige Achse $\mathcal{U}$ zu beziehenden Bausteine oder Atome bei Vorhandensein einer Querdrehachse $\mathcal{D}(2,0)$ läßt sich allgemein sagen, daß, falls $\mathcal{D}$ durch ein $\mathcal{U}(2,0)$ oder $\mathcal{U}(2,1)$ hindurchgeht, aus den diametralen und verschränkt diametralen Typen Fig. 5' und 5'' die in Fig. 19' und 19'' dargestellten entstehen, dagegen, falls dies nicht

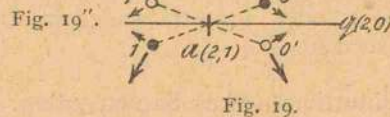
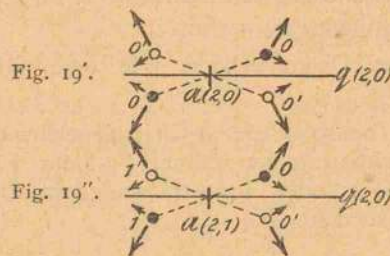


Fig. 19.

stattfindet, die durch Fig. 20' und 20'' wiedergegebenen. Liegt die Querachse um h über der o -Grundfläche, so liegen die mit o' und i' bezeichneten Punkte um $2h$ höher als o und i . Dabei ist in den Figuren wieder die Periodizität der ganzen Anordnung um c berücksichtigt. Die Wirkung einer durch $\mathcal{U}(2,1)$ gehenden bzw. nicht hindurch gehenden Schraubenachse $\mathcal{B}(2,1)$ mit der Ganghöhe a ist in den Fig. 21' und 21'' wiedergegeben. $\mathcal{C}, \mathcal{B}, \mathcal{D}$ sind dabei stets die Achsen, mit denen $\mathcal{U}$ durch die bez. Deckbewegung zusammenfällt.

Während bei vertikalen Schraubenachsen die maßgebende Deckschiebung ein für allemal $= c$ ist, kommen für Querschraubenachsen verschie-

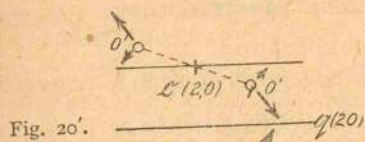


Fig. 20'.

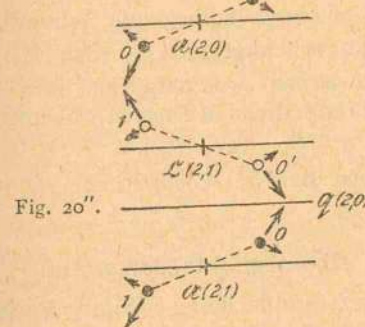


Fig. 20''.

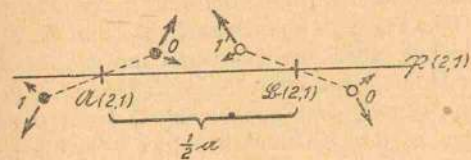


Fig. 21'.

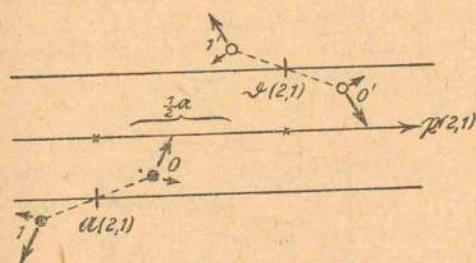


Fig. 21''.

dene Fälle vor, je nachdem die Achse parallel zu a , b , $d = a - b$, $e = a + b$ liegt, weil die Größe der Deckschiebung parallel diesen Richtungen nicht stets dieselbe ist. Diese Größe ist nun aber aus der Strukturformel sofort zu erschließen. Sind darin a und b als Deckschiebung angegeben, so haben auch d und e diese Eigenschaft. Ist $a + \frac{1}{2}c$ oder $b + \frac{1}{2}c$ (schiefe) Deckschiebung, dann hat die Deckschiebung parallel a oder b den Wert $2a$ oder $2b$. Sind $a + \frac{1}{2}c$ und $b + \frac{1}{2}c$ zugleich Deckschiebungen, so gilt Gleiches für d und e .

Nr. 5. System der rechteckigen Säule.

Rechteckige Grundfläche: $a \perp b$. (Fig. 13.)

Formel: $\mathcal{A}(2,0)$, $\mathcal{D}_a(2,0)$, a , b , c .

$\mathcal{D}_a$ geht durch benachbarte $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ und projiziert sich auf a . Alle Achsen $\mathcal{A}$ tragen diametrale Atomsysteme Fig. 19' in derselben Höhe. Abhängige Achsen: $\mathcal{B}(2,0)$, $\mathcal{C}(2,0)$, $\mathcal{D}(2,0)$,

ferner zu $\mathcal{D}_a$ parallele und normale Drehachsen, die mit diesem die Kanten rechtwinkliger Zellen mit den Seiten $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$ bilden (Fig. 22). (Sch. $\mathcal{B}^1$.)

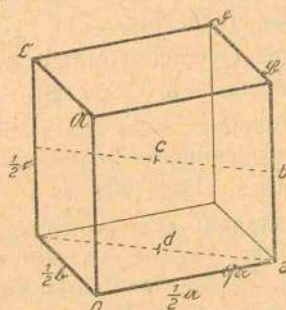


Fig. 22. (Nr. 5.)

Nr. 5a. Spiegelpunkt

- im Schnittpunkt dreier Drehachsen. (Sch. $\mathcal{B}_h^1$),
- auf einer Achse mitten zwischen zwei derartigen Schnittpunkten. (Sch. $\mathcal{B}_h^3$),
- im Mittelpunkt eine der Zellen mit den Kanten $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_a$. (Sch. $\mathcal{B}_h^2$),
- im Mittelpunkt einer Begrenzungsfläche dieser Zelle. (Sch. $\mathcal{B}_h^4$.)

Quadratische Spezialisierung. $|a| = |b|$.

Nr. 5'β. Spiegelebene

- durch zwei sich diametral gegenüberliegende Achsen $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ oder $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$. (Sch. $\mathcal{B}_d^1$),

Nr. 5'γ. Gleitspiegelebene

- ebenso gelegen, Gleitbetrag $\frac{1}{2}c$. (Sch. $\mathcal{B}_d^2$.)

Nr. 6. Zusammengesetztes rechteckiges Zweipunktschraubensystem.

Rechteckige Grundfläche: $a \perp b$. (Fig. 13.)

Formel: $\mathcal{A}(2,1)$, $\mathcal{D}_a(2,0)$, a , b , c .

Alle Achsen $\mathcal{A}$ tragen verschränkte Atomsysteme der Form Fig. 19'' in gleicher Höhe. Abhängige Achsen: $\mathcal{B}(2,1)$, $\mathcal{C}(2,1)$, $\mathcal{D}(2,1)$.

Außerdem zu $\mathcal{D}_a(2,0)$ parallele Achsen in den Kanten einer Zelle mit Seiten $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$ und zu $\mathcal{D}_a$ normale $\mathcal{D}_b$ gegeneinander analog gelegen, aber um $\frac{1}{2}c$ vertikal gegen die $\mathcal{D}_a$ verschoben (Fig. 23). (Sch. $\mathcal{B}^2$.)

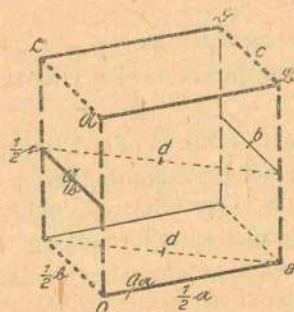


Fig. 23 (Nr. 6.)

Nr. 6a. Spiegelpunkt

- a) auf einer Schraubenachse $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ oder $\mathcal{D}$ im Schnittpunkt mit einer Querachse $\mathcal{Q}_a$ oder $\mathcal{Q}_b$. (Sch. $\mathcal{B}_h^{51}$),
- b) auf einer Querachse mitten zwischen zwei Schraubenachsen. (Sch. $\mathcal{B}_h^{71}$),
- c) im Mittelpunkt eines von zwei Schrauben- und zwei Querachsen begrenzten (vertikalen) Rechteckes. (Sch. $\mathcal{B}_h^{81}$),
- d) im Mittelpunkt einer rechteckigen Zelle von den Seiten $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$, die vier Achsen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ und vier Achsen $\mathcal{Q}_a$ oder $\mathcal{Q}_b$ zu Kanten hat. (Sch. $\mathcal{B}_h^{91}$).

Nr. 7. System der Rhombensäule.

Rechteckige Grundfläche: $a \perp b$. (Fig. 13.)

Formel: $\mathcal{A}(2,0)$, $\mathcal{Q}_a(2,0)$, a , $b + \frac{1}{2}c$, c .

Alle Achsen $\mathcal{A}$ tragen diametrale Atomsysteme vom Typ Fig. 19', und zwar $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_1'$ je in gleicher, aber gegeneinander um $\frac{1}{2}c$ verschiedener Höhe. Abhängige Achsen: $\mathcal{B}(2,0)$, $\mathcal{C}(2,1)$, $\mathcal{D}(2,1)$; ferner zu $\mathcal{Q}_a$ parallele und gleichartige Drehachsen in den relativen Lagen

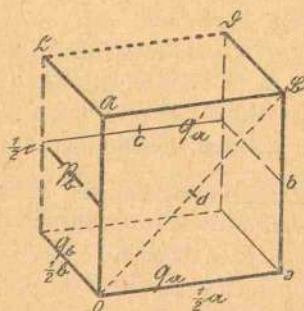


Fig. 24. (Nr. 7.)

$\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c$, b , $b + \frac{1}{2}c$, sowie zu $\mathcal{Q}_a$ normale $\mathcal{Q}_b(2,0)$, welche die Vertikalachsen $\mathcal{A}$ bis $\mathcal{D}$ in denselben Punkten schneiden, wie die $\mathcal{Q}_a$; endlich zu b parallele Querschraubenachsen $\mathcal{B}_b(2,1)$ mitten zwischen zwei übereinanderliegenden $\mathcal{Q}_b$. (Fig. 24.) (Sch. $\mathcal{B}_h^{61}$).

Nr. 7a. Spiegelpunkt

- a) im Schnittpunkt zweier Drehachsen. (Sch. $\mathcal{B}_h^{101}$),
- b) auf einer Achse $\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$ mitten zwischen zwei derartigen Schnittpunkten. (Sch. $\mathcal{B}_h^{211}$),
- c) auf einer Querachse $\mathcal{Q}_a$ mitten zwischen zwei Vertikalschraubenachsen. (Sch. $\mathcal{B}_h^{301}$),
- d) im Mittelpunkt einer der vertikalen Rechtecke zwischen zwei vertikalen und zwei Querdrehachsen. (Sch. $\mathcal{B}_h^{221}$).

Quadratische Spezialisierung. $|a| = |b|$.

Nr. 7'β. Spiegelebene

- a) durch zwei gegenüberliegende Achsen $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ oder $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$. (Sch. $\mathcal{B}_d^{51}$)

Nr. 7'γ. Gleitspiegelebene

- a) durch zwei gegenüberliegende Achsen $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ oder $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$; Gleitbetrag $\frac{1}{2}c$. (Sch. $\mathcal{B}_d^{61}$),
- b) mitten zwischen zwei parallelen, bzw. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ enthaltenden Ebenen; Gleitbetrag $\frac{1}{2}c = \frac{1}{2}(a + b)$. (Sch. $\mathcal{B}_d^{71}$),
- c) Lage wie bei b; Gleitbetrag $\frac{1}{2}(c + c)$. (Sch. $\mathcal{B}_d^{81}$).

Nr. 8. Rhombenoktaedersystem.

Rechteckige Grundfläche: $a \perp b$; (Fig. 13) Formel: $\mathcal{A}(2,0)$, $\mathcal{Q}_a(2,0)$, $a + \frac{1}{2}c$, $b + \frac{1}{2}c$, c .

Alle Achsen $\mathcal{A}$ tragen diametrale Atomsysteme vom Typ Fig. 19', und zwar $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_1'$ je in gleicher, aber gegeneinander um $\frac{1}{2}c$ verschiedener Höhe. Abhängige Achsen: $\mathcal{B}(2,1)$, $\mathcal{C}(2,1)$, $\mathcal{D}(2,0)$. Zu $\mathcal{Q}_a$ sind gleichartige Achsen parallel gelegen in den Abständen $\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c$, b , $b + \frac{1}{2}c$, außerdem parallele Schraubenachsen $\mathcal{B}_a(2,1)$ in Abständen $\frac{1}{4}c$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}(b + c)$. Ihnen entsprechen Querachsen $\mathcal{Q}_b(2,0)$ und $\mathcal{B}_b(2,1)$, die durch Drehung um 90° aus den vorigen hervorgehen (Fig. 25). (Sch. $\mathcal{B}_h^{71}$).

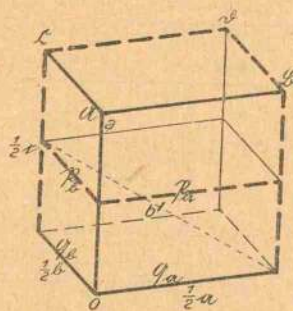


Fig. 25. (Nr. 8.)

Nr. 8a. Spiegelpunkt

- a) im Schnittpunkt dreier Drehachsen. (Sch. $\mathcal{B}_h^{231}$),
- b) im Mittelpunkt einer rechteckigen Zelle von den Kanten $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{4}c$, von deren gegenüberliegenden Ecken ein Paar zugleich Schnittpunkte von je drei Drehachsen sind. (Sch. $\mathcal{B}_h^{241}$).

Quadratische Spezialisierung. $|a| = |b|$.

Nr. 8'β. Spiegelebene

- a) durch zwei gegenüberliegende Achsen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{D}$ oder $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. (Sch. $\mathcal{B}_d^{91}$)

Nr. 8'γ. Gleitspiegelebene

- a) wie vorstehend; Gleitbetrag $\frac{1}{2}c$ (Sch. $\mathcal{B}_d^{101}$).

Nr. 9. Zusammengesetztes rhombisches Zweipunktschraubensystem.

Rhombische Grundfläche: $|a| = |b|$; $a + b = c$
 $a - b = b$; (Fig. 14.) Formel: $\mathcal{A}(2,1)$, $\mathcal{D}_c(2,0)$,
 a, b, c ; die Querachse liegt in der Diagonalebene
 $\mathcal{A}\mathcal{D}$.

Alle Achsen $\mathcal{A}$ tragen in gleichen Höhen
 verschränkte Atomsysteme vom Typ Fig. 19".
 Abhängige Achsen: $\mathcal{B}(2,1)$, $\mathcal{C}(2,1)$, $\mathcal{D}(2,1)$. Zu
 $\mathcal{D}_c(2,0)$ parallel liegt eine gleichartige Achse
 im Abstand $\frac{1}{2}c$; vier parallele Schraubenachsen
 $\mathcal{P}_c(2,1)$ befinden sich in den Abständen $\pm \frac{1}{4}b$
 und $\frac{1}{2}c \pm \frac{1}{4}b$.

Diesem System der $\mathcal{D}_c$ und $\mathcal{P}_c$ entspricht ein
 System der $\mathcal{D}_b$ und $\mathcal{P}_b$ in um 90° bzw. $\mathcal{A}$ ge-
 drehter und um $\frac{1}{4}c$ gehobener Lage (Fig. 26).
 (Sch. $\mathcal{B}^5$.)

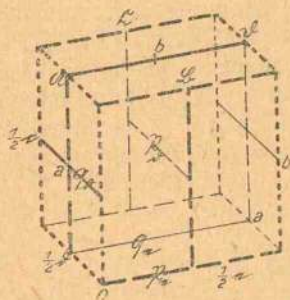


Fig. 26. (Nr. 9.)

Nr. 9a. Spiegelpunkt

- im Schnittpunkt einer Querdrehachse $\mathcal{D}$ mit
 einer Vertikalachse. (Sch. $\mathcal{B}_h^{17}$),
- auf einer Querdrehachse $\mathcal{D}$ mitten zwischen
 den Schnittpunkten mit zwei benachbarten
 Vertikalachsen. (Sch. $\mathcal{B}_h^{18}$.)

Nr. 10. System des Oblongoktaeders.

Rhombische Grundfläche: $|a| = |b|$, (Fig. 14.)
 Formel: $\mathcal{A}(2,0)$, $\mathcal{D}_c(2,0)$, $a + \frac{1}{2}c$, $b + \frac{1}{2}c$, c .
 $\mathcal{D}_c$ liegt in der Diagonalebene $\mathcal{A}\mathcal{D}$. Alle Achsen $\mathcal{A}$
 tragen diametrale Atomsysteme vom Typ Fig. 19',
 und zwar $\mathcal{A}, \mathcal{A}'_1$ und $\mathcal{A}', \mathcal{A}_1$ je in gleicher, aber
 gegeneinander um $\frac{1}{2}c$ verschiedener Höhe.
 Abhängige Achsen: $\mathcal{B}(2,1)$, $\mathcal{C}(2,1)$, $\mathcal{D}(2,0)$.
 Eine zu $\mathcal{D}_c$ parallele gleichartige Achse liegt im
 Abstand $\frac{1}{2}c$; zwei parallele Schraubenachsen
 $\mathcal{P}_c(2,1)$ gehen in den Abständen $\pm \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c$
 durch $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

Parallel mit b gehen Drehachsen $\mathcal{D}_b(2,0)$ in
 den Höhen 0 und $\frac{1}{2}c$ durch die Achsen $\mathcal{A}$ und
 $\mathcal{D}$, Schraubenachsen $\mathcal{P}_b(2,1)$ in der Höhe $\frac{1}{4}c$
 durch $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ (Fig. 27). (Sch. $\mathcal{B}^5$.)

Nr. 10a. Spiegelpunkt

- im Schnittpunkt dreier Drehachsen. (Sch.
 $\mathcal{B}_h^{25}$),

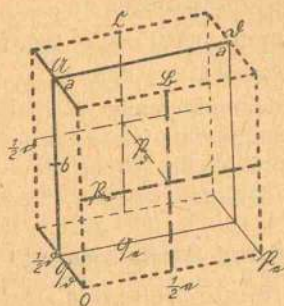


Fig. 27. (Nr. 10.)

- auf einer vertikalen Drehachse zwischen zwei
 Schnittpunkten mit Querachsen. (Sch. $\mathcal{B}_{h'}^{26}$.)

Quadratische Spezialisierung. $a \perp b$.

Nr 10'β. Spiegelebene

- durch zwei benachbarte Achsen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ oder
 $\mathcal{A}, \mathcal{C}$. (Sch. $\mathcal{B}_d^{11}$.)

Nr. 11. Rhombisches Gegenschraubensystem.

Rhombische Grundfläche: $|a| = |b|$, (Fig. 14.)
 Formel: $\mathcal{A}(2,0)$, $\mathcal{D}_b(2,0)$, $a + \frac{1}{2}c$, $b + \frac{1}{2}c$, c .
 $\mathcal{D}_b$ liegt in der Diagonalebene $\mathcal{B}\mathcal{C}$. Alle Achsen
 $\mathcal{A}$ tragen einfache diametrale Atompaare
 Fig. 5', $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'_1$, $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}'$ in untereinander
 gleichen, gegeneinander um $\frac{1}{2}c$ verschiedenen

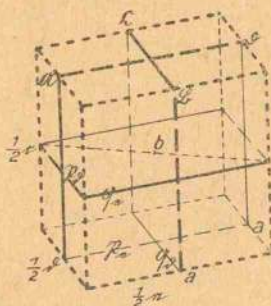


Fig. 28. (Nr. 11.)

Höhen (wie bei Nr. 4). Mit diesen Atom-
 systemen sind die nächst den verschiedenen
 Achsen $\mathcal{D}$ liegenden Atompaare durch $\mathcal{D}_b$ ge-
 gemäß Fig. 20' verknüpft. Abhängige Achsen:
 $\mathcal{B}(2,1)$, $\mathcal{C}(2,1)$, $\mathcal{D}(2,0)$. Zu $\mathcal{D}_b$ parallele gleich-
 artige Achsen im Abstand $\frac{1}{2}c$, außerdem
 parallele Schraubenachsen $\mathcal{P}_b(2,1)$ im Abstand
 $\pm \frac{1}{4}c + \frac{1}{4}c$ durch $\mathcal{A}$ und $\mathcal{D}$. Ferner Schrauben-
 achsen $\mathcal{P}_c(2,1)$ durch $\mathcal{A}$ und $\mathcal{D}$ in der Höhe
 der $\mathcal{D}_b$, Drehachsen $\mathcal{D}_c(2,0)$ im Abstand
 $\pm \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c$ davon durch $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. (Fig. 28.)
 (Sch. $\mathcal{B}^9$.)

1) In der Figur ist die durch $\mathcal{D}$ gehende Kante ver-
 sehentlich punktiert statt ausgezogen.

Nr. 11 α . Spiegelpunkt

- a) im Schnittpunkt einer Schrauben- und einer Drehachse. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{28}$),
- b) im Mittelpunkt einer rechteckigen Zelle von den Kanten $\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}a$, innerhalb deren sich keine Dreh- oder Schraubenachsen befinden. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{27}$.)

Quadratische Spezialisierung. $a \perp b$.Nr. 11 γ . Gleitspiegelebene

- a) mitten zwischen den parallelen Ebenen $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$; Gleitbetrag $\frac{1}{2}(a+c)$. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{12}$.)

Nr. 12. Abwechselndes rechteckiges Zweipunktschraubensystem erster Art.

Rechteckige Grundfläche: $a \perp b$; (Fig. 13.) Formel: $\mathfrak{U}(2,1)$, $\mathfrak{D}_a'(2,0)$, a , b , c . Die Querachse liegt in einer Ebene mitten zwischen $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$. Benachbarte Achsenpaare $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{C}$ tragen Atompaare vom Typ Fig. 20'' in gleichen Höhen. Abhängige Achsen: $\mathfrak{B}(2,1)$, $\mathfrak{C}(2,1)$, $\mathfrak{D}(2,1)$. Zu $\mathfrak{D}_a'$ liegen parallel gleichartige Achsen im Abstand $\frac{1}{2}c$ und $\pm \frac{1}{2}b$. Zu ihnen normal verlaufen Schraubenachsen $\mathfrak{B}_b(2,1)$, welche die Vertikalachsen in der Höhe $\frac{1}{4}c$ schneiden. Fig. 29. (Sch. $\mathfrak{B}_h^3$.)

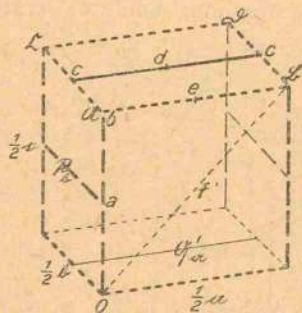


Fig. 29. (Nr. 12.)

Nr. 12 α . Spiegelpunkt

- a) im Schnittpunkt zweier Schraubenachsen. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{13}$),
- b) auf einer Vertikalachse in der Höhe einer Querachse $\mathfrak{D}_a'(2,0)$. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{11}$),
- c) im Schnittpunkt einer Querachse $\mathfrak{D}_a'(2,0)$ mit der Ebene zweier Vertikalachsen. (Sch. $\mathfrak{B}_h^9$),
- d) auf einer Querachse mitten zwischen den parallelen Ebenen $\mathfrak{U}\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{D}$. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{12}$),
- e) auf einer Geraden mitten zwischen zwei Vertikalachsen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ in der Höhe einer Ebene mit Querachsen $\mathfrak{D}_a'(2,0)$. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{14}$),

- f) auf derselben Geraden in der Mitte zwischen zwei derartigen Ebenen. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{10}$.)

Quadratische Spezialisierung. $|a| = |b|$.Nr. 12 β . Spiegelebene

- a) unter 45° gegen die Vertikalachsen geneigt durch Querachsen $\mathfrak{D}_a'(2,0)$. (Sch. $\mathfrak{B}_h^8$.)

Nr. 12 γ . Gleitspiegelebene

- a) ebenso gelegt; Gleitbetrag $\frac{1}{2}a$. (Sch. $\mathfrak{B}_h^4$.)

Nr. 13. Abwechselndes rechteckiges Zweipunktschraubensystem zweiter Art.

Rechteckige Grundfläche: $a \perp b$. (Fig. 13.) Formel: $\mathfrak{U}(2,1)$, $\mathfrak{D}_a'(2,1)$, a , b , c . Die Querachse liegt in einer Ebene mitten zwischen $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$. Benachbarte Achsenpaare $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{D}$ tragen Atompaare analog denen Fig. 21''. Abhängige Achsen: $\mathfrak{B}(2,1)$, $\mathfrak{C}(2,1)$, $\mathfrak{D}(2,1)$. Zu $\mathfrak{D}_a'$ liegen parallel gleichartige Schraubenachsen im Abstand $\frac{1}{2}c$ und $\frac{1}{2}b$. Zu ihnen normal verlaufen Schraubenachsen $\mathfrak{D}_b'(2,1)$ mitten zwischen je zwei Vertikalachsen und zwei Querachsen $\mathfrak{D}_a'(2,1)$ hindurch (Fig. 30). (Sch. $\mathfrak{B}_h^4$.)

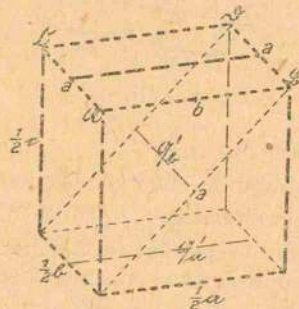


Fig. 30. (Nr. 13.)

Nr. 13 α . Spiegelpunkt

- a) in der Ebene zweier benachbarter Vertikalachsen $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{U}\mathfrak{C}$ im Schnittpunkt mit einer Querachse $\mathfrak{D}'$. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{16}$),
 - b) mitten zwischen zwei derartigen übereinander liegenden Schnittpunkten. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{15}$.)
- Von den überaus zahlreichen Typen dieser Abteilung II B besitzen die kristallographische Symmetrie $\{A_x^2, A_x^2\}$ die Nr. 5—13, die Symmetrie $\{C, A_x^2, A_x^2\}$ Nr. 5 α —13 α , die Symmetrie $\{A_x^2, E_{xy}\}$ oder $\{S_x, A_x^2\}$ die Nr. 5', 7', 8', 12 β und γ , sowie Nr. 10 β und 11 γ .

III. Klasse. Dreizählige Hauptachsen.

Wenn unter parallelen Dreh- und Schraubenachsen die höchste Zähligkeit = 3 ist, so ordnen sich die dreizähligen Achsen in drei Scharen im

allgemeinen verschiedener, die mit $\mathfrak{A}(3, p)$, $\mathfrak{B}(3, q)$, $\mathfrak{C}(3, r)$ bezeichnet werden sollen. Ihre Schnittpunkte mit einer zu den (vertikal gestellten) Achsen normalen (horizontalen) Grundfläche bilden ein Netz mit Maschen von der Form gleichseitiger Dreiecke. Durch die drei Eckpunkte einer Masche gehen lauter verschiedene Achsen. Hieraus ergibt sich, daß die Maschen in der Richtung der Reihenfolge der drei Achsen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zur Hälfte negativ, zur Hälfte positiv

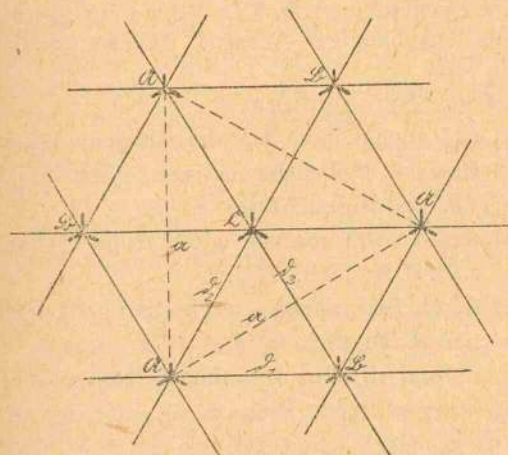


Fig. 31.

umlaufen werden. Die Seiten dieser Maschen mögen mit b bezeichnet werden. Fig. 31, in der die Dreizähligkeit der Achsen durch einen dreispitzigen Stern angedeutet ist, veranschaulicht diese Verhältnisse.

Alle Achsen $\mathfrak{A}$, alle $\mathfrak{B}$, alle $\mathfrak{C}$ sind untereinander gleichartig, d. h. also entweder Drehachsen $\mathfrak{A}(3, 0)$ oder Schraubenachsen, von denen es nach S. 243 nur die Arten $\mathfrak{A}(3, +1)$ gibt. Diese Gleichartigkeit folgt daraus, daß jene Achsen mit Hilfe der durch die $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ausgedrückten Deckbewegungen ausgetauscht werden können. Gleiches gilt nicht bezüglich der mit verschiedenen Buchstaben bezeichneten Achsen; es können vielmehr nebeneinander Drehachsen $\mathfrak{A}(3, 0)$ und Schraubenachsen $\mathfrak{B}(3, +1)$ auftreten usw.

Die Schnittpunkte der Achsen $\mathfrak{A}$ mit der Grundfläche bilden für sich allein ein zweites Dreiecknetz, dessen Seiten mit a bezeichnet werden

mögen. Die Mittelpunkte dieser Maschen werden abwechselnd von den Achsen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ durchstoßen.

Außer den Grundstrecken b bzw. a dient zur Charakteristik der Atomanordnung wiederum die Periode c , d. h. die Strecke parallel den Vertikalachsen, nach der sich die gesamte Anordnung wiederholt. Ein gleichseitig dreieckiges Prisma von der Grundkante a und der Höhe c bildet in gewissem Sinne ein Elementargebiet der Anordnung.

Eine dreizählige Dreh- oder Schraubenachse liefert durch ihre Deckbewegung innerhalb der Periode c zu einem Ausgangspunkt oder -atom P nur zwei weitere P' und P'' , die in Meridianen liegen, die gegen den Meridian von P um 120° und 240° gedreht sind. Im Falle der Drehachse $\mathfrak{A}(3, 0)$ liegen alle drei Punkte in derselben Horizontalebene, im Falle der Schraubenachse $\mathfrak{A}(3, \pm 1)$ in drei je um $\frac{1}{3}c$ verschiedenen Höhen. Diese „Dreipunkte“, die Fig. 32 nach den Grundsätzen von S. 246 darstellt, und die kurz als eben und $\pm$ gewunden unterschieden werden mögen, sind die Elemente, aus denen sich die den dreizähligen Achsen entsprechenden Anordnungen aufbauen. Ein System von Punkten oder Atomen, das in bezug auf eine Achsenart sich nach solchen Tripeln geordnet darstellt, muß sich auch in bezug auf jede der beiden andern Achsenarten entsprechend geordnet deuten lassen.

Da die Gleichartigkeit aller Achsen $\mathfrak{A}$ darauf beruht, daß dieselben durch Drehungen oder Schraubungen von der Zähligkeit Drei miteinander zur Deckung gebracht werden können, und diese Bewegungen sich über Winkel von 120° und 240° erstrecken, so liegen die Punkte P, P', P'' in bezug auf alle Achsen einer Schar (z. B. $\mathfrak{A}$) in denselben drei um 120° gegeneinander geneigten Meridianen. Bezeichnet man nun die um verschiedene Achsen $\mathfrak{A}$ in parallelen Meridianen liegenden Punkte mit den gleichen Symbolen P bzw. P' und P'' , so sieht man leicht, daß die gleichartigen Punkte im allgemeinen nicht in derselben Höhe liegen, sondern um $\frac{1}{3}c$ bzw. $\frac{2}{3}c$ verschiedenen, wobei ganze Vielfache der Periode c als wirkungslos außer Betracht bleiben und aus dem gleichen

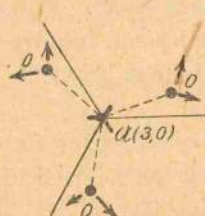


Fig. 32'.

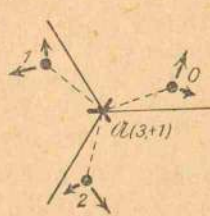


Fig. 32''.

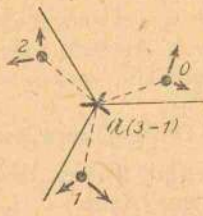
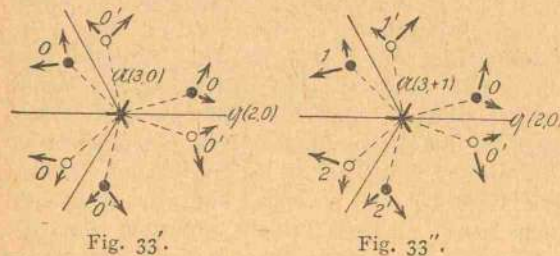


Fig. 32'''.

Grunde die Höhendifferenz $\frac{2}{3}c$ mit $-\frac{1}{3}c$ gleichwertig ist.

Hieraus folgt, daß zwei benachbarte gleichartige Achsen mit ihren (ihnen zugerechneten) Dreipunkten $P P' P''$ entweder durch eine Schiebung a oder durch eine solche $a \pm \frac{1}{3}c$ zur Deckung gelangen.

Wie im vorigen Falle (zweizähliger Vertikalachsen) können auch hier zweizählige Quer-, Dreh- und Schraubenachsen zu den (dreizähligen) Vertikalachsen hinzutreten; sie müssen aber natürlich der allgemeinen Bedingung genügen, durch ihre Deckbewegungen alle Achsen mit gleichartigen auszutauschen. Es genügt, hier die Kombination einer Querdrehachse $\mathcal{Q}(2,0)$ mit einer Drehachse $\mathcal{A}(3,0)$ und einer Schraubenachse $\mathcal{A}(3, +1)$ für den Fall, daß $\mathcal{A}$ von $\mathcal{Q}$ geschnitten wird, darzustellen, um eine Vorstellung von den entstehenden Kombinationen



zu geben (Fig. 33). Man kann diese beiden Typen als zusammengesetzte oder doppelte Ebene und $\pm$ gewundene bezeichnen. Liegt $\mathcal{Q}$ in der Höhe h über der o -Ebene, dann $o', 1', 2'$ je um $2h$ über $o, 1, 2$.

Spiegelebenen $\mathcal{E}$ und Gleitspiegelebenen $\mathcal{G}$ in vertikaler Stellung sind an analoge Bedingungen gebunden wie Querachsen; die Kombination, die entsteht, wenn $\mathcal{E}$ durch eine Achse $\mathcal{A}(3,0)$ hindurchgeht, ist durch Fig. 34 veran-

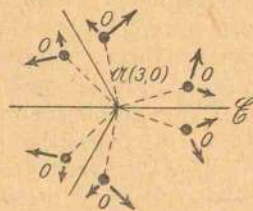


Fig. 34.

schaulich. Daß $\mathcal{E}$ und $\mathcal{G}$ zwei spiegelbildlich sich entsprechende Arten von Atomen voraussetzen, mag in Erinnerung gebracht werden.

Abteilung A. Ohne Querachsen.

Nr. 14/15. Rechtes und linkes Dreipunktschraubensystem.

Formel: $\mathcal{A}(3, \pm 1)$, a , c . Alle Achsen $\mathcal{A}$

tragen den in Fig. 32'' bzw. 32''' wiedergegebenen $\pm$ gewundenen Dreipunkt in gleicher Höhe. Abhängige Achsen: $\mathcal{B}(3, \pm 1)$, $\mathcal{C}(3, \pm 1)$. (Sch. $\mathcal{C}_3^2$ und $\mathcal{C}_3^3$.) Die beiden Formen Nr. 14 und 15 sind einander enantiomorph. Gemäß S. 245 kommt die Einführung von Deckoperationen zweiter Art bei ihnen nicht in Betracht.

Nr. 16. Dreiseitiges Säulensystem.

Formel: $\mathcal{A}(3,0)$, a , c . Alle Achsen $\mathcal{A}$ tragen ebene Dreipunkte vom Typ Fig. 32' in gleicher Höhe. Abhängige Achsen: $\mathcal{B}(3,0)$, $\mathcal{C}(3,0)$. (Sch. $\mathcal{C}_3^1$.)

Nr. 16a. Spiegelpunkt

a) auf irgendeiner der dreizähligen Achsen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ in beliebiger Lage. (Sch. $\mathcal{C}_3^1$.)

Nr. 16b. Spiegelebene

- a) durch zwei nächste gleichartige Achsen, z. B. $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$; (Sch. $\mathcal{C}_3^1$),
- b) durch zwei nächste ungleichartige Achsen, z. B. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$; (Sch. $\mathcal{C}_3^2$),
- c) normal zu allen dreizähligen Achsen in beliebiger Lage. (Sch. $\mathcal{C}_3^1$.)

Nr. 16c. Gleitspiegelebene

- a) durch zwei gleichartige Achsen, Gleitbetrag $\frac{1}{3}c$; (Sch. $\mathcal{C}_3^3$),
- b) durch zwei ungleichartige Achsen, Gleitbetrag $\frac{1}{3}c$; (Sch. $\mathcal{C}_3^4$.)

Nr. 17. Rhomboedersystem.

Formel: $\mathcal{A}(3,0)$, $a \pm \frac{1}{3}c$, c .

Abhängige Achsen: $\mathcal{B}(3, \pm 1)$, $\mathcal{C}(3, \mp 1)$.

Alle Achsen $\mathcal{A}$ tragen ebene Dreipunkte, aber je drei in einem Grunddreieck mit den Seiten a vereinigte Achsen in drei um $\frac{1}{3}c$ verschiedenen Höhen, so daß eine Art Schraubenfolge entsteht, die in den Dreiecken mit $\mathcal{B}$ und mit $\mathcal{C}$ im Zentrum einen entgegengesetzten Sinn hat. Demgemäß handelt es sich hier nicht um zwei enantiomorphe Anordnungen; die doppelten Vorzeichen entsprechen nur einer Umnennung der Achsen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. (Sch. $\mathcal{C}_3^1$.)

Nr. 17a. Spiegelpunkt

a) auf einer beliebigen Achse $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ in beliebiger Höhe. (Sch. $\mathcal{C}_3^2$.)

Nr. 17b. Spiegelebene

a) durch benachbarte Achsen, z. B. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$. (Sch. $\mathcal{C}_3^5$.)

Nr. 17c. Gleitspiegelebene

a) ebenso gelegen; Gleitbetrag $\frac{1}{3}c$. (Sch. $\mathcal{C}_3^6$.)

Von den Typen der Abteilung III A haben die kristallographische Symmetrie $\langle A_3^3 \rangle$ Nr. 14/15,

16, 17; die Symmetrie $\{C, A_x^3\}$ Nr. 16a, 17a; die Symmetrie $\{A_x^3, E_x\}$ Nr. 16b, a, b; Nr. 16c, a, b; Nr. 17b, Nr. 17c; die Symmetrie $\{A_x^3, E_x\}$ Nr. 16b c.

Abteilung B. Mit Querachsen.

Die Querachsen $\Omega(2,0)$ liegen entweder so, daß beim Umklappen um sie alle Achsenarten $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ mit gleichartigen zur Deckung kommen, oder so, daß nur eine (z. B. $\mathcal{A}$) sich derartig verhält, die andern ($\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$) sich gegenseitig austauschen. Im ersten Falle liegt Ω in der Ebene zweier benachbarten ungleichartigen Achsen, z. B. $\mathcal{A}\mathcal{B}$, und projiziert sich auf b , im zweiten Falle in der Ebene zweier benachbarten gleichartigen Achsen, z. B. $\mathcal{A}\mathcal{A}$, und projiziert sich auf a . Unter diese beiden Kategorien fallen bzw. die vier ersten und die drei letzten Typen dieser Abteilung.

Nr. 18/19. Rechtes und linkes zusammengesetztes Dreipunktschraubensystem.

Formel: $\mathcal{A}(3, \pm 1), \Omega_b(2,0), a, c$. Alle Achsen $\mathcal{A}$ tragen zusammengesetzte gewundene Dreipunkter Fig. 33" bzw. 33'" in gleicher Höhe. Abhängige Achsen: $\mathcal{B}(3, \pm 1), \mathcal{C}(3, \pm 1)$; mit Ω_b sind parallele und gleichartige Drehachsen im Abstand $\frac{1}{2}a$ und parallele Schraubenachsen $\mathcal{P}_b(2,1)$ mit der Ganghöhe $2b$ im Abstand $\frac{1}{4}a$ verbunden. Dasselbe System kehrt in Ebenen mit der Höhendifferenz $\frac{1}{2}c$ je um $\pm 60^\circ$ gedreht wieder, so daß in der dritten Ebene in

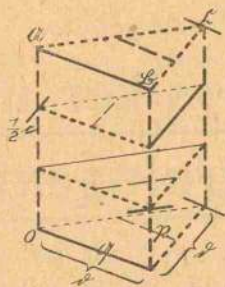


Fig. 35. (Nr. 18/19.)

der Höhe $\frac{1}{2}c$ die erste Konfiguration wieder stattfindet. Fig. 35 stellt die Achsen innerhalb eines Prismas von den Grundkanten b und $\frac{1}{2}c$ dar; auch sind zu größerer Klarheit die durch nur einen Kantenpunkt gehenden Achsen durch kurze Strecken angedeutet. (Sch. $\mathcal{D}_b^3$ und $\mathcal{D}_c^3$.)

Nr. 20. Zusammengesetztes dreiseitiges Säulensystem.

Formel: $\mathcal{A}(3,0), \Omega_b(2,0), a, c$. Alle Achsen tragen zusammengesetzte ebene Dreipunkter vom Typ Fig. 33' in gleicher Höhe. Abhängige Achsen: $\mathcal{B}(3,0), \mathcal{C}(3,0)$; mit Ω_b gleichartige Querdrehachsen liegen in allen drei Seiten $\mathcal{A}\mathcal{B}, \mathcal{B}\mathcal{C}, \mathcal{C}\mathcal{A}$ des Grunddreiecks und um $\frac{1}{2}c$ darüber; Querschraubenachsen verbinden die Seitenmitten (Fig. 36). (Sch. $\mathcal{D}_b^1$.)

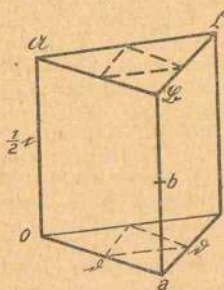


Fig. 36. (Nr. 20.)

Nr. 20a. Spiegelpunkt

- a) auf einer Achse $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ oder $\mathcal{C}$ im Schnittpunkt mit Querachsen; (Sch. $\mathcal{D}_{b,d}^1$),
- b) ebenda zwischen zwei Schnittpunkten mit Querachsen. (Sch. $\mathcal{D}_{b,d}^2$.)

Nr. 20b. Spiegelebene

- a) normal zu $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ in einer Ebene mit Querachsen; (Sch. $\mathcal{D}_{b,h}^1$),
- b) ebenso mitten zwischen zwei benachbarten Ebenen mit Querachsen. (Sch. $\mathcal{D}_{b,h}^2$.)

(Fortsetzung folgt.)

(Berichtigung: Seite 246 I, Zeile 10 v. u. setze 4×48 statt 48.)

BESPRECHUNGEN.

H. Usner, Der Kreisel als Richtungsweiser, seine Entwicklung, Theorie und Eigenschaften. Lex.-8. 156 S. u. 7 Tafeln. München, Militärische Verlagsanstalt. 1917. M. 8.—

Der Verf. behandelt das durch den U-Bootskrieg so aktuell gewordene Problem des Kreiselkompasses mit Gründlichkeit und Sachkenntnis. Als physikali-

scher Sachverständiger der Firma Neufeldt und Kuhnke, die sich seit langem mit dem Problem der magnetischen Kompaß-Steuerung beschäftigt, verfügt er über Einzelkenntnisse der in den verschiedenen Patentschriften niedergelegten Konstruktionen. Auch beherrscht er die historische Entwicklung des Problems seit Foucault und die allgemeinen mechanischen Gesichtspunkte.

Die Darstellung, die sich u. a. an Techniker und Marineoffiziere wendet, ist analytisch geschickt; vielleicht würde sie gerade für den genannten Leserkreis leichter faßlich sein, wenn sie nicht durchweg den Weg vom allgemeinen analytischen Ansatz zum speziellen Problem bevorzugen und der geometrisch-mechanischen Anschauung etwas mehr Raum geben würde. Aber auch der vom Verf. gewählte, in den älteren Darstellungen der analytischen Mechanik meistens eingeschlagene Weg hat seine besonderen und anerkannten Vorzüge. Die mechanischen Grundlagen der Theorie werden zweckmäßigerweise im Text ohne Beweis postuliert (z. B. „der Drall des kräftefreien Kreisel bleibt nach Richtung und Größe konstant“ usw.) und in mathematisch etwas weiter ausgeführten Anmerkungen am Schlusse des Buches erläutert. Ob man übrigens (vgl. Anm. 8) die Lagrangesche Methode passend als „energetische“ Ableitung der Bewegungsgleichungen bezeichnen soll, kann bezweifelt werden.

Der in Patentfragen nicht ganz unbefangene Leser wird indessen den Eindruck nicht loswerden, daß Verf. die allgemeine Tendenz verfolgt, die Verdienste von Anschütz-Kaempfe — nach allgemeinem Urteil des bahnbrechenden Verwirklichers der vor ihm nebelhaften Kreiselkompaß-Idee — herabzumindern, teils indem mit Vorliebe auf eine ältere, nur modellmäßig ausgeführte Konstruktion von Van den Boos exemplifiziert wird, teils indem gewisse auf Anschütz fußende Konstruktionen des Amerikaners A. E. Sperry auffallend hervorgehoben werden. Tatsächlich haben Vergleichsversuche, die im Jahre 1914 in Kiel mit Sperry- und Anschütz-Apparaten von der deutschen Marine veranstaltet wurden, zu dem „Gesamtergebnis“ geführt: „Der Sperry-Kompaß hat sich in der vorliegenden Konstruktion dem Anschütz-Kompaß gegenüber weit unterlegen gezeigt. Er ist besonders wegen seiner Unzuverlässigkeit bei schlingern dem Schiff für den Gebrauch innerhalb der Kaiserlichen Marine nicht geeignet.“ Nach einem für die Marine-Rundschau bestimmten Protokoll, dessen Veröffentlichung nur durch den Kriegsausbruch verhindert wurde, waren die Abweichungen des Sperry-Apparates von der richtigen Weisung durchschnittlich etwa dreimal so groß wie die des Anschütz-Apparates. Vielleicht interessiert es den physikalischen Leser, daß als gerichtlicher Sachverständiger bei diesen Feststellungen Einstein mitwirkte.

Im Anfange von Kapitel V macht Verf. einige vielleicht weniger bekannte Mitteilungen über die Entstehungsgeschichte der Anschützschen Konstruktion. Sie war gedacht als Hilfsmittel der Polarforschung. Der Nordpol sollte durch ein Unterseeboot erreicht werden, zu dessen Steuerung der Kreiselkompaß unentbehrlich ist. Seit 1900 hat Anschütz seinen Gedanken trotz anfänglicher Fehlschläge festgehalten und immer von neuem verbessert. Aus eigenen Mitteln hat er orientierende Expeditionen nach Grönland ausgerüstet. Die marine-technische Anwendung, die, wie bekannt, für den Krieg von ungeheurer Tragweite geworden ist, lag ursprünglich außerhalb seines Gesichtskreises.

A. Sommerfeld.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Dr. Eyvind Bødtker aus Trondhjem zum Professor der Chemie an der Universität Kristiania, Chefingenieur Dr. Theodor Niethammer zum a. o. Professor für Astronomie und Meteorologie an der Universität Basel, der a. o. Professor an der Universität Marburg Dr. Karl Fries zum ord. Professor der Chemie an der Technischen Hochschule Braunschweig, der ord. Professor für organische Chemie an der Technischen Hochschule München Dr. Heinrich Wieland zum ord. Professor der allgemeinen und Experimentalchemie an der Universität Straßburg (zum Sommer 1919).

Verliehen: Dem emeritierten ord. Professor der Physik an der Universität Wien Hofrat Dr. Viktor v. Lang die Würde eines Wirklichen Geheimen Rates (mit dem Titel Exzellenz), den Privatdozenten an der Universität Göttingen Dr. Erwin Madelung (Physik) und Dr. Horst v. Sanden (angewandte Mathematik), den Kantonschulprofessoren und Dozenten für Mathematik an der Technischen Hochschule Zürich Dr. Ernst Amberg und Dr. Konrad Brandenberger, dem Leiter der mikroskopischen Abteilung der Zeißwerke in Jena Dr. Harry Siedentopf sowie dem Privatdozenten in der Abteilung Chemie (speziell Verbrennung und Heizung) an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Ernst Börnstein der Titel Professor.

Gestorben: Der a. o. Professor für organische Chemie an der Universität Kiel Dr. Ludwig Berend, der emer. ord. Professor der techn. Chemie an der Technischen Hochschule Stuttgart Dr. Karl Häußermann, der Astronom, Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Paris, Charles J. E. Wolff.

In den Ruhestand: Der ord. Honorarprofessor für höhere Mathematik an der Technischen Hochschule Darmstadt Dr. Friedrich Graefe und der Privatdozent für geometrische Optik an derselben Hochschule Professor Dr. Ferdinand Meisel.

Angebote.

Physiker und Elektroingenieure

mit abgeschlossener Hochschulbildung zur experimentellen Durchbildung von Apparaten für drahtlose Telegraphie, insbesondere Verstärkern und Röhrendern gesucht. Bewerbungen mit Angabe des Bildungsganges und der Gehaltsansprüche erbeten an

Dr. Georg Seibt,
Fabrik elektrischer Apparate,
Berlin-Schöneberg, Hauptstr. 11.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 16.

15. August 1918.

Redaktionsschluß für No. 18 am 9. August 1918.

19. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

K. W. F. Kohlrausch, Über die Wellenlänge der harten γ -Strahlung von Radium. S. 345.

A. Schmidt, Besitzt die tägliche erdmagnetische Schwankung in der Erdoberfläche ein Potential? S. 349.

O. Meißner, Vergleichung der mikroseismischen Bewegung in der Bilt, Potsdam und Pulkowa. S. 355.

Zusammenfassende Bearbeitungen:

W. Voigt, Die Resultate der geometrischen Strukturtheorien und die Ergebnisse der Analyse durch Röntgenstrahlen. Spezieller Teil I. (Schluß.) S. 357.

Besprechungen:

A. v. Oettingen, Die Grundlage der Musikwissenschaft und das duale Reinstrument. S. 366.

K. Jellinek, Lehrbuch der physikalischen Chemie. II. S. 367.

J. W. Cederberg, Die thermodynamische Berechnung chemischer Affinitäten von homogenen und heterogenen Gasreaktionen. S. 368.

Personalien. S. 368.

Angebote. S. 368.

Gesuche. S. 368.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die Wellenlänge der harten γ -Strahlung von Radium.

Von K. W. Fritz Kohlrausch.

Die Beobachtungen an Röntgenstrahlen haben ergeben, daß der Absorptionskoeffizient μ , bzw. die Massenabsorption $\frac{\mu}{\rho}$, in irgendeiner Substanz sich außerhalb eines selektiven Absorptionsgebietes in Abhängigkeit von der untersuchten Wellenlänge λ darstellen läßt durch

$$\frac{\mu}{\rho} = A \lambda^n, \quad (I)$$

wobei A sowohl als n mit dem Absorber variieren; n allerdings nur in engen Grenzen, zwischen 2,6 und 3. Für Interpolationszwecke wird diese Beziehung bequemer in der linearen Form

$$\log \frac{\mu}{\rho} = \log A + n \log \lambda \quad (II)$$

verwendet. Die untere Gültigkeitsgrenze war bisher durch die Absorptionsmessungen Barklas in Verbindung mit den neueren Wellenlängenbestimmungen bis $\lambda \geq 0,6 \cdot 10^{-8}$ cm gesichert. In einer kürzlich erschienenen Arbeit hat R. Glocker¹⁾ unter Benutzung der experimentellen Daten von W. Hull und M. Rice²⁾ zu zeigen versucht, daß sich der Gültigkeitsbereich der logarithmischen Darstellung bis $\lambda \geq 0,1 \cdot 10^{-8}$ cm erweitern läßt, wodurch Glocker ferner imstande war, auf Grund von Absorptionsmessungen, die M. Ishino³⁾ an γ -Strahlen von RaC vorgenommen hat, deren Wellenlänge zu interpolieren. Es ergab sich: $\lambda_{RaC} = 0,12 \cdot 10^{-8}$ cm, „während sich aus den Spektralaufnahmen von Rutherford⁴⁾ für das kurzwellige γ -Strahlenspektrum von RaB und C eine mittlere Wellenlänge

$\lambda = 0,13 \cdot 10^{-8}$ cm ergibt. Das für Röntgenstrahlen aufgestellte Absorptionsgesetz behält somit seine Gültigkeit auch bei der Absorption der sehr durchdringungsfähigen γ -Strahlen.“ —

Ich habe nun im Vorjahre¹⁾ experimentell gezeigt, daß die γ -Strahlung von RaC komplex ist und sich aus zwei Komponenten zusammensetzt. Die Analogie mit den zwei starken Linien A und B in Rutherfords Spektralaufnahmen war auffallend und ich habe ebenfalls aus der obigen logarithmischen Beziehung die zugehörigen Wellenlängen zu bestimmen versucht. Das Ergebnis war kein so günstiges, wie bei Glocker. Gerade die neueren Arbeiten — die mir damals unbekannt waren — scheinen mir aber die Unzulässigkeit dieser Extrapolation zu beweisen und damit zu zeigen, daß die in Frage kommende γ -Strahlung nicht in den Wellenlängenbereich fällt, in dem die Rutherfordschen Spektrallinien liegen.

Leider bin ich in bezug auf die Hauptarbeit nur auf Referate, bzw. Bemerkungen anderer Autoren angewiesen, da das Heft der Phys. Rev., in dem sich die Publikation von Hull und Rice befindet, hier nicht eingegangen ist. Nach dem Vorgange Barklas fassen diese (vgl. Ishino l. c.)

die beobachtete Absorption $\frac{\mu}{\rho}$ auf als aus zwei Teilen bestehend. Der eine, entsprechend der „wahren“ Absorption $\frac{\mu}{\rho}$, entsteht durch Umwandlung in andersgeartete Energien (Wärme, Fluoreszenzstrahlung, Korpuskularstrahlung), der andere $\frac{\sigma}{\rho}$ dadurch, daß die Primärstrahlung aus ihrer Ursprungsrichtung abgelenkt, d. i. gestreut wird und bei einem genügend weit entfernten Ionisationsgefäß der Messung verloren geht. $\frac{\mu}{\rho}$ variere mit λ^3 , $\frac{\sigma}{\rho}$ sei eine universelle Kon-

1) Glocker, diese Zeitschr. 19, 66, 1918.

2) W. Hull u. M. Rice, Phys. Rev. 8, 326, 1916; Referat: Beibl. d. Ann. 41, 290, 1917.

3) M. Ishino, Phil. Mag. 33, 129, 1917.

4) E. Rutherford u. E. N. da C. Andrade, Phil. Mag. 27, 856, 1914; 28, 263, 1914.

1) K. W. F. Kohlrausch, Wien. Ber. 126, 441, 683, 705, 887, 1917. Zusammenfassender Bericht: Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 15, 64, 1918.

stante vom Zahlenwert $\frac{\sigma}{\rho} = 0,12$. — Bei kleinen Wellenlängen, wo $\frac{\mu}{\rho}$ ebenfalls klein wird, kann der Streuverlust überwiegen und muß berücksichtigt werden, wenn man die an längeren Wellen — $\frac{\sigma}{\rho}$ vernachlässigbar gegen $\frac{\mu}{\rho}$ — gefundene Beziehung zwischen $\frac{\mu}{\rho}$ und λ bestätigt finden will. Es kommt mit andern Worten für die angestrebte lineare Darstellung (II) der „wahre“ Wert $\frac{\mu}{\rho}$ in Betracht und nicht der experimentelle $\frac{\mu}{\rho} = \frac{\bar{\mu}}{\rho} + \frac{\sigma}{\rho}$. —

Mit Hilfe des angegebenen Zahlenwertes für $\frac{\sigma}{\rho}$ hat nun Glocker die experimentellen Werte $\frac{\mu}{\rho}$ von Hull und Rice korrigiert und gefunden, daß Gleichung (II) ihre Gültigkeit auch für die durchdringenden Röntgenstrahlen bis $\lambda \geq 0,1$ Å.-E. behält, wobei in Aluminium für n zu setzen ist 2,94. — Glocker bemerkt allerdings, daß die Konstanz von $\frac{\sigma}{\rho}$ recht unwahrscheinlich sei; der Zweifel erscheint begreiflich, da M. Ishino aus seinen γ -Strahlungsmessungen im angeblich gleichen Wellenlängenbereich einen Wert $\frac{\sigma}{\rho} = 0,04$, also nicht weniger als dreimal so klein findet. Mahnt schon diese schwerwiegende Diskrepanz — $\frac{\mu}{\rho}$ und $\frac{\sigma}{\rho}$ sind hier von gleicher Größenordnung — zur Vorsicht, so beeinträchtigt ein weiterer Umstand, der Glocker anscheinend entgangen ist, die Verwertung dieser Größe für vorliegende Zwecke noch mehr. Wie kommen Hull und Rice zu dem Zahlenwert $\frac{\sigma}{\rho} = 0,12$? Glocker gibt darüber an, daß die Provenienz nicht recht ersichtlich sei. Nun sind in der letzten Arbeit von G. C. Barkla und M. P. White¹⁾ einige Bemerkungen enthalten, die diesbezügliche Aufklärung geben; danach ergab sich $\frac{\sigma}{\rho}$ aus der

Annahme, daß die beobachteten Werte $\frac{\mu}{\rho}$ proportional λ^3 variieren. Barkla kritisiert noch diesen Vorgang, da es unwahrscheinlich

sei, daß der Potenzexponent gerade den Wert 3 habe. Selbstverständlich läßt sich dann $\frac{\mu}{\rho} = 0,12$ auch als lineare Funktion von $\lambda^{2,94}$ noch gut darstellen; doch bildet dieser Zirkel keinen Beweis für die Richtigkeit der Darstellung und der anscheinend extrapolierte Schnittpunkt 0,12 mit der $\frac{\mu}{\rho}$ -Achse entbehrt jeder physikalischen Bedeutung, wenn nicht vorher der Beweis für die Gültigkeit des λ^3 -Gesetzes und die Erlaubtheit der Extrapolation bewiesen wurde.

Infolgedessen wird man auch die Richtigkeit der Wellenlänge bezweifeln müssen, die von mir auf Grund einer hypothetischen, von Glocker auf Grund seiner als experimentell erwiesen angesehenen Gebietserweiterung der linearen Beziehung zwischen $\log \frac{\mu}{\rho}$ und $\log \lambda$ den γ -Strahlen von *RaC* zugeordnet wurde. — Übrigens ist die Übereinstimmung dieses Wertes mit den direkten Rutherfordschen Angaben keine so gute, als sie nach Glocker auf den ersten Blick erscheint. In der Spektralaufnahme finden sich die zwei starken Linien *A* und *B* (letztere eine Doppellinie) mit den Wellenlängen 0,099 Å.-E. und 0,164 Å.-E.; Glocker bildet hieraus einen „mittleren“ Wert 0,13 und konstatiert die Übereinstimmung mit dem Interpolationsresultat. Nun muß man aber bedenken, daß mit den von Glocker verwendeten Daten $\frac{\sigma}{\rho} = 0,04$; $n = 2,94$; $A = 13,8$ sich für die fraglichen Wellenlängen die Absorptionskoeffizienten $\frac{\mu}{\rho}$ zu 0,055 bzw.

0,108 berechnen, die sich wie 1:2 verhalten. Eine Mittelbildung unterschätzt die mögliche Meßgenauigkeit beträchtlich und wäre wohl nur für ganz rohe Messungen und Überlegungen gerechtfertigt. — Auch die weitere Konsequenz, die Glocker aus dem erweiterten Gültigkeitsbereich zieht, daß eine *J*-Serie erst bei $\lambda < 0,1 \cdot 10^{-8}$ cm zu erwarten wäre, stimmt nicht, da Barkla (l. c.) einen Absorptionssprung in Aluminium bei $\lambda = 0,36 \cdot 10^{-8}$ cm findet, also mitten in dem Gebiet, wo nach Hull und Rice $\frac{\mu}{\rho}$ als Funktion von λ^3 linear sein sollte.

In dem Wellenlängenbereich, wo die sog. „wahre“ Absorption $\frac{\mu}{\rho}$ und der Streukoeffizient $\frac{\sigma}{\rho}$ von gleicher Größenordnung werden, wird man daher auf die bequeme logarithmische Darstellung verzichten und eine solche, die nicht

¹⁾ G. C. Barkla und M. P. White, Phil. Mag. 34, 270, 1917.

auf die Kenntnis von $\frac{\sigma}{\rho}$ angewiesen ist, wählen müssen. Denn diese Größe ist weder experimentell exakt bestimmbar, noch ist sie definiert, so lange wir über den Mechanismus des Streuvorgangs nichts wissen; und unsere Kenntnisse hierüber sind noch sehr gering, wie die widerspruchsvollen Messungen sowohl an Röntgenstrahlen als an γ -Strahlen lehren. Ishino allerdings gibt einen experimentell gewonnenen Wert für $\frac{\sigma}{\rho}$; ist das, was er gemessen hat, aber auch wirklich der Streukoeffizient? Aus dem Unterschied, den man für den Absorptionsverlust in einer Substanz erhält, je nachdem, ob der Absorber am Ionisationsgefäß anliegt (entsprechend der Ausnützung eines großen Öffnungswinkels der „gestreuten“ Strahlung), oder von ihm weit entfernt ist (kleiner Öffnungswinkel), glaubt er den gestreuten Betrag rechnen zu können. Dazu muß aber die Streuung nach rückwärts vernachlässigt, bzw. korrigiert werden können, es muß die Verteilungsfunktion der Streustrahlung bekannt sein und, vor allem, es darf keine Fluoreszenzstrahlung entstehen. Nicht einmal einwandfreie qualitative Anhaltspunkte für diese Voraussetzungen liegen vor. Wenn ich selbst unter diesbezüglichen konkreten Annahmen — der „Streukoeffizient $\frac{\sigma}{\rho}$ “ ist identisch mit dem in meiner Arbeit verwendeten „Sekundärstrahlungskoeffizienten $\frac{k}{\rho}$ “ — Übereinstimmung der Theorie mit dem Experiment gefunden habe, so habe ich doch ausdrücklich diese Annahmen als Rechenhilfsmittel hingestellt und vor allem die Frage nach dem Mechanismus des Vorganges — Streuung oder Sekundäreffekt — offen gelassen.

Wegen der hier skizzierten Schwierigkeiten halte ich, wie bereits a. a. O. erwähnt, die Einführung des Begriffes „wahre Absorption“ in die quantitative Verwertung des Beobachtungsmaterials als zum mindesten verfrüht. Beobachtbar ist nur der Gesamtverlust, den die Intensität eines vorgegebenen Strahlenbündelquerschnittes beim Passieren eines Absorbers erleidet. Was mit der verlorenen Energie geschieht, ist zunächst für die Messung selbst gleichgültig; und jede nicht in der Ursprungsrichtung auftretende Strahlungsintensität gilt als durch Absorption verloren, ob sie nun eine gestreute oder eine Fluoreszenz-Strahlung ist. Das ist eine experimentell eindeutige Definition des Absorptionskoeffizienten, deren Nichtbeachtung speziell in Meßtechnik der γ -Strahlen zu den wildesten Resultaten geführt hat. Und die Darstellung

der Ergebnisse hat sich nach den experimentellen Möglichkeiten zu richten und nicht umgekehrt¹⁾.

Man wird daher zur Identifizierung der γ -Wellenlängen den Weg des direkten Vergleichs an nicht „korrigierten“ Beobachtungsergebnissen betreten müssen. Unter Ausschluß jeglicher Sekundärstrahlung — worunter im folgenden sowohl die Fluoreszenz- als die Streustrahlung verstanden sei — habe ich für die sog. „harte“ γ -Strahlung von *Ra* drei Komponenten K_1 , K_2 , K_3 nachgewiesen, von denen K_3 die bekannteste härteste γ -Type von *RaB* ist, K_1 und K_2 die Bestandteile der bisher als homogen aufgefaßten γ -Strahlung von *RaC* sind. Die relativen Intensitäten in der benutzten Versuchsanordnung waren: $K_1:K_2:K_3=8:6:1$. — Die Absorptionskoeffizienten wurden für K_1 und K_2 in 30 chemischen Elementen gemessen (Figur). Einige Zahlenwerte sind in Tabelle I zusammengestellt.

Tabelle I.

	<i>H₂O</i>	<i>Al</i>	<i>Cu</i>	<i>Pb</i>
μ_1/ρ	0,055	0,047	0,044	0,047
μ_2/ρ	0,100	0,085	0,079	0,132
μ_3/ρ	—	0,21	(0,20)	0,41

Der geklammerte Wert in der letzten Zeile wurde nicht in *Cu*, sondern im Nachbarlement *Zn* gemessen. Vergleichen wir damit die Zahlen der Tabelle II, die den Arbeiten von Rutherford²⁾ sowie Barkla und White (l. c.) ent-

Tabelle II.

λ	<i>H₂O</i>	<i>Al</i>	<i>Cu</i>	<i>Pb</i>	
0,063.10 ⁻⁸ cm	—	—	—	0,75	Rutherford
0,068.10 ⁻⁸	—	0,085	—	1,05	
0,145.10 ⁻⁸	—	0,153	0,707	(1,50)*	Barkla, bzw. Hull und Rice
0,175.10 ⁻⁸	0,19	0,210	1,03	(2,35)	

nommen sind. Zu bemerken ist, daß die Angaben Rutherfords, der die Absorber unmittelbar am Meßgefäß anbringt und daher wegen mitgemessener Sekundärstrahlung zu kleine Absorptionskoeffizienten erhält, nur als Anhaltspunkt für die Größenordnung dienen können. Die Zahlen Barklas sind von ihm auf die Wellenlängenmessungen von Hull und Rice bezogen, von welchen auch die geklammerten Bleiwerte stammen, die ich aus Fig. 1 in Rutherfords Arbeit interpoliert habe³⁾. Die

1) Den gleichen Standpunkt vertritt Barkla (l. c.) in seiner jüngsten Arbeit.

2) E. Rutherford, Phil. Mag. **34**, 153, 1917.

3) Der mit Stern bezeichnete Wert liegt gerade an der Stelle der Absorptionsbandkante der *K*-Serie.

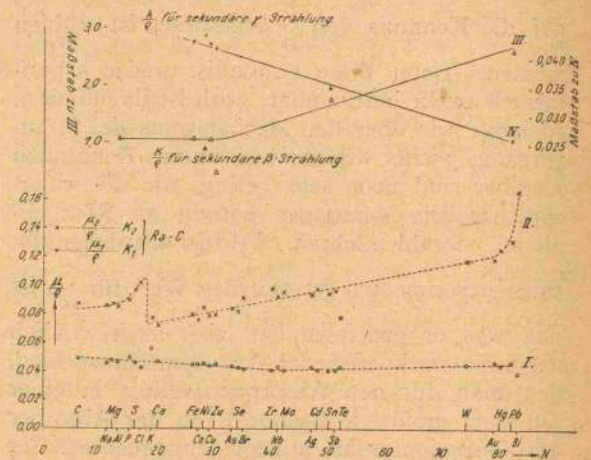
Wellenlängenzahlen Rutherfords hängen an der Einsteinschen Quantenbeziehung, deren Gültigkeit aber selbst in diesen extremen Gebieten festzustehen scheint.

Hätte man nur die Vergleichsmöglichkeit an Al , so käme man unbedingt zu dem Schlusse, daß $\frac{\mu_2}{\rho}$ bzw. $\frac{\mu_3}{\rho}$ innerhalb des bereits erforschten Wellenlängenbereiches liegen und könnte unschwer in Rutherfords Spektralaufnahmen Linien finden, die ihnen entsprechen. Ein Blick auf die in den andern Substanzen gemessenen Absorptionskoeffizienten lehrt aber die Unhaltbarkeit einer solchen Identifizierung. Nach Tabelle II ist, worauf auch Rutherford hinweist, die Absorption in Al etwa fünfmal kleiner als in Cu und etwa 10 mal kleiner als in Pb , während in Tabelle I diese Verhältnisse 1 bzw. $\frac{1}{2}$ sind. Mit Rutherford kommt man daher zu dem Schlusse, daß die Wellenlängen der harten γ -Strahlen — wie man hier sieht auch der von RaB — kleiner sein müssen als $0,06 \cdot 10^{-8}$ cm und demnach nicht irgendwelchen Linien der bekannten $Ra\gamma$ -Spektralaufnahmen entsprechen können. Offenbar ist bei diesen kürzesten Wellen Aluminium nicht die geeignete Standardsubstanz, aus deren Absorptionsvermögen auf die Wellenlänge geschlossen werden kann; $\frac{\mu}{\rho}$ in Aluminium fällt im Verhältnis zu

$\frac{\mu}{\rho}$ in schwereren Atomen zu groß aus. Eine gleichartige Erscheinung konstatiert Barkla bei der Absorption harter Röntgenstrahlen in Papier, H_2O und Al und schreibt sie (s. o.) der Entstehung einer J -Serie zu, die aber wegen ihrer erheblich größeren Wellenlänge für die folgenden Überlegungen nicht in Betracht kommt.

Augenfällig ergibt sich das abnormale Verhalten der Absorption in leichten Materialien aus

der Figur, in der die Massenabsorption $\frac{\mu_1}{\rho}$ und $\frac{\mu_2}{\rho}$ der $RaC\gamma$ -Strahlungen als Funktion der Atomnummer aufgetragen sind. Die Messungen sind ungefähr auf 5 Proz. genau und stammen aus meiner oben zitierten Arbeit. Das Herausfallen der Werte für Te aus dem Kurvenzug II, sowie K und Bi aus I, halte ich nicht für reell. Kurve I zeigt die bereits bekannte angenäherte Konstanz der härtesten K_1 -Strahlung, Kurve II im allgemeinen ein Anwachsen von $\frac{\mu_2}{\rho}$ mit dem Atomgewicht. Eine deutliche Stufe ergibt sich zwischen den Elementen Cl ($N=17$) und K ($N=19$).



Es fragt sich nun, woher dieses absonderliche Verhalten der weicheren RaC -Strahlung kommt, bzw. was mit der absorbierten Energie geschehen ist. Eine sprunghafte Änderung in der Streuungsfähigkeit der verschiedenen Atome anzunehmen, entbehrt jeder Grundlage. Vielmehr wird man auf Grund der bisherigen Erfahrungen an Röntgenstrahlen erwarten, daß diese Stelle selektiver Absorption einem Emissionsvorgang für sekundäre Wellen- und Korpuskularstrahlung entspricht. Die Wellenlänge der Fluoreszenzstrahlung nimmt innerhalb einer Serie mit wachsender Atomnummer N ab, derart, daß in $\frac{1}{\lambda} = f(N)$ die Form der Funktion f je nach der Serie verschieden ist; für die K - und L -Serie ergab sich z. B. $\frac{1}{\lambda}$ als eine quadratische Funktion von N . Nimmt man an, daß außer der M -, L - und K -Serie noch weitere existieren, die für ein und dasselbe Atom kleinere Wellenlängen liefern — wie sich diese Annahme mit den jetzigen Vorstellungen über den Aufbau des Atoms verträgt, bleibe dahingestellt, — so mögen zwei solche Serien vorkommen, von denen die weichere im Atom $N \geq 83$, die härtere im Atom $N=18$ eine charakteristische Strahlung der Wellenlänge λ_2 besitzt. Die Absorption der γ -Strahlung von K_2 mit eben dieser Wellenlänge λ_2 wird dann als Funktion der Atomzahlen N das Bild der Figur liefern; sie wird ein Maximum sein in jenen Atomen, für deren Fluoreszenzstrahlung $\lambda \geq \lambda_2$ ist, und wird nachher abnehmen, je größer der Unterschied zwischen λ_2 und den charakteristischen Wellenlängen der dem Maximum benachbarten niedrigeren Atomnummern wird. — Trifft diese Erklärung zu, dann kann man K_2 selbst nicht als eine Fluoreszenzstrahlung, etwa von K_1 in RaC hervorgerufen, ansprechen. Denn da RaC mit Bi

isotop ist, müßte es eine Wismutstrahlung liefern, die aber ohne Verletzung der Stokesschen Regel keine charakteristische Strahlung in Bi oder einem höheren Atom hervorrufen kann.

Um wenigstens eine angenäherte Vorstellung über die Verwendung der absorbierten Energie zu erhalten, sind in der Figur die an der gleichen Apparatur erhaltenen Resultate über die Entstehung sekundärer β - und γ -Strahlung eingetragen. Kurve III gibt den Massenstrahlungskoeffizienten $\frac{K}{\rho}$ der β -, Kurve IV dieselbe Größe

$\frac{K}{\rho}$ (von Ishino „Streuungskoeffizient“ genannt) für die sekundäre γ -Strahlung. Der Berechnung beider Größen liegt die Annahme zugrunde, daß nur K_1 zu ihrer Entstehung beitrage, was kaum zutreffen dürfte; da weiter die Messung an Ionisierungsvermögen erfolgte, sind die Zahlen kein vergleichbares Maß für die enthaltene Energie. Die Abhängigkeit vom Atomgewicht wird dadurch kaum gefälscht und man sieht, daß diese nicht im gleichen Sinne erfolgt. Nach den bisherigen Erfahrungen an Röntgenstrahlen geht aber die Erzeugung von Fluoreszenzstrahlung parallel mit einer Elektronenemission. Man wird daher geneigt sein, hier Ähnliches zu erwarten und die invers verlaufenden Kurven III und IV als nicht zu demselben Erregungsvorgang gehörig anzusehen. Dann könnte z. B. Kurve IV der in der Messung überwiegenden Streustrahlung, die bei leichten Elementen größer ist als bei schweren, zuzuschreiben sein, Kurve III, die von K_2 stammt und der Absorption von K_2 im allgemeinen parallel läuft, als ein Anzeichen für vorhandene Fluoreszenzstrahlen genommen werden. Das Verbindungsstück der gemessenen Werte für Al und Fe wäre dann nicht geradlinig, sondern mit einem Maximum bei Cl einzusetzen.

Direkte experimentelle Beweise für die Existenz einer Fluoreszenzstrahlung der hier geforderten Härte liegen bisher nicht vor. Vielleicht bringen Versuche, die in betreff dieser Fragen derzeit im Gange sind, die gewünschte Aufklärung. Jedenfalls ist für das Experiment noch viel Arbeit zu leisten, ehe man in diesem Gebiet der kürzesten Wellen sich auf mehr als auf bloße Vermutungen stützen kann.

Aus dem II. physikalischen Institut der Universität Wien.

(Eingegangen 5. April 1918.)

Besitzt die tägliche erdmagnetische Schwankung in der Erdoberfläche ein Potential?

Von Ad. Schmidt.

Eine kürzlich erschienene, sehr sorgfältig durchgeführte und auf das beste zurzeit verfügbare Beobachtungsmaterial gestützte Untersuchung der täglichen Variation des Erdmagnetismus hat zu dem Ergebnis geführt, daß die horizontale Komponente des Variationsfeldes in der Erdoberfläche nicht durch ein Potential dargestellt werden kann¹⁾. Bei der großen Bedeutung, die dieser auffallenden Feststellung nicht nur für die Geophysik, sondern im Hinblick auf die Schwierigkeit, sie vom Standpunkt unserer heutigen Anschauungen aus mit andern Tatsachen (besonders den lufterlektrischen) in Einklang zu bringen, auch für die allgemeine Physik zukommen würde, erscheint eine Prüfung der Schlüsse, auf denen sie beruht, dringend geboten.

Nach der gegenwärtig wohl allgemein angenommenen Theorie der täglichen Variation des erdmagnetischen Feldes ist diese eine unmittelbare, jedoch merklich durch die Induktion im Erdkörper abgeänderte Wirkung elektrischer Ströme in den obersten Atmosphärenschichten, die in den dort herrschenden periodischen, mit der täglichen Luftdruckschwankung zusammenhängenden Luftströmungen durch den beharrlichen Erdmagnetismus, insbesondere seine vertikale Komponente, induziert werden. Die Vermutung, daß die betrachtete Erscheinung auf atmosphärische, die erdmagnetischen Kraftlinien durchschneidende Strömungen zurückgehe, hat Balfour Stewart gelegentlich ausgesprochen. Das Verdienst, diese Vermutung mit großer Wahrscheinlichkeit als zutreffend erwiesen und zu einer in ihren Voraussetzungen und Folgerungen durchgeprüften Theorie ausgebildet zu haben, kommt Arthur Schuster zu, der sich in zwei grundlegenden Arbeiten mit der Frage beschäftigt hat, nachdem er schon vorher die in der unzureichenden normalen Leitfähigkeit der Luft liegende Hauptschwierigkeit durch die Entdeckung beseitigt hatte, daß diese unter Umständen eine außerordentliche Steigerung erfahren kann.

1) Over de dagelijksche variatie van het Aardmagnetisme. Thèses de doctorat de Mlle Annie van Vleuten, défendues devant la faculté des sciences de l'Université d'Utrecht le 22 Septembre 1917. Veröffentlicht als Nr. 23 der Mededelingen en Verhandelingen van het Koninklijk Nederlandsch Meteorologisch Instituut, Utrecht 1917. — Angefügt sind in englischer Übersetzung zwei kurze Darstellungen der Hauptergebnisse der Arbeit, die vorher in Band 26 der Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Amsterdam erschienen sind.

In der ersten Abhandlung¹⁾ beweist Schuster, daß das empirisch festgestellte, annähernd konstante und relativ zur Sonne ruhende Variationsfeld, in dem sich die Erde dreht, aus einem äußeren und einem inneren Anteil besteht, und daß der zweite seiner Form und Lage nach, wie auch unter plausiblen Annahmen über die Leitfähigkeit des festen Erdkörpers seiner Stärke nach die Induktionswirkung des ersten darstellt. Der mittlere spezifische Widerstand ergibt sich der Größenordnung nach zu etwa 10^{13} bis 10^{14} ; es folgt weiter, daß er von der Oberfläche nach dem Erdinnern zu abnehmen muß. In einer Schlußbetrachtung wird gezeigt, daß das zur Erklärung des äußeren, primären Feldes dienende Stromsystem qualitativ der Balfour Stewart'schen Hypothese entspricht, wenn man annimmt, daß die aus dem täglichen Luftdruckgange erschlossenen periodischen Luftbewegungen ohne wesentliche Änderung ihres Charakters bis in die höchsten Schichten der Atmosphäre hinaufreichen. Diese Annahme ist gerechtfertigt, da es sich dabei nach der Kelvinschen, von Margules durchgearbeiteten Hypothese in der Hauptsache um thermisch angeregte Schwingungen des Luftmeers handelt, deren Perioden annähernd mit solchen seiner freien Schwingungen übereinstimmen.

Die zweite Abhandlung²⁾ geht von diesen Luftströmungen aus und berechnet das durch sie unter dem Einfluß der erdmagnetischen Vertikalkomponente hervorgerufene magnetische Feld unter bestimmten durch die Natur der Sache nahegelegten Voraussetzungen über die periodisch wechselnde Ionisierung der Luft in den hohen, allein dafür in Betracht kommenden Schichten. Für die maximale Leitfähigkeit (an der Stelle, die die Sonne im Zenit hat) ergibt sich bei einer zu rund 300 km angenommenen Schichtdicke als mittlerer Betrag etwa 10^{13} . Die Frage, ob und wie die dazu nötige starke Ionisation zustande kommen kann, wird eingehend erörtert.

Der in der ersten Arbeit enthaltenen Vergleichung mit der Erfahrung konnte Schuster nur ein dürftiges, in mehrfacher Hinsicht mangelhaftes Beobachtungsmaterial zugrunde legen. Wenn er trotzdem darin zu bestimmten und anscheinend entscheidenden Resultaten gelangte, so war das wesentlich das Verdienst seiner sorg-

samen und kritischen Verwendung dieses Materials. Das konnte aber nicht von der Aufgabe befreien, die Prüfung der Theorie auf eine breitere empirische Grundlage zu stützen, sobald eine solche zu schaffen war. Eine durchaus Schusters Formeln benutzende Wiederholung der Rechnung zu diesem Zwecke hat zuerst H. Fritzsche¹⁾ geliefert, der leider ein zwar recht umfangreiches, aber ganz kritiklos zusammengestelltes, inhomogenes Material benutzte, weshalb seinen Ergebnissen nur ein bedingter Wert zukommt. Eine Diskussion derselben gab L. Steiner²⁾, der dabei zugleich die Theorie durch die Berücksichtigung der Permeabilität des Erdkörpers erweiterte. Weitere Berechnungen verdankt man G. W. Walker³⁾ und W. van Bemmelen⁴⁾. Das verwandte Problem der auf die atmosphärischen Gezeitenströme zurückzuführenden lunaren Schwankung behandelten van Bemmelen⁴⁾ und S. Chapman⁵⁾, der die analytischen Entwicklungen Schusters etwas abänderte und darauf hinwies, daß die zwei bei dem solaren Phänomen stets in nahezu konstanter Verbindung auftretenden Faktoren — die räumliche Anordnung des atmosphärischen Stromsystems und diejenige der Ionisierung — bei der lunaren Variation einer verschiedenen Periodizität unterliegen und daher getrennt werden können.

Die nunmehr hinzukommende, eingangs erwähnte neue Berechnung von A. van Vleuten bezeichnet einen wesentlichen Fortschritt, indem sie sich auf ein streng homogenes und wohl definiertes Beobachtungsmaterial stützt. Wie es schon Schuster seinerzeit empfohlen hat, behandelt sie den täglichen Gang an magnetisch ruhigen Tagen, der gegenüber dem durch die Störungen beeinflussten mittleren Gange an allen Tagen ein physikalisch einheitliches Phänomen darstellt. (Wenigstens nahezu; der darin neben dem thermisch bedingten Hauptteil noch enthaltene solare Gezeiteinfluß und eine etwaige

1) Die tägliche Periode der erdmagnetischen Elemente. St. Petersburg 1902. Die jährliche und tägliche Periode der erdmagnetischen Elemente. Riga 1905.

2) Über die tägliche Variation der erdmagnetischen Kraft. Meteorol. Zeitschr. 1912, S. 417–428.

3) The diurnal variation of terrestrial magnetism. Proc. Roy. Soc. London (A) vol. 89, 1913, S. 379–392.

4) Kurz mitgeteilt in der zweiten der folgenden Arbeiten: Die lunare Variation des Erdmagnetismus. Meteorol. Zeitschr. 1912, S. 218–230. Berichtigung zu meiner Abhandlung über die lunare Variation des Erdmagnetismus. Ebenda 1913, S. 589–594. — Die Ungleichförmigkeit des Beobachtungsmaterials wird durch Reduktion auf gleiche Sonnenaktivität nach Möglichkeit eliminiert.

5) On the diurnal variation of the earth's magnetism produced by the moon and sun. Phil. Trans. Roy. Soc. 1913, Series A, vol. 213, S. 279–321. The moon's influence on the earth's magnetism. Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity 1914 vol. 19, S. 39–44.

1) The diurnal variation of terrestrial magnetism. With an appendix by H. Lamb, On the currents induced in a spherical conductor by variation of an external magnetic potential. Phil. Trans. Roy. Soc. London (1889) Series A, vol. 180, S. 467–518.

2) The diurnal variation of terrestrial magnetism. Phil. Trans. Roy. Soc. London (1908) Series A, vol. 208, S. 163–204.

magnetische Fernwirkung der Sonne dürfen ihrer Geringfügigkeit halber zunächst außer acht bleiben.) Noch wichtiger ist es wegen der nicht unbedeutenden Verschiedenheit des Ganges an den einzelnen ruhigen Tagen, daß durchaus nur simultane Beobachtungen verwendet, also an allen Stationen dieselben Tage genommen worden sind. Die benutzten Daten definieren somit einen bestimmten, tatsächlich während eines gewissen Zeitraums im Durchschnitt vorhandenen Zustand des magnetischen Gesamtfeldes der Erde. Verwendet wurden die nach internationaler Übereinkunft¹⁾ ausgewählten fünf ruhigsten Tage jedes Monats unter Beschränkung auf die Jahre 1906 bis 1908. Die Rechnung wurde getrennt für den Sommer und den Winter der nördlichen Halbkugel durchgeführt.

Die nachstehende Zusammenstellung enthält die Namen und die geographischen Koordinaten der 10 Stationen, von denen die benutzten Beobachtungen stammen. φ bezeichnet die nördliche Breite, λ die östliche Länge von Greenwich aus gezählt. Ich habe noch die entsprechenden Größen Φ und A in demjenigen Polarsystem hinzugefügt, das sich auf die magnetische Achse der Erde statt auf die Rotationsachse bezieht. Es ist also Φ das Komplement des Abstandes von dem Punkte $\varphi_0 \lambda_0$, nach dem die magnetische Achse gerichtet ist. Dabei wurde in runder Zahl $\varphi_0 = 78^\circ 30'$ $\lambda_0 = 291^\circ 30'$ angenommen. A ist wie λ nach Osten positiv gezählt, und zwar von dem den Punkt $\varphi_0 \lambda_0$ mit dem Südpol der Erde verbindenden Meridian aus.

Tabelle I.

	φ	λ	Φ	A
Pawlowsk . . .	59° 41'	30° 29'	56° 7'	116° 34'
Sitka	57 3	224 40	59 53	274 34
Irkutsk	52 16	104 19	40 50	174 12
De Bilt	52 6	5 11	53 52	88 51
Cheltenham . .	38 44	283 9	50 5	349 50
Zi-ka-wei . . .	31 12	121 26	19 51	189 2
Honolulu . . .	21 19	201 56	20 57	265 58
Bombay	18 54	72 49	9 48	143 7
Buitenzorg . .	6 35	106 47	18 3	175 4
Apia (Samoa-Obs.)	13 48	188 14	16 9	259 45

Es sei nun x die nach Norden, y die nach Osten gerichtete horizontale Komponente, Δx und Δy die tägliche Schwankung dieser Größen um ihren Mittelwert. Die vertikale Komponente,

die in der besprochenen Arbeit natürlich gleichfalls behandelt wird, ist für die vorliegende Frage ohne Bedeutung und darf daher hier außer acht bleiben.

Δx und Δy sind an jeder Station periodische Funktionen der Ortszeit t und demgemäß in der Form

$a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t + \dots$ darstellbar. Unter der in erster Näherung zutreffenden Annahme, daß die tägliche Variation an allen Punkten eines Parallelkreises denselben Verlauf nimmt, sind die Koeffizienten a und b , die hier bis zur 4. Ordnung benutzt werden, von λ unabhängig und nur Funktionen von φ oder seinem Komplement, dem Polabstande u . Man erhält daher die räumliche Gestaltung und Lage des Variationsfeldes im Augenblick τ nach Weltzeit (d. h. Ortszeit des Anfangsmeridians) ohne weiteres, indem man t durch seinen Wert $\tau + \lambda$ ersetzt. Da das Feld sich ohne Gestaltänderung dreht, genügt seine Berechnung für einen beliebigen Augenblick, etwa für $\tau = 0$. So erhält man den Ausdruck

$a_1 \cos \lambda + b_1 \sin \lambda + a_2 \cos 2\lambda + b_2 \sin 2\lambda + \dots$ dessen nur von u abhängige Koeffizienten nun noch als Funktionen dieser Größe darzustellen sind. Das geschieht am zweckmäßigsten in der Form einer Entwicklung nach Kugelfunktionen.

Besitzt nun das horizontale Teilfeld ein Potential, das mit R als dem Erdradius RH genannt werden möge, so gilt

$$\Delta x = \frac{\partial \Pi}{\partial u} \quad \Delta y = -\frac{1}{\sin u} \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda},$$

wenn man die jetzt gewöhnlich angewandte Vorzeichenwahl trifft. (Die Verfasserin benutzt, wohl in Anlehnung an Gauß, die entgegengesetzte Bezeichnungsweise.) Man kann danach Π sowohl aus Δx , wie aus Δy ableiten. Je nachdem, ob die beiden so erhaltenen Funktionen Π_x und Π_y innerhalb annehmbarer Fehlergrenzen übereinstimmen oder nicht, gewinnt man einen Anhalt zur Beantwortung der Frage nach der Existenz eines Potentials in dem einen oder dem andern Sinne. Setzt man Π in der Form an

$$\Pi = \Sigma (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos u),$$

worin über n von 1 an, über m von 0 bis n zu summieren ist, so folgt

$$\Delta x = \Sigma (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda) \frac{dP_n^m}{du}$$

$$\Delta y = -\Sigma (mh_n^m \cos m\lambda - mg_n^m \sin m\lambda) \frac{P_n^m}{\sin u}.$$

Beziehen sich also a' b' auf Δx und a'' b'' auf Δy , so erhält man zur Bestimmung der Koeffizienten g und h die je 10 Gleichungen (entsprechend den 10 Beobachtungspunkten) um-

1) Die namens der Internationalen Erdmagnetischen Kommission durch das Niederländische Meteorologische Institut besorgte Auswahl dieser Tage stützt sich auf die Angaben fast aller Magnetwarten. Näheres darüber findet man in dem Aufsatz: Die internationalen erdmagnetischen Charakterzahlen; Meteorol. Zeitschr. 1916, S. 481–492. In dieser Zeitschrift wird auch alljährlich die Liste der ruhigen Tage für das vorhergehende Jahr mitgeteilt.

fassenden, nach der Methode der kleinsten Quadrate aufzulösenden Gleichungssysteme¹⁾

$$\text{für } \Pi_x \begin{cases} a_m' = g_m \frac{dP_m^m}{du} + g_{m+1} \frac{dP_{m+1}^m}{du} + \dots \\ b_m' = h_m \frac{dP_m^m}{du} + h_{m+1} \frac{dP_{m+1}^m}{du} + \dots \end{cases}$$

$$\text{für } \Pi_y \begin{cases} b_m'' = g_m \frac{mP_m^m}{\sin u} + g_{m+1} \frac{mP_{m+1}^m}{\sin u} + \dots \\ -a_m'' = h_m \frac{mP_m^m}{\sin u} + h_{m+1} \frac{mP_{m+1}^m}{\sin u} + \dots \end{cases}$$

Macht man von vornherein die Voraussetzung, daß ein Potential besteht (wie es in den bisherigen Untersuchungen mit Ausnahme der Walkerschen geschehen ist), so sind einfach sämtliche Gleichungen mit g einerseits, mit h andererseits in je ein System zusammenzufassen. Dabei einen Gewichtsunterschied einzuführen, liegt wohl kein Grund vor.

Das Ergebnis der von A. van Vleuten in der angegebenen Weise durchgeführten Rechnung ist in der Tabelle (S. 353) zusammengestellt, deren Zahlen jedoch in zweifacher Hinsicht von den originalen abweichen. Zunächst sind dem zuvor Bemerkten zufolge alle Vorzeichen umgekehrt. Dann aber habe ich die Entwicklung nicht auf die von der Verfasserin benutzten, mit den Gaußschen $P_n^m(\cos u)$ ²⁾ übereinstimmenden Funktionen bezogen, sondern auf die davon durch einen konstanten Faktor unterschiedenen, von mir früher einmal vorgeschlagenen $R_m^n(\cos u)$, die für numerische Rechnungen zweckmäßiger sind und die Resultate in einer bequemeren und sichereren zu überschauenden Form liefern³⁾. Es ist, wenn a_m^n den von Heine in seinem Handbuch der Kugelfunktionen eingeführten Faktor

1) Die Funktionen Π_x und Π_y sind nicht ganz unabhängig voneinander. Da jede einzelne von ihnen an den Polen die dort herrschende Variationskraft nach Richtung und Größe vollständig bestimmt, so ist die Bedingung zu erfüllen, daß beide dort zu übereinstimmenden Werten führen. Es drückt sich dies durch die Beziehungen $a_1' = +b_1''$ und $a_1'' = -b_1'$ aus, wobei das obere Zeichen für den Nordpol ($u=0$), das untere für den Südpol ($u=\pi$) gilt. Diese vier streng zu erfüllenden Bedingungen sind also den oben angegebenen Gleichungssystemen hinzuzufügen.

2) $P_n^m(\cos u)$

$$= \sin u^m \left[\cos u^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} \cos u^{n-m-2} + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \cos u^{n-m-4} - \dots \right]$$

3) Abhandlungen der II. Kl. d. k. Ges. d. Wiss. in München 1895, XIX. Bd., I. Abt., S. 7. — Vgl. dazu eine Bemerkung von A. Schuster, Phil. Trans. Roy. Soc. London 1902, Series A, vol. 200, S. 202.

$$a_0^n = \frac{(2n-1)!!(2n-1)!!}{n!n!}$$

$$a_m^n = 2 \frac{(2n-1)!!(2n-1)!!}{(n+m)!(n-m)!} \text{ für } n > 0$$

bedeutet¹⁾

$$R_m^n(\cos u) = \sqrt{(2n+1)} a_m^n P_n^m(\cos u).$$

Durch diese Festsetzung wird bewirkt, daß der (hier, wie auch weiterhin stets) für die ganze Kugelfläche gebildete quadratische Mittelwert von $R_m^n \cdot \cos m\lambda$ sowohl wie der von $R_m^n \cdot \sin m\lambda$ (hier natürlich mit Ausnahme des Falles $m=0$) gleich 1, also durchgängig derselbe ist. In einer nach diesen Funktionen fortschreitenden Entwicklung ist somit der allgemeine Einfluß jedes Gliedes auf den Wert des ganzen Ausdrucks genau seinem Koeffizienten proportional. Bei Entwicklungen nach den P_n^m , die mit wachsendem n immer kleiner werden (der Maximalwert von $P_{1,1}$ ist 1, derjenige von $P_{7,1}$ nur 0,023), täuschen die großen Koeffizienten der höheren Glieder eine diesen gar nicht zukommende Bedeutung vor. In noch höherem Maße tritt das Umgekehrte und damit leicht eine bedenkliche Unterschätzung der höheren Glieder bei den Neumannschen Funktionen $P_{n,m}$ ein, die mit den von englischen Autoren meistens benutzten T_n^m identisch sind. (Der Höchstwert von $P_{1,1}$ ist 1, derjenige von $P_{6,6}$ beträgt 10395.)

Mit Rücksicht auf die bekannten Integraleigenschaften der Kugelfunktionen folgt ferner, daß der quadratische Mittelwert eines linearen Aggregats $c_1 K_1 + c_2 K_2 + \dots$, wenn $K_1, K_2, \dots$ beliebige voneinander verschiedene Funktionen $R_m^n \cdot \cos m\lambda$ und $R_m^n \cdot \sin m\lambda$ bezeichnen, gleich $\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + \dots}$ ist.

Der erste Blick auf die Tabelle zeigt nun, daß Π_x und Π_y keineswegs auch nur näherungsweise übereinstimmen. Ihre Differenz $\Pi_y - \Pi_x$ ist von derselben Größenordnung, wie sie selbst. Danach scheint kaum ein Zweifel daran möglich, daß in der Tat kein Potential besteht, ein Schluß, den auch die Verfasserin zieht, und den Walkers allerdings weniger eingehende und ein minderwertigeres Material benutzende Untersuchung bestätigt.

Die genauere Betrachtung der Zahlen ist durchaus geeignet, den ersten Eindruck noch

1) Hier ist die bequeme und oft recht nützliche, von A. Schuster (Phil. Trans. vol. 200, S. 182) eingeführte Schreibweise benutzt, nach der zufolge der Definition $n!! = n(n-2)!!$, für gerade oder ungerade positive Werte von n mit 2 oder 1 abbrechend,

$$n!! = n(n-2)(n-4)\dots$$

ist. Es folgt speziell $2!! = 2$, $1!! = 1$, $0!! = 1$ und ferner ist $(-2n)!! = \infty$, $(-2n-1)!! = (-1)^n (2n-1)!!$ für jedes ganze positive n .

Tabelle II.

	Sommer			Winter		
	Π_x	Π_y	$\Pi_y - \Pi_x$	Π_x	Π_y	$\Pi_y - \Pi_x$
g_1^1	0,98	3,70	2,72	-3,67	-0,77	2,90
h_1^1	-1,71	1,09	2,80	0,35	4,15	3,80
g_2^1	2,95	0,78	-2,17	3,43	0,56	-2,87
h_2^1	-0,47	-4,79	-4,32	-0,40	-6,16	-5,70
g_3^1	1,02	4,23	3,21	-0,22	4,34	4,56
h_3^1	0,20	3,66	3,46	0,11	4,56	4,45
g_4^1	-1,66	-2,80	-1,14	-1,38	-3,36	-1,98
h_4^1	0,35	-1,79	-2,14	0,08	-2,28	-2,36
g_2^2	-0,83	0,16	0,99	-0,26	1,55	1,81
h_2^2	2,25	1,73	-0,52	0,26	-0,80	-1,06
g_3^2	-1,90	-2,27	-0,37	-1,97	-3,08	-1,11
h_3^2	0,37	0,78	0,41	0,30	1,12	0,82
g_4^2	-0,22	-0,10	0,12	0,26	0,69	0,43
h_4^2	-0,08	0,07	0,15	-0,17	-0,32	-0,15
g_3^3	-0,12	-0,21	-0,09	0,25	-0,21	-0,46
h_3^3	-1,10	-0,76	0,34	-0,35	0,42	0,77
g_4^3	0,64	0,71	0,07	0,68	0,83	0,15
h_4^3	-0,32	-0,49	-0,17	-0,28	-0,61	-0,33
g_4^4	-0,01	0,13	0,14	-0,11	-0,14	-0,03
h_4^4	0,20	0,16	-0,04	0,23	0,11	-0,13

zu verstärken, da sie zeigt, daß $\Pi_y - \Pi_x$ einen systematischen Charakter besitzt. Zunächst fällt auf, daß es sich sowohl nach seiner allgemeinen (durch die gegenseitigen Verhältnisse und die Vorzeichen der Koeffizienten bestimmten) Form wie nach seinem Betrage in den beiden Halbjahren nahezu übereinstimmend ergibt, während Π_x und Π_y besonders gerade in den ersten, wichtigsten Gliedern im Sommer und Winter wesentliche Verschiedenheiten aufweisen.

Weiter zeigt sich, daß die Differenz $\Pi_y - \Pi_x$ mit wachsendem m nicht nur absolut, sondern auch relativ stark zurücktritt, mit andern Worten, daß sich die Abweichung vom wirbelfreien Zustande fast allein auf den durch $m=1$ gekennzeichneten gantztägigen Teil der täglichen Schwankung beschränkt. Es spricht sich das am deutlichsten in der folgenden, auf das Jahresmittel bezüglichen Gegenüberstellung der quadratischen Mittelwerte der einzelnen periodischen Bestandteile aus:

Tabelle III.

m	1	2	3	4
$\frac{1}{2}(\Pi_y + \Pi_x)$	5,44	2,56	0,95	0,17
$\frac{1}{2}(\Pi_y - \Pi_x)$	4,69	0,95	0,35	0,05

Beachtenswert erscheint schließlich, daß sich die gantztägigen Glieder mit großer Annäherung in einen sehr einfachen Ausdruck zusammenfassen lassen. Man kann dafür ausgleichend unter Übergang auf den Zeitpunkt t schreiben:

$$A_1 = c \cdot \sin(\lambda + t + 38^\circ, 0) (0,450 R_1^1 - 0,618 R_1^2 + 0,578 R_1^3 - 0,284 R_1^4),$$

mit $c=8,17$ im Sommer und $c=11,02$ im Winter. Der Faktor von c hat den quadratischen Mittelwert 1. Die Rückberechnung der Koeffizienten g und h hieraus liefert die folgenden, den beobachteten befriedigend nahe kommenden Werte:

$$\begin{aligned} \text{Sommer } g: & 2,26 \quad -3,11 \quad 2,91 \quad -1,43 \\ \text{„ } h: & 2,90 \quad -3,98 \quad 3,72 \quad -1,83 \\ \text{Winter } g: & 3,05 \quad -4,19 \quad 3,92 \quad -1,93 \\ \text{„ } h: & 3,91 \quad -5,36 \quad 5,02 \quad -2,47 \end{aligned}$$

Alles dieses — die beträchtliche Größe, die sehr einfache räumliche und zeitliche Gestaltung, die Übereinstimmung der Form in beiden Jahreszeiten, vielleicht sogar die etwas größere Intensität im Nordwinter, der Zeit der Sonniennähe — muß durchaus den Eindruck erwecken, daß hier ein großes einheitliches, die Erde als Ganzes beherrschendes Phänomen vorliegt, das die Ursache des aus den Beobachtungen erschlossenen magnetischen Wirbelfeldes in der Erdoberfläche bildet.

Damit entsteht die Frage nach der physikalischen Natur dieses Phänomens. Zwei Möglichkeiten bestehen. Entweder müssen elektrische Ströme die Erdoberfläche durchdringen, oder es müssen Verschiebungen elektrischer Ladungen stattfinden.

Im ersten Falle ergibt sich die Stromdichte zu

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{4\pi R} \cdot \frac{\partial^2 (\Pi_y - \Pi_x)}{\sin u \partial u \partial \lambda} \\ &= 1,25 \cdot 10^{-10} \frac{\partial^2 A_1}{\sin u \partial u \partial \lambda}, \end{aligned}$$

wenn von $\Pi_y - \Pi_x$ nur der Hauptteil A_1 in Betracht gezogen wird¹⁾. Mit $c=10 \gamma=0,0001 \Gamma$ ist dies im Mittel von der Größenordnung von $10^{-14} g^2 \text{ cm}^{-2} s^{-1}$ oder $10^{-13} \text{ Amp. : cm}^2$. Das ist etwa das Hundertfache der tatsächlich vorhandenen, aus den luftelektrischen Messungen erschlossenen Vertikalströme. Diese Erklärung ist also als quantitativ unzulässig zu verwerfen.

Im zweiten Falle hat man, da sowohl die Erdrinde wie die Atmosphäre in der Höhe elektrisch leitet, mit einer Doppelschicht zu rechnen, die im Raume feststehend relativ zur Erde rotiert und daher auf dieser im Zwischenraum ein magnetisches Feld hervorruft. Damit dieses mit

1) Die Einsetzung des oben für A_1 angegebenen Ausdrucks liefert für i an den Polen unendliche Werte. Es liegt dies daran, daß die dabei zugrunde liegenden Werte der g und h nicht der früher (S. 352 Anm. 1) angegebenen Bedingung genügen.

$\Pi_y - \Pi_x$ identisch sei, muß die Änderungsgeschwindigkeit der Flächendichtigkeit $\pm \varepsilon$ der beiden Belegungen

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{86400}{2\pi} \cdot \frac{1}{4\pi R} \cdot \frac{\partial^2 (\Pi_y - \Pi_x)}{\sin u \partial u \partial \lambda}$$

$$= 1,7 \cdot 10^{-6} \frac{\partial^2 A_1}{\sin u \partial u \partial t}$$

sein. (Der Zahlenfaktor beruht darauf, daß die Einheit von t gleich 86400:2 π Sekunden ist.) Hieraus folgt

$$\varepsilon = 1,7 \cdot 10^{-6} c \sin(\lambda + t + 380,0)$$

$$\sin u^{-1} \frac{d}{du} (0,450 R_1^1 - \dots).$$

Die äußersten Werte, zwischen denen ε im Laufe des Tages periodisch schwankt, sind demnach von der Größenordnung von $10^{-6} c$, d. i.

$$10^{-10} \frac{1}{g^2} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ oder } 10^{-9} \text{ Coulomb : cm}^2.$$

Bedenkt man, daß die dem beobachteten mittleren Potentialgefälle entsprechende Oberflächenladung der Erde nur eine Dichte von rund $5 \cdot 10^{-4}$ elektrostatischen Einheiten oder $1,7 \cdot 10^{-13}$ Coulomb auf 1 cm^2 besitzt, so erkennt man ohne weiteres, daß auch die zweite Erklärungsmöglichkeit versagt.

Das negative Ergebnis dieser Erwägungen, das mit den vorausgehenden empirischen Feststellungen im Widerspruch steht, nötigt dazu, diese einer erneuten, eingehenderen Prüfung zu unterziehen. Es liegt nahe, sich zu diesem Zwecke zunächst einmal einen Überblick über die Verteilung der Werte zu verschaffen, die $\Pi_y - \Pi_x$ auf der Erdoberfläche annimmt. Setzt man, mit p und q als Funktionen von u , die sich unmittelbar aus den früher für Π_x und Π_y aufgestellten Ausdrücken ergeben,

$$\Pi_y - \Pi_x = \Sigma (p_m \cos m\lambda + q_m \sin m\lambda),$$

so erhält man für die Koeffizienten p_1, q_1 des ganztägigen Teiles, auf den die Betrachtung nach dem Vorhergehenden beschränkt werden darf, die in der nachstehenden Tabelle zusammengestellten Werte, von denen die unter (Jahr) angegebenen der ausgeglichenen Darstellung (S. 353) entsprechen.

Der Anblick dieser Zahlen klärt den anscheinenden Widerspruch mit einem Schlage auf. Sie zeigen, daß die Differenz $\Pi_y - \Pi_x$ in dem ganzen von etwa $u = 30^\circ$ bis $u = 100^\circ$ reichenden Gebiete, aus dem die benutzten Beobachtungen stammen, klein ist und nur auf der südlichen Halbkugel hohe Werte besitzt. Dasselbe gilt natürlich von den ihr entsprechenden Anteilen in Δx und Δy , die durch

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} (\Pi_y - \Pi_x) \text{ und } -\frac{1}{2 \sin u} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\Pi_y - \Pi_x)$$

Tabelle IV.

u	Sommer		Winter		(Jahr)	
	p_1	q_1	p_1	q_1	p_1	q_1
0°	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
10	1,1	-1,6	0,1	-1,4	-0,5	-0,6
20	2,2	-2,4	0,6	-2,1	-0,6	-0,7
30	3,2	-2,0	1,4	-1,4	-0,1	-0,1
40	3,9	-1,0	2,2	-0,8	0,6	0,8
50	3,9	0,4	2,6	0,4	1,4	1,7
60	3,0	0,9	1,8	0,7	1,2	1,5
70	1,6	0,5	0,2	0,2	0,4	0,6
80	0,1	-0,4	-1,6	-0,7	-0,7	-0,8
90	-0,4	-0,7	-2,5	-0,6	-0,9	-1,1
100	0,4	0,5	-0,8	1,5	0,5	0,6
110	3,2	4,1	3,5	6,5	3,9	5,0
120	7,4	9,9	10,1	13,8	9,2	11,7
130	11,8	16,2	17,2	20,4	14,7	18,8
140	15,1	21,1	23,1	27,1	19,0	24,3
150	15,8	22,4	24,0	28,7	20,0	25,5
160	13,1	18,7	20,1	23,4	16,6	21,2
170	7,5	10,7	11,5	13,3	9,5	12,1
180	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

dargestellt werden, und deren Koeffizienten a_1 und b_1 danach ungefähr mit p_1 und q_1 gleichwertig sind. Zieht man zum Vergleich damit in Betracht, daß die aus Π_x und Π_y berechneten Koeffizienten a_1', b_1', a_1'', b_1'' von den beobachteten durchschnittlich um 1 bis 2%, vereinzelt noch merklich stärker abweichen, so hat man die für $u < 110^\circ$ gefundenen Werte von p_1, q_1 als sachlich bedeutungslos anzusehen; gehen sie ja doch dort nirgends über die durch die analytische Darstellung nicht erfaßten Beträge hinaus. Das heißt nichts anderes, als:

In dem Gebiete, aus dem allein Beobachtungen verwendet worden sind, stehen diese innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der Darstellung mit der Annahme eines Potentials im Einklang.

Da überdies die entgegengesetzte Annahme physikalisch unmöglich erscheint, so kann mit Sicherheit behauptet werden, daß das horizontale Variationsfeld bis auf einen etwaigen weit unter der bisherigen Beobachtungsschärfe liegenden Bruchteil wirbelfrei ist.

Man wird daher bei künftigen Untersuchungen über die tägliche Variation unbedenklich und zweckmäßigerweise wieder von vornherein ein Potential annehmen und demgemäß Δx und Δy zusammenfassend behandeln. Immerhin wäre es eine dankenswerte Aufgabe, die vorliegende Berechnung unter Hinzunahme der freilich sehr spärlichen und weniger vollkommenen Beobachtungen aus mittleren südlichen Breiten zu wiederholen. Dabei wäre auch die Stetigkeitsbedingung für die Pole zu berücksichtigen, was allein schon wahrscheinlich den mittleren Betrag von $\Pi_y - \Pi_x$ merklich verringern würde.

Kann die Frage hiernach als erledigt gelten, so verdient doch ein Punkt noch eine kurze Erörterung: die beträchtliche Größe und die annähernde zeitliche Konstanz der Koeffizienten von $\Pi_y - \Pi_x$. Gerade darauf als auf einen anscheinend für die Realität dieser Differenz sprechenden Umstand war ja zuvor hingewiesen worden. Die Erklärung liegt darin, daß die benutzte analytische Form der Darstellung nur eine rohe Annäherung gewährt und daß zugleich die Verteilung der gegebenen Funktionswerte über ein beschränktes Gebiet für die Ausgleichung sehr ungünstig ist. Die tägliche Variation ist zwar in erster Linie, aber doch nicht ausschließlich von der geographischen Breite abhängig; sie unterscheidet sich an verschiedenen Punkten desselben Parallelkreises recht merklich, und zwar scheinen dabei regellose lokale (oder wenigstens regionale) Einflüsse (die vielleicht mit der Leitfähigkeit und Permeabilität der Erdrinde zusammenhängen) eine Rolle zu spielen¹⁾. Die Theorie läßt aber auch einen systematischen, vom einfachen Winkel λ abhängigen und daher gerade die Koeffizienten a_1, b_1 beeinflussenden Anteil erwarten, den auch Schuster in seiner zweiten Arbeit behandelt hat. Dieser ist eine Folge davon, daß das primäre induzierende Magnetfeld nicht symmetrisch zur Rotationsachse der Erde angeordnet ist, sondern daß seine Achse nach dem früher erwähnten, vom Nordpol um $11\frac{1}{2}^\circ$ entfernten Punkte φ_0, λ_0 gerichtet ist. Man könnte diesem Umstande angenähert Rechnung tragen, wenn man als Argument u nicht $\frac{\pi}{2} - \varphi$, sondern $\frac{\pi}{2} - \Phi$,

besser noch einen gewissen Zwischenwert benutzte. Streng zu berücksichtigen ist er durch Hinzufügung entsprechender Glieder zu dem Potentialausdruck. Aber da dadurch die Zahl der zu bestimmenden Koeffizienten wächst, so wird die Ausgleichung noch ungünstiger, und man wird zu einer solchen formell strengeren Behandlung des Problems mit Erfolg erst dann übergehen können, wenn man zusammenhängende Beobachtungen von viel zahlreicheren und besser verteilten Stationen besitzt. (Es sei gestattet zu bemerken, daß mich dieser Umstand veranlaßt hat, eine längst geplante und mehrmals in Angriff genommene eigene Bearbeitung des Potentials der täglichen Variation immer wieder aufzuschieben.) Die Bearbeitung von Fritsche, die sich auf die Beobachtungen fast aller Observatorien stützt, verdankt es unzweifelhaft diesem Umstande, daß ihre Ergebnisse trotz der Zusammenfassung von ganz inhomogenem

Material ein im ganzen wohl zutreffendes Bild geben¹⁾.

Daß sowohl der hier besprochene Teil der Schwankung, wie auch die Außerachtlassung der Polbedingungen nur die vom einfachen Winkel abhängigen Glieder beeinflussen, macht es verständlich, daß in $\Pi_y - \Pi_x$ die Koeffizienten g_n^1, h_n^1 in der früher hervorgehobenen Weise gegenüber den übrigen g_n^m, h_n^m usw. vorherrschen.

1) Eine Abschätzung der aus der zu geringen Anzahl und schlechten Verteilung der erdmagnetischen Observatorien entspringenden Unsicherheit der Potentialberechnung habe ich in den Beiträgen zur Geophysik 3, 225 bis 246, 1898 gegeben.

(Eingegangen 6. April 1918.)

Vergleichung der mikroseismischen Bewegung in de Bilt, Potsdam und Pulkowa.

Von Otto Meißner.

Erfreulicherweise veröffentlichen jetzt immer mehr Erdbebenwarten auch ausführlichere Tabellen der kurzperiodischen mikroseismischen Bewegungen, da die Erkenntnis von der Wichtigkeit und Bedeutsamkeit dieser interessanten Erscheinung sich immer weiter verbreitet. So hat auch jetzt Herr van Dijk die mikroseismischen Bewegungen in de Bilt in der Zeit von Mitte April 1908 bis Ende 1915 herausgegeben. Leider hat er aber dabei nicht die wahren Bodenbewegungen angegeben, sondern die mikroseismischen Bewegungen in 4 Klassen nach der Stärke ihres Auftretens eingeteilt, und zwar bedeutet:

Klasse 0 = schwach = etwa $0 - 1\frac{1}{2} \mu$,
 „ 1 = mäßig = „ $1\frac{1}{2} - 5 \mu$,
 „ 2 = stark = „ $5 - 10 \mu$,
 „ 3 = heftig = „ über 10μ .

Da die Klassen von 0—2 eine fast lineare Skala der Bodenbewegung ergeben und die Klasse 3 verhältnismäßig selten vorkommt, habe ich geglaubt, ohne weiteres die Tageswerte zu Monatsmitteln und weiter zusammenfassen zu dürfen. Es scheint, zumal in der Meteorologie, noch immer nicht überall genügend beachtet zu werden, daß man Schätzungen doch nicht ohne weiteres mitteln kann, sondern erst nach Umwandlung in Größen, die eine exakte physikalische Bedeutung haben. — Wo für einen Tag 2 oder 3 Klassen angegeben waren, habe ich das Mittel genommen, also z. B. $1\frac{1}{2}$ für 0,1, $2\frac{1}{2}$ für 3, 2, 3 usw. Die folgende Tabelle I gibt die Monatsmittel.

Man sieht sofort, daß auch hier der von anderen Stationen her bekannte jährliche Gang vorliegt. Die Entwicklung ergibt, wenn $t = \frac{1}{2}$

1) Vgl. Archiv des Erdmagnetismus, Heft 1, S. 9. Potsdam 1903.

Tabelle I. Mikroseismische Bewegung in de Bilt.
(Klassenmittel.)

Jahr	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sep- tember	Oktober	No- vember	De- zember	Mittel
1908	—	—	—	—	0,74	0,37	0,18	0,32	0,58	0,68	1,15	1,37	—
1909	1,32	1,02	1,06	0,78	0,62	0,15	0,50	0,24	0,33	1,27	1,11	1,34	0,81
1910	1,58	1,66	0,84	0,88	0,53	0,28	0,45	0,34	0,35	0,82	1,50	1,53	0,90
1911	1,20	1,21	1,05	0,63	0,28	0,25	0,18	0,10	0,48	0,81	1,48	1,34	0,75
1912	1,24	1,40	1,20	0,60	0,39	0,48	0,13	0,63	0,70	0,92	1,16	1,48	0,86
1913	1,69	1,22	1,45	0,79	0,45	0,37	0,16	0,07	0,25	0,73	1,41	1,58	0,85
1914	1,19	1,53	1,30	0,83	0,71	0,25	0,39	0,55	0,94	0,60	1,07	1,85	0,93
1915	1,55	1,59	1,02	0,89	0,45	0,22	0,56	0,34	0,50	0,82	1,28	1,68	0,91
Mittel	1,40	1,38	1,13	0,77	0,52	0,30	0,32	0,32	0,52	0,83	1,27	1,52	0,86
m. F.	± 0,08	± 0,09	± 0,08	± 0,04	± 0,06	± 0,04	± 0,05	± 0,07	± 0,08	± 0,07	± 0,06	± 0,06	± 0,02

Tabelle II. Potsdam : de Bilt.

Jahr	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sep- tember	Oktober	No- vember	De- zember	Mittel
1913	0,64	0,75	0,50	0,67	0,82	0,76	0,19	0,86	0,83	1,78	0,99	0,67	0,81
1914	0,73	0,58	0,64	0,87	0,38	0,12	0,13	0,05	0,29	0,32	0,55	0,31	0,41
1915	0,36	0,29	0,23	0,22	0,11	0,45	0,23	0,09	0,56	0,63	0,37	0,16	0,31
Mittel	0,58	0,54	0,46	0,59	0,44	0,44	0,18	0,34	0,56	0,91	0,64	0,38	0,51
m. F.	± 0,11	± 0,14	± 0,12	± 0,19	± 0,20	± 0,18	± 0,03	± 0,27	± 0,16	± 0,44	± 0,18	± 0,15	± 0,05

Pulkowa (Komp. N) : de Bilt.

Jahr	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sep- tember	Oktober	No- vember	De- zember	Mittel
1912	0,69	0,41	0,42	0,80	0,64	0,21	(2,15)	0,41	0,54	0,68	0,81	0,51	
1913	0,54	1,02	0,58	0,69	0,64	0,89	0,75	(3,30)	1,36	0,87	0,82	0,70	
1914	0,82	0,61	0,35	0,81	0,60	0,84	—	—	—	—	—	—	
Mittel	0,68	0,68	0,45	0,77	0,63	0,59	(1,45)	(1,85)	0,95	0,78	0,82	0,60	

für Januar, = $1\frac{1}{2}$ für Februar usf. gesetzt wird, für die mikroseismische Bewegung in de Bilt in Klassengrößen c :

$$MsB = 0,86 + (0,627 \pm 0,036) \cos(30t - 11)^\circ + (0,039 \pm 0,045) \cos(60t - 312)^\circ.$$

Die Halbjahrsperiode ist nicht reell. Das mittlere Fehlerquadrat steigt sogar bei ihrer Einführung von 0,0112 auf 0,0128. Die Phase der Jahresperiode von 11° stimmt genau mit dem Mittel aus den 5 nord- und mitteleuropäischen Stationen Upsala, Hamburg, Göttingen, Potsdam und Graz überein. In wahre Bodenbewegungen umgerechnet, beträgt das Jahresmittel etwa $2,60 \mu$, die Konstante des jährlichen Gliedes $2,08 \mu$. Das sind Größen wie in der Küstenstation Hamburg: im Binnenlande ist die Stärke der mikroseismischen Bewegung nicht unerheblich geringer. Die durch die Umrechnung der Schätzungen in wahre Bodenbewegungen hineingekommene Unsicherheit dürfte daran nicht viel ändern. Das Verhältnis der Konstanten des jährlichen Gliedes zum Jahresmittel, hier also $2,08:2,60$, ist etwas kleiner als der Durchschnitt.

Nicht uninteressant ist eine Vergleichung der Monatsmittel von de Bilt mit anderen Stationen, als welche ich Potsdam und Pulkowa ausgewählt habe. Dabei kann es sich natürlich, da ich die Schätzungen van Dijks nicht in Bodenbewegung

umgewandelt habe, nicht um den Absolutwert der Quotienten, sondern nur um ihre Verhältnisse handeln. Bei der Vergleichung mit Potsdam fällt auf, daß die Werte der Quotienten von Mai 1914 ab ziemlich plötzlich erheblich kleiner werden. Es ist nicht leicht, zu entscheiden, worauf diese etwas auffällige Erscheinung zurückzuführen ist. Die Vergleichung mit Pulkowa kann keinen Aufschluß hierüber geben, da die Pulkowaer Beobachtungen seit dem Beginne des Weltkrieges nicht mehr an uns gelangt sind. Für 1913, leider das einzige Jahr für das Beobachtungen aller 3 Stationen vorliegen, stimmen die Werte der Quotienten Potsdam : de Bilt und Pulkowa : de Bilt, in Anbetracht ihrer Unsicherheiten, ziemlich gut überein. Es bleibt also nichts übrig, als die Werte zu nehmen, wie sie sind.

Abgesehen von den Sommermonaten, in denen die Intensität der mikroseismischen Bewegung sehr gering ist, der Quotient daher nur sehr unsicher herauskommt, ist ein Gang in den Monatswerten nicht zu erkennen. Das Abbe-Helmert'sche Kriterium ergibt für Potsdam als Wert des Verhältnisses $2A:B$, das theoretisch = 1 sein sollte, den Wert $1,43 \pm 0,30$; mit Rücksicht auf die großen mittleren Fehler der einzelnen Monatsmittel kann man hierin nichts Auffälliges erblicken. Also auch diese Methode zeigt, daß

die kurzperiodische mikroseismische Bewegung von Holland bis Rußland einen einheitlichen Charakter trägt, dem gegenüber die im einzelnen natürlich zahlreich vorhandenen, offenbar mehr oder weniger örtlich bedingten Verschiedenheiten sich schon im Mittel nur ganz weniger Jahre völlig herausheben.

Bereits früher¹⁾ habe ich gezeigt, daß sogar für Sibirien bzw. Nord- und Innerasien genau

1) Diese Zeitschr. 19, 1—2, 1918.

das gleiche gilt. Zwar geben Küstenstationen, wie die Bilt und Hamburg, absolut höhere Werte für die Stärke der mikroseismischen Bewegung, aber ob Küsten- oder Binnenlandsstation, der jährliche Gang ist überall ganz derselbe. Es müssen also große Teile der Erdkruste gleichzeitig in diese regelmäßigen Schwingungen versetzt werden, die sich nur je nach dem Untergrunde der Stationen mehr oder weniger stark bemerkbar machen.

Potsdam, Geodätisches Institut, 14. Mai 1918.

(Eingegangen 15. Mai 1918.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Die Resultate der geometrischen Strukturtheorien und die Ergebnisse der Analyse durch Röntgenstrahlen.

Von W. Voigt.

Spezieller Teil I. (Schluß.)

Nr. 21. Zusammengesetztes Rhomboedersystem.

Formel: $\mathcal{A}(3,0)$, $\mathcal{Q}_0(2,0)$, $a \pm \frac{1}{2}c$, c . Alle Achsen $\mathcal{A}$ tragen ebene Dreipunkte vom Typ Fig. 33', und zwar je drei durch ein Grunddreieck von den Seiten b verbundene Achsen in drei um $\frac{1}{2}c$ verschiedenen Höhen. Enantio-morphie kommt dabei ebensowenig zustande, wie in der analogen Nr. 17. Abhängige Achsen: $\mathcal{B}(3, \pm 1)$, $\mathcal{C}(3, \mp 1)$. Liegt $\mathcal{Q}_0$ in der Vertikal-ebene $\mathcal{AB}$, so ist damit in gleicher Höhe eine gleiche Achse $\mathcal{Q}_0'$ in der Ebene $\mathcal{AC}$ verbunden; ferner folgen in der um $\frac{1}{2}c$ höheren Ebene zwei zu $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{Q}'$ parallele Schraubenachsen $\mathcal{P}(2,1)$ und $\mathcal{P}'(2,1)$, weiter in der wiederum $\frac{1}{2}c$ höheren Ebene zwei mit $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{Q}'$ parallele und gleichartige Drehachsen durch $\mathcal{C}$ und $\mathcal{B}$, endlich im Abstand $\frac{1}{2}c$ von der ersten Ebene Wiederholung des dort Vorhandenen (Fig. 37). (Sch. $\mathcal{D}_3^0$.)

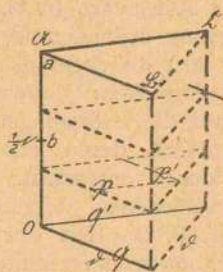


Fig. 37. (Nr. 21.)

Nr. 21a. Spiegelpunkt

- a) auf einer Vertikalachse im Schnittpunkt mit einer Querachse; (Sch. $\mathcal{D}_{3,d}^0$),

- b) ebenda mitten zwischen zwei derartigen Schnittpunkten. (Sch. $\mathcal{D}_{3,d}^6$.)

Nr. 22/23. Rechtes und linkes abwechselndes Dreipunktschraubensystem.

Formel: $\mathcal{A}(3, \pm 1)$, $\mathcal{Q}_a(2,0)$, a , c . Alle Achsen $\mathcal{A}$ tragen in gleichen Höhen gewundene Dreipunkte vom Typ Fig. 33". Abhängige Achsen: $\mathcal{B}(3, \pm 1)$, $\mathcal{C}(3, \mp 1)$. Ferner in den um $\frac{1}{2}c$ und $\frac{1}{2}c$ über der Grundebene liegenden Ebenen mit $\mathcal{Q}_a$ gleichartige Achsen $\mathcal{Q}_a'$ und $\mathcal{Q}_a''$ in um $\pm 60^\circ$ und $\pm 120^\circ$ dagegen gedrehten Stellungen; endlich in jeder dieser drei Ebenen zu den $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}'$, $\mathcal{Q}''$ parallele Schraubenachsen $\mathcal{P}_a(2,1)$, $\mathcal{P}_a'(2,1)$, $\mathcal{P}_a''(2,1)$ im Abstand $\pm a/\sqrt{3}$, die außerhalb des in Fig. 38 wiedergegebenen Prismas

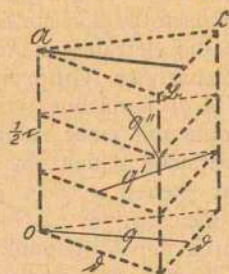


Fig. 38. (Nr. 22/23.)

fallen. Diese Anordnungen wiederholen sich in Ebenen mit dem Abstand $\frac{1}{2}c$. (Sch. $\mathcal{D}_3^1$ und $\mathcal{D}_3^2$.)

Nr. 24. Abwechselndes dreiseitiges Säulensystem.

Formel: $\mathcal{A}(3,0)$, $\mathcal{Q}_a(2,0)$, a , c . Alle Achsen $\mathcal{A}$ tragen zusammengesetzte ebene Dreipunkte vom Typ Fig. 33' in gleichen Höhen. Abhängige Achsen: $\mathcal{B}(3,0)$, $\mathcal{C}(3,0)$, dazu die bei Nr. 22/23 beschriebenen Querachsen $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{P}$, doch so, daß alle drei um $\pm 60^\circ$ und $\pm 120^\circ$ gegeneinander gedrehten Systeme in dieselbe Ebene fallen (Fig. 39). (Sch. $\mathcal{D}_3^3$.)

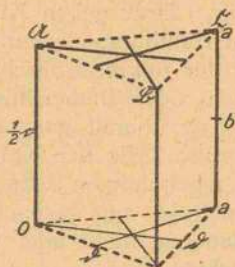


Fig. 39. (Nr. 24.)

Nr. 24 α . Spiegelpunkt

- a) auf einer Achse $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ im Schnittpunkt mit einer Ebene der $\mathfrak{Q}$; (Sch. $\mathfrak{D}_{3,a}^3$),
- b) ebenda mitten zwischen zwei Schnittpunkten. (Sch. $\mathfrak{D}_{3,d}^4$)

Nr. 24 β . Spiegelebene

- a) normal zu $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in einer Ebene der $\mathfrak{Q}$; (Sch. $\mathfrak{D}_{3,h}^3$),
- b) ebenso aber mitten zwischen zwei $\mathfrak{Q}$ -Ebenen (Sch. $\mathfrak{D}_{3,h}^4$)

Von den Typen der Abteilung IIIB haben die kristallographische Symmetrie $\{A_x^3, A_x^2\}$ die Nr. 18/19, 20, 21, 22/23 und 24; die Symmetrie $\{C, A_x^3, A_x^2\}$ die Nr. 20 α a und b, 21 α a und b, 24 α a und b, die Symmetrie $\{A_x^3, A_x^2, E_x\}$ die Nr. 20 β a und b, Nr. 24 β a und b.

IV. Klasse. Vierzählige Hauptachsen.

Wenn unter einer Schar paralleler Dreh- und Schraubenachsen die höchste Zähligkeit = 4 ist, so zerfallen die vierzähligen Achsen in zwei unter sich gleichartiger Gruppen, die durch $\mathfrak{A}(4, p)$ und $\mathfrak{B}(4, q)$ bezeichnet werden mögen. Ihre Schnittpunkte mit einer zu ihrer Richtung normalen Grundfläche bilden ein quadratisches Netz, und zwar stehen sich in jeder Masche Schnittpunkte gleichartiger Achsen diagonal gegenüber. Durch den Mittelpunkt der Masche geht eine zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ parallele zweizählige

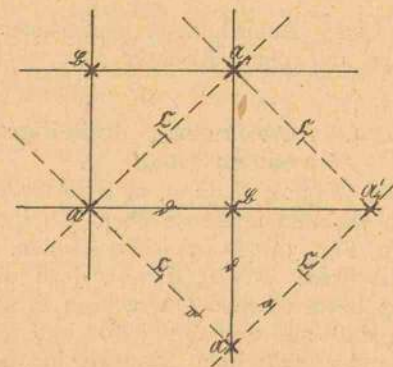


Fig. 40.

Achse, die $\mathfrak{C}(2, r)$ genannt werden mag. (Siehe Fig. 40, in der die Vier- und Zweizähligkeit durch vier- und zweispitzige Sterne angedeutet ist.)

Die Seiten der obigen quadratischen Maschen mögen δ , bzw. δ_1 und δ_2 bei $|\delta_1| = |\delta_2|$, heißen. Die gleichartigen Achsen (z. B. $\mathfrak{A}$) für sich geben in der Grundfläche ein zweites quadratisches Schnittpunktsnetz, dessen Maschen die Diagonalen des ersten Systems zu Seiten haben. Wir nennen dieselben α , bzw. α_1 und α_2 bei $|\alpha_1| = |\alpha_2|$; es gilt dann $\alpha = \delta_1 + \delta_2$. Um wenn nötig verschiedene Achsen $\mathfrak{A}$ eines Quadrats zu unterscheiden, sollen diejenigen der einen Seitenrichtung durch obere, die der anderen durch untere Indizes ausgezeichnet werden.

Außer den Grundstrecken δ bzw. α dient zur Charakteristik der Anordnung wie früher noch die Periode c parallel den Achsen. Ein quadratisches Prisma mit den Seiten α_1 , α_2 und c stellt in gewissem Sinne das Elementarbereich der Anordnung dar. —

Eine vierzählige Dreh- oder Schraubenachse läßt innerhalb der Periode c durch die entsprechende Deckbewegung aus einem Punkt (oder Atom) P weitere drei P' , P'' , P''' in um 90° , 180° , 270° gedrehten Meridianen entstehen. Im Falle der Drehachse (z. B. $\mathfrak{A}(4, 0)$) liegen diese vier Punkte alle in derselben (horizontalen) Ebene; im Falle der einfachen Schraubenachse (z. B. $\mathfrak{A}(4, \pm 1)$) liegen sie auf einer Schraube mit der Ganghöhe c , also z. B. in Höhen 0 , $\frac{1}{4}c$, $\frac{2}{4}c$, $\frac{3}{4}c$; im Falle der doppelten Schraubenachse [z. B. $\mathfrak{A}(4, 2)$] auf zwei Schraubenlinien mit der Ganghöhe $2c$, paarweise einander diametral gegenüber in den Höhen 0 und $\frac{1}{2}c$. Diese drei Arten von „Vierpunktern“ P, P', P'', P''' , welche kurz als eben, einfach und doppelt gewunden unterschieden werden mögen und durch die Fig. 41 veranschaulicht werden, sind die Elemente, aus denen sich die Anordnungen aufbauen, die auf den vorausgesetzten Scharen vierzähliger Achsen beruhen. Ein System von Punkten oder Atomen, das sich in bezug auf eine vierzählige Achsenart (z. B. $\mathfrak{A}$) in einer solchen Gruppierung ordnet, muß sich in bezug auf die andere (also $\mathfrak{B}$) ebenfalls in einer dieser Gruppierungen darstellen; außerdem muß es sich in bezug auf die zweizähligen Achsen $\mathfrak{C}$ in zwei Hälften sondern, deren jede für sich der Deckbewegung der $\mathfrak{C}$ entspricht.

Da die verschiedenen vierzähligen Achsen derselben Art (z. B. $\mathfrak{A}$) sich durch zwei- und vierzählige Deckbewegungen miteinander austauschen, so müssen die vier Meridiane durch die eine vierzählige Achse $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$, in denen die Punkte P, P', P'', P''' liegen, für alle Achsen $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ einander parallel sein. Bezeichnet man aber die in parallelen Meridianen gelegenen Punkte mit

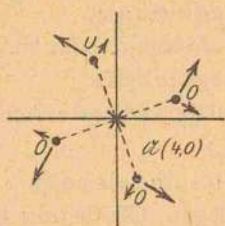


Fig. 41'.

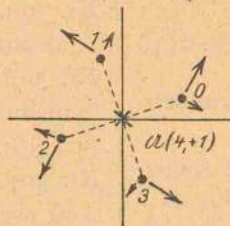


Fig. 41''.

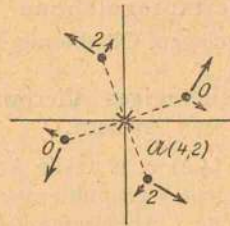


Fig. 41'''.

demselben Symbol, so können die gleichen P bei verschiedenen Achsen derselben Art in verschiedener Höhe liegen; denn wenn die Achsenart $\mathcal{C}$ Schraubencharakter hat, so ist mit der Drehung um sie eine Schiebung parallel der Achse im Betrage $\frac{1}{2}c$ verbunden. Hieraus ergibt sich, daß je nach Umständen (außer der Periode c) a oder aber $a + \frac{1}{2}c$ eine Deck-schiebung des Systems sein wird.

Mit dem vorstehend beschriebenen System von Vertikalachsen können Querdreh- und schraubenachsen verbunden sein, deren Deckbewegungen natürlich wieder alle Vertikalachsen mit gleichartigen austauschen müssen. Fig. 42 veranschaulicht die Wirkung der Kombination einer Vertikalachse $\mathcal{A}(4,1)$ bzw. $\mathcal{A}(4,2)$ mit einer sie schneidenden Querdrehachse $\mathcal{Q}(2,0)$. Der Fall einer Achse $\mathcal{A}(4,0)$ folgt aus ersterem durch Vertauschung der Ziffern 0, 1, 2, 3 mit 0, 0, 0, 0. Liegt $\mathcal{Q}$ um h über der 0-Ebene, so $0', 1', 2', 3'$ um $2h$ über 0, 1, 2, 3. Die bez. drei Typen können als ebene, einfach- und doppeltgewundene, zusammengesetzte oder doppelte Vierpunkter bezeichnet werden. Keine dieser Anordnungen hat eine Symmetrie-

ebene, weil die Atomlagen $\bullet \rightarrow$ und $\circ \rightarrow$

sich nicht spiegelbildlich entsprechen. Schneidet die Querachse die Vertikalachse $\mathcal{A}$ nicht, so fallen die Atome $0', 1', 2', 3'$ auf eine andere Achse als 0, 1, 2, 3; es entstehen in diesem Falle also nicht zusammengesetzte Atomsysteme, sondern eine verdoppelte Anzahl einfacher Vierpunkter.

Spiegelpunkte β , Spiegel- und Gleitspiegelebenen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{G}$ müssen, ebenso wie Querachsen, alle

Vertikalachsen mit gleichartigen austauschen. Kombinationen dieser Elemente zweiter Art mit enantiomorphen Anordnungen kommen nach S. 245 nicht in Betracht. Das Hineinfallen einer Achse $\mathcal{A}(4, p)$ in eine Spiegelebene ist nur im Falle $p=0$ oder $p=2$ zulässig. Die Wirkung der letzteren Kombination wird durch Fig. 43 veranschaulicht. Fällt die Achse nicht in die Spiegelebene, so entstehen zwei getrennte einfache Vierpunkter; Gleiches gilt stets bei Einführung einer Gleitspiegelebene.

Abteilung A. Ohne Querachsen.

Nr. 25/26. Rechtes und linkes Vierpunktschraubensystem.

Formel: $\mathcal{A}(4, \pm 1)$, a , c . Alle Achsen tragen einfach gewundene Vierpunkter des Typs Fig. 41'' in gleichen Höhen. Abhängige Achsen: $\mathcal{B}(4, \pm 1)$, $\mathcal{C}(4, \pm 1)$. Zwei enantiomorphe Anordnungen. (Sch. $\mathcal{C}_4^+$ und $\mathcal{C}_4^-$.)

Nr. 27. Vierzähliges Gegenschraubensystem.

Formel: $\mathcal{A}(4, \pm 1)$, $a + \frac{1}{2}c$, c . Alle Achsen $\mathcal{A}$ tragen einfach gewundene Vierpunkter, aber $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1'$ in einer Höhendifferenz $\frac{1}{2}c$ gegen $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_2'$. Abhängige Achsen: $\mathcal{B}(4, \mp 1)$, $\mathcal{C}(2, 0)$. Die $\mathcal{B}$ haben also in jedem Falle den entgegengesetzten Schraubungssinn, wie die $\mathcal{A}$. (Sch. $\mathcal{C}_4^0$.)

Nr. 27a. Spiegelpunkt

a) auf einer Geraden mitten zwischen zwei nächsten Achsen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. (Sch. $\mathcal{C}_{4,h}^6$.)

Nr. 27b. Spiegelebene

a) normal zu einer Ebene benachbarter $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ und in der Mitte zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. (Sch. $\mathcal{C}_{4,v}^0$.)

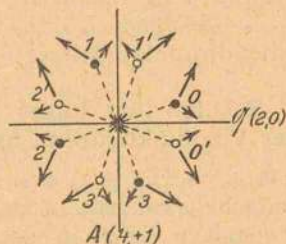


Fig. 42'.

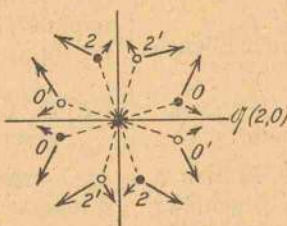


Fig. 42''.

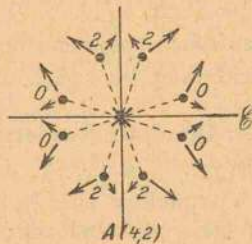


Fig. 43.

Nr. 27γ. Gleitspiegelebene

- a) ebenso gelegen, Gleitbetrag $\frac{1}{2}c$. (Sch. $\mathbb{C}_{4,v}^{10}$)

Nr. 28. Zweigängiges Vierpunktschraubensystem.

Formel: $\mathbb{A}(4,2)$ a, c. Alle Achsen $\mathbb{A}$ tragen doppelt gewundene Vierpunkter vom Typ Fig. 41''' in gleicher Höhe. Abhängige Achsen: $\mathbb{B}(4,2)$, $\mathbb{C}(2,0)$. (Sch. $\mathbb{C}_4^3$)

Nr. 28α. Spiegelpunkt

- a) auf irgendeiner Achse $\mathbb{A}$ oder $\mathbb{B}$; (Sch. $\mathbb{C}_{4,h}^3$),
 b) auf einer Geraden mitten zwischen zwei benachbarten $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$, beliebig gelegen. (Sch. $\mathbb{C}_{4,h}^4$)

Nr. 28β. Spiegelebene

- a) durch zwei benachbarte $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$; (Sch. $\mathbb{C}_{4,v}^3$),
 b) mitten zwischen zwei benachbarten Ebenen $\mathbb{A}\mathbb{B}$. (Sch. $\mathbb{C}_{4,v}^4$)

Nr. 28γ. Gleitspiegelebene

- a) durch zwei benachbarte Achsen $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$, Gleitbetrag $\frac{1}{2}c$; (Sch. $\mathbb{C}_{4,v}^5$),
 b) mitten zwischen zwei benachbarten Ebenen $\mathbb{A}\mathbb{B}$; Gleitbetrag $\frac{1}{2}c$. (Sch. $\mathbb{C}_{4,v}^6$)

Nr. 29. Quadratsäulensystem.

Formel: $\mathbb{A}(4,0)$, a, c. Alle Achsen $\mathbb{A}$ tragen ebene Vierpunkter vom Typ Fig. 41' in gleicher Höhe. Abhängige Achsen: $\mathbb{B}(4,0)$, $\mathbb{C}(2,0)$. (Sch. $\mathbb{C}_4^1$)

Nr. 29α. Spiegelpunkt

- a) auf einer Achse $\mathbb{A}$ oder $\mathbb{B}$; (Sch. $\mathbb{C}_{4,h}^1$),
 b) auf einer Geraden mitten zwischen zwei benachbarten $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$. (Sch. $\mathbb{C}_{4,h}^3$)

Nr. 29β. Spiegelebene

- a) durch zwei benachbarte Achsen $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$; (Sch. $\mathbb{C}_{4,v}^1$),
 b) mitten zwischen zwei benachbarten Ebenen $\mathbb{A}\mathbb{B}$. (Sch. $\mathbb{C}_{4,v}^2$)

Nr. 29γ. Gleitspiegelebene

- a) durch zwei benachbarte $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$, Gleitbetrag $\frac{1}{2}c$; (Sch. $\mathbb{C}_{4,v}^5$),
 b) mitten zwischen zwei benachbarten Ebenen $\mathbb{A}\mathbb{B}$; Gleitbetrag $\frac{1}{2}c$. (Sch. $\mathbb{C}_{4,v}^6$)

Nr. 30. Quadratoktaedersystem.

Formel: $\mathbb{A}(4,0)$, $a + \frac{1}{2}c$, c. Alle Achsen $\mathbb{A}$ tragen ebene Vierpunkter aber $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}'$ gegenüber $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}'$ in um $\frac{1}{2}c$ verschiedener Höhe. Abhängige Achsen: $\mathbb{B}(4,2)$, $\mathbb{C}(2,1)$. (Sch. $\mathbb{C}_4^5$)

Nr. 30α. Spiegelpunkt

- a) auf einer Achse $\mathbb{A}$ oder $\mathbb{B}$. (Sch. $\mathbb{C}_{4,h}^5$)

Nr. 30β. Spiegelebene

- a) durch zwei benachbarte Achsen $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$. (Sch. $\mathbb{C}_{4,v}^{11}$)

Nr. 30γ. Gleitspiegelebene

- a) ebenso gelegen; Gleitbetrag $\frac{1}{2}c$. (Sch. $\mathbb{C}_{4,v}^{12}$)

Von den Typen dieser Abteilung haben die kristallographische Symmetrie $\{A_x^4\}$ die Nr. 25/26, 27, 28, 29, 30; die Symmetrie $\{C, A_x^4\}$ die Nr. 27α, 28α, a und b, 29α, a und b, 30α; die Symmetrie $\{A_x^4, E_x\}$ die Nr. 27β, 27γ, 28β, a und b, 28γ, a und b, 29β, a und b, 29γ, a und b, 30β und 30γ.

Abteilung B. Mit Querachsen.

Die Querachsen liegen entweder so, daß die Achsen $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ durch die Umklappung in sich selbst zur Deckung kommen, oder daß sie ausgetauscht werden. Der erste Fall tritt ein, wenn sich die Querachsen in dem Schnittpunktnetz Fig. 40 auf die Verbindungslinien a oder b zwischen benachbarten Achsen $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}$ bzw. $\mathbb{B}$, $\mathbb{B}$ oder $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ projizieren, der zweite, wenn dies auf die Verbindungslinien zwischen benachbarten Achsen $\mathbb{C}$ stattfindet. Bezüglich der durch die Kombination von Querachsen mit vierzähligen Vertikalachsen entstehenden Atomkombinationen ist Orientierendes S. 359 gesagt. Die Einführung von Spiegel- und Gleitspiegelebenen kommt bei derartigen Systemen als selbständige Deckoperation nicht in Betracht, da hier der Spiegelpunkt alle möglichen derartigen Symmetrien beiläufig erzeugt.

Die figürlichen Darstellungen der Achsensysteme in dieser Abteilung geben jederzeit eine prismatische Zelle zwischen zwei Achsen $\mathbb{A}$ und zwei $\mathbb{B}$, d. h. also von den Grundkanten b, und der Höhe $\frac{1}{2}c$ wieder, die ein Achtel des Elementargebiets darstellt. Die Grundfläche ist in die Höhe einer Querachse gelegt, eine Achse $\mathbb{A}$ nach vorn; der vordere untere Eckpunkt o spielt einigermaßen die Rolle des Koordinatenanfanges. Im Interesse der Übersichtlichkeit sind Achsen vom Charakter (2,1) gestrichelt (— — —), solche vom Charakter (4,1) strichpunktirt (— · — · —), endlich solche vom Charakter (4,2) strichdoppelpunktirt (— · · — · · —).

Nr. 31/32. Rechtes und linkes zusammengesetztes Vierpunktschraubensystem.

Formel: $\mathbb{A}(4, \pm 1)$, $\mathbb{D}_2(2,0)$, a, c. Alle Achsen $\mathbb{A}$ tragen einfach gewundene zusammengesetzte Vierpunkter vom Typ Fig. 42 in gleichen Höhen. Abhängige Achsen: $\mathbb{B}(4, \pm 1)$, $\mathbb{C}(2,1)$. Zu der

durch den o-Punkt gelegten Querachse $\mathcal{D}_b(2,0)$ gibt es eine parallele gleichartige im Abstand b ; zwischen den Gliedern eines Paares liegt je eine zweizählige Schraubenachse $\mathcal{P}_b'(2,1)$. Dies so charakterisierte Tripel wiederholt sich in einer Ebene in der Höhe $\frac{1}{2}c$ über der Grundfläche, außerdem um 90° gedreht in der Höhe $\frac{1}{4}c$. In den Zwischenebenen in den Höhen $\frac{1}{8}c$ und $\frac{3}{8}c$ liegt je eine um $\pm 45^\circ$ gegen die vorigen gedrehte Querachse $\mathcal{D}_a(2,0)$, deren Projektion auf die

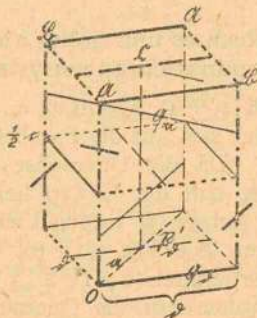


Fig. 44. (Nr. 31/32.)

Grundfläche in eine Strecke a fällt. Die Orientierung dieser Achsen ist für das rechte und das linke System verschieden. Gleiche Achsen liegen beiderseits der gezeichneten in den Abständen $\pm \frac{1}{2}a$; sie gehen durch die vertikalen Kanten der in der Fig. 44 wiedergegebenen Zelle und sind durch kurze Linien angedeutet. (Sch. $\mathcal{D}_i^3$ und $\mathcal{D}_i^4$.)

Nr. 33. Zusammengesetztes vierzähliges Gegenschraubensystem.

Formel: $\mathcal{A}(4, \pm 1)$, $\mathcal{D}_b(2,0)$, $a + \frac{1}{2}c$, c . Alle Achsen $\mathcal{A}$ tragen einfach gewundene zus. Vierpunkter vom Typ Fig. 42, aber $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}'$ um $\frac{1}{2}c$ verschiedener Höhe. Abhängige Achsen: $\mathcal{B}(4, \mp 1)$, $\mathcal{C}(2,0)$. Ferner eine mit $\mathcal{D}_b(2,0)$ gleichartige parallele Achse im Abstand b , und normal zu beiden, durch $\mathcal{C}$ hindurchgehend, eine Schraubenachse $\mathcal{P}_b'(2,1)$. Wiederholung dieses Systems in der Höhe $\frac{1}{2}c$, dazu in um 90° gedrehter Stellung in der Höhe $\frac{1}{4}c$. Endlich eine um $\pm 45^\circ$ gedrehte zweite Schar von Querachsen $\mathcal{D}_a(2,0)$ und $\mathcal{P}_a(2,1)$ in den Ebenen in der Höhe $\frac{1}{8}c$ und $\frac{3}{8}c$. In Fig. 45 sind wieder nicht nur die im Innern der wiedergegebenen prismatischen Zelle verlaufenden Achsen dargestellt, sondern auch die durch deren vertikale Kanten gehenden durch kurze Linien angedeutet. In Übereinstimmung mit den Vorzeichen in $\mathcal{A}(4, \pm 1)$, $\mathcal{B}(4, \mp 1)$ kommt dem Achsensystem kein Drehungssinn zu. (Sch. $\mathcal{D}_i^{10}$.)

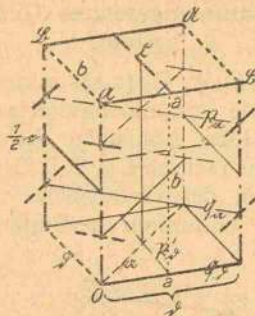


Fig. 45. (Nr. 33.)

Nr. 33a. Spiegelpunkt

- a) auf einer Geraden mitten zwischen zwei benachbarten $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ im Schnittpunkt mit einer Querachse $\mathcal{D}(2,0)$; (Sch. $\mathcal{D}_{4,h}^{19}$.)
- b) auf derselben Geraden mitten zwischen zwei Querachsen $\mathcal{D}(2,0)$. (Sch. $\mathcal{D}_{4,h}^{20}$.)

Nr. 34. Zusammengesetztes zweigängiges Vierpunktschraubensystem.

Formel: $\mathcal{A}(4,2)$, $\mathcal{D}_b(2,0)$, a , c . Alle Achsen $\mathcal{A}$ tragen doppelt gewundene zus. Vierpunkter in gleichen Höhen. Abhängige Achsen: $\mathcal{B}(4,2)$, $\mathcal{C}(2,0)$. Die Querachsen sind dieselben, wie bei Nr. 31/32, aber alle $\mathcal{D}_b(2,0)$ und $\mathcal{P}_b'(2,1)$ liegen in der Grundebene und der davon um $\frac{1}{2}c$ entfernten Ebene, alle $\mathcal{D}_a(2,0)$ in der Ebene mitten zwischen diesen beiden (Fig. 46). (Sch. $\mathcal{D}_i^6$.)

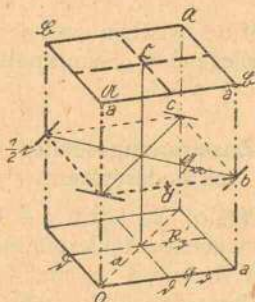


Fig. 46. (Nr. 34.)

Nr. 34a. Spiegelpunkt

- a) auf einer der Achsen $\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$ in dem Schnittpunkt mit einer Querachse $\mathcal{D}_b$; (Sch. $\mathcal{D}_{4,h}^9$.)
- b) ebenso im Schnittpunkt mit einer Querachse $\mathcal{D}_a$; ($\mathcal{D}_{4,h}^{10}$.)
- c) im Schnittpunkt einer Querdrehachse $\mathcal{D}_b$ mit einer Querschraubenachse $\mathcal{P}_b'$; (Sch. $\mathcal{D}_{4,h}^{11}$.)
- d) in der Mitte zwischen zwei übereinanderliegenden Lagen c . (Sch. $\mathcal{D}_{4,h}^{12}$.)

Nr. 35. Zusammengesetztes Quadratsäulensystem.

Formel: $\mathcal{A}(4,0)$, $\mathcal{D}_b(2,0)$, a, c . Alle Achsen $\mathcal{A}$ tragen ebene zusammengesetzte Vierpunkter in derselben Höhe. Abhängige Achsen: $\mathcal{B}(4,0)$, $\mathcal{C}(2,0)$; alle Querachsen $\mathcal{D}_b$, $\mathcal{B}_b'$, $\mathcal{D}_a$, von Nr. 34, die jetzt nur in der Grundebene und der davon um $\frac{1}{2}c$ entfernten verlaufen (Fig. 47). (Sch. $\mathcal{D}_i^1$.)

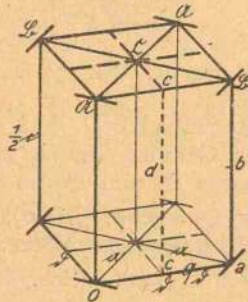


Fig. 47. (Nr. 35.)

Nr. 35a. Spiegelpunkt

- auf einer Achse $\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$ im Schnittpunkt mit einer Querachse $\mathcal{D}_a$; (Sch. $\mathcal{D}_{4,h}^1$),
- in der Mitte zwischen zwei übereinanderliegenden derartigen Schnittpunkten; (Sch. $\mathcal{D}_{4,h}^2$),
- im Schnittpunkt einer Drehachse $\mathcal{D}_b(2,0)$ mit einer Schraubenachse $\mathcal{B}_b(2,1)$; (Sch. $\mathcal{D}_{4,h}^3$),
- in der Mitte zwischen zwei derartigen übereinanderliegenden Schnittpunkten. (Sch. $\mathcal{D}_{4,h}^4$.)

Nr. 36. Zusammengesetztes Quadrat-oktaedersystem.

Formel: $\mathcal{A}(4,0)$, $\mathcal{D}_b(2,0)$, $a + \frac{1}{2}c$, c . Alle Achsen $\mathcal{A}$ tragen ebene zus. Vierpunkter, aber $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ gegenüber $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}'$ in um $\frac{1}{2}c$ abweichender Höhe. Abhängige Achsen: $\mathcal{B}(4,2)$, $\mathcal{C}(2,1)$; dazu Querachsen wie bei Nr. 33, doch mit der Abweichung, daß die Systeme der $\mathcal{D}_a$ und $\mathcal{B}_a$ in

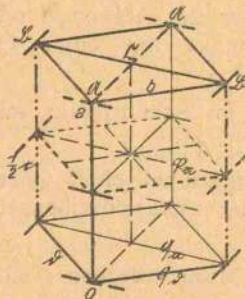


Fig. 48. (Nr. 36.)

denselben Ebenen liegen wie die $\mathcal{D}_b$ und $\mathcal{B}_b$, also außer der Grundebene nur die Ebenen in der Höhe $\frac{1}{4}c$ und $\frac{3}{4}c$ besetzt sind (Fig. 48). (Sch. $\mathcal{D}_i^3$.)

Nr. 36a. Spiegelpunkt

- auf einer Achse $\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$ im Schnittpunkt mit einer Achse $\mathcal{D}_b$; (Sch. $\mathcal{D}_{4,h}^{17}$),
- auf einer Achse $\mathcal{D}_b$ mitten zwischen zwei Schnittpunkten mit Achsen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. (Sch. $\mathcal{D}_{4,h}^{18}$.)

Nr. 37/38. Rechtes und linkes abwechselndes Vierpunktschraubensystem.

Formel: $\mathcal{A}(4, \pm 1)$, $\mathcal{D}_b'(2,0)$, a, c . Die Querachse projiziert sich auf die Parallele zu b durch die Achse $\mathcal{C}$. Da die Querachse keine Achse $\mathcal{A}$ schneidet, so tritt der S. 359 hervorgehobene Fall ein: die Achsen $\mathcal{A}$ tragen Vierpunkter von dem einfachen Typ Fig. 41'' ($0, 1, 2, 3$), die Achsen $\mathcal{B}$ Vierpunkter ($0', 1', 2', 3'$), die daraus durch Umklappen um die Querachse $\mathcal{D}_b'$ entstehen. Abhängige Achsen: $\mathcal{B}(4, \pm 1)$, $\mathcal{C}(2,1)$. Der Querachse $\mathcal{D}_b'$ parallel liegen in der Grundebene zwei Schraubenachsen $\mathcal{B}_b(2,1)$ im Abstand $\pm \frac{1}{2}b$; diese Gruppe wiederholt sich in der um $\frac{1}{2}c$ darüber liegenden Ebene in paralleler, in der um $\frac{1}{2}c$ höheren in gekreuzter Orientierung. In den Zwischenebenen in der Höhe $\frac{1}{8}c$ und $\frac{3}{8}c$ liegen Schraubenachsen $\mathcal{B}_a'(2,1)$ beiderseits der Diagonalen a in den Abständen $\pm \frac{1}{4}a$, und zwar in den beiden Ebenen gegeneinander gekreuzt (Fig. 49, wo $\mathcal{D}_b$ statt $\mathcal{D}_b'$ steht). Das System hat Drehungssinn. (Sch. $\mathcal{D}_i^1$ und $\mathcal{D}_i^2$.)

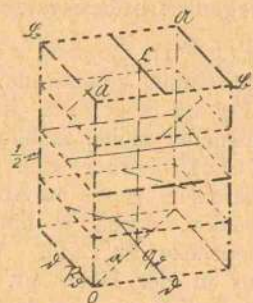


Fig. 49. (Nr. 37/38.)

Nr. 39. Abwechselndes zweigängiges Vierpunktschraubensystem.

Formel: $\mathcal{A}(4,2)$, $\mathcal{D}_b'(2,0)$, a, c . Die Querachse $\mathcal{D}_b'$ liegt wie im vorigen Fall und wirkt analog. Die Achsen $\mathcal{A}$ tragen einfache Vierpunkter vom Typ Fig. 41''' ($0, 2, 0, 2$), die Achsen $\mathcal{B}$ die daraus durch Umklappen um $\mathcal{D}_b'$ entstehenden ($0', 2', 0', 2'$). Abhängige Achsen: $\mathcal{B}(4,2)$, $\mathcal{C}(2,0)$. Von den Querachsen

sind alle Arten $\mathfrak{D}_b'$ und $\mathfrak{P}_b$ jetzt in der Grundfläche und der dazu parallelen Ebene im Abstand $\frac{1}{2}c$ vereinigt, ebenso alle $\mathfrak{P}_a'$ in der Zwischenebene in der Höhe $\frac{1}{2}c$ (Fig. 50). (Sch. $\mathfrak{D}_4^9$.)

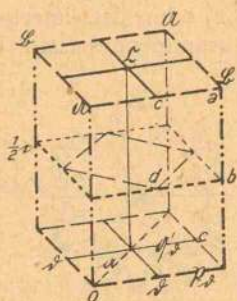


Fig. 50. (Nr. 39.)

Nr. 39a. Spiegelpunkt

- auf einer Achse $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ im Schnittpunkt mit einer Querschraubenachse $\mathfrak{P}_b$; (Sch. $\mathfrak{D}_{4,h}^{13}$),
- ebenda in der Höhe der Achsen $\mathfrak{P}_a'$; (Sch. $\mathfrak{D}_{4,h}^{14}$),
- im Schnittpunkt einer Achse $\mathfrak{D}_b'$ und $\mathfrak{P}_b$; (Sch. $\mathfrak{D}_{4,h}^{15}$),
- mitten zwischen zwei derartigen übereinanderliegenden Schnittpunkten. (Sch. $\mathfrak{D}_{4,h}^{16}$.)

Nr. 40. Abwechselndes Quadratsäulensystem.

Formel: $\mathfrak{A}(4,0)$, $\mathfrak{D}_b'(2,0)$, a , c ; die Verhältnisse sind denen der beiden vorhergehenden Fälle analog; die Achsen $\mathfrak{A}$ tragen einfache ebene Vierpunkter vom Typ Fig 41' (0, 0, 0, 0), die $\mathfrak{B}$ die daraus durch Umklappen um $\mathfrak{D}_b'$ entstehenden (0', 0', 0', 0'). Abhängige Achsen: $\mathfrak{B}(4,0)$, $\mathfrak{C}(2,0)$; ferner alle Querachsen der vorigen Nummer in der Grundfläche und der ihr im Abstand $\frac{1}{2}c$ parallelen vereinigt (Fig. 51). (Sch. $\mathfrak{D}_4^9$.)

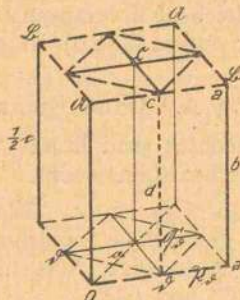


Fig. 51. (Nr. 40.)

Nr. 40a. Spiegelpunkt

- auf einer Achse $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ im Schnittpunkt mit einer Querachse $\mathfrak{P}_b$; (Sch. $\mathfrak{D}_{4,h}^5$),

- ebenda mitten zwischen zwei übereinanderliegenden Schnittpunkten; (Sch. $\mathfrak{D}_{4,h}^6$),
- im Schnittpunkt einer Achse $\mathfrak{D}_b'$ und einer $\mathfrak{P}_b$; (Sch. $\mathfrak{D}_{4,h}^7$),
- mitten zwischen zwei solchen übereinanderliegenden Schnittpunkten. (Sch. $\mathfrak{D}_{4,h}^8$.)

Von den Typen der Abteilung IVB haben die kristallographische Symmetrie $\{A_x^4, A_x^2\}$ die Nr. 31—40, die Symmetrie $\{C, A_x^4, A_x^2\}$ die Nr. 31a—40a.

V. Klasse. Sechszählige Hauptachsen.

Sechszählige Dreh- oder Schraubenachsen treten ausschließlich zu mehreren parallelen gleichartigen auf, die eine zu ihnen normale Grundfläche in einem gleichseitig dreieckigen Netz von Punkten schneiden. Wir stellen diese Achsen $\mathfrak{A}(6, \rho)$ wieder vertikal, legen die Grundfläche also horizontal und bezeichnen die Seiten der Grunddreiecke durch a , — falls zwei benachbarte mit ihren verschiedenen Richtungen zur Geltung kommen, auch durch a_1 und a_2 , wobei dann $|a_1| = |a_2|$, $\angle a_1, a_2 = 60^\circ$.

In der Mitte zwischen je drei nächsten sechszähligen Achsen $\mathfrak{A}$ liegt eine dreizählige $\mathfrak{B}(3, q)$ und in der Mitte zwischen je zwei nächsten liegt eine zweizählige Achse $\mathfrak{C}(2, r)$. Demgemäß ist das System der Schnittpunkte aller dieser Achsenarten mit der Grundfläche das in Fig. 52 dargestellte, wobei die Zwei-

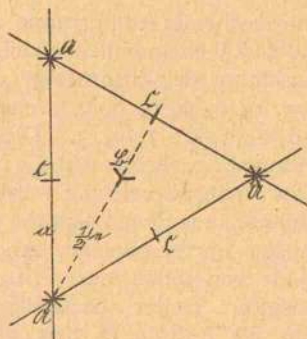


Fig. 52.

Drei- und Sechszähligkeit der Achsen wie früher durch Sterne angedeutet wird. $e = a_1 + a_2$.

Zur Charakteristik der Struktur dient außer der Grundstrecke a wiederum die Periode c längs der Achsen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$. Das gleichseitig dreieckige Prisma mit diesen Strecken als Kanten stellt ein Elementarbereich der Anordnung dar.

Eine sechszählige Dreh- oder Schraubenachse liefert durch ihre Deckbewegung innerhalb der Periode c aus einem Ausgangspunkt oder -atom

P fünf weitere P' bis P^V in je um 60° gegeneinander gedrehten Meridianen. Da alle sechszähligen Achsen $\mathfrak{A}$ durch Deckdrehungen von der Zähligkeit 6, 3, 2 ineinander übergeführt werden können, so sind diese sechs Meridianebenen für alle Achsen $\mathfrak{A}$ einander parallel. Die Anordnung der sechs Punkte P bis P^V um eine Achse $\mathfrak{A}$ ist im übrigen auf vier verschiedene Weisen möglich. Im Falle der Drehachse $\mathfrak{A}(6,0)$ liegen sie sämtlich in einer Horizontalebene; im Falle der einfachen Schraubenachse $\mathfrak{A}(6, \pm 1)$ auf einer (positiv oder negativ gewundenen) einfachen Schraubenlinie von der Ganghöhe c , im Falle der zweifachen Schraubenachse $\mathfrak{A}(6, \pm 2)$ auf zwei diametral gegenüberliegenden (positiv oder negativ gewundenen) Schraubenlinien von der Ganghöhe $2c$, im Falle der dreifachen $\mathfrak{A}(6, 3)$ schließlich auf drei um 120° gegeneinander verdrehten Schraubenlinien von der Ganghöhe $3c$. Im letzteren Falle unterscheiden sich nach S. 243 positive und negative Windungen im Effekt nicht. Fig. 53 veranschaulicht die einer Achse

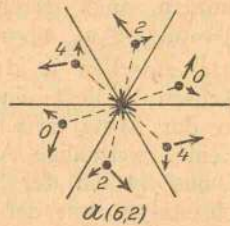


Fig. 53.

$\mathfrak{A}(6, \pm 2)$ entsprechende Atomgruppe; die $\mathfrak{A}(6,0)$, $\mathfrak{A}(6, \pm 1)$ und $\mathfrak{A}(6,3)$ entsprechenden folgen daraus durch Vertauschung der Ziffernfolge 0, 2, 4, 0, 2, 4 mit bzw. 0, 0, 0, 0, 0, 0, weiter 0, 1, 2, 3, 4, 5, und 0, 3, 0, 3, 0, 3. Diese „Sechspunkte“, die kurz bzw. als eben und ein-, zwei-, dreifach gewunden bezeichnet werden mögen, sind die Elemente, aus denen sich die den sechszähligen Achsen entsprechenden Anordnungen aufbauen. Jede von ihnen muß sich gleichzeitig als Superposition zweier dreizähliger Gruppierungen um die Achsen $\mathfrak{B}$, bzw. dreier zweizähliger Gruppierungen um die Achsen $\mathfrak{C}$ auffassen lassen.

Bezeichnet man für alle Achsen $\mathfrak{A}$ die in parallelen Meridianebenen befindlichen Punkte mit denselben Buchstaben P bis P^V , dann müssen (wie man leicht erkennt), damit die Achsen $\mathfrak{B}$ in allen Elementarbereichen denselben Charakter haben, die gleich bezeichneten Punkte überall in gleicher Höhe liegen. Außer der vertikalen Periode c ist sonach hier die Grundstrecke a jederzeit eine Deckschiebung.

Bezüglich der Kombination anderer Sym-

metrieelemente mit dem hier behandelten System von Vertikalachsen gilt natürlich die allgemeine Regel von S. 243 u. 244, daß diese Elemente Achsen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ nur je mit gleichartigen zur Deckung bringen dürfen. Eine Querachse $\mathfrak{Q}(2,0)$, die eine Achse $\mathfrak{A}(6,2)$ schneidet, liefert den in Fig. 54 dargestellten zusammengesetzten Sechspunker,

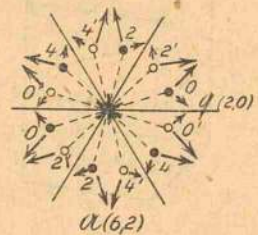


Fig. 54.

wobei die Punkte $0'$, $2'$, $4'$ um $2h$ über 0, 2, 4 liegen, falls die Achse $\mathfrak{Q}$ um h über der 0-Ebene liegt. Die Fälle der Achsen $\mathfrak{A}(6,0)$, $\mathfrak{A}(6,1)$ $\mathfrak{A}(6,3)$ folgen einfach durch die zu Fig. 53 angegebenen Ziffernvertauschungen. Die bezüglichen vier zusammengesetzten Typen können, wie die einfachen, als eben und ein-, zwei-, dreifach gewunden bezeichnet werden.

Deckoperationen zweiter Art kommen nach S. 245 für Achsen $\mathfrak{A}(6, \pm 1)$ und $\mathfrak{A}(6, \pm 2)$ nicht in Betracht. Die Wirkung der Kombination einer Achse $\mathfrak{A}(6,3)$ mit einer durch sie hindurch-

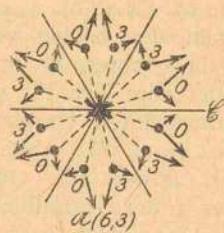


Fig. 55.

gehenden Spiegelebene $\mathfrak{C}$ veranschaulicht Fig. 55. Der Fall einer Achse $\mathfrak{A}(6,0)$ ist ganz analog.

Abteilung A. Ohne Querachsen.

Nr. 41/42. Rechtes und linkes Sechspunktschraubensystem.

Formel: $\mathfrak{A}(6, \pm 1)$, a , c . Alle Achsen $\mathfrak{A}$ tragen einfach gewundene Sechspunkte in gleichen Höhen. Abhängige Achsen: $\mathfrak{B}(3, \pm 1)$, $\mathfrak{C}(2,1)$. (Sch. $\mathfrak{C}_2^3$ und $\mathfrak{C}_3^2$)

Nr. 43/44. Rechtes und linkes zweigängiges Sechspunktschraubensystem.

Formel: $\mathfrak{A}(6, \pm 2)$, a , c . Alle Achsen $\mathfrak{A}$ tragen doppelt gewundene Sechspunkte (Fig. 53)

in gleichen Höhen. Abhängige Achsen: $\mathfrak{B}(3, \pm 1)$, $\mathfrak{C}(2, 0)$. (Sch. $\mathfrak{C}_6^4$ und $\mathfrak{C}_6^5$)

Nr. 45. Dreigängiges Sechspunktschraubensystem.

Formel: $\mathfrak{A}(6, 3)$, α , c . Alle Achsen $\mathfrak{A}$ tragen dreifach gewundene Sechspunker in gleicher Höhe. Abhängige Achsen: $\mathfrak{B}(3, 0)$, $\mathfrak{C}(2, 1)$. (Sch. $\mathfrak{C}_6^3$)

Nr. 45 α . Spiegelpunkt

- a) auf einer sechszähligen Achse $\mathfrak{A}$ beliebig gelegen. (Sch. $\mathfrak{C}_{6,h}^2$)

Nr. 45 β . Spiegelebene

- a) durch zwei benachbarte Achsen $\mathfrak{A}$; (Sch. $\mathfrak{C}_{6,v}^3$)
b) durch zwei benachbarte Achsen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. (Sch. $\mathfrak{C}_{6,v}^4$)

Nr. 46. Hexagonalsäulensystem.

Formel: $\mathfrak{A}(6, 0)$, α , c . Alle Achsen $\mathfrak{A}$ tragen ebene Sechspunker in gleichen Höhen. Abhängige Achsen: $\mathfrak{B}(3, 0)$, $\mathfrak{C}(2, 0)$. (Sch. $\mathfrak{C}_6^1$)

Nr. 46 α . Spiegelpunkt

- a) auf einer Achse $\mathfrak{A}$ gelegen. (Sch. $\mathfrak{C}_{6,h}^1$)

Nr. 46 β . Spiegelebene

- a) durch zwei benachbarte Achsen $\mathfrak{A}$. (Sch. $\mathfrak{C}_{6,v}^1$)

Nr. 46 γ . Gleitspiegelebene

- a) ebenso gelegen, Gleitbetrag $\frac{1}{2}c$. (Sch. $\mathfrak{C}_{6,v}^2$)

Von den Typen dieser Abteilung besitzen die kristallographische Symmetrie $\{A_x^6\}$ die Nr. 41 bis 46, die Symmetrie $\{C, A_x^6\}$ Nr. 45 α und 46 α , die Symmetrie $\{A_x^6, E_x\}$ die Nr. 45 β und Nr. 46 β und γ .

Abteilung B. Mit Querachsen.

Die mit den allgemeinen Anforderungen verträglichen Lagen von Querachsen sind diejenigen in der Ebene zweier benachbarter Achsen $\mathfrak{A}$ (Projektion auf α) oder in derjenigen eines Paares benachbarter $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ (Projektion in $e = \alpha_1 + \alpha_2$). Beide Arten $\mathfrak{Q}_\alpha$ und $\mathfrak{Q}_e$ treten immer nebeneinander auf; es ist daher keine wesentliche Spezialisierung, von einer von beiden — hier $\mathfrak{Q}_\alpha$ — auszugehen. Die figürliche Darstellung des Achsensystems umfaßt ein dreieckiges Prisma zwischen drei Achsen $\mathfrak{A}$ von den Grundkanten α und der Höhe $\frac{1}{2}c$ und legt die Grundfläche in die Höhe einer Achse $\mathfrak{Q}_\alpha$, mit der o-Ecke nach vorn. Im Interesse der Anschaulichkeit sind Achsen von dem Charakter $(6, \pm 1)$ strichpunktirt (— · — · —), solche vom Charakter $(6, \pm 2)$ und $(3, \pm 1)$ strichdoppelpunktirt

(— · — · —), endlich $(6, 3)$ und $(2, 1)$ einfach gestrichelt (— — —). Drehachsen, wie immer, ausgezogen (—). Spiegelebenen und Gleitspiegelebenen kommen in dieser Abteilung ebenso wie in IV B als selbständige Symmetrielemente nicht in Betracht¹⁾.

Nr. 47/48. Rechtes und linkes zusammengesetztes Sechspunktschraubensystem.

Formel: $\mathfrak{A}(6, \pm 1)$, $\mathfrak{Q}_\alpha(2, 0)$, α , c . Alle Achsen $\mathfrak{A}$ tragen zusammengesetzte einfach gewundene Sechspunker in gleichen Höhen. Abhängige Achsen: $\mathfrak{B}(3, \pm 1)$, $\mathfrak{C}(2, 1)$; außerdem liegen von $\mathfrak{Q}_\alpha(2, 0)$ aus in Höhen $\frac{1}{6}c$, $\frac{2}{6}c$, $\frac{3}{6}c$ gleichartige um $\pm 60^\circ$ gedrehte, d. h. also zwischen anderen Achsenpaaren $\mathfrak{A}$ verlaufende Querachsen. Dazu in der Horizontalebene einer jeder dieser Achsen Schraubenachsen $\mathfrak{P}_\alpha'(2, 1)$ im Abstand $\pm \frac{1}{4}e$ von den $\mathfrak{Q}_\alpha$. In den Ebenen mitten zwischen den von den $\mathfrak{Q}_\alpha$ und $\mathfrak{P}_\alpha'$ eingenommenen verlaufen außerdem Querachsen $\mathfrak{Q}_e(2, 0)$ in den Ebenen durch ein $\mathfrak{A}$ und das benachbarte $\mathfrak{B}$ (Projektion in $e = \alpha_1 + \alpha_2$); dazu Schraubenachsen $\mathfrak{P}_e'(2, 1)$

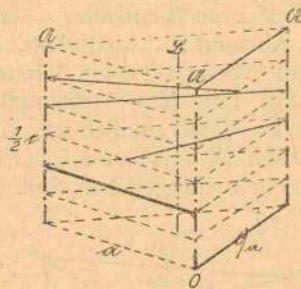


Fig. 56. (Nr. 47/48.)

um $\pm \frac{1}{4}a$ davon entfernt. Die Schraubenachsen $\mathfrak{P}_\alpha'$ und $\mathfrak{P}_e'$ sind, um Häufung zu vermeiden, in der Fig. 56²⁾ nicht dargestellt; ebenso nicht die Vertikalachsen $\mathfrak{C}(2, 1)$. (Sch. $\mathfrak{D}_6^2$ und $\mathfrak{D}_6^5$)

Nr. 49/50. Rechtes und linkes zweigängiges zusammengesetztes Sechspunktschraubensystem.

Formel: $\mathfrak{A}(6, \pm 2)$, $\mathfrak{Q}_\alpha(2, 0)$, α , c . Alle Achsen $\mathfrak{A}$ tragen zweifach gewundene zus. Sechspunker (Fig. 54) in gleichen Höhen. Abhängige Achsen: $\mathfrak{B}(3, \pm 1)$, $\mathfrak{C}(2, 0)$; außerdem Querachsen $\mathfrak{Q}_\alpha(2, 0)$ und $\mathfrak{Q}_e(2, 0)$ in um $\frac{1}{6}c$ voneinander entfernten Ebenen, je um 60° gegeneinander gedreht beim Fortschreiten längs c . Jedes $\mathfrak{Q}_\alpha$ und $\mathfrak{Q}_e$ ist wie bei Nr. 47/48 von Schraubenachsen $\mathfrak{P}_\alpha'(2, 1)$ und $\mathfrak{P}_e'(2, 1)$ begleitet, die in der Fig. 57 ebenso

1) Die Bezeichnungen $\mathfrak{D}_6^2$ und $\mathfrak{D}_6^5$ kommen bei Schönflies (l. c. S. 529) je zweimal vor; sie sind oben so angewandt wie vermutlich beabsichtigt.

2) In der Ebene $\frac{1}{2}c$ fehlt die Achse $\mathfrak{Q}_e$.

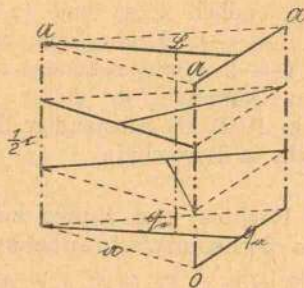


Fig. 57. (Nr. 49/50).

wenig wiedergegeben sind, wie die Vertikalachsen $\mathcal{C}$. (Sch. $\mathcal{D}_6^3$ und $\mathcal{D}_6^4$.)

Nr. 51. Dreigängiges zusammengesetztes Sechspunktschraubensystem.

Formel: $\mathcal{A}(6,3)$, $\mathcal{D}_a(2,0)$, a , c . Alle Achsen $\mathcal{A}$ tragen dreifach gewundene zus. Sechspunkter in gleichen Höhen. Abhängige Achsen: $\mathcal{B}(3,0)$, $\mathcal{C}(2,1)$; außerdem in der Horizontalebene von $\mathcal{D}_a$ zwei diesem gleichartige Achsen, so daß ein gleichseitiges Dreieck mit Ecken in drei benachbarten Vertikalachsen $\mathcal{A}$ entsteht, — ein Gebilde, daß sich im Abstand $\frac{1}{3}c$ wiederholt. Weiter in der Ebene im Abstand $\frac{1}{4}c$ ein Kreuz von drei Achsen $\mathcal{D}_e(2,0)$ mit dem Mittelpunkt in der Vertikalachse $\mathcal{B}$. Dazu endlich wie in Nr. 47/48 Schraubenachsen $\mathcal{P}_a'(2,1)$ und $\mathcal{P}_e'(2,1)$, die in der Fig. 58 nicht wiedergegeben sind. (Sch. $\mathcal{D}_6^0$.)

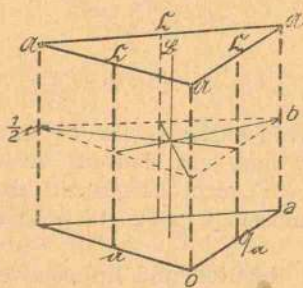


Fig. 58. (Nr. 51).

Nr. 51a. Spiegelpunkt

- a) auf einer Vertikalachse $\mathcal{A}$ im Schnittpunkt mit einer Querachse $\mathcal{D}_a$; (Sch. $\mathcal{D}_6^3$),
- b) ebenda im Schnittpunkt mit einer der Ebenen der $\mathcal{D}_e$. (Sch. $\mathcal{D}_6^4$.)

Nr. 52. Zusammengesetztes Hexagonal-säulensystem.

Formel: $\mathcal{A}(6,0)$, $\mathcal{D}_a(2,0)$, a , c . Alle Achsen $\mathcal{A}$ tragen ebene zus. Sechspunkter in gleichen Höhen. Abhängige Achsen: $\mathcal{B}(3,0)$, $\mathcal{C}(2,0)$, dazu alle $\mathcal{D}_a$ und $\mathcal{D}_e$, $\mathcal{P}_a'$ und $\mathcal{P}_e'$ der vorigen Nummern in der Grundebene und der um $\frac{1}{2}c$ davon entfernten. Die Schraubenquerachsen $\mathcal{P}_a'$ und $\mathcal{P}_e'$

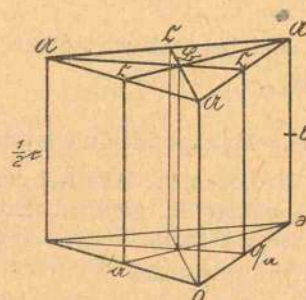


Fig. 59. (Nr. 52).

sind wiederum nicht in die Fig. 59 aufgenommen. (Sch. $\mathcal{D}_6^1$.)

Nr. 52a. Spiegelpunkt

- a) auf einer Vertikalachse $\mathcal{A}$ im Schnittpunkt mit einer Ebene der Querachsen $\mathcal{D}$; (Sch. $\mathcal{D}_6^1$),
- b) auf einer Achse $\mathcal{A}$ mitten zwischen zwei der vorstehend bezeichneten Lagen. (Sch. $\mathcal{D}_6^2$.)

Von den Typen dieser Abteilung besitzen Nr. 47 bis 52 die kristallographische Symmetrie $\langle A_x^6, A_x^2 \rangle$ und Nr. 47a—52a die Symmetrie $\langle C, A_x^6, A_x^2 \rangle$.

(Eingegangen 18. März 1918.)

BESPRECHUNGEN.

A. v. Oettingen, Die Grundlage der Musikwissenschaft und das duale Reininstrument. Bd. XXXIV der Abhdl. der mathem.-physikal. Kl. der Kgl. Sächs. Ges. der Wissenschaften. gr. 8°. S. 157—361; X u. 205 S. mit 2 Separattafeln und 86 Tafeln im Text. Leipzig, B. G. Teubner. 1916. M. 8.—

Die vorliegende Abhandlung bedeutet nicht nur den Schlußstein, den A. v. Oettingen seinem eigenen,

1866 begonnenen Gebäude der musikalischen Akustik und Tonwissenschaft einfügt, sondern darüber hinaus auch eine Leistung, mit der das Problem des dualen Reininstrumentes auf absehbare Zeit als gelöst betrachtet werden kann. Sie trägt in Ton und Charakter die Ruhe reifer Meisterschaft und hinterläßt den Eindruck, daß ihre Feststellungen als Ergebnisse fünfzigjähriger Denkarbeit zu wirklich abschließendem Ende gekommen sind. In drei Teilen behandelt Verf. a) die Grundbestimmungen der Akustik und Musik, b) das duale Quint-Terzen-Reininstrument (Orthotonophonium genannt) und c) die Theorie der dualen Reininstrumente

im allgemeinen. — Im ersten Teile erfolgt zunächst die Umschreibung des musikalisch-akustischen Arbeitsfeldes und eine Einigung über die anzuwendende Terminologie, die Verf. auf Grund einer eigentümlich linguistischen Begabung um glückliche und zweckmäßige Wendungen bereichert. Um jeglichen Ton des 53-stufigen Tonfelds nach Schwingungszahl, Logarithmus und Beziehung zum Ausgangston, als welcher seiner zentralen Lage wegen *D*, nicht wie bisher *C*, gilt, unzweideutig zu kennzeichnen, werden dem betreffenden, auf eine Silbe reduzierten Intervallnamen der Stammtöne (Prim, Sekund, Terz usw.) gewisse Vor- und Nachsilben beigelegt, derart, daß die Vorsilben *mi*, *bi*, *ti*, *fi* und *mo*, *bo*, *to*, *fo* die kommatische Verminderung oder Vergrößerung anzeigen, die Nachsilben *-on*, *-ol*, *-ok* und *-in*, *-il*, *-ih* aber die Bedeutung der bisherigen musikalischen Erhöhungs- und Erniedrigungssilben (*is*, *-isis*; *-es*, *-eses*) annehmen. *Bi Quinton* bedeutet demnach die um zwei Komma verkleinerte, einfach erhöhte Quinte, d. h. A_{15} . In gleicher Weise wird eine die Senke- und Hebekommas bezeichnende Notenschrift für die reine Stimmung eingeführt. Die Bestimmungen über Akkordfolge, Tongeschlechter und deren Verwandtschaft sind aus des Verf. früherer Schrift „Das duale Harmoniesystem“ (in zweiter Bearbeitung 1913) im wesentlichen bekannt, hier aber neuerdings gegen Mißverständnisse und Vermengung mit Helmholtzschen Definitionen verteidigt und teilweise in reiferer Auffassung bearbeitet. Ein nochmaliges Aufrollen dieser Tatbestände war unerlässlich, da die Handhabung des Reininstruments, vor allem im Dienste des Musikunterrichts, untrennbar ist von der dual-harmonischen Analyse der Klänge und deren richtiger Niederschrift. Die Tastatur des Orthotonophoniums ist, im Anschluß an Bosanquet, der der gewöhnlichen temperierten Instrumente nachgebildet und wird vom Verf. aufs genaueste, auch ihrer technischen Struktur nach, beschrieben. Es findet keinerlei Temperatur statt, auch nicht des kleinsten Übergangs. Die Dualität ist streng gewahrt unter Durchführung der zuvor auseinandergesetzten Strahlsymmetrie oder Punktspiegelung des Tongewebes. Als Grundlage der Anordnung dient das Quint-Terzen-Gewebe und das Quint-Sexten-Gewebe. Jenes entsteht durch Anbau großer reiner Terzen an die Töne der Quintreihe nach oben wie unten und durch Fortsetzung dieser Operation von den neu gewonnenen Quintreihen aus. Eine Grenze wird durch das Erscheinen schismatisch unterschiedener Töne gesteckt, welche nicht mit aufgenommen werden. Das Quint-Sextengewebe wird analog durch fortlaufenden Anbau großer Sexten nach oben wie unten gewonnen. Dadurch verschwinden innerhalb des 53-stufigen Feldes mit Doppelkreuzen und Doppelbeenen versehene Töne entfernterer Terzverwandtschaft gegen kommaverwandte Töne in der Mitte. Verf. vertritt die Ansicht, daß alle Hochschulen für Musik Instrumente mit 35, 47, 59 und 71 Tasten anschaffen sollten. Diejenigen mit 35 Tasten (3 Zungensätze) und 59 Tasten (5 Zungensätze) sind nach dem Quint-Terz-System, die mit 47 Tasten (4 Zungensätze) und 71 Tasten (6 Zungensätze) nach dem Quint-Sexten-System angeordnet. In allen vier Fällen gibt das Bild der Klaviatur die Möglichkeit, die jedem Tone zugehörige Quintreihe, seinen Namen und seine kommatische Bestimmung sofort zu erkennen, ebenso schismatisch gefärbte Zusammenklänge. — Sehr wertvoll sind die Anweisungen zum Einstimmen der Reininstrumente und zur Prüfung der Stimmresultate. Lange praktische Erfahrung setzte hier den Verf. in den Stand, nicht nur mit Ratschlägen und Warnungen, sondern auch mit einer Anzahl Hilfstabellen zu dienen, die den beschwerlichen Weg des Reinstimmens künf-

tig erheblich abkürzen werden. Das von ihm beschriebene Instrument enthält 43 völlig reine tonische und ebensoviel phonische Dreiklänge, außerdem noch 6 schismatisch gefärbte (praktisch reine) beiderlei Art, so daß im ganzen 47 tonische und 47 phonische Geschlechter zu bilden sind. Damit genügt es sowohl den wissenschaftlichen Anforderungen des Physikers wie den Bedürfnissen der praktischen Musik. Außerdem hat es in der verhältnismäßig bequemen Spielbarkeit einen nicht genug zu schätzenden Vorzug, und es ist nicht abzusehen, welchen heilsamen Einfluß die Theorie der reinen Stimmung durch seine Vermittelung auf die Bildung unserer praktischen Musiker ausüben wird, wenn sich der Musikunterricht künftig seiner in höherem Maße bedient. Vorläufig sind (von der Firma Schiedmayer-Stuttgart) erst drei Exemplare nach den Vorschriften des Verf. gebaut worden. Zwei davon befinden sich in Leipzig. Wir schließen uns gern dem Verf. an, wenn er die Hoffnung ausspricht, daß in Zukunft nur Reininstrumente nach Art des Orthotonophoniums gebaut werden möchten. A. Schering.

K. Jellinek, Lehrbuch der physikalischen Chemie. Vier Bände. Zweiter Band: Die Lehre von den Aggregatzuständen (II. Teil). XII u. 939 S. mit 149 Tabellen, 401 Textabbild. u. 3 Bildnissen. Lex. 8°. Stuttgart, Ferdinand Enke. 1915. Geh. M. 32.—, geb. M. 35.—

Im ersten Abschnitte des vorliegenden zweiten Bandes werden die im vorhergehenden Bande¹⁾ von der experimentellen Seite betrachteten Zustandsänderungen der Gase und Flüssigkeiten zusammengefaßt und abgeschlossen in der theoretischen Behandlung des fluiden Zustandes. Mit der van der Waalsschen Theorie beginnend, werden sämtliche Zustandsgleichungen des fluiden Zustandes behandelt und Theorie mit Beobachtung verglichen. Es folgt die Behandlung des Theorems der übereinstimmenden Zustände sowie der Erscheinungen an Grenzflächen zwischen Gas und Flüssigkeit, zu deren theoretischer Deutung die Laplacesche und die van der Waalssche Kapillaritätstheorie gegeben werden. Den Abschluß bilden die thermodynamische und kinetische Behandlung des Verdampfungsvorganges, die Betrachtung der kritischen Erscheinungen vom Standpunkte der Kontinuitätstheorie, sowie der inneren Reibung und Wärmeleitung fluider Stoffe. — Der zweite Hauptabschnitt des Buches befaßt sich mit dem „festen“ Aggregatzustande. Obwohl der Verf. bemerkt, daß hierunter korrekterweise der kristallisierte, anisotrope Zustand zu verstehen ist, werden in diesem Abschnitt auch die Eigenschaften amorpher, glasiger Stoffe behandelt, die wohl ihren Untersuchungsmethoden nach hierher passen, aber ihrer atomistischen Struktur nach sich der Betrachtung des fluiden Zustandes einordnen. Der Abschnitt beginnt mit der geometrischen Kristallographie; es folgen die Betrachtung der allgemeineren physikalischen Eigenschaften (Dichte, Elastizität usw.) fester Stoffe, die Besprechung des Kristallisations-, Schmelz- und Sublimationsvorganges sowie der dabei auftretenden Energieänderungen. Den wohl gelungenen Abschluß dieses Teiles bilden die kinetische Theorie des festen Aggregatzustandes und eine kurze Diskussion der Kontinuitäts- und Diskontinuitätsauffassung des fluiden und kristallisierten Zustandes. Im kristallographischen Abschnitt

1) Vgl. die Besprechung diese Zeitschr. 17, 540, 1916.

ist die für die Erforschung der Kristallstruktur bahnbrechende Lauesche Entdeckung der Röntgenstrahlen-Interferenzen in Kristallen kurz erwähnt und ihre nähere Besprechung auf später verschoben. Man vermißt indessen einen Hinweis auf die Braggschen Arbeiten, die für das Verständnis der Abstandsverhältnisse im Raumgitter ebenso anschaulich sind wie bereits der bloße Anblick der Lauediagramme für die Kristallsymmetrie. — Der Schlußabschnitt ist der Betrachtung der verdünnten fluiden Lösungen gewidmet. Zunächst wird die Gasdiffusion experimentell, thermodynamisch und kinetisch behandelt, hierauf folgen die verdünnten flüssigen Lösungen, der osmotische Druck, die direkten und indirekten Methoden zu seiner Messung, das Raoult'sche Gesetz, Siedepunkterhöhung und Gefrierpunktniedrigung, sowie die Diffusionserscheinungen in flüssigen Lösungen. Schließlich werden noch die Einwände gegen die osmotische Theorie der Lösungen betrachtet. — Die heterogenen Gleichgewichte sind in diesen Band noch nicht aufgenommen. —

Durch eingehende Behandlung der experimentellen Methoden und durch Aufführung und Diskussion ihrer Ergebnisse wird das Verständnis der Erfahrungstatistiken gefördert. Bei der Darstellung der Theorie erläutert der Verf. die Hilfsmittel zu ihrer Entwicklung aus fernerliegenden physikalischen oder mathematischen Gebieten oder verweist in einfacheren Fällen auf geeignete Lehrbücher. Auch in dieser Hinsicht ist im vorliegenden zweiten Bande die Eigenart des Werkes gewahrt, gleichzeitig ein gutes ausführliches Lehrbuch und weitgehend ein Handbuch zu sein.

S. Kyropoulos.

Ivar W. Cederberg, Die thermodynamische Berechnung chemischer Affinitäten von homogenen und heterogenen Gasreaktionen. gr. 8°. VI u. 109 S. mit 1 Tafel und 34 Tabellen. Berlin, Kommissionsverlag von R. Friedländer & Sohn. 1916. M. 6.—

Seit das Wärmetheorem von Nernst den Weg gewiesen hat, chemische Gleichgewichte aus thermischen Daten zu berechnen, liegt die Aufgabe der weiteren Forschung auf diesem Gebiete darin, die numerischen Werte, auf die sich die Rechnung aufzubauen hat, möglichst zuverlässig zu ermitteln. Der Verf. versucht, diese Aufgabe auf teilweise neuen Wegen zu lösen. Zunächst gibt er eine kurze Darstellung des Problems und seiner prinzipiellen Lösung, die sich eng an die Arbeiten von Nernst und Politzer anschließt und daher nichts wesentlich Neues enthält. Eigene Wege betritt er dagegen bei der Berechnung der chemischen Konstanten. Er führt die wichtige Annahme ein, daß die chemischen Konstanten dem Logarithmus des kritischen Druckes gleich sind, wodurch es möglich wird, eine Reihe von Vorgängen der Berechnung zugänglich zu machen, für die auf den früher eingeschlagenen Wegen sichere Grundlagen fehlten. Ferner stellt er eine Dampfdruckformel auf, die von der von Nernst verwendeten abweicht. Ein ausreichender theoretischer Beweis für die gemachten Annahmen wird nicht gegeben; der Verf. stützt sich auf die Erfahrung, und die gute zahlenmäßige Übereinstimmung spricht in der Tat für ihre Richtigkeit.

V. Rothmund.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der Dozent an der Technischen Hochschule Berlin Studienrat Dr. Georg Wallenberg zum a. o. Honorarprofessor der Mathematik an derselben Hochschule, cand. pharm. Erling Schreiner zum Dozenten der anorganischen Chemie an der Technischen Hochschule Trondhjem, der Privatdozent an der Universität und Technischen Hochschule Graz Dr. Roland Weitzenböck zum a. o. Professor der Mathematik an der Deutschen Technischen Hochschule Prag, der a. o. Professor der theoretischen Physik an der Universität Straßburg Dr. Emil Cohn zum ord. Professor ebendasselbst.

Verliehen: Dem Privatdozenten für Mechanik und Mathematik an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Fritz Noether und dem Privatdozenten für Physik an der Universität Berlin Dr. Wilhelm Westphal der Titel Professor.

In den Ruhestand: Der Professor der Chemie an der Universität Kristiania Dr. Th. Hjortdahl.

Gestorben: Der frühere Professor der Chemie am Presidency College in Calcutta Sir Alexander Pedler.

Angebote.

Physiker und Elektroingenieure

mit abgeschlossener Hochschulbildung zur experimentellen Durchbildung von Apparaten für drahtlose Telegraphie, insbesondere Verstärkern und Röhrendern gesucht. Bewerbungen mit Angabe des Bildungsganges und der Gehaltsansprüche erbeten an

Dr. Georg Seibt,
Fabrik elektrischer Apparate,
Berlin-Schöneberg, Hauptstr. 11.

Gesuche.

Promovierte Physikerin

sucht Stellung halb- oder ganztägig an einem Hochschulinstitut oder gewerblichen Laboratorium. Angebote unter **S. H. 524** an den Verlag S. Hirzel, Leipzig, Königstraße 2.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 17.

1. September 1918.

Redaktionsschluß für No. 19 am 23. August 1918.

19. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

- G. Laski, Anwendung der Grundempfindungstheorie zur Größenbestimmung submikroskopischer Partikel. S. 369.
R. Bär, Bemerkung zu der Arbeit von Irene Parankiewicz: „Größen und elektrische Ladungen von kleinen Schwefel-, Selen- und Quecksilberkugeln, bestimmt aus deren Fallgeschwindigkeit und Farbe“. S. 373.
K. Lichtenecker, Über den Wider-

- stand gewisser zusammengesetzter körperlicher Leiter. S. 374.
E. Grüneisen, Widerstandsänderung einatomiger Metalle mit der Temperatur. S. 382.
P. Selényi, Überspiegelnde Flächen negativer Krümmung. S. 386.
O. Meißner, Die Wärmedämmung. S. 387.
R. Malmström, Berichtigung. S. 388.
Besprechungen:
H. Lorenz, Lehrbuch der technischen Physik. IV. S. 389.

- R. Mehrke, Leitfaden zum graphischen Rechnen. S. 390.
W. Estorff, Beiträge zur Kenntnis der Kugelfunkenstrecke. S. 390.
F. M. Jaeger, Lectures on the principle of symmetry and its applications in all natural sciences. S. 391.
A. Wegener, Wind- und Wasserhosen in Europa. S. 392.
Personalien. S. 392.
Angebote. S. 392.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Anwendung der Grundempfindungstheorie zur Größenbestimmung submikroskopischer Partikel.

Von Gerda Laski.

In einer früheren Untersuchung¹⁾ habe ich die Größenbestimmung einzelner submikroskopischer Silberkugeln auf optischem und mechanischem Wege durchgeführt. Solche Teilchen, deren Dimensionen der Lichtwellenlänge vergleichbar sind, zeigen bekanntlich im senkrecht abgebeugten Lichte des Dunkelfeldes Farben, deren Beschaffenheit vom Radius des Kügelchens, vom Material, und der Art des einfallenden Lichtes abhängt. Zur vergleichenden Größenbestimmung der Silberkügelchen wurde einerseits an einem einzelnen Partikel bestimmter beobachteter Farbe der Radius aus der gemessenen Fallgeschwindigkeit nach dem Widerstandsgesetz sowie vergleichsweise aus den Abweichungen von der mittleren Fallzeit nach der Theorie der Brownschen Bewegung ermittelt, andererseits aus der elektromagnetischen Beugungstheorie des Lichtes das Ausstrahlungsspektrum von Kügelchen bestimmter Größe und optisch definierten Materials berechnet.

Die Ausstrahlungskurve jedes solchen Kügelchens besitzt ein deutliches Maximum der Intensität bei bestimmter Wellenlänge. Aus der Lage dieses Maximums hat F. Ehrenhaft²⁾ für Gold- und Quecksilberkügelchen die Farbe,

in der einzelne Kügelchen von bestimmter Größe dem Beobachter im Dunkelfelde der Theorie nach erscheinen müssen, in der Weise bestimmt, daß er ihre Wellenlänge gleich der dem Maximum der Ausstrahlungskurve entsprechenden Wellenlänge setzte. Damit war die Möglichkeit einer weiteren Größenbestimmung gegeben.

Die Erhebungen der Ausstrahlungskurven umfassen, von kleineren zu größeren Partikeln fortschreitend, immer größere Spektralbereiche, so daß niemals gesättigte, der Wellenlänge des Maximums entsprechende, scharf definierte Spektralfarben daraus hervorgehen; die physiologisch beobachtete Mischfarbe ist daher nur in erster Näherung dem Maximum der berechneten Kurven zu entnehmen.

Um also den Vergleich zwischen der für Partikel bestimmter angenommener Größe berechneten und der an Partikeln gemessener Größe beobachteten Farbe präziser durchführen zu können, war auf Grundlage der physiologischen Optik die folgende Frage zu lösen: In welcher Farbe des Spektrums müssen Kugeln bestimmten Materials und von Dimensionen, die der Wellenlänge des Lichtes vergleichbar sind, dem Auge erscheinen, deren Ausstrahlungsspektrum auf das Spektrum des einstrahlenden Lichtes bezogen, aus der elektromagnetischen Beugungstheorie errechnet wurde?

Den ursprünglichen Berechnungen lag die unrealisierbare Annahme zugrunde, daß Licht eingestrahlt werde, in welchem jede Wellenlänge in gleicher Intensität vertreten ist; die Beobachtungen wurden jedoch unter Beleuchtung von Bogenlampen ausgeführt.

1) G. Laski, Ann. d. Phys. 53, 1, 1917; Ber. d. Wien. Akad. d. Wiss. 126 (IIa), 601, 1917.

2) F. Ehrenhaft, diese Zeitschr. 15, 952, 1914; 16, 227, 1915.

Es wurden daher die Ordinaten der berechneten Ausstrahlungskurven von Silberkugeln vorerst der Energieverteilung des einfallenden Bogenlampenspektrums entsprechend umgerechnet¹⁾.

Die weitere Aufgabe ist einem bereits behandelten Problem ähnlich. F. Exner²⁾ hat die Wellenlänge in der Natur vorkommender Farben, z. B. von Edelsteinen oder Blüten, aus der spektralphotometrisch gemessenen Ausstrahlungskurve berechnet. Dabei stützte er sich auf die Helmholtz-Youngsche Grundempfindungstheorie, nach welcher jede Spektralfarbe aus verschiedenen Anteilen dreier Grundempfindungen, rot, grün, blau, aufgebaut werden kann und legte für seine Zwecke die von König und Dieterici gemessenen Grundempfindungskurven aufs Neue fest, d. h. er bestimmte die relativen Anteile an Grundempfindung, welche jede Spektralfarbe im weißen Lichte enthält³⁾. Exner hat also die einer physiologisch gegebenen Farbe zugeordnete Spektralfarbe gesucht.

In unserem Falle ist umgekehrt aus den berechneten Ausstrahlungsspektren die entsprechende physiologisch wahrnehmbare Farbe zu ermitteln, und mit dem Experimente zu vergleichen. Es handelte sich also darum, die Resultate der physiologischen Optik auf ein rein physikalisch gegebenes Problem anzuwenden.

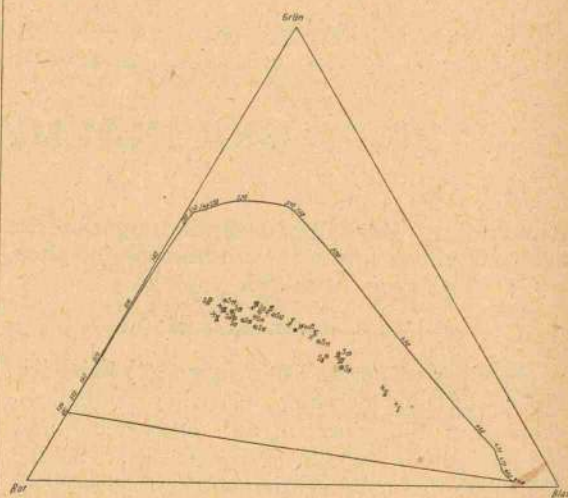
Demgemäß wurde jede der Ausstrahlungskurven des Silbers in die drei Grundempfindungskurven zerlegt, indem ihre Ordinaten mit den von Exner angegebenen Reduktionsfaktoren multipliziert wurden. Der Flächeninhalt jeder dieser drei Kurven wurde durch Plani-

metrierung gefunden und die Koordinaten jenes Punktes im Farbendreieck ermittelt, welcher der resultierenden Mischfarbe entspricht.

Zeichnet man sich die Kurve der Spektralfarben¹⁾ in das Farbendreieck²⁾ ein, so gibt der Schnittpunkt der Verbindungslinie durch den gegebenen Punkt und den Weißpunkt mit der Spektralkurve die der resultierenden Mischfarbe entsprechende Spektralfarbe an.

Die Berechnungen wurden vorerst an Silberkugeln für 9 Partikelgrößen im Intervalle $4-10 \cdot 10^{-6}$ cm Radius ausgeführt.

In der Figur sind die berechneten Punkte durch



Kreuze im Farbendreieck bezeichnet; die zugehörigen Daten sind Tabelle I zu entnehmen. Die Verbindung des ersten Punktes (Radius $4 \cdot 10^{-6}$ cm) fällt auf die Purpurlinie, die Verbindungslinie des äußersten sichtbaren Blau und Rot. Partikel vom Radius $4 \cdot 10^{-6}$ cm erscheinen also purpurviolett, noch kleinere müssen tiefpurpurn erscheinen.

Nummehr erklärt sich die interessante Tatsache, daß die kleinsten Silberpartikel im Dunkelfelde rötlich erscheinen, während die Wellenlänge des Maximums der Ausstrahlungskurve violett ergab.

Der Sättigungsgrad der einzelnen Partikelfarben, bezogen auf die Sättigung der entsprechenden Spektralfarbe, ist in Tabelle I angegeben. Die purpurnen Partikeln zeigen entsprechend ihrer Entfernung vom Weißpunkt eine sehr gesättigte Farbe; sie sind in der Tabelle, wie üblich, durch ihre Komplementärfarbe charakterisiert. Die Sättigung der Farbe nimmt über blau und blaugrün ab und erreicht

1) Innerhalb des mit freiem Auge gewöhnlich sichtbaren Teiles ($400-700 \mu\mu$) des Bogenlampenspektrums zeigt sich nach den Beobachtungen von Snow (Wied. Ann. 47, 222, 1892) ein allmähliches Abfallen der Energie von Orange bis Blau und nur am Ende des sichtbaren Violett wächst die Energie wieder und steigt zwischen 410 und 420 zu einem aus mehreren Linien bestehenden Maximum an. Die Messungen Snows beziehen sich auf ein prismatisches Spektrum und wurden von diesem Autor auf das normale Gitterspektrum umgerechnet. Über die Zulässigkeit dieser Berechnung vgl. l. c. S. 229. Doch ist die durch die hierbei gemachte Vernachlässigung verursachte Abweichung sicher kleiner als diejenige, welche durch Benützung verschiedener Kohle entsteht. — Durch das Snowsche Spektrum wurde eine glatte Kurve gelegt, durch welche einige Linien, die aber zum Integrale nichts beitragen, abgeglichen wurden; bei diesem Ausgleich mußte man auch den Einfluß der Linien im Violett eliminieren, da die optischen Gläser einen stärkeren Prozentsatz des Violett absorbieren und die Lichtstrahlen der benützten Bogenlampen einen Glasweg von ca. 4 cm zu passieren hatten.

2) F. Exner, Sitzber. d. Wien. Akad. d. Wiss. III (IIa), 901, 1902; F. u. S. Exner ebenda II 9 (I), 191, 1910.

3) F. Exner, Sitzber. d. Wien. Akad. d. Wiss. III (IIa), 857, 1902.

1) F. Exner l. c. S. 871.

2) Das benutzte Farbendreieck ist gleichseitig und hat eine Seitenlänge von 50 cm.

Tabelle I.

Nummer des Punktes	Radius $a \cdot 10^6$ cm	Wellenlänge	Ordinaten des Punktes im Farbendreieck		Prozentualer Gehalt an Grundempfindung			Relative Sättigung
			x	y	rot	grün	blau	
I.	4	kompl. 575	34,5	7,6	22,3	17,6	60,1	0,54
II.	5	467	33,2	9,2	23,3	20,9	55,8	0,49
III.	6	472	29,0	11,9	27,2	26,3	42,3	0,30
IV.	6,5	483	26,5	13,8	31,2	31,8	36,8	0,12
V.	7	566	24,4	15,0	34,0	34,7	31,4	0,08
VI.	7,5	576	22,4	16,1	36,7	37,3	26,3	0,24
VII.	8	581	21	16,5	38,8	38,1	23,0	0,34
VIII.	9	589	18,1	16,7	44,6	38,6	16,9	0,52
IX.	10	597	17,4	15,9	46,9	36,7	16,3	0,53

in grün ein Minimum; dann nimmt sie über gelb gegen orange zu.

Es scheint eine Tatsache zu sein, daß in der Natur das Grün immer in verhältnismäßig ungesättigtem Zustande vorkommt, was auch aus den Messungen Exners hervorgeht. Subjektiv erscheinen die grünen Silberpartikel in kräftiger Farbe; dennoch stimmt die Berechnung im Farbendreieck auch bezüglich des Sättigungsgrades mit den früheren Angaben über die beobachtete Farbe auf Grund der Raddeschen Farbenskala. Es wurden grüne Partikel nach den Tabellen 12—16 von Radde (gelbgrün, grasgrün, blaugrün) Sättigungsgrad $i-n$ bezeichnet, da eine feinere Unterscheidung der Nuancen unsicher wäre. Exner gibt

(Wien. Ber. 119, S. 239) für das Grün der Raddeschen Skala Nr. 15 Sättigungsgrad h $S=0,2$ an; diese Farbe entspricht auf Grund von Interpolation der vorliegenden Berechnungen Silberpartikeln vom Radius $6,7 \cdot 10^{-6}$ cm, nur mit geringerer Sättigung. Für Partikeln dieser Größe berechnet sich nach Tabelle I, der Sättigungsgrad $S=0,1$.

In Tabelle II sind in der ersten Kolonne die Farbenbereiche des Spektrums nach der Einteilung von Helmholtz¹⁾ angegeben; in der zweiten Kolonne sind die Intervalle der Radien von Silberpartikeln angeführt, welche diesen Farben nach der Figur entsprechen; die blaue Farbe umfaßt ein größeres Radienintervall, die grüne Farbe ein kleineres, als in den ursprüng-

Tabelle II.

Wellenl. Farbe nach Helmholtz	Intervall des Radius aus dem Farbendreieck	Beobachtete Farbe	Fallgeschwindigkeit	Radius $a \cdot 10^6$ cm		Beobachtungen von Ehrenhaft	
				aus d. Widerstandsgesetz	aus d. Brownschen Bewegg.	$a \cdot 10^6$ cm Rad.	beob. Farbe
590—656 gelb bis orange	von 9,3 aufwärts	orange	3,35	12,4		13,6	orange
			2,94	11,5	14,6	12,4	
			2,89	11,3	15,7		
		orange-gelb	2,86	11,3			orange-gelb
			2,46	10,2			
			2,39	10,1		10,1	
			2,26	9,7	15,5	10,0	
574—590 reines gelb	7,5 bis 9,3	gelb	2,12	9,3	12,9	9,9	gelb
			1,86	8,5		8,9	
			1,71	8,1		9,0	
			1,60	7,7	10,8	7,6	
						7,3	
527—574 grüngelb	6,9 bis 7,5	bläugelb gelbgrün	1,53	7,5	10,7		grüngelb
			1,53	7,5			
			1,47	7,3		6,5	
517—527 reines grün 486—517 blaugrün	6,5 bis 6,9	grün		6,5			
467—486 cyanblau	5,0 bis 6,5	blau		5,3			
431—467 indigo darunter purpur	4 bis 5,0	purpur		4,9			

1) H. v. Helmholtz, Physiologische Optik, III. Aufl. 1911, Bd. 2, S. 54 u. 63.

lichen Schätzungen. Die Unterscheidung zwischen orangegelb und orange wurde fallen gelassen, da auch Helmholtz sie nicht durchführt. In Kolonne 3 stehen die Messungsergebnisse für die Fallgeschwindigkeit von Silberkugeln, deren beobachtete Farbe festgelegt wurde; daneben die aus der Fallgeschwindigkeit nach dem Widerstandsgesetz berechneten Radien. Auch die nach der Theorie der Brownschen Bewegung aus denselben Versuchsdaten errechneten Radien wurden hinzugefügt, zum Vergleiche sind außerdem auch einige Messungen, welche Ehrenhaft¹⁾ an Silberpartikeln ausgeführt hat, angegeben.

Aus Tabelle II geht hervor, daß aus diesen, nach den tatsächlichen Verhältnissen des Experiments korrigierten Berechnungen der Radien von Silberpartikeln aus der optischen Theorie eine noch verbesserte Übereinstimmung mit den auf mechanischem Wege auf Grund des Widerstandsgesetzes ermittelten Radien folgt.

Die Anwendung der hier erörterten Methode zur Bestimmung der resultierenden Farbe submikroskopischer Partikel erscheint besonders bei den von J. Parankiewicz²⁾ berechneten Ausstrahlungskurven kleinster Schwefelkugeln angezeigt, welche mitunter mehrere Maxima aufweisen.

Es wurden daher für 12 Schwefelpartikel im Intervalle $8-20 \cdot 10^{-6}$ cm Radius die Farben auf dieselbe Weise berechnet. Es ergab sich die folgende Zuordnung:

Tabelle III.

Radius $a \cdot 10^6$ cm	Ordinaten des Punktes im Farben- dreieck		Wellen- länge	Farbe
	x	y		
8	28,0	12,1	kompl. 568	purpur
9	29,4	11,0	kompl. 567	violett
10	29,1	12,3	481	
11	26,2	13,4	482	cyan
12	23,0	15,8	573	grün
13	21,7	16,1	580	grüngelb
14	21,3	15,5	590	gelb
15	21,3	14,7	603	
16	20,1	16,3	599	gelb, Stich ins
17	19,3	16,5	598	orange
18	19,1	16,0	592	
19	18,4	17,1	585	Eigenfarbe
20	17,1	17,2	589	

Aus dieser Tabelle kann man folgendes entnehmen: Die Farbe von Schwefelteilchen der

1) F. Ehrenhaft, diese Zeitschr. 18, 353, 1917; Ann. d. Phys. 56, 53, 1918.

2) Vgl. eine demnächst in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie und in den Annalen der Physik erscheinende Abhandlung.

Größen $8-9 \cdot 10^{-6}$ cm fällt nach dieser Berechnung wieder auf die Purpurlinie; beobachtet wurden bisher nur violette Partikel, die von I. Parankiewicz der Tabelle 21 der Radeschen Farbenskala zugeordnet wurden; Partikel vom Radius 9—11 sind blau, solche vom Radius 11—12 blaugrün bis grün, die Größen $12-13 \cdot 10^{-6}$ cm zeigen grüngelbe Farbe im Übergang zu gelb, $13-15 \cdot 10^{-6}$ cm ist tiefgelb, größere Partikel vom Radius 15—17 10^{-6} cm weisen einen Stich ins orange auf; Partikel vom Radius $18 \cdot 10^{-6}$ cm aufwärts zeigen wieder eine gelbliche Färbung, welche der Farbe des makroskopischen Schwefels sehr ähnlich erscheint. Um darüber Klarheit zu schaffen, ob bei dieser Größenordnung tatsächlich das Beugungsphänomen aufhört und die „Eigenfarbe“ des Schwefels, d. h. in diesem Falle die Farbe, welche makroskopischer Schwefel im Bogenlampenlicht reflektiert, auftritt, wurde die Wellenlänge des vom Schwefel unter diesen Umständen direkt reflektierten Lichtes auf folgende Weise ermittelt: Nach der Fresnelschen Reflexionsformel

$$R = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2$$

wurde das Reflexionsvermögen R des Schwefels aus seinen Brechungsexponenten¹⁾ für verschiedene Wellenlängen berechnet und aus dem so erhaltenen Reflexionsspektrum, bezogen auf das Bogenlampenspektrum, in der hier bereits erörterten Weise die physiologische Mischfarbe, welche makroskopischer Schwefel im direkt reflektierten Bogenlampenlicht zeigt, ermittelt. Es ergab sich die Wellenlänge $592 \mu\mu$, während Schwefelteilchen vom Radius $18-20 \cdot 10^{-6}$ cm (Tabelle III) die gleiche Farbe ergeben.

Damit scheint mir der Beweis erbracht, daß die durch Beugung hervorgerufenen Farben submikroskopischer Teilchen schon von der

Tabelle IV.

Beobachtete Farbe	Radius aus dem Widerstands- gesetz $f=0$	Radius aus der optischen Theorie
blauviolett	8,83 8,83	8—9
blau	10,13 10,54 10,94	9—11
blaugrün	11,53 11,60 11,68	blaugrün bis grün
grün	12,21 12,45	11—12
gelb	15,40	13—15
orange	17,43	15—18

1) Interpoliert nach H. E. Mervin und E. L. Larsen, Amer. Journ. Soc. [4] 34, 43.

Größe $18 \cdot 10^{-6}$ cm ab in die Farbe des kompakten Materials übergehen.

In Tabelle IV werden einige Bestimmungen der Größe von Schwefelpartikeln aus Fallgeschwindigkeit und Farbe nach Messungen von I. Parankiewicz¹⁾ angeführt.

Es ergeben sich aus diesen Beobachtungen, bei denen die Farbe jedes einzelnen Partikels durch Vergleich mit der Radde'schen Farbenskala konstatiert wurde, Resultate für die Radien, welche in Übereinstimmung mit den Resultaten der hier erörterten optischen Methode stehen.

Zusammenfassung.

Durch Anwendung der Helmholtz-Young'schen Grundempfindungstheorie kann die physiologisch resultierende Farbe eines berechneten Ausstrahlungsspektrums ermittelt werden.

Diese Methode wird im speziellen Falle angewendet, um aus den Ausstrahlungsspektren submikroskopischer Silber- und Schwefelkugeln, welche aus der Beugungstheorie berechnet wurden, die bei Beobachtung mit Bogenlampenbeleuchtung erscheinende Farbe zu bestimmen. Diese Bestimmung wird durch Resultate des Experiments geprüft, indem die Größe dieser Kugeln einerseits auf mechanischem Wege, andererseits durch Beobachtung ihrer Farbe bestimmt wird. Beide Größen stimmen überein. Die bisher angewandte Farbenschätzung aus den Maximis der Ausstrahlungskurven ergibt im wesentlichen dieselben Resultate wie die hier auseinandergesetzte genauere Methode optischer Größenbestimmung.

Es ergibt sich ferner auch auf diesem Wege, daß bereits bei Partikeln der Größe unterhalb Lichtwellenlänge die durch Beugung hervorgerufene Farbe in die Farbe des massiven Materials übergeht.

1) I. Parankiewicz, l. c.

Wien, I. Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 18. Mai 1918.)

Bemerkung zu der Arbeit von Irene Parankiewicz: „Größen und elektrische Ladungen von kleinen Schwefel-, Selen- und Quecksilberkugeln, bestimmt aus deren Fallgeschwindigkeit und Farbe“¹⁾.

Von R. Bär.

Fräulein Parankiewicz berechnet in dieser Arbeit Größe und Ladung ultramikroskopischer

1) Diese Zeitschr. 18, 567, 1917.

Partikeln aus dem Stokes-Cunninghamschen Widerstandsgesetz für $f=0$ (die Größe f bedeutet das Verhältnis der Zahl der elastischen zur Zahl aller Zusammenstöße der Partikel mit den Gasmolekeln). Unabhängig davon erhält sie ungefähr denselben Wert für den Teilchenradius aus der Mieschen Beugungstheorie. Als kleinste Ladung eines Teilchens findet Fräulein Parankiewicz auf diese Weise den 1800ten Teil des supponierten Elementarquantums, nämlich $2,68 \cdot 10^{-13}$ statt $4,77 \cdot 10^{-10}$ elektrost. Einh. Aus den am Ende der Arbeit mitgeteilten Meßprotokollen für die fünf kleinsten Hg-Teilchen läßt sich Radius und Ladung derselben aber auch aus der Brownschen Bewegung berechnen, und wenn Fräulein Parankiewicz die hieraus sich für die Ladungen der Teilchen ergebenden Werte nicht mitteilt, so geschieht dies sicher nur deswegen, weil eine genaue Berechnung derselben aus den 10—18 beobachteten Fall- und Steigzeiten nicht möglich ist. Aber über die Größenordnungen der Ladungen muß man auf diesem Wege Aufschluß erhalten.

Ich finde nun unter Benutzung der von Weiß¹⁾ angegebenen Formeln und mit $N = 6,06 \cdot 10^{23}$, $R = 8,31 \cdot 10^5$, $T = 293$ folgende Werte für die Ladungen der Teilchen (e_f , e_s , e = Ladung, berechnet bzw. aus den Fall-, Steig-, Fall- und Steigzeiten):

Teilchen-Nr.	Zahl der Fallzeiten	$e_f \cdot 10^{10}$	Zahl der Steigzeiten	$e_s \cdot 10^{10}$	$e \cdot 10^{10}$	Von Fräulein Parankiewicz berechnete Ladung nach Stokes-Cunningham
12	8	1,86	7	2,74	2,19	$2,68 \cdot 10^{-13}$
10	10	1,77	7	9,15	2,65	$3,09 \cdot 10^{-13}$
1	6	1,40	5	4,70	2,06	$9,7 \cdot 10^{-13}$
13	9	4,72	9	6,59	5,50	$44,4 \cdot 10^{-13}^*)$
9	6	0,88	4	1,38	1,03	$15,2 \cdot 10^{-13}$

*) Berechnet von R. Bär.

Nach den von Schrödinger²⁾ für die Fehlerabschätzung gegebenen Formeln findet man, daß diese Werte für die Ladungen auf ca. 40—70 Proz. genau sind. Wir sehen also:

Die aus der Brownschen Bewegung errechneten Werte für die Ladungen dieser kleinsten bisher beobachteten ultramikroskopischen Partikeln sind durchaus noch von der Größenordnung des Millikanschen Wertes für das Elementarquantum.

1) E. Weiß, Sitzber. d. Wien. Akad. 120, 1029, 1911.

2) E. Schrödinger, diese Zeitschr. 16, 294, 1915.

Zürich, Physik. Institut der Universität.

(Eingegangen 1. Juni 1918.)

Über den Widerstand gewisser zusammengesetzter körperlicher Leiter.

Von Karl Lichtecker.

Durch Arbeiten von Guertler¹⁾, mir²⁾ und Benedicks³⁾ ist es von Interesse geworden, den Widerstand gewisser körperlicher, bzw. flächenhafter Leiter näher zu untersuchen. Guertler hat in der angeführten Abhandlung meines Wissens zuerst die Frage nach dem elektrischen Widerstand eines zusammengesetzten Leiters behandelt, dessen Bestandteile in einer tesseralen Raumgitteranordnung, also schachbrettartig verteilt sind. Er wies darauf hin, daß wenn w_1 und w_2 die spezifischen, auf die Volumeinheiten bezogenen Widerstände der beiden Bestandteile sind, eine Zerlegung des räumlichen Leiters nach Stangen in der Stromrichtung auf den spezifischen Widerstand der Kombination

$$w = \frac{w_1 + w_2}{2}$$

führen würde, eine Zerlegung nach Platten senkrecht zur Stromrichtung dagegen, für den spezifischen Widerstand derselben Kombination, den Wert

$$w = \frac{2 w_1 w_2}{w_1 + w_2}$$

liefern würde (Fig. 1).

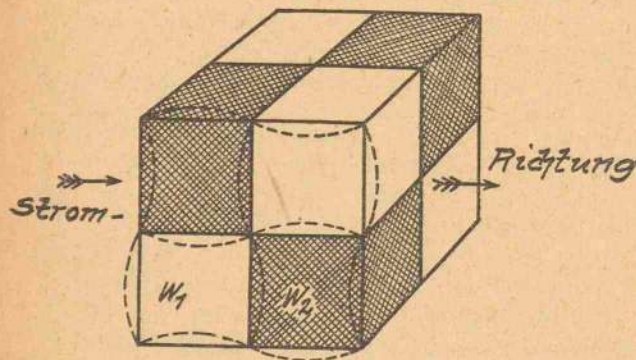


Fig. 1.

Als Begründung für diese Diskrepanz gibt Guertler richtig an, daß weder die eine noch die andere Zerlegung statthaft ist, sondern nur eine solche nach Stromfäden oder nach Flächen gleichen Potentials, so daß dem zusammengesetzten Leiter in Wirklichkeit weder der Widerstand

$$\frac{w_1 + w_2}{2}$$

1) W. Guertler, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 5, 17, 1908.

2) K. Lichtecker, diese Zeitschr. 10, 1005, 1909.

3) C. Benedicks, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 13, 351, 1916.

noch

$$\frac{2 w_1 \cdot w_2}{w_1 + w_2}$$

zukommt, sondern ein von beiden verschiedener, zwischen denselben liegender Wert, über den Guertler nähere Angaben in der angeführten Arbeit nicht macht. Nach den Messungen Matthiesens weisen die Legierungen der „mischkristallfreien“ Klasse von gleichem Volumanteil beider Bestandteile ebenfalls einen Widerstand auf, der in jedem Falle zwischen den durch

$$\frac{w_1 + w_2}{2} \text{ und } \frac{2 w_1 \cdot w_2}{w_1 + w_2}$$

gegebenen Grenzen bleibt. Insofern also steht das Verhalten der Legierungen von Metallen der mischkristallfreien Gruppe im Einklang mit dem zum Vergleich herangezogenen Schachbrettmodell.

Dies bot mir¹⁾ Anlaß zu untersuchen, ob sich der wahre Wert des Widerstands des Guertlerschen Modells nicht mit größerer Annäherung als durch die beiden oben genannten Grenzwerte berechnen läßt, um zu prüfen, inwieweit auch dann noch eine Übereinstimmung zwischen den Widerstandswerten der Legierungen und denen des gewählten Modells vorliegt. Bei dieser, unter durchaus einfachen Annahmen gemachten Rechnung ergaben sich Werte für den Widerstand des tesseralen Modells, die eine sehr weitgehende Übereinstimmung mit den von Matthiesens an Legierungen gemessenen zeigen.

Ich habe mich damals begnügt, auf diese Übereinstimmung hinzuweisen; die Möglichkeit, die Abweichung der Widerstandswerte der bezeichneten Legierungen vom arithmetischen, bzw. harmonischen Mittel durch Schwankungen des Stromfadenquerschnitts, bzw. Übergreifen der Stromfäden über die Materialgrenzen zu deuten, war dadurch ohne Zweifel gestützt.

Im Vorjahre hat nun C. Benedicks²⁾ eine Abhandlung veröffentlicht, welche eine Methode zur experimentellen Messung von Widerständen flächenhafter Leiter enthält, die aus Bestandteilen von verschiedener spezifischer Leitfähigkeit zusammengesetzt sind. Als Leiter dient ausschließlich Quecksilber und die verschiedene spezifische Leitfähigkeit ist dadurch erreicht, daß durch nichtleitende, eingesenkte Platten verschiedener Gestalt die Dicke der leitenden Quecksilberschicht an verschiedenen Stellen verschieden groß gemacht wird. Bei einer Reihe dieser Versuche war die Leiterkombination eine derartige, daß der eine der beiden Bestandteile

1) a. a. O.

2) C. Benedicks, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 13, 351, 1916.

ein in sich vollkommen zusammenhängendes Ganzes bildete, der andere der beiden Bestandteile dagegen in Form von Kreisen, Rechtecken usw. im ersteren eingesprengt war. Das qualitative Ergebnis dieser, nach seiner Methode ausgeführten Messungen faßte C. Benedicks zusammen, wie folgt:

I. Ist der eingesprengte Bestandteil der besser leitende, so ist die Leitfähigkeit der Kombination bedeutend geringer, als dem linearen Gesetz für die Leitfähigkeit entspräche, der Widerstand dagegen „kommt einer Geraden ziemlich nahe“.

II. Ist der eingesprengte Bestandteil der schlechtere Leiter, so zeigt sich „die Leitfähigkeit, soweit die Genauigkeit der Bestimmung ein Urteil gestattet, als eine lineare Funktion der Zusammensetzung“.

Aus diesem Ergebnis, zusammengekommen mit der Tatsache, daß die Widerstände der Metallegierungen nach Matthiesen sich mit größerer Annäherung mit der Annahme linearer Leitfähigkeit als mit der Annahme linearen Widerstandes vereinbaren lassen, schloß Benedicks, daß in der Natur bei den Legierungen der Fall II realisiert sein müsse und daß somit das Guertlersche Modell mit der Erfahrung unvereinbar sei. Veranlaßt durch meinen Hinweis¹⁾ darauf, daß die in der genannten Arbeit von Benedicks mitgeteilten qualitativen Ergebnisse keine geeignete Grundlage bieten, um die Frage nach der Größe des Metallegierungswiderstandes im Intervall

$$\frac{w_1 + w_2}{2} \text{ bis } \frac{2 w_1 \cdot w_2}{w_1 + w_2}$$

noch auch um die Frage nach der prinzipiellen Zulässigkeit des Guertlerschen Modells zu entscheiden, hat nun C. Benedicks²⁾ sich in dankenswerter Weise veranlaßt gesehen, quantitatives Versuchsmaterial nach der in seiner erstgenannten Arbeit dargelegten Methode zu veröffentlichen. In diesem Zusammenhange sind die Mitteilungen über jene Versuche von besonderem Interesse, welche ein von diesem Autor experimentell verifiziertes Schachbrettmodell betreffen. Die Meßergebnisse des genannten Forschers stimmen mit den von ihm nach meiner Methode neuerdings errechneten durchaus nicht überein. Sie sind aber auch, wie im folgenden gezeigt wird, mit gewissen fundamentalen theoretischen Sätzen im Widerspruch. Im Verlauf dieser Untersuchung werden die Prinzipien, nach denen für den Widerstand eines tesseralen Ag-

gregats eine obere und untere Grenze herzu-
leiten ist, zu verallgemeinern sein (I). Für eine besondere Anordnung dieser Art, die den Versuchen von C. Benedicks zugrundeliegt, werden diese beiden Grenzwerte neu berechnet werden (II). Aus dem Vergleich der so gefundenen Werte mit den Meßresultaten von Benedicks werden Schlüsse über die Experimentalmethode von Benedicks, über die von dem genannten Forscher daraus abgeleiteten allgemeinen Sätze, sowie schließlich über die Verwendbarkeit und den Genauigkeitsgrad von Lichtenekers Rechnungsmethode zu ziehen sein (III).

Im letzten (IV.) Abschnitt schließlich wird von den tesseralen (Schachbrett-)Modellen ein Übergang zu sehr allgemeinen Aggregaten und damit zu wirklichen Legierungen hergestellt. Es wird ein allgemeiner Satz aufgestellt werden, welcher für solche Aggregate theoretische Grenzwerte des Widerstandes kennen lehrt, und der die Berechtigung hervortreten läßt, bei Betrachtungen über Legierungswiderstände tesserale Modelle heranzuziehen.

I. Theoretische Grenzen für den Widerstand des schachbrettförmigen Modells.

Nach einer Feststellung von Maxwell¹⁾ hat Rayleigh²⁾ als erster eine Methode angegeben, welche gestattet, für beliebige körperliche Leiter sowohl mit konstantem als auch mit von Punkt zu Punkt veränderlichem spezifischen Widerstand eine obere und eine untere Grenze des Widerstandes anzugeben. Die Methode beruht auf zwei allgemeinen Sätzen, von denen (I) eine untere, (II) eine obere Grenze für den Widerstand des körperlichen Leiters festlegt und welche hier wörtlich nach Maxwells Darstellung angeführt werden müssen.

(I.) „Zieht man in dem Leiter eine Reihe von Flächen, deren erste mit der Fläche der ersten Elektrode und deren letzte mit der Fläche der zweiten Elektrode zusammenfällt, während die Zwischenflächen in dem nichtleitenden Teil der Oberfläche des Konduktors enden und einander nicht durchsetzen; denkt man sich ferner jede dieser Flächen als aus einer dünnen Schicht einer vollkommen leitenden Substanz bestehend, so erhält man ein System, dessen Widerstand sicher nicht größer als der des ursprünglichen Konduktors ist, dessen Widerstand aber dem des Konduktors gleich wird, wenn die eingeführten Flächen mit den äquipotentiellen Flächen des Konduktors in seinem natürlichen Zustande zusammenfallen.“

1) K. Lichteneker, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 14, 466, 1917.

2) C. Benedicks, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 14, 470, 1917.

1) J. C. Maxwell, Treatise, Deutsche Ausgabe I, S. 442.

2) Rayleigh, Phil. Trans, 1871, S. 77.

(II.) „Um noch eine obere Grenze für den Widerstand angeben zu können, legen wir wieder innerhalb des Konduktors Flächen, die wir aber diesmal als für Elektrizität vollkommen undurchgängig annehmen. Zwei Systeme solcher Flächen zerlegen den Konduktor in einzelne Röhren, die den Strom der Elektrizität regulieren. Dadurch wird der Widerstand des Konduktors vermehrt und bleibt nur dann ganz ungeändert, wenn diese Flächen mit den Stromflächen des Leiters, die Röhren also mit den Stromröhren in seinem natürlichen Zustande zusammenfallen. Summiert man dann die Reziproka der Widerstände der einzelnen Röhren, so erhält man eine untere Grenze für den reziproken Betrag des Widerstands des Konduktors in seiner natürlichen Beschaffenheit.“ Man sieht ohne weiteres, daß es genau diese beiden Rayleighschen Grenzwerte des Widerstandes sind, die wir für den Leitungswiderstand des schachbrettförmigen Aggregats oben mit

$$\frac{w_1 + w_2}{2} \text{ und } \frac{2 w_1 \cdot w_2}{w_1 + w_2}$$

angegeben haben.

Der erstere beider Werte für den Widerstand würde sich nämlich ergeben, wenn die einzelnen Elementarsäulen in der Stromrichtung mit nichtleitenden Hüllen umgeben und dadurch zu Stromfäden gemacht würden; den letzteren Wert erhält man, wenn man sich zwischen die einzelnen Elementarplatten der tesseralen Raumgitteranordnung senkrecht zur Stromrichtung beliebig dünne Platten von unendlich großer Leitfähigkeit eingelegt denkt und diese Begrenzungsebenen der Elementarschichten so zu Äquipotentialflächen macht.

Nun hat C. Benedicks laut seiner zuletzt erschienenen Arbeit¹⁾ einen zweidimensionalen schachbrettförmigen Leiter, bzw. ein Elementargebiet eines solchen, experimentell verifiziert und die quantitativen Ergebnisse dieser Messungen nunmehr veröffentlicht. Beim ersten der beiden in Betracht kommenden Versuche werden zwei Leiter zur Zusammenstellung des „Schachbrettmodells“ benützt, deren spezifische Widerstände $w_2 = 109,4$, $w_1 = 54,7$ betragen (a. a. O. Seite 481 Tabelle IX, erste Zeile). Es ist somit von vornherein zu erwarten, daß, wie groß auch immer der experimentelle Wert der Kombination beider Leiter durch den Versuch sich ergeben möge, er doch sicher irgendwo zwischen den beiden vorbesprochenen Grenzwerten

$$\frac{w_1 + w_2}{2} = 82,1 \text{ und } \frac{2 w_1 \cdot w_2}{w_1 + w_2} = 72,9$$

¹⁾ C. Benedicks, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 14, 470, 1917.

liegen muß. Benedicks findet jedoch für den Widerstand seines Schachbrettmodells 86,6! Bei dem anderen der beiden mitgeteilten Versuche (dieselbe Tabelle dritte Zeile) sind die spezifischen Widerstände der beiden Leiter $w_2 = 109$ und $w_1 = 29,7$. Die durch die Theorie festgelegten Grenzwerte, innerhalb deren der Widerstand der Kombination liegen müßte, sind

$$\frac{w_1 + w_2}{2} = 69,6 \text{ und } \frac{2 w_1 \cdot w_2}{w_1 + w_2} = 46,7;$$

der Versuch ergab jedoch 69,9; also auch in diesem Falle einen außerhalb des theoretischen Intervalls liegenden Wert.

Es bleibt allerdings noch ein Umstand zu diskutieren, welcher möglicherweise diese Diskrepanz erklären könnte. Die beiden Grenzwerte für das Schachbrettmodell

$$\frac{w_1 + w_2}{2} \text{ und } \frac{2 w_1 \cdot w_2}{w_1 + w_2}$$

sind unter der Voraussetzung abgeleitet, daß die Stromrichtung parallel zur Richtung der Quadratseiten verläuft. Bei der Versuchsanordnung von C. Benedicks ist jedoch die Stromrichtung parallel zur Diagonale der Quadrate, somit um 45° gedreht. Zur vollständigen Deutlichkeit ist das Fundamentargebiet der Versuchsanordnung von Benedicks in Fig. 2 gekennzeichnet. Nun hat schon Maxwell¹⁾ gelegent-

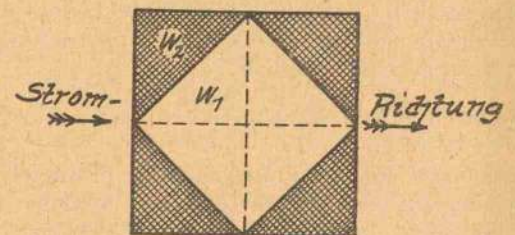


Fig. 2.

lich der Behandlung des elektrischen Widerstandes körperlicher Leiter, die aus Aggregaten verschiedener spezifischer Leitfähigkeit bestehen, darauf hingewiesen, daß der Widerstand im allgemeinen bei gleichbleibender Raumverteilung der beiderlei Bestandteile von der Stromrichtung nicht unabhängig ist, sobald die Volumkonzentration des einen Bestandteils nicht die des anderen weitaus überwiegt. Es ist daher zu untersuchen, welche theoretischen Grenzwerte sich für den Widerstand der schachbrettförmigen Anordnung für diese Stromrichtung (parallel zur Diagonale) ergeben; insbesondere, ob das in Frage stehende Intervall innerhalb des früheren gelegen ist. Wegen der Notwendig-

¹⁾ J. C. Maxwell, Treatise. Deutsche Ausgabe I, S. 457.

keit auf diese Frage einzugehen, ist eingangs bei der Behandlung des schachbrettförmigen Modells über das früher von Guertler und mir gemachte Raisonement hinaus auf das allgemeine Rayleighsche Prinzip übergegangen worden, von welchem aus beide Fälle sich als Spezialfälle behandeln lassen.

II. Berechnung des Widerstandes eines Quadrates, bestehend aus zwei, durch eine Diagonale begrenzten Hälften von verschiedenem spezifischen Widerstand.

Um zunächst eine untere Grenze w_u für den Widerstand zu finden, zerlegen wir durch Einschieben von absoluten Leitern in hintereinander geschaltete Schichten von der Breite dx (Fig. 3). Für die Leitfähigkeit dl einer solchen

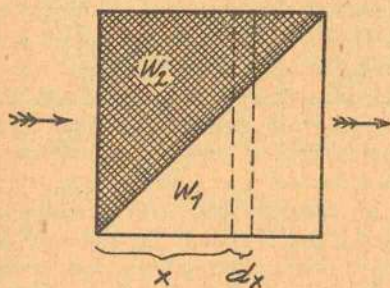


Fig. 3.

Schicht im Abstände x hat man, wenn mit l_1 und l_2 die spezifischen Leitfähigkeiten der Bestandteile bezeichnet werden,

$$dl = \frac{x}{dx} l_1 + \frac{1-x}{dx} l_2,$$

somit der Widerstand der Schicht

$$dw = \frac{dx}{x(l_1 - l_2) + l_2}$$

und der Gesamtwiderstand

$$w_u = \int_0^1 \frac{dx}{x(l_1 - l_2) + l_2} = \frac{1}{l_1 - l_2} \cdot \lg \frac{l_1}{l_2};$$

oder durch die Widerstände w_1 und w_2 der beiden Bestandteile ausgedrückt,

$$w_u = \frac{w_1 \cdot w_2}{w_2 - w_1} \cdot \lg \frac{w_2}{w_1}.$$

Ähnlich ergibt sich für die obere Grenze w_o des Widerstandes bei Zerlegung in voneinander isolierte, nebeneinander geschaltete Stromfäden von der Breite dx (Fig. 4):

$$dw = \frac{x w_2 + (1-x) w_1}{dx}$$

$$dl = \frac{dx}{x w_2 + (1-x) w_1}$$

$$l = \int_0^1 \frac{dx}{x w_2 + (1-x) w_1} = \frac{1}{w_2 - w_1} \cdot \lg \frac{w_2}{w_1}$$

und somit

$$w_o = \frac{w_2 - w_1}{\lg \frac{w_2}{w_1}}.$$

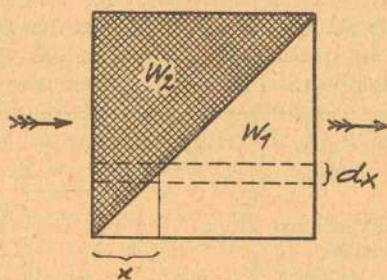


Fig. 4.

III. Vergleichende tabellarische und graphische Darstellung des gesamten Zahlenmaterials. — Folgerungen.

Nun sind die Werte der Widerstände w_1 und w_2 einzusetzen und aus den eben abgeleiteten Formeln w_u und w_o auszuwerten. Die Resultate dieser Rechnung sind sowohl numerisch in der folgenden Tabelle, als auch graphisch in Fig. 5 enthalten. Es ergibt sich, daß das neue Intervall ganz innerhalb des vorigen, und zwar vollkommen symmetrisch in der Mitte desselben liegt. Die von C. Benedicks experimentell ermittelten Werte, die schon außerhalb des großen Intervalls gelegen sind, liegen natürlich noch viel mehr außerhalb dieses kleinen Intervalls.

Die nach meiner Methode von Benedicks errechneten Werte dagegen liegen nicht bloß im Innern des großen, sondern auch sehr gut in der Mitte des kleinen Intervalls.

1) Vergleicht man die Ausdrücke für die beiden Grenzwerte w_o und w_u , die sich für jede der zwei betrachteten Stromrichtungen ergeben, so hat man:

$$(Strom parallel der Kante) \quad w_o \cdot w_u = \frac{w_1 + w_2}{2} \cdot \frac{2 w_1 w_2}{w_1 + w_2} = w_1 w_2 \text{ und}$$

(Strom parallel der Diagonale)

$$w_o \cdot w_u = \frac{w_1 w_2}{w_2 - w_1} \cdot \lg \frac{w_2}{w_1} \cdot \frac{w_2 - w_1}{\lg \frac{w_2}{w_1}} = w_1 w_2;$$

d. h.: das geometrische Mittel der Grenzwerte des Gesamtwiderstandes ist in beiden Fällen übereinstimmend gleich dem geometrischen Mittel der Widerstände der Komponenten. Dieses Ergebnis ist insofern von besonderem Interesse, als meine Rechnungsmethode für den zweidimensionalen Fall gerade auf das geometrische Mittel von w_1 und w_2 als den wahren Wert des Gesamtwiderstandes führt, wie Herr C. Benedicks a. a. O. S. 480 gezeigt hat.

Die von dem genannten Forscher gefundenen Werte sind in der folgenden Tabelle wiedergegeben¹⁾, außerdem aber auch der leichteren Vergleichbarkeit und Durchsichtigkeit halber so umgerechnet, daß der Widerstand der besser leitenden Komponente gleich 1 gesetzt ist. Von mir neu hinzugefügt sind nur die oberen und unteren möglichen Grenzwerte für den Widerstand, die sich ergeben, wenn die Stromrichtung a) parallel den Quadratseiten, b) parallel der Diagonale der Quadratseiten verläuft. Für den ersteren der beiden

vorliegenden Versuche von Benedicks sind die Werte außerdem auch graphisch in Fig. 5 zusammengestellt.

Da die Richtigkeit der Rayleigh-Maxwell'schen Sätze, auf denen die hier berechneten oberen und unteren Grenzwerte für den Widerstand beruhen, nicht in Zweifel gezogen werden kann, muß aus diesem Ergebnis gefolgert werden:

1. Der theoretisch verlangte Fall des schachbrettförmigen Leiters kann durch die bisher veröffentlichten Versuche nach der Benedicks-

Nr. der Versuchs- scheibe	Widerstand der Bestandteile		Theor. mögl. Grenzwerte des Widerstands				Berechnet von Bene- dicks nach Lichten- eckers Methode	Experim. gemessen von Benedicks
	w_2	w_1	a) Strom parallel der Seiten		b) Strom parallel der Diagonale			
			obere Gr.	untere Gr.	obere Gr.	untere Gr.		
			$\frac{w_1 + w_2}{2}$	$\frac{2 w_1 w_2}{w_1 + w_2}$	$\frac{w_2 - w_1}{\lg \frac{w_2}{w_1}}$	$\frac{w_1 w_2}{w_2 - w_1} \cdot \lg \frac{w_2}{w_1}$		
6 auf $w_1 = 1$ umgerechnet	109,4 2	54,7 1	82,1 1,5	72,9 1,33	78,77 1,44	76,03 1,39	77,4 1,41	86,6 1,58
7 auf $w_1 = 1$ umgerechnet	109,4 3,69	29,7 1	69,6 2,34	46,7 1,57	2,06	1,79	57,0 1,92	69,9 2,36

Graphische Darstellung des Legierungswiderstands für den Fall einer Legierung gleicher Raunteile zweier Metalle, deren Widerstände sich wie 1 : 2 verhalten:

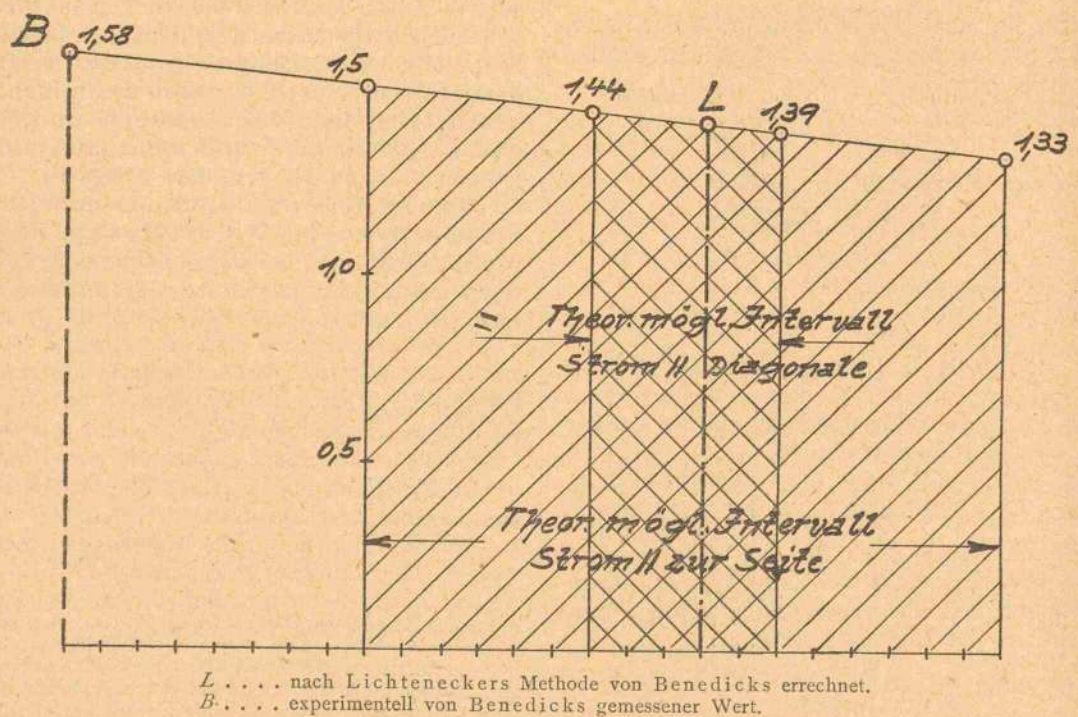


Fig. 5.

1) Unverändert der Tabelle IX der Benedicksschen Arbeit, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 14, 481, 1917 entnommen.

schen Methode nicht als genügend realisiert betrachtet werden, da die experimentellen Werte in beiden Fällen erheblich größer ausfallen, als theoretisch möglich ist. Bei aller Enthaltung von einer Kritik an den nicht näher bekannten Einzelheiten der Versuchsanordnung des genannten Forschers sei darauf hingewiesen, daß alle Fehlerquellen, die sich aus unvollständiger Raumauffüllung infolge Kapillarität, adsorbierter Luftschichten und dergleichen an den in das Quecksilber eingesenkten Einlegekörpern ergeben, stets nur den Effekt haben können, den gemessenen Widerstand des zusammengesetzten Leiters gegenüber dem wahren Werte zu vergrößern¹⁾.

2. Damit kommen aber auch die experimentellen Grundlagen für jene Schlußfolgerungen in Wegfall, welche C. Benedicks aus den übrigen, nach der gleichen Arbeitsmethode angestellten Versuchen zieht, wonach sich exakte Linearität der Leitfähigkeit ergeben sollte, wenn der schlechtere der beiden Elektrizitätsleiter eingesprenkt, mindestens aber der bessere Leiter ein zusammenhängendes Ganzes bildet. Daß dieses von Benedicks aus seinen Versuchen abgeleitete Ergebnis: Leitfähigkeit des Legierungswiderstands als lineare Funktion der Leitfähigkeiten der Bestandteile auch theoretisch von vornherein abzulehnen ist, wird im folgenden an Hand eines dort entwickelten allgemeinen Satzes dargetan werden.

3. Die von C. Benedicks nach meiner Methode aus dem Jahre 1909 errechneten Widerstandswerte für das zweidimensionale Schachbrettmodell dagegen stehen mit den theoretisch verlangten Grenzwerten im besten Einklang. Da diese beiden Grenzwerte für den Fall: Stromrichtung parallel der Diagonale bereits außerordentlich nahe zusammengedrückt sind, ist die volle Brauchbarkeit jener Rechnungsmethode für die Widerstandsberechnung der betrachteten Aggregate innerhalb dieser Grenzen erwiesen.

Es sei hier eine kurze Bemerkung angefügt. Herr Carl Benedicks erhob gegenüber

1) Daß die Ursache der theor. unmöglichen Messungsergebnisse in der angedeuteten Richtung zu suchen ist, wird durch eine Bemerkung von Herrn Benedicks über Konstanz und Reproduzierbarkeit seiner Messungen sehr wahrscheinlich gemacht. Er sagt (Seite 472): „Um diese gute Konstanz (der gemessenen Widerstandswerte nämlich) zu erzielen, ist es allerdings unbedingt notwendig, daß das Hg immer unter demselben Druck steht ($\pm 0,3$ mm); bei variierendem Druck treten Volumänderungen auf, welche den Widerstand merkbar beeinflussen.“ Da die aus massivem Zelluloid, Porzellan oder dergl. bestehende Meßkammer bei Druckänderungen von einigen mm Hg-Druck wohl kaum merkliche Volumänderungen erleiden konnte, bleibt nur die Vermutung übrig, daß die Raumauffüllung der Kammer durch das Hg eine variable, somit unvollkommene war.

meiner Rechnungsmethode neuerdings gewisse Einwendungen oder richtiger Bedenken. Sie richten sich gegen die vereinfachenden Annahmen, die der Berechnung zugrunde gelegt sind, und ohne welche eine Auswertung auf dem eingeschlagenen Wege eben nicht möglich ist. Eine Diskussion hierüber erübrigt sich m. E., zumal in dieser Hinsicht in meiner ersten Arbeit über den Gegenstand volle Klarheit herrscht. Wenn die Annahmen, die der Methode zugrunde liegen, einfach sind, die physikalische Wahrscheinlichkeit für sich haben und wenn dann die Ergebnisse der Rechnung mit der Erfahrung übereinstimmen, so ist das alles, was angestrebt wurde und werden konnte.

IV. Ein allgemeiner Satz über den Leitungswiderstand beliebiger homogener und isotroper Aggregate.

Bezüglich der Anwendbarkeit vorstehender Ergebnisse auf den Leitungswiderstand von Legierungen ist nun zu bemerken, daß der seinerzeit von mir entwickelten Rechnungsmethode die Willkürlichkeit der von Guertler eingeführten tesseralen (schachbrettförmigen) räumlichen Anordnung anhaftet, von der in keiner Weise erwartet werden kann, daß sie auch nur annähernd durch die Legierungsstruktur verifiziert wird. Es erscheint daher von Wichtigkeit, zu untersuchen, ob sich auch für eine beliebige Raumanordnung zweier Bestandteile von verschiedener spezifischer Leitfähigkeit theoretische Grenzen des Gesamtwiderstands angeben lassen und im besonderen, in welcher Beziehung solche etwaige Grenzwerte zu denen des Guertlerschen Modells stehen, das meiner Rechnungsmethode zugrunde gelegt ist.

Zunächst darf zweierlei vorausgesetzt werden. Erstens, daß die Struktur der Metallegierungen homogen ist: d. h. daß die Volumkonzentration beider Bestandteile in einem, gegen die die Legierung konstituierenden Teilchen großen Volumelemente in der ganzen Legierung konstant ist. Zweitens, daß die Struktur außerdem isotrop ist, d. h. daß sich keine bevorzugten Richtungen im Raume angeben lassen, in denen herausgeschnitten gedachte parallele Stromfäden Mengen der beiden Bestandteile durchsetzen, die untereinander wesentlich verschieden sind. Es ist offenbar, daß eine vollkommen regellose Anordnung beider Bestandteile bei hinreichend großer Zahl der konstituierenden Elementarteilchen beiden Bedingungen genügt, sowie weiters, daß die tesserale Anordnung z. B. wohl der Bedingung der Homogenität, nicht aber der des Isotropismus entspricht¹⁾.

1) Die Anordnung verhält sich jedoch trotzdem als isotrop, da man bei beliebiger Stromrichtung stets die

Wir betrachten daher ein homogenes und isotropes, im übrigen keinerlei beschränkenden Annahme über die Teilchen-Größe und -Gestalt unterworfenen Aggregat zweier Bestandteile mit 50proz. Volumkonzentration und beschränken uns zunächst der Einfachheit in der Darstellung halber auf das ebene Problem (Fig. 6). Denkt man sich aus der Flächeneinheit des Aggregats einen Streifen von der Breite dx in der Stromrichtung ausgeschnitten, wobei die Größenordnung des Teilchendurchmessers klein gegen die Abmessungen des aus dem Aggregat gebildeten körperlichen Leiters, dx selbst aber wieder klein ist gegen die Größenordnung der Teilchendurchmesser, so schneidet der betrachtete Streifen wegen der Homogenität der Anordnung gleich viel Material beider Bestandteile aus. Denkt man sich ferner in jedem Punkte, wo die Materialgrenzen den Stromfaden an seinem oberen oder unteren Rande schneiden, Normale zum Stromfaden gezogen, so zerfällt derselbe (A) in rechteckige Streifen, deren jeder nur aus einem Material besteht, (B) in solche rechteckige Streifen, die aus beiden Materialien zusammengesetzt sind, wobei eine Diagonale des Rechtecks die Materialgrenze bildet. Die Zahl der unter (A) und der unter (B) fallenden Teilchen ist genau gleich groß.

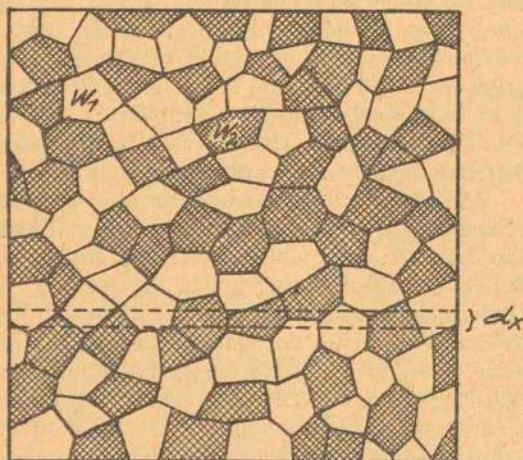


Fig. 6.

Da jedoch dx klein ist gegen die Größenordnung des Teilchendurchmessers Δr (oder wenn Teilchen verschiedener Größenordnung vorhanden sein sollten gegen die kleinste vertretene Größenordnung), so läßt sich zunächst zeigen, daß die Gesamtlänge der Teilchen (B)

Stromfäden zu Paaren so vereinigen kann, daß die einzelnen Paare untereinander sämtlich gleiche Mengen beider Bestandteile durchsetzen.

gegen die der Teilchen (A) verschwindend klein ist. Die Größenordnung der Teilchenlänge (A) stimmt überein mit der des Material-Teilchendurchmessers Δr . Die Teilchen (B) sind von verschiedenster Länge, so daß der Mittelwert der Teilchenlänge zu berechnen ist.

Bezeichnet φ den Spitzwinkel, den die Begrenzung zweier Materialteilchen mit dem sie durchsetzenden Stromfaden einschließt, so wäre zunächst für den Mittelwert der Länge $\bar{l}$ eines Teilchens (B) zu setzen

$$\bar{l} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} dx \operatorname{ctg} \varphi d\varphi.$$

Da aber wegen der begrenzten Ausdehnung der Materialteilchen größere Werte als

$$dx \operatorname{ctg} \varphi = \Delta r$$

nicht in Betracht kommen, ist die untere Grenze des Integrals der sehr kleine Winkel

$$\varphi = \operatorname{tg} \varphi = \frac{dx}{\Delta r} \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} \bar{l} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} dx \operatorname{ctg} \varphi d\varphi = \frac{2}{\pi} dx \left| \lg \sin \varphi \right|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2}{\pi} dx \lg \frac{\Delta r}{dx}. \end{aligned}$$

Da $\frac{\Delta r}{dx}$ groß gegen $\lg \frac{\Delta r}{dx}$ ist, sobald, wie ja ange-

nommen, $\frac{\Delta r}{dx}$ groß ist gegen 1, so ist die Teilchenlänge von (A) nämlich Δr groß gegen

$$dx \cdot \lg \frac{\Delta r}{dx},$$

d. h. gegen die mittlere Teilchenlänge $\bar{l}$ von (B) und, da die Teilchenzahl übereinstimmt, ist auch die Gesamtlänge der Teilchen (B) klein gegen die Gesamtlänge der Teilchen (A).

Der Gesamtwiderstand des Streifens von der Breite dx ist somit, da er von der Reihenfolge der hintereinander geschichteten Teilchen (A) natürlich unabhängig ist, gleich

$$\frac{w_1 + w_2}{2} \cdot \frac{1}{dx}.$$

Denkt man sich nun nach dem mehrfach verwendeten Rayleighschen Prinzip die Aggregat in lauter Streifen von der Breite dx zerlegt, die gegeneinander durch isolierende Zwischenlagen getrennt und parallel geschichtet sind, so erhält man für die Gesamtleitfähigkeit des Aggregats als untere Grenze

$$l = \int_0^1 \frac{2}{w_1 + w_2} dx$$

und somit für den spezifischen Widerstand die obere Grenze

$$w_0 = \frac{w_1 + w_2}{2}.$$

Analog liefert ein Streifen von der Breite dx senkrecht zur Stromrichtung die Leitfähigkeit

$$\frac{l_1}{2 dx} + \frac{l_2}{2 dx}$$

oder den Widerstand

$$\frac{2 w_1 w_2}{w_1 + w_2} \cdot dx,$$

woraus für die Flächeneinheit des Aggregats durch Hintereinanderschichtung mit Zwischenlagen von verschwindendem Widerstand als untere Grenze für den spezifischen Widerstand folgt:

$$w_u = \int_0^1 \frac{2 w_1 \cdot w_2}{w_1 + w_2} dx = \frac{2 w_1 \cdot w_2}{w_1 + w_2}.$$

Wegen der postulierten isotropen Beschaffenheit des Aggregats ist die Größe der beiden gefundenen Grenzwerte des Widerstandes von der Stromrichtung unabhängig. Wie man leicht einsieht, ist das obige Ergebnis ohne weiteres auf den räumlichen Fall übertragbar.

Es läßt sich somit allgemein aussprechen: Ein beliebiges homogenes Aggregat von der Volumkonzentration 50 Proz. hat einen Widerstand, der genau zwischen denselben Grenzen gelegen sein muß, wie der eines schachbrettförmigen Aggregats für den Fall Stromrichtung parallel der Seitenkante.

Es erscheint nun nicht mehr als zufällig, sondern als Konsequenz des eben abgeleiteten Satzes, daß, wie wir wissen, alle von Matthiesen ausgeführten Messungen von Legierungen Widerstände ergeben, die zwischen den beiden Grenzwerten des Guertlerschen Modells liegen. Damit ist aber auch erst die volle Berechtigung dargetan, das Guertlersche Modell den Betrachtungen über den Leitungswiderstand von Metallegierungen zugrunde zu legen. Es folgt auch weiters, daß der Widerstand der Legierung niemals einen der beiden festgelegten Grenzwerte erreichen kann; dies wäre nur bei vollständiger Koinzidenz der künstlichen Stromfäden bzw. Äquipotentialflächen mit den am natürlichen Körper vorhandenen möglich. Wie man sieht, ist die von Herrn C. Benedicks in dessen erster Abhandlung als Ergebnis seiner Ver-

suche aufgestellte Behauptung: Im Falle der besser leitende Bestandteil ein zusammenhängendes Ganzes in der Legierung bildet, sei die Leitfähigkeit der Legierung eine lineare Funktion der Leitfähigkeit der die Legierung bildenden Teile — schon aus theoretischen Gründen nicht haltbar. Es muß vielmehr daran festgehalten werden, was sich aus den Messungen von Matthiesen ergibt, deren sorgfältige Auswertung nach der Methode der kleinsten Quadrate und Eintragung in Diagrammkurven sich in meiner Arbeit vom Jahre 1909 findet und was auch schon von Guertler ausgesprochen worden ist: Der Widerstand aller Metalllegierungen, die keine Komplikationen durch Mischkristallbildung und dergleichen zeigen, liegt für gleiche Volumteile zwischen den Grenzen

$$\frac{w_1 + w_2}{2} \text{ und } \frac{2 w_1 w_2}{w_1 + w_2},$$

ohne eine derselben erreichen zu können.

Man sieht ohne weiteres, daß die hier dargelegte Überlegung nicht auf den Fall gleicher Volumprozent beschränkt ist, sondern sich auf ein beliebiges Mischungsverhältnis sinngemäß anwenden läßt. Als obere Grenze des Widerstandes ergibt sich in diesem allgemeinen Falle, wenn ϑ_1 und ϑ_2 die echten Brüche sind, welche die Volumkonzentration der beiden Bestandteile festlegen,

$$w_o = \vartheta_1 w_1 + \vartheta_2 w_2$$

und als untere Grenze

$$w_u = \frac{w_1 w_2}{\vartheta_2 w_1 + \vartheta_1 w_2}$$

wobei

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = 1.$$

Einen der Grenzwerte w_o und w_u selbst kann eine Legierung, wie aus der Bedeutung dieser Grenzwerte nach dem Rayleigh-Maxwellschen Prinzip hervorgeht, niemals erreichen. Die von uns gewählten, geradlinig geführten Schnitte können ja weder mit den Stromlinien noch Äquipotentiallinien zusammenfallen.

Der Legierungswiderstand mischkristallfreier Legierungen für beliebige Volumkonzentration somit ist allgemein weder durch Linearität des Widerstandes noch durch Linearität der Leitfähigkeit darstellbar, sondern durch eine Funktion, deren Werte innerhalb der durch diese beiden einfachen Funktionen festgelegten Werte liegen.

Über die neuerdings von Herrn C. Benedicks in die Diskussion einbezogene Möglichkeit, es könnten auch die von Matthiesen seinerzeit als mischkristallfrei bezeichneten

Metalllegierungen Spuren von Mischkristallbildung aufweisen, zu urteilen liegt naturgemäß nicht im Rahmen dieser Untersuchung. Es muß jedoch festgestellt werden, daß Herr C. Benedicks in seiner ersten ausführlichen Abhandlung diese Möglichkeit nicht einmal andeutungsweise ins Auge faßt und sie erst nachträglich vorbringt, um die ausgezeichnete Übereinstimmung der von mir theoretisch errechneten Werte mit den seinerzeitigen Messungen von Matthies zu entkräften.

Zusammenfassung.

Die Arbeit enthält:

1. Eine kurze Zusammenfassung des bisher über den Leitungswiderstand „künstlicher“ oder natürlicher Legierungen Veröffentlichten. (Bei Ausschluß sekundärer Effekte.)

2. Die Berechnung einer, ein sehr enges Intervall einschließenden oberen und unteren Grenze des Widerstands für eine neue schachbrettförmige Leiterkonstellation, mit welcher C. Benedicks experimentelle Messungen ausgeführt hat.

3. Eine Zusammenstellung a) der aus den Versuchen mit tesseralen Modellen sich ergebenden Zahlenwerte des Widerstands, b) der theoretisch in der vorliegenden Arbeit festgelegten Grenzwerte für denselben, und schließlich c) der von C. Benedicks nach einer Methode des Verf. berechneten Widerstandswerte.

Aus dieser Zusammenstellung ergibt sich:

4. Die von C. Benedicks nach dessen experimenteller Methode gemessenen Widerstandswerte liegen nicht nur außerhalb des von Guertler festgelegten Intervalls, sondern um so mehr außerhalb der für den vorliegenden Fall in dieser Arbeit berechneten theoretisch möglichen Schranken für den Wert des Leitungswiderstands.

5. Die von C. Benedicks nach der Methode des Verf. berechneten Widerstände für das schachbrettförmige Leitermodell dagegen liegen nicht bloß innerhalb des großen Guertlerschen Intervalls, sondern auch innerhalb des hier neu berechneten, wesentlich engeren Intervalls, und zwar praktisch in der Mitte desselben.

6. Es werden für ein beliebiges homogenes und isotropes Aggregat von Leiterpartikeln theoretische Grenzen des Leitungswiderstands berechnet und gezeigt, daß sie für den Fall 50 prozentiger Volumkonzentration mit denen des tesseralen Modells zusammenfallen.

7. Der Widerstand einer Legierung bei Ausschluß sekundärer Erscheinungen (Mischkristallbildung usw.) kann weder lineare Funktion der Widerstände

der Bestandteile noch auch rezipr.-lineare Funktion ihrer Leitfähigkeiten sein. Der Legierungswiderstand mischkristallfreier Legierungen ist vielmehr eine Funktion, deren Werte für beliebige Volumkonzentration der Bestandteile zwischen den Werten liegen, die von den beiden genannten einfachen Funktionen geliefert werden.

Wien, 15. Mai 1918.

(Eingegangen 22. Mai 1918.)

Widerstandsänderung einatomiger Metalle mit der Temperatur.

Von E. Grüneisen.

Die kürzlich von mir veröffentlichten Rechnungen¹⁾ über die Elektrizitätsleitung der Metalle in tiefer Temperatur sollen durch das Folgende ergänzt werden. Es war an einer Reihe von Beispielen gezeigt worden, daß die empirische Beziehung

$$w \sim T \cdot F \left(\frac{T}{\Theta_r} \right) \cdot \frac{C_p}{C_v}$$

für einatomige Metalle in einem weiten Bereich tiefer Temperaturen mit großer Annäherung zutreffend ist, wenn man für F die von Debye für die Atomwärme C_v abgeleitete Funktionsform wählt und Θ_r den Widerstandsbeobachtungen anpaßt. Dabei stellten sich Differenzen zwischen den charakteristischen Temperaturen Θ_r und Θ_c (für die Atomwärmen) heraus, die z. T. jedenfalls nicht mehr durch Versuchsunsicherheiten erklärt werden können, also andeuten, daß die Funktion, welche in Wirklichkeit in obige Beziehung einzutreten hat, nicht identisch sein wird mit der Debyeschen Funktion, wenn auch beide offenbar nahe verwandt sind. Der Faktor C_p/C_v erwies sich ebenfalls als ungenügend, um den in hoher Temperatur auftretenden Abweichungen von der Proportionalität zwischen w und $T \cdot F$ gerecht zu werden. Allerdings wurde dadurch bei den früher behandelten Metallen die Darstellung von w als Funktion von T , und damit die Bestimmung von Θ_r nicht merklich beeinträchtigt, weil es sich nur um ziemlich geringe Abweichungen handelte, die durch den Korrekturfaktor C_p/C_v auszugleichen waren. Anders liegt die Sache aber beim Eisen und wohl noch einigen anderen Metallen, wie z. B. Nickel. Hier scheint unsere Beziehung zunächst vollständig unzureichend,

¹⁾ E. Grüneisen, Verh. d. D. Phys. Ges. 20, 36, 1918.

weshalb ich es auch in meinen früheren Mitteilungen vermieden hatte, diese Metalle in Betracht zu ziehen. Es zeigt sich nämlich, daß der Faktor C_p/C_v auch nicht annähernd dem raschen Wachstum des Widerstands in hoher Temperatur genügt, und dieser Umstand macht sich auch in tiefer Temperatur geltend. Es schien deshalb zunächst einmal von Wichtigkeit, C_p/C_v durch eine Temperaturfunktion zu ersetzen, welche sich in hoher Temperatur den Beobachtungen anschließt, und zu untersuchen, ob dadurch vielleicht auch in tiefer Temperatur die Proportionalität des Widerstands mit $T \cdot F(T/\theta_r)$ deutlicher zutage treten würde. Diese Erwartung erfüllte sich in der Tat. Die Darstellung der Beobachtungen gelang auch für Eisen ziemlich gut mit einem θ_r -Wert, der nur wenig höher ist als θ_c .

Die abgeänderte Widerstandsformel lautet:

$$w \propto T \cdot F\left(\frac{T}{\theta_r}\right) \cdot [1 + a_1 T + a_2 T^2].$$

Von den drei Konstanten kommt θ_r nur in tiefer Temperatur zur Geltung, weil F in hoher Temperatur konstant wird, a_1 und a_2 kommen hauptsächlich in hoher Temperatur in Betracht. Daß man mit weniger Konstanten auskommen würde, war nicht zu erwarten, da wie bekannt in hoher Temperatur der Widerstand sehr genau einer quadratischen Formel nach t , der vom Eispunkt an gezählten Temperatur, folgt. Diese Darstellung mit zwei Konstanten ist für Platin in hoher Temperatur so genau, daß man annehmen möchte, die quadratische Formel habe nicht nur den Wert einer Interpolationsformel, sondern sei theoretisch begründet. Es wäre deshalb wünschenswert gewesen, unsere Widerstandsformel so abzuändern, daß sie mit steigender Temperatur von selbst in die bewährte einfache quadratische Formel überginge. Meine in dieser Richtung angestellten Versuche sind aber, so einfach die Aufgabe erscheint, vorläufig gescheitert. Auch ist es nicht gelungen, bei Beschränkung auf zwei Konstanten außer θ_r unsere Formel so zu gestalten, daß sie die Beobachtungen an Platin in hoher Temperatur in gleicher Güte wiedergäbe, wie es die quadratische tut. Als endgültige Lösung kann also unsere Formel nicht angesehen werden. Doch erfüllt sie den Zweck, den Anschluß zwischen den Beobachtungen in tiefer und hoher Temperatur formelmäßig herzustellen und den in tiefer Temperatur maßgebenden Teil der Formel deutlich hervortreten zu lassen.

Als Beispiele für die Anwendung der Formel wurden Blei, Gold, Eisen und Platin gewählt. Die drei erstgenannten Metalle gehören,

wie wohl überhaupt die meisten Metalle, zu einer und derselben Klasse, insofern, als die Koeffizienten a_1 und a_2 beide positiv sind. Nur hinsichtlich deren Größe sind erhebliche Unterschiede vorhanden. Eisen hat zehnmal größere Koeffizienten als Gold. Blei nimmt eine Mittelstellung ein. Platin ist Vertreter einer anderen Klasse mit positivem a_1 , aber negativem a_2 . Die Existenz dieser beiden Klassen ist von der quadratischen Formel her bereits bekannt.

Die Rechnungsergebnisse sind aus den folgenden Tabellen und Kurven zu ersehen. In den Tabellen ist das Verhältnis r des Widerstands bei der abs. Temperatur T zum Widerstand beim Eispunkt ($273,1^\circ$) nach unsrer Formel berechnet und mit den von verschiedenen Beobachtern gefundenen Werten dieses Verhältnisses verglichen. Dazu sind jedoch die beobachteten Werte nach der Nernstschen Regel¹⁾, welche konstanten Zusatzwiderstand voraussetzt, auf „reines“ Material umgerechnet, außer beim Blei und dem von Meißner benützten Gold, welches keinen bisher nachweisbaren Zusatzwiderstand besitzt. Daß bei den anderen Metallproben die Extrapolation auf reines Material mit einer gewissen Unsicherheit behaftet bleibt, braucht wohl kaum hervorgehoben zu werden. Die Extrapolation beruht auf den Annahmen, daß erstens die Regel vom konstanten Zusatzwiderstand mit der hier in Betracht kommenden Genauigkeit gilt, was nicht sicher ist, da Ausnahmen²⁾ bekannt sind, und daß zweitens unsre Formel im Bereiche tiefer Temperaturen dem wahren Änderungsgesetz des Widerstands sehr nahe verwandt ist. Diese Annahme wird zwar dadurch gestützt, daß die Formel beim Blei sehr gut bestätigt wird und daß sie bei den anderen Metallen auch für das reinste bisher bekannte Material untere Grenzwerte für den Widerstand liefert. Es hat aber den Anschein, worauf Meißner schon hinwies, daß im Gebiete des Debyeschen T^3 -Gesetzes, vielleicht im Zusammenhang mit der Annäherung an den Zustand der Supraleitung, der Widerstand des ideal reinen Metalls langsamer zu sinken beginnt, als es der Formel entspricht. Dieser Punkt bedarf noch der Klärung.

Die Figuren geben in den ausgezogenen Kurven das berechnete Korrektionsglied $[1 + a_1 T + a_2 T^2]$ als Funktion von T , während die Kreuze und Kreise den Beobachtungen entsprechen, und zwar den Quotienten aus den beobachteten und auf reines Material korrigierten Widerständen und den Ausdrücken const.

1) W. Nernst, Ann. d. Phys. (4) 36, 395, 1911; H. Schimank, ebenda 45, 706, 1914.

2) Siehe z. B. den Fall des Kupfers (Kristall und kristallinisches Material), E. Grüneisen, l. c. S. 49.

$T \cdot F(T/\theta_r)$. Dabei ist const. so gewählt, daß für $T = 273,1^\circ$ Rechnung und Beobachtung zusammenfallen.

Als Beobachtungsmaterial dienten Messungen in tiefer Temperatur von Kamerlingh Onnes und Clay¹⁾, bzw. Keesom²⁾, Henning³⁾, Meißner⁴⁾, Dewar und Fleming⁵⁾, Schimank⁶⁾, ergänzt durch Messungen in hoher Temperatur von Northrup⁷⁾ für Gold, von Henning³⁾ für Platin, von Burgeß und Kellberg⁸⁾ für sehr reines Eisen. Der Zusatzwiderstand des Goldes von Northrup wurde aus der Differenz des spez. Widerstandes gegen denjenigen von Meißners Gold geschätzt, der Zusatzwiderstand des Eisens von Burgeß und Kellberg durch Vergleich des von ihnen gefundenen Temperaturkoeffizienten im Intervall $0/100^\circ\text{C}$ mit dem von Dewar und Fleming. Der so erhaltene Zusatzwiderstand 0,01 für das Eisen von Burgeß und Kellberg erscheint zu hoch, da das Material zu 99,98 Proz. aus Eisen bestehen soll. Tabelle IV gibt deshalb in Klammern auch die unkorrigierten $r_{\text{beob.}}$, welche übrigens mit der Formel im ganzen besser stimmen.

Das Eisen von Schimank ist ein wenig reiner geschätzt, als das von Dewar und Fleming. Die Beobachtungen bei $197,8^\circ$ (Sch.) und 195° (D. u. Fl.) sind nicht miteinander in Einklang zu bringen.

Was nun die Brauchbarkeit unsrer Formel zur Darstellung des Widerstands anbetrifft, so lehren die Tabellen und Figuren folgendes.

Für Blei, Gold und Platin konnten die θ_r aus meiner früheren Mitteilung beibehalten werden. Überhaupt haben sich die berechneten Widerstände in tiefer Temperatur durch den anderen Korrektionsfaktor nur unbedeutend geändert.

Beim Blei und Gold übersteigt das Korrektionsglied beim Eispunkt die Einheit nur um wenige Prozent (Fig. 1 u. 2). Die Wiedergabe der Beobachtungen durch die Formel (Tab. I u. II) ist von den tiefsten bis zu den höchsten Temperaturen befriedigend, beim Gold also bis

zum Schmelzpunkt, wo der Widerstand 10^4 mal größer ist als bei 11° abs.

Tabelle I. Blei.

$$\theta_r = 92; a_1 = +0,00025; a_2 = +0,00000027.$$

T abs.	$r_{\text{beob.}}$ Keesom u. Kam. Onnes	$r_{\text{beob.}}$ Meißner	$r_{\text{beob.}}$ Henning	$r_{\text{ber.}}$
14,93	0,0128			0,0128
20,4	0,0297			0,0299
21,8		0,0350		0,0349
80			0,2593	0,2591
90			0,2961	0,2963
91,7		0,303		0,3027
100			0,3330	0,3335
120			0,4070	0,4077
150			0,5193	0,5199
200			0,7098	0,7104
273,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
373,1			1,4220	1,4234
373,8		1,423		1,4265

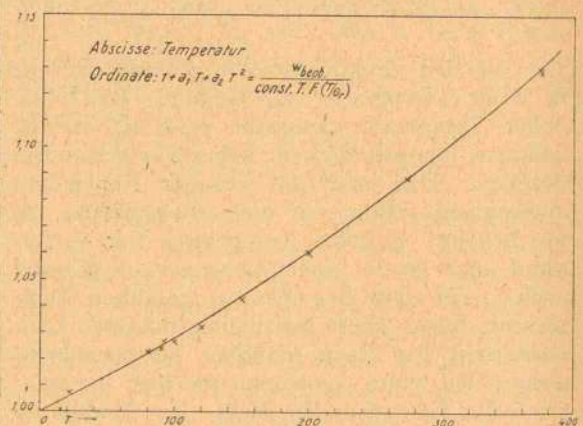


Fig. 1. Blei.

Tabelle II. Gold.

$$\theta_r = 190; a_1 = +0,00007; a_2 = +0,00000013.$$

T abs.	$r - 0,0019$ I - 0,0019 Kam. On- nes u. Clay	$r_{\text{beob.}}$ Meißner	$r - 0,04$ I - 0,04 Northrup	$r_{\text{ber.}}$
11,1	0,00063			0,00063
12,1	0,00081			0,00088
14,3	0,00170			0,00172
18,0	0,00380			0,00427
20,2	0,00621			0,00664
21,5		0,00836		0,00832
57,8	0,132			0,131
68,1	0,177			0,174
75,2	0,207			0,204
90,1	0,270			0,268
91,5		0,276		0,273
169,3	0,592			0,589
273,1	1,000	1,000	1,000	1,000
373,7		1,402		1,405
573,1			2,24	2,25
773,1			3,16	3,18
1073,1			4,77	4,79
1273,1			6,03	6,03

1) H. Kamerlingh Onnes u. J. Clay, Comm. of Leiden Nr. 99.

2) W. H. Keesom und H. Kamerlingh Onnes, Comm. of Leiden Nr. 147a, 7.

3) F. Henning, Temperaturmessung, Braunschweig 1915, S. 105 (P₀); 103 (P₁ IV) und Schlußstabelle (P₂).

4) W. Meißner, Ann. d. Phys. (4) 47, 1001, 1915.

5) J. Dewar und J. A. Fleming, Phil. Mag. (5) 36, 271, 1893.

6) H. Schimank, Ann. d. Phys. (4) 45, 706, 1914.

7) E. F. Northrup, Journ. of Franklin Institute 177, 287, 1914.

8) G. K. Burgeß und J. N. Kellberg, Bull. Bur. of Stand. 11, 457, 1915.

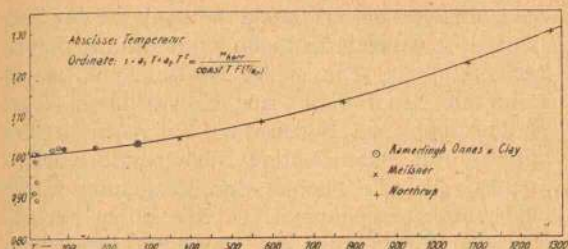


Fig. 2. Gold.

Beim Platin (Fig. 3 u. Tab. III) ist die Darstellung der Beobachtungen in hoher Temperatur (über 200° C) nicht mehr ausreichend, obwohl der Korrektionsfaktor sich nur um einige Prozent von der Einheit entfernt. Es hängt dies mit dem vollständig anderen Charakter der Widerstandsänderung des Platins in hoher Temperatur zusammen, der in dem negativen Koeffizienten a_2 zum Ausdruck kommt.

Für Eisen lehrt Fig. 4, daß die Abweichung von der Proportionalität des Widerstands mit $T \cdot F(T/\theta_r)$ beim Eispunkt bereits über 30 Proz. ausmacht, so daß ohne Rücksicht auf das Korrektionsglied der Zusammenhang des Widerstands mit $F(T/\theta_r)$ selbst bei tieferen Temperaturen (der Eispunkt ist für Eisen bereits eine

Tabelle III. Platin.

$$\theta_r = 230; a_1 = +0,0003; a_2 = -0,0000004.$$

T abs.	$r=0,002$ $1-0,002$ Hen- ning	$r=0,0033$ $1-0,0033$ Hen- ning	$r=0,002$ $1-0,002$ Meißner	$r=0,0101$ $1-0,0101$ Kam. Onnes u. Clay	$r_{\text{ber.}}$
14,2				0,00063	0,00094
17,9				0,00236	0,00239
20,3	0,0041			0,0041	0,00392
20,7			0,00432		0,00421
56,5				0,1012	0,1020
68,4				0,1512	0,1513
90,1	0,2438				0,2448
90,3				0,2452	0,2457
91,4			0,2485		0,2505
197,1	0,6934				0,6934
273,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
373,1		1,3927			1,3941
373,8			1,3968		1,3968
473,1		1,7738			1,7739
573,1		2,1431			2,1326
673,1		2,5008			zu
773,1		2,8466			klein

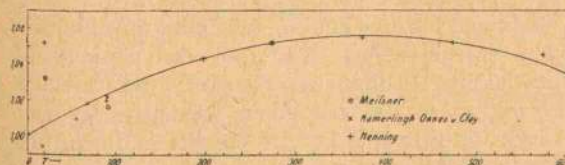


Fig. 3. Platin. (Erklärung s. Fig. 2.)

Tabelle IV. Eisen.

$$\theta_r = 470; a_1 = +0,0008; a_2 = +0,0000015.$$

T abs.	$r=0,0276$ $1-0,0276$ Schi- mank	$r=0,030$ $1-0,030$ Dewar u. Fleming	$r=0,01$ $1-0,01$ Burgeß u. Kellberg	$r_{\text{ber.}}$
20,4	0,0004			0,0004
67,8		0,043		0,0446
80,6	0,0778			0,0773
90,0		0,108		0,1065
195		0,574		0,573
197,8	0,602			0,586
235,7		0,784		0,789
273,1	1,000	1,000	1,000	1,000
371,6		1,633		1,644
373,1			1,641 (1,635)	1,656
469,2		2,414		2,425
571,9			3,52 (3,49)	3,43
671,6			4,75 (4,71)	4,62
774,7			6,26 (6,21)	6,10
872,9			7,93 (7,87)	7,79

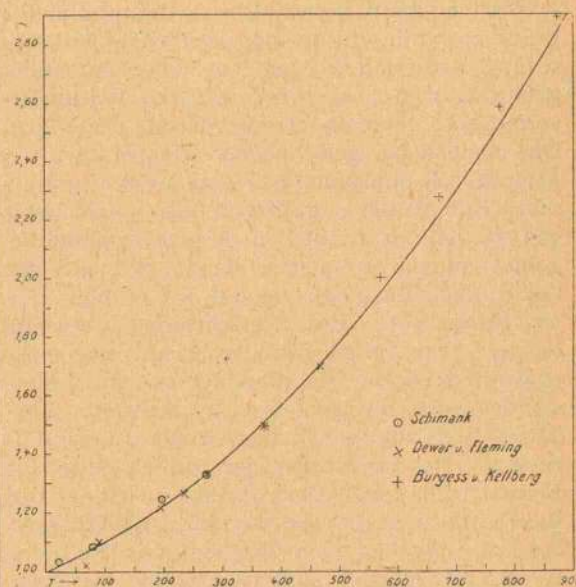


Fig. 4. Eisen. (Erklärung s. Fig. 2.)

tiefe Temperatur!) stark verschleiert ist. Setzt man jedoch das Korrektionsglied wie in unsrer Formel an, so läßt sich der Widerstand reinen Eisens zwischen 20° und 873° abs., also bis in die Nähe der Umwandlungstemperatur, leidlich gut darstellen. Vor allen Dingen ist wichtig, daß die so bestimmte charakteristische Temperatur des Eisens, $\theta_r = 470$, nur etwa um 10 Proz. höher sein dürfte, als die für die Atomwärme charakteristische Temperatur, für die man bisher noch keinen genauen Wert hat.

Zum Schluß noch ein Wort über die Bedeutung der charakteristischen Temperatur θ_r . Es hatte sich gezeigt¹⁾, daß die Größen θ_r

1) E. Grüneisen, Verh. d. D. Phys. Ges. 20, 53, 1918.

bzw. bestimmte Bruchteile derselben für manche Beziehungen zwischen den Metallen die Rolle von korrespondierenden Temperaturen zu spielen scheinen. Es ergab sich z. B., daß die auf ein Atom bezogenen el. Leitfähigkeiten $A = \kappa v$ (v = Atomvolumen), wenn man sie bei solchermaßen definierten korrespondierenden Temperaturen nimmt, eine deutliche Beziehung zum periodischen System der Elemente zeigen, derart, daß diese A von maximalen Werten in der 1. Gruppe zu minimalen in der o. bzw. 8. Gruppe des Systems abfallen. Nach dem Bau unsrer Widerstandsformel wäre eine so maßgebende Rolle der Θ_r nicht ohne weiteres zu erwarten, weil T keineswegs nur in der Quotientenbildung T/Θ_r vorkommt. Es liegt deshalb die Frage nahe, ob nicht in der Formel auch das als Faktor von F auftretende T durch T/Θ_r zu ersetzen sei, wodurch bezüglich der Darstellung der Widerstandsbeobachtungen nichts geändert wird. In meiner letztgenannten Mitteilung hatte ich in der Tat diese Annahme gemacht. Durch sie würde für das Wärmeleitvermögen λ ebenfalls eine Forderung eingeführt. Da nämlich bei gewöhnlicher Temperatur, wo F praktisch konstant ist, $\lambda/(\kappa T)$ einer universellen Konstanten nahe gleich, also unabhängig von Θ_r ist, so müßte in diesem Temperaturgebiet auch $\lambda \sim \Theta_r$ sein, damit sich bei der Quotientenbildung aus λ und $\kappa T \sim \Theta_r F$ das Θ_r heraushebt. Eine Entscheidung über die aufgeworfene Frage kann wohl nur eine elektronentheoretische Begründung unsrer Widerstandsformel erbringen, die noch aussteht. Vorläufig liegt ein zwingender Grund zur Einführung von Θ_r im Nenner der rechten Seite der Formel nicht vor. Auch für die Ableitung der Beziehung zwischen der atomaren Leitfähigkeit bei korrespondierenden Temperaturen und der Benedicksschen „Leitungskapazität“¹⁾ ist diese Ergänzung nicht nötig.

1) C. Benedicks, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 13, 351, 1916; E. Grüneisen, l. c. S. 53.

(Eingegangen 1. Juni 1918).

Über spiegelnde Flächen negativer Krümmung.

Von Paul Selényi.

(Nachtrag zu meiner Arbeit gleichen Inhalts in dieser Zeitschr. 19, 105, 1918.)

Herr K. Martin, Direktor der E. Busch-A.-G. Optische Industrie, Rathenow hat mich gütigst aufmerksam gemacht, daß er über eine ähnliche

Spiegelfläche bereits im Jahre 1907 in der Zeitschrift für wissenschaftliche Photographie, S. 314 berichtet hat. Die neue Spiegelfläche wurde technisch angewandt zur Konstruktion eines photographischen Bildsuchers für Aufsicht, der höhen- und seitenrichtige Bilder ergibt (Sellar-Sucher); auf die Theorie der Spiegelung wurde nicht näher eingegangen. — Mit einem solchen, von der Firma mir zur Verfügung gestellten Sucher, welcher infolge seiner schwächeren Krümmung (Fokaldistanz 50 mm) viel weniger stark verkleinerte Bilder liefert wie mein Exemplar, könnten die früheren Beobachtungen leichter wiederholt und in einem Punkte — betreffend die Lage der Bilder relativ zum Spiegel — auch ergänzt werden; diese Ergänzung soll hier mitgeteilt werden.

Es wurde nämlich festgestellt¹⁾, daß die Bilder von einem solchen Spiegel weder reell, noch virtuell sind und daß sie sich weder vor, noch hinter dem Spiegel lokalisieren lassen. Dieser Satz ist aber nur richtig, solange man die Bilder einäugig betrachtet; d. h. solange man bei der Lokalisation allein auf die Akkommodation angewiesen ist. Betrachtet man die Bilder mit beiden Augen, so gibt der Stereoskop-effekt ein anderes, viel empfindlicheres Mittel, um die Bilder lokalisieren zu können. Man verfährt am einfachsten so, daß man einen Punkt auf dem Spiegel selbst fixiert und dann, das eine Auge abwechselnd schließend, feststellt, welches von den natürlich doppelt gesehenen eigenen Gesichtsbildern verschwindet. Liegt das verschwindende Bild auf der gleichen Seite, wie das geschlossene Auge, so erscheint das Bild zweiaugig betrachtet, hinter, im entgegengesetzten Falle vor dem Spiegel. Dieses experimentelle Kriterium auf einen Spiegel negativer Krümmung angewandt, ergibt folgendes interessante Resultat: Hält man den Spiegel so, daß die Verbindungslinie der Augen in die Ebene der konkaven Hauptkrümmung fällt, dann liegt das (aufrechte) Bild vor dem Spiegel; fällt die Verbindungslinie der Augen in die Ebene der konvexen Hauptkrümmung, so erscheint das — diesmal verkehrte — Bild hinter dem Spiegel. — Dieses Resultat, welches aus der Betrachtung des Strahlenganges sich leicht ableiten läßt, ist mit Hilfe des erwähnten Suchers leicht festzustellen. Bei diesem ist nämlich der Abstand Spiegel—Gesichtsbild so beträchtlich, daß beim flüchtigen Draufsehen — wo man unwillkürlich den Spiegel selbst fixiert — das Gesichtsbild unwillkürlich doppelt erscheint; bei meinem Exemplar mußte ich einen kleinen schwarzen Fleck als Fixierpunkt auf der Spiegelfläche an-

1) loc. cit. S. 108.

bringen, um die erwähnten Beobachtungen ausführen zu können.

Budapest, II. Phys. Institut der Universität, den 26. Mai 1918.

(Eingegangen 2. Juni 1918.)

Die Wärmedämmung.

Von Otto Meißner.

Man redet gelegentlich in meteorologischen Kreisen von einer „Wärmedämmung“, die darin bestehen soll, daß die Lufttemperatur schon vor Sonnenaufgang etwas zu steigen beginnt, das Temperaturminimum also früher eintritt, als die Sonne aufgeht. Eine zahlenmäßige Prüfung dieser Erscheinung habe ich nun an den Beobachtungen des Kgl. Meteorologischen Observatoriums auf dem Telegraphenberg bei Potsdam für die 5 Jahre 1908—1912 vorgenommen. Dabei sind zunächst aus den Tabellen mit den zweistündigen Wolkenbeobachtungen alle Tage mit geringer Morgenbewölkung (bis höchstens $\frac{3}{10}$ leichtes Gewölk in der Zeit von 2 Uhr früh bis eine Stunde nach Sonnenaufgang) herausgesucht. Für sie wurde dann aus den stündlichen Temperaturwerten das Minimum, oder vielmehr an seiner Stelle der als solches durch den Druck markierte tiefste Stundenwert, und zum Vergleich die Zeit des Sonnenaufgangs des betreffenden Tages hingeschrieben. Ersteres ist zwar ungenau, doch konnte man bei der Unregelmäßigkeit des Temperaturverlaufs eines einzelnen Tages nicht anders verfahren. Zur genauen Feststellung des Zeitpunktes des Eintritts des wirklichen Minimums wäre eine Reproduktion der Thermographenkurve erforderlich, wie sie beispielsweise für Hamburg in den Wetterkarten der Seewarte gegeben wird; für Potsdam liegt eine solche leider nicht vor. Der Fehler der Differenz: Temperaturminimum — Sonnenaufgang beträgt also im Einzelfalle, von Abnormitäten ab-

gesehen, höchstens 30 Minuten, welcher Betrag sich bei 25 Werten bereits auf $0,1 \text{ h} = 6 \text{ Minuten}$ reduziert, was auch für die Zwecke der vorliegenden Untersuchung ausreicht. Natürlich wurde in allen Fällen, wo es abends kälter war als morgens, nicht das im Buch markierte, sondern das (relative) Morgenminimum genommen. Waren mehrere Stundenwerte gleich tief, so wurde, je nach dem Charakter des Temperaturverlaufs, das Mittel oder ein bestimmter, dem wahren Minimum voraussichtlich am nächsten liegender Wert genommen. Trotzdem zeigten sich auch noch so Abnormitäten, indem, allerdings fast nur im Winter, das Minimum oft mehrere Stunden vor Sonnenaufgang eintrat. Aus der Vergleichung aller Werte folgt, daß es tatsächlich Abnormitäten sind, die zweifellos durch stärkere Luftbewegung hervorgerufen werden. Man kann in solchem Falle aber kaum von einer „Wärmedämmung“ reden: es handelt sich vielmehr um einen Temperaturanstieg infolge des Eintretens wärmerer Luftströmungen, wie er im Winter gelegentlich zu jeder beliebigen Tageszeit eintreten kann. Ich habe deshalb in Tabelle I einmal alle Tage aufgeführt, dann aber auch nur die „normalen“, unter Fortlassung der eben erwähnten Fälle.

Δ bedeutet die schon erwähnte Differenz: Tagesminimum — Sonnenaufgang, m. Dat. das mittlere Datum der zur Verwendung gelangten Tage, das sich von dem wirklichen mittleren Monatsdatum (15,5 bzw. 16, außer beim Februar, wo es 14,5 ist) nur um wenige Tage unterscheidet. Da die Sonnenaufgänge in wahrer, die Temperaturwerte dagegen in mittlerer Ortszeit angegeben sind, hätte eigentlich bei jeder einzelnen Differenz die Zeitgleichung berücksichtigt werden müssen. Das ist aber, weil zu umständlich, nicht geschehen, vielmehr ist die Zeitgleichung erst an die Mittelwerte, entsprechend dem mittleren Datum angebracht worden, was zwar nicht ganz streng, aber hier völlig ausreichend ist.

Im letzten Drittel der Tabelle steht der, auf mittlere Ortszeit reduzierte mittlere Sonnenauf-

Tabelle I.

1908—1912	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
alle Tage	Anzahl 26 m. Dat. -24^m 18,0	25 -69^m 12,4	37 $+2^m$ 17,2	44 $+3^m$ 15,7	41 $+23^m$ 14,2	45 $+26^m$ 12,8	41 $+22^m$ 17,4	39 $+19^m$ 14,0	40 $+8^m$ 15,4	39 $+10^m$ 13,2	22 -44^m 14,0	24 -101^m 13,0
normale Tage	Anzahl 22 m. Dat. 0^m 19,0	17 -17^m 16,8	35 $+12^m$ 18,1	41 $+14^m$ 16,4	40 $+27^m$ 14,3	45 $+26^m$ 12,8	40 $+26^m$ 17,2	37 $+27^m$ 14,5	36 $+26^m$ 15,9	37 $+15^m$ 13,3	16 $+16^m$ 15,5	14 -13^m 11,5
⊙ Aufg., m. O. Z. period. Min. Δ	$8^h 5^m$ 7 29 -36	$7^h 19^m$ 6 49 -30	$6^h 18^m$ 6 18 0	$5^h 6^m$ 5 13 $+7$	$4^h 7^m$ 4 29 $+22$	$3^h 41^m$ 4 16 $+35$	$3^h 59^m$ 4 28 $+29$	$4^h 44^m$ 4 52 $+8$	$5^h 33^m$ 5 42 $+9$	$6^h 27^m$ 6 38 $+11$	$7^h 22^m$ 7 22 0	$8^h 4^m$ 7 49 -15

Tabelle II.

Δ für	c_0	c_1	φ_1	c_2	φ_2	μ_1^2	μ_2^2
alle Tage	-10,4 $\pm$ 7,2	46,2 $\pm$ 11,5	181°	14,6 $\pm$ 12,2	153°	631	632
normale T.	+13,3 $\pm$ 2,4	18,4 $\pm$ 3,5	199	5,2 $\pm$ 3,7	225	67	69
period. Min.	+ 3,4 $\pm$ 3,3	26,6 $\pm$ 4,6	189	10,1 $\pm$ 3,6	258	117	56

gang des Monats (der natürlich sich vom Sonnenaufgang des Monatsmittels nur wenig unterscheidet), darunter das fünfjährige Mittel der Eintrittszeiten des sogenannten „periodischen Minimums“, wobei aber in den Wintermonaten verschiedene Einzelwerte außer Betracht bleiben mußten, da das betr. Monatsmittel infolge des Einflusses starker Temperaturanomalien einzelner Tage sehr entstellt war.

Alle drei Differenzen zeigen nun einen ausgesprochenen jährlichen Gang, dessen Darstellung durch eine Cosinusreihe in Tabelle II wiedergegeben ist.

Dabei sind der Einfachheit halber, und weil eine weitergehende Genauigkeit nicht sachentsprechend schien, alle Monate mit gleichem Gewichte genommen und ist auch von der Berücksichtigung des Umstandes Abstand genommen, daß das wahre Datum etwas von dem hier gebrauchten mittleren abwich. Es ist zu lesen:

$\Delta = c_0 + c_1 \cos(30m - \varphi_1) + c_2 \cos(60m - \varphi_2)$,
mit $m = \frac{1}{2}$ für Januar usw. Die $\frac{1}{2}$ jährige Periode ist, nach der Abnahme des mittleren Fehlerquadrates zu urteilen, kaum reell. Die Phase des jährlichen Gliedes stimmt in allen drei Fällen gut überein. Man kann somit, unter Außerachtlassung der durch das Eintreten warmer Luftströmungen gestörten Temperaturverhältnisse klarer Wintertage sagen:

Die Differenz zwischen Temperaturminimum und Sonnenaufgang hat, sowohl im Mittel wie nur für klare Nächte, einen deutlichen jährlichen Gang. Und zwar tritt in klaren Nächten vom Mai bis zum September das Minimum $\frac{1}{2}$ Stunde, in den Frühjahrs- und Herbstmonaten $\frac{1}{4}$ Stunde nach Sonnenaufgang ein, nur im Winter etwa 10 Minuten früher. Von einer „Wärmedämmerung“ ist somit nichts zu bemerken.

Allerdings ist dabei zu berücksichtigen, daß der Telegraphenberg, obwohl er nur etwa 50 m über dem Haveltale liegt, doch ein ausgesprochenes „Höhenklima“ besitzt, das sich vor allem in viel zu geringer Abkühlung gerade in den hier in Frage kommenden klaren Nächten, auch durch eine merkliche Verspätung der Eintrittszeiten des aperiodischen (und natürlich auch des periodischen) Temperaturmaximums auszeich-

net, weshalb man mit der Verallgemeinerung der Ergebnisse, wie sie diese größte preußische Station liefert, immer sehr vorsichtig sein muß. Bei der in klaren Nächten mit schwacher Luftbewegung eintretenden Stagnation der untersten, kalten Luftschichten ist aber anzunehmen, daß die Verspätung des Eintrittes des Temperaturminimums im Tale eher noch erheblich größer ist als oben auf der Station, so daß die in der Arbeit ausgesprochenen Schlüsse betreffend die Nichtexistenz einer Wärmedämmerung ihre volle Gültigkeit behalten dürften.

Potsdam, 11. Juni 1918.

(Eingegangen 12. Juni 1918.)

Berichtigung¹⁾.

Von R. Malmström.

Die in dem Aufsatz „Zur Theorie der Elektrodynamik“²⁾ aufgestellte Formel für die Wechselwirkung zweier Elektronen enthält ein durch Entwicklung des Riemannschen Gesetzes entstandenes Glied mit der x -Komponente

$$-\frac{e e' a_x' - a_x}{r c^2},$$

welches, als umgekehrt proportional der ersten Potenz des Abstandes, neben dem letzten Gliede derselben Formel (dem Lichtvektor) bei großen Abständen nicht vernachlässigt werden darf. Da dieses Glied eine in der Richtung der relativen Akzeleration wirkende Kraft darstellt, würden sich daraus bei der Anwendung auf die Optik mit Ausnahme des Falles, daß die Schwingungen senkrecht zur Verbindungslinie erfolgen, longitudinale Schwingungen ergeben, und somit eben diese Anwendung unmöglich gemacht werden.

Es sei erlaubt hier kurz anzudeuten, wie dieser Fehler hätte vermieden werden können, und auf welchem Wege wenigstens eine Möglichkeit besteht, die Theorie zu verbessern, obwohl jetzt keine befriedigenden Resultate vorgelegt werden können. Wir gehen wieder von der Hypothese aus, daß jedes Elektron einen

¹⁾ Auszug aus einem in „Öfversigt af Finska Vetenskaps societeten Förhandlingar“, Bd. LX, 1917–1918, Afd. A, No. 10 erschienenen Aufsatz.

²⁾ Diese Zeitschr. 18, 454, 1917.

Äther hat, den es bei seiner Bewegung mitführt und sagen: wenn die Bewegung des Elektrons beschleunigt ist, so entsteht in dem Äther desselben eine Erregung, die sich mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzt und deren x -Komponente

$$= \frac{e}{r} [a_x] \cos(r, x) - \frac{[a_x]}{c^2} \quad (1)$$

ist. Die auf ein zweites Elektron e' ausgeübte Wirkung ist dann erstens gleich diesem Ausdruck multipliziert mit e' . Zweitens aber nehmen wir an, daß von dem Punkte aus, wo das Elektron e sich augenblicklich in dem Äther des zweiten Elektrons befindet, eine Wirkung ausgeht, die sich in diesem Äther mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzt. Wird diese Kraft umgekehrt proportional der zweiten Potenz des Abstandes angenommen, so kann sie bei großen Abständen neben (1) vernachlässigt werden. Da der Ausdruck (1) den Lichtvektor darstellt, so wird hierdurch die Anwendung der Theorie auf die Optik möglich gemacht.

Der Ausdruck für den zweiten Teil der gegenseitigen Wirkung muß jetzt so gewählt werden, daß er, für kleine Abstände nach Potenzen von $\frac{r}{c}$ entwickelt, die Wirkung zweier Elektronen richtig wiedergibt.

Es sei R der Abstand der Elektronen zu der Zeit, als die in dem Äther des Elektrons e sich fortpflanzende Wirkung von e ausgeht, um bei der Zeit t zum Elektron e' zu gelangen. Wenn wir dann, in Analogie mit dem Verfahren von W. Ritz, diese Wirkung in eine nach R , sowie eine nach der Relativgeschwindigkeit zur Zeit $t - \frac{R}{c}$ gerichtete Komponente zerlegen

und beide mit Funktionen von $\frac{u_r}{c}$ und $\frac{u^2}{c^2}$

multiplizieren, so ist es leicht diese Funktionen so zu bestimmen, daß die genannte Bedingung erfüllt wird. In dem oben (Anm. 1) zitierten Aufsatz sind solche Formeln aufgestellt, welche für kleine Abstände das Webersche und das Riemannsche Gesetz ergeben. Da diese doch nur den Charakter empirischer Formeln haben und außerdem nicht die Versuche über β -Strahlen richtig wiedergeben, so möge diese Andeutung genügen.

Zu einfacheren Formeln gelangt man durch die Annahme, daß alle Erregungen sich im Äther des emittierenden Elektrons fortpflanzen. Die Formeln enthalten dann nur den augenblicklichen Abstand, und es gelingt auch, dieselben in Einklang mit den Versuchen über β -Strahlen zu bringen. Die Schwierigkeit liegt nur darin, in befriedigender Weise Glieder einzuführen, welche für kleine Abstände das Glied $-\frac{ee' a_x' - a_x}{r c e}$ ergeben¹).

Zum Schluß sei noch zu der hier zugrunde gelegten Ätherhypothese die Bemerkung gemacht, daß man sie selbstverständlich nicht auszusprechen braucht, sondern rein phänomenologisch, ohne überhaupt vom Äther zu reden, die Sache so ausdrücken kann, daß von den oben betrachteten zwei Wirkungen zwischen den Elektronen e und e' die erste für ein mit dem Elektron e (Sender), die zweite für ein mit dem Elektron e' (Empfänger) bewegliches Koordinatensystem gilt oder daß bei der zuletzt besprochenen Annahme, alle Wirkungen in einem mit e beweglichen Koordinatensystem vor sich gehen.

1) l. c. (Anm. 1, S. 388).

(Eingegangen 26. Juni 1918.)

BESPRECHUNGEN.

H. Lorenz, Lehrbuch der technischen Physik. 4. Band. Technische Elastizitätslehre. gr. 8^o. XXIV. u. 692 S. mit 229 Abbildungen. München u. Berlin, R. Oldenbourg. 1913. M. 19.—, geb. M. 20.—

Ebenso wie die drei vorausgehenden Bände bildet auch dieser vierte eine höchst wertvolle Bereicherung der einschlägigen Literatur. Eine ungemein große Fülle von Aufgaben wird hier behandelt. Dabei geschah die Auswahl derselben nicht, wie es vielfach üblich ist, mit Rücksicht auf möglichst einfache oder elegante Lösbarkeit, sondern sie entspricht durchaus den Bedürfnissen der Praxis. Trotz der erheblichen mathematischen Schwierigkeiten, welche eine große Anzahl von behandelten Problemen mit sich bringt, hat es der Verfasser doch verstanden, durch eine klare, logisch durchsichtige Darstellung dem Leser über diese

Schwierigkeiten hinwegzuhelfen. Zur Erleichterung des Studiums trägt auch wesentlich bei, daß er bei jedem Kapitel mit leichteren Aufgaben beginnt und so den Leser allmählich auf die schwierigeren Fragen vorbereitet. Daß bei der außerordentlich großen Fülle von Untersuchungen auch kleine Unrichtigkeiten untergelaufen sind, wie bei der Behandlung der Stabilität der Lavalturbine ist leicht erklärlich, sie fallen aber gegenüber dem sonstigen wertvollen Inhalt kaum ins Gewicht. Dem Charakter eines Lehrbuches entsprechend ist der Stoff mit Rücksicht auf die Schwierigkeit der Behandlung in zwei Teile getrennt. Im ersten Teile werden im wesentlichen solche Aufgaben behandelt, welche auf ebene Spannungszustände zurückgehen und sich mit verhältnismäßig einfachen Mitteln lösen lassen: Zug-, Druck- und Verdrehungselastizität, Biegung gerader und krummer Stäbe, Knick- und Kipperscheinungen. Übrigens sind auch in diesem ersten Teile

bereits recht komplizierte Probleme bearbeitet, wie z. B. die Torsion von Hohlzylindern mit Zwischenstegen. Im zweiten Teile wird zunächst die allgemeine Elastizitätstheorie mit räumlichen Spannungs- und Dehnungszuständen entwickelt. Zur Lösung der dabei auftretenden Differentialgleichungen wird ein vom Verfasser verallgemeinertes Ritzsches Verfahren angewandt. Als Anwendung werden dann die Biegung von ebenen Platten und weiter ebene und achsensymmetrische Probleme behandelt (rotierende Scheiben und Trommeln, Temperaturspannungen in Hohlzylindern und ähnliches). Den Schluß bildet ein Abriß der geschichtlichen Entwicklung der Elastizitätslehre, in dem übrigens noch manche interessante Probleme zur Sprache kommen. Das Buch ist zwar in erster Linie für Ingenieure bestimmt, aber es ist auch für den Physiker von größtem Interesse einmal wegen der großen Bedeutung, welche die Elastizitätslehre auch für ihn besitzt, insbesondere aber auch wegen der Art und Weise, wie hier die mathematische Behandlung oft recht schwieriger Aufgaben durchgeführt ist.

Betz.

R. Mehmke, Leitfaden zum graphischen Rechnen. 8^o. VIII u. 152 S. mit 121 Abbildungen. Sammlung mathematisch-physikalischer Lehrbücher, herausgegeben von E. Jahnke. Leipzig, B. G. Teubner. 1917. Geh. M. 4.80, geb. M. 5.40.

In diesem Leitfaden gibt Verf. die Vorlesung wieder, die er seit einer Reihe von Jahren an der Technischen Hochschule in Stuttgart regelmäßig hält. In einem ersten Abschnitt behandelt er das graphische Rechnen im engeren Sinne, Addieren und Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren, die Darstellung von Funktionen einer und mehrerer Veränderlichen und die Auflösung von Gleichungen. In einem zweiten Abschnitt folgt die graphische Infinitesimalrechnung, graphisches Integrieren und Differenzieren und die Integration von Differentialgleichungen. Verf. ist als einer der ersten Fachleute dieses Gebietes, das in mehreren Richtungen durch seine Arbeiten eine Bereicherung erfahren hat, wohl berufen darüber zu schreiben und sein Leitfaden wird dankbar aufgenommen werden. Er wird dazu beitragen diesem Teil des mathematischen Unterrichts endlich die Geltung zu erringen, die ihm zukommt. Gerade vom Standpunkt des Physikers sollte gefordert werden, daß der mathematische Unterricht, neben den üblichen mathematischen Vorlesungen, einerseits die numerischen, andererseits die graphischen Methoden pflegen sollte. Besonders die Beherrschung der graphischen Integration und Differentiation gehört meiner Überzeugung nach zum unumgänglichen Rüstzeug jedes exakten Naturforschers, weil er es meistens mit empirischen Funktionen zu tun hat, für die sich die graphische Behandlung als die gegebene erweist.

C. Runge.

Walther Estorff, Beiträge zur Kenntnis der Kugelfunkenstrecke. Lex.-8. 35 S. mit 20 Abb. u. 1 Tafel. Heft 199 der „Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens“. Herausgegeben vom Verein Deutscher Ingenieure. Berlin, Julius Springer in Komm. 1917. 1 M.

Da die in der Hochspannungsmeßtechnik vielfach verwendeten Meßfunkenstrecken meist nur rein empirisch geeicht sind, so unternimmt es der Verf.,

die Kugelfunkenstrecken einer rechnerischen Behandlung zu unterziehen. Mit Hilfe der Methode der elektrischen Bilder berechnet er die Kapazität eines Kugelkondensators, sowie die Potentialverteilung und die Feldstärke auf der Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte, speziell an der Oberfläche der Elektroden. Sodann werden bei den verschiedensten Kugeldurchmessern und -abständen Kapazität und Potentialverteilung experimentell gemessen, und zwar, um den Einfluß der Zuleitungen eliminieren zu können, mittels der von Kohlrausch angegebenen Methode der Widerstandsmessung in Elektrolyten. Schließlich werden noch die Funkenspannungen gemessen für verschiedene Schlagweiten und Kugeldurchmesser. Da nun im theoretischen Teil ein Zusammenhang gefunden wurde zwischen Spannungsdifferenz der beiden Kugeln und Feldstärke an der Oberfläche einer von ihnen auf der Mittellinie, so läßt sich jetzt ohne weiteres diese Feldstärke für jede Schlagweite bei der Funkenspannung berechnen; es ist dies die sogenannte Festigkeit der Luft bzw. des zwischen den Elektroden befindlichen Dielektrikums. Es zeigt sich, daß die Luftfestigkeit nur abhängig ist vom Durchmesser der Elektroden und so gut wie unabhängig von deren Abstände. Ist andererseits die Luftfestigkeit als Funktion des Kugeldurchmessers bekannt, so läßt sich demnach für jeden Kugeldurchmesser und jede Schlagweite die Funkenspannung berechnen. An ein paar Beispielen wird dies durchgeführt.

Die Messung der Funkenspannungen geschieht mit Hilfe des vom Verf. konstruierten „Oszilloskops“. Es ist dies ein Apparat, der sich vom Oszillographen nur dadurch unterscheidet, daß die Spiegelablenkung nicht auf einer rotierenden Fläche zu einer Kurve ausgezogen, sondern daß der Lichtzeiger einfach auf eine feststehende Mattscheibe reflektiert wird und hier, entsprechend der Spiegelablenkung, zum Bande verbreitert erscheint. Die Hochspannung wird mittels eines Transformators erzeugt, und die Spannungsschleife liegt an dessen Niederspannungswicklung. Werden die Ausschläge des Lichtzeigers auf der Mattscheibe mit Gleichspannung geeicht, so läßt sich für jede Schlagweite der Maximalwert der Niederspannung und hieraus, durch Multiplikation mit dem Übersetzungsverhältnis des Transformators, derjenige der Hochspannung, d. h. die Funkenspannung, angeben. Nachdem dies an einer einzelnen Meßreihe illustriert worden ist, wird die Messung für die verschiedenen Schlagweiten und Kugeldurchmesser durchgeführt. Merkwürdigerweise gibt der Verf. hierbei lauter Effektivwerte der Spannung an. Ganz abgesehen davon, daß, wie er selber gesagt hat, die Maximalwerte das einzig Interessierende sind, läßt sich weder einsehen, wie diese Effektivwerte gefunden wurden, noch was man sich überhaupt unter einer „effektiven Funkenspannung“ vorzustellen hat. Bei sinusförmig verlaufender Spannungskurve ist ja der Maximalwert das $\sqrt{2}$ -fache der Effektivspannung. Aber selbst, wenn eine Wechselstrommaschine eine reine Sinusspannung liefert, so dürfte doch unter keinen Umständen auf der Sekundärseite eines von ihr betriebenen Transformators die Spannung sinusförmig verlaufen bei Belastung mit einer Funkenstrecke. Hierfür ist demnach das Verhältnis von effektiver zu maximaler Spannung durchaus unbekannt. Sollte andererseits das Oszilloskop nur die effektiven Spannungen der Primärwicklung angeben, so kann man hieraus die maximalen Spannungen der Sekundärseite überhaupt nicht erschließen. Endlich gibt der Verf. noch an, daß er „aus praktischen Gründen“ eine

Bestrahlung der Funkenstrecke zur Aufhebung des Entladeverzuges unterlassen habe. Da er die Gründe selber nicht anführt, so wird man über ihre Berechtigung und über die Zweckmäßigkeit dieser Maßregel im Zweifel sein dürfen. Denn nur wenn der Entladerverzug aufgehoben ist, kann man auf ein regelmäßiges und präzises Ansprechen der Funkenstrecke rechnen, während es sonst durchaus nicht sicher ist, ob die gemessenen Spannungen wirklich die Funkenspannungen sind, oder ob sie nicht hier von mehr oder minder stark abweichen und z. B. sich mit der Zahl der Funken und der Perioden pro Sekunde ändern.

Die Arbeit bringt einen wertvollen Beitrag zur Meßtechnik hoher Spannungen. Doch liegt ihr Wert hauptsächlich darin, daß ein exakter Zusammenhang zwischen Luftfestigkeit, Funkenspannung und Schlagweite gegeben wird. Den Meßresultaten des experimentellen Teiles gegenüber dürfte dagegen aus den angeführten Gründen noch einige Vorsicht geboten sein.

V. Pieck.

F. M. Jaeger, Lectures on the principle of symmetry and its applications in all natural sciences. gr. 8. XII u. 333 S. mit 170 Abbildungen. Amsterdam, Publishing Company „Elsevier“. 1917.

Der Verf. macht es sich in dem vorliegenden inhaltsreichen Buche zur Aufgabe, den studierenden Mathematiker und Naturwissenschaftler auf das Wesen und die Anwendung des Symmetriepinzips hinzuweisen, das nicht nur für die Beschreibung der Gestaltung der Naturobjekte gültig ist, sondern auch mit dem physikalischen und chemischen Verhalten derselben auf das Engste zusammenhängt. Dementsprechend wird in den vier ersten Kapiteln des Werkes eine allgemeine Darstellung der Grundlagen und Lehrsätze der Symmetrietheorie gegeben, wobei es dem Verf. weniger darauf ankam, die hier vorliegenden Probleme möglichst erschöpfend zu erörtern, als vielmehr das Wesentliche des Gegenstandes herauszugreifen und an zahlreichen Beispielen aus der Morphologie der Kristalle sowie der Pflanzen- und Tierwelt zu veranschaulichen. Der zugrunde liegende Gedankengang deckt sich im wesentlichen mit dem von Schoenflies' eingeschlagenen Wege, doch sind gelegentlich auch die Anschauungen von Möbius, Viola, Boldyrew, Fedorow u. a. mitgeteilt; die Symmetrie-Symbole werden teils nach Schoenflies' Bezeichnungsart, teils nach der von Saurel gehandhabt. Vom physikalischen Standpunkte aus beanspruchen die Kapitel 5 u. 6 besonderes Interesse; in dem ersteren werden die 32 kristallographisch möglichen Symmetriegruppen besprochen und dann diejenigen Symmetrien erörtert, welche Achsen der Isotropie besitzen. Die Symmetrien der Ursache und der Wirkung, des magnetischen und des elektrischen Feldes, der Lichtbewegung usw. werden eingehend abgehandelt; es erhellt insbesondere bei der Besprechung des Hall'schen Phänomens sowie des Torsionseffektes, den ein vom elektrischen Strome durchflossener Eisendraht im magnetischen Felde zeigt (vgl. Matteucci-Wiedemann), wie wichtig die Anwendung des Symmetriepinzips auf die physikalischen Erscheinungen sein muß. Im 6. Kapitel interessiert uns eine kurze aber anschauliche Darstellung der Raumgittertheorie; es wird in sehr lehrhafter Weise gezeigt, wie aus den Bravais'schen Vorstellungen notwendigerweise die allgemeine Gittertheorie von Schoenflies und Fedorow

sich entwickeln mußte. Durch die Laue-Bragg'schen Untersuchungen ist diese bekanntlich in hervorragender Weise bestätigt worden, und mit Recht wird ihren so sehr wichtigen Ergebnissen in dem vorliegenden Buche besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Unter anderem wird auch von den neuesten Untersuchungen Debyes über das Raumgitter des Graphits berichtet, aus welchen wir einen sehr wertvollen Einblick in die Unterschiede des Feinbaues von Diamant und Graphit gewinnen, insbesondere auch das vormals so schwierige Problem des dreiwertigen Kohlenstoffatoms verstehen lernen. Das 7. Kapitel des Buches beschäftigt sich mit dem Aufbau mimetischer Kristallgestalten, insbesondere auch mit der Reusch'schen Theorie der Entstehung zirkularpolarisierten Lichtes bei der Durchstrahlung eines einachsigen Kristalles in Richtung der Hauptachse. Daß manchmal, wie z. B. beim Strychninsulfat, sogar in dem Röntgendiagramm die mimetisch-hochsymmetrische Kristallstruktur zum Ausdruck zu kommen scheint, während in zahlreichen anderen Fällen die geringere Symmetrie der Kristallbausteine in dem Diagramm zutage tritt, erscheint uns besonders bemerkenswert. Das 8. und 9. Kapitel enthält eine ausgezeichnete Darstellung der Theorie der optisch aktiven Körper, die nach den Anschauungen van't Hoff's und Lebel's durch das Auftreten asymmetrischer Kohlenstoffatome im chemischen Molekül gekennzeichnet sind; vom Standpunkt der allgemeinen Symmetrietheorie aber müssen diese Substanzen als solche aufgefaßt werden, deren Moleküle höchstens Symmetrieelemente der ersten Art, d. h. einfache Deckbewegungsachsen enthalten, nicht aber Elemente zweiter Art, wie Drehspiegelungsachsen, Symmetrie-Ebenen oder -Zentren. Daß in der Tat die Anordnung der elementaren Bestandteile in den Molekülen allein in Frage kommt und nicht etwa nur ein „asymmetrisches“ Zentralatom, haben die Untersuchungen an komplexen Kobaltsalzen (Werner'schen Komplexen) schlagend erwiesen, in deren Molekülen eine Asymmetrie im Sinne der van't Hoff-Lebel'schen Theorie nicht bestehen kann, und welche doch durch ihre ganz ungewöhnlich starke optische Aktivität auffallen müssen. Die Ausführungen im 9. Kapitel über die natürliche asymmetrische Total-synthese, d. h. die Entstehung optisch aktiver Körper aus inaktiven Reagentien, sowie über die Möglichkeit einer künstlichen Nachbildung derselben sind dadurch besonders interessant, daß der Verf. eine Asymmetrie der bei derartigen Vorgängen wirkenden Kräfte als unumgänglich notwendig voraussetzt. — Die Vielseitigkeit des Inhaltes und der Literatur-Nachweise sowie die Klarheit der Darstellung ist an dem Buche besonders hervorzuheben; es bietet deshalb auch nicht nur dem Studierenden eine vorzügliche Wiedergabe des allgemeinen Symmetriepinzips, sondern es regt auch den Fortgeschrittenen zum Nachdenken über tiefgründige Probleme der Körpergestaltung im weitesten Sinne des Wortes an. Die kleinen Schönheitsfehler der Ausstattung, eine nicht unbeträchtliche Zahl störender Druckversehen und andere Nebensächlichkeiten wären in ruhigeren Zeiten vielleicht in Fortfall gekommen. Manche Einzelheiten botanischen oder zoologischen Inhaltes sind vielleicht auch mit besonderer Freude am Gegenstand ausgeführt worden, und an einzelnen anthropomorphistischen Bildern hat der Ref. nicht immer Gefallen finden können. Im ganzen darf aber die Ansicht vertreten werden, daß in dem vorliegenden Werke ein reizvolles und wichtiges Gebiet ausgezeichnet lehrhaft behandelt ist, über

dessen Bedeutung der Mathematiker und der Kristallograph, der Physiker und der Chemiker, nicht zuletzt auch die Vertreter der biologischen Wissenschaften in seltener Einmütigkeit sich im klaren sind.

Wilhelm Eitel.

Alfred Wegener, Wind- und Wasserhosen in Europa. gr 8°. XI u. 301 S. mit 85 Abbildungen. Braunschweig, Friedr. Vieweg u. Sohn. 1917. Geh. M. 12.—, geb. M. 13.60.

Diese Zusammenstellung vieler seit dem 15. Jahrhundert in Mittel- und Westeuropa beobachteten und z. T. ausführlich beschriebenen Wirbelstürme und ihre nach Entstehung und Wirkung kritische Behandlung ist eine Gelegenheitsschrift zum 70. Geburtstage des gerade um diese meteorologischen Vorgänge sehr verdienten Abteilungsvorstandes an der Deutschen Seewarte, Admiralstabsrat Prof. Dr. W. Köppen. Wenn auch der Verf. selbst sagt, daß die Aufzählung der Einzelfälle durchaus keinen Anspruch auf Vollständigkeit machen kann und soll, so bietet doch das sich im ganzen auf 258 Einzelfälle beziehende Material eine reiche Fülle von Tatsachen, die geeignet sind Schlüsse auf die physikalische Natur der Tromben zu ziehen und ihr Auftreten mit den örtlichen und allgemeinen meteorologischen Verhältnissen in Beziehung zu setzen. Der Verf. behandelt der Reihe nach zunächst die Häufigkeit, die örtliche Verteilung, die Abhängigkeit vom täglichen und jährlichen Gang der meteorologischen Elemente und die Fortbewegung der Wirbelstürme, denen sich die Witterungsvorgänge in und um dieselben anschließen. Weiterhin werden Bildung und Auflösung, die Teilung und die Rotation der Tromben behandelt. Die physikalischen Vorgänge in den schärfer begrenzten Wirbeln werden in theoretischer Beziehung untersucht und durch graphische Darstellungen erläutert unter Zugrundelegung der Annahme für das Rotationsgesetz $v r^k = k$ und für die Druckverteilung in der Trombe $\frac{dp}{dr} = \frac{v^2}{r}$, wo v den Abstand einer

gewissen Schicht vom Zentrum der Trombe und λ einen für das Zentrum gleich -1 und für die äußeren Schichten zwischen $+1$ und ∞ variierenden Wert besitzen muß. — Die totale Druckerniedrigung in der Trombe wird dann durch den Ausdruck $760 - \beta = \frac{a V^2}{2} \left(\frac{1}{\lambda_a} - \frac{1}{\lambda_i} \right)$ gegeben, wo β den in der Trombenachse herrschenden Druck, a eine Konstante (für Metermaß $= 0,0097$), V die Maximalgeschwindigkeit und λ_a und λ_i die obenerwähnten Exponenten sind. Als Zahlenwerte führt der Verf. $V = 80$ m/Sek.; $R = 100$ m (Entfg. vom Zentrum) und $\lambda_i = -1$; $\lambda_a = +3$ ein und erhält damit zur Vergleichung mit Beobachtungs-Resultaten:

Max. Geschwindgk. Sek. 10 20 40 60 80 100 200
im Anfangsstadium

Druckveränderg.: 0,5 1,9 7,8 17,5 31,0 48,5 194
in älteren Tromben: 1,0 3,8 15,6 35,0 61,0 97,0 388
In den nachfolgenden Kapiteln wird dann die äußere Gestalt der Tromben behandelt und in den z. T. sehr eingehenden Schilderungen die häufigen akustischen und elektrischen Begleiterscheinungen. Schließlich werden noch die Schadenwirkungen heftiger Wirbelstürme nach ihren charakteristischen Kennzeichen angeführt und die verschiedenen Ansichten über ihre Entstehung kritisch besprochen. —

Der Text des Buches ist durch ein reiches und gut ausgewähltes, z. T. den Originalberichten entnommenes Bildmaterial ergänzt und durch viele graphische

und schematische Darstellungen anschaulich gemacht. Auch die historische Seite des Stoffes ist für spätere ähnliche Untersuchungen von Bedeutung, wenn auch die meteorologisch-physikalischen Fragen durchaus in den Vordergrund gestellt sind. — Ambronn.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Karlsruhe der bisherige Privatdozent an der Universität Freiburg i. B. Professor Dr. Kurt Heß für Chemie.

Ernannt: Professor Gustav Jäger an der Technischen Hochschule Wien zum ord. Professor der theoretischen Physik an derselben Hochschule.

Berufen: Dr. H. du Bois zum ord. Professor für Theorie und Anwendungen des elektromagnetischen Feldes an der Universität Utrecht (zugleich als Leiter des von Berlin in einem dafür errichteten modernen Neubau überführten Bosscha-Laboratorium).

Gestorben: Der ord. Professor der Chemie am University College in Galway (Irland) Dr. Alfred Senior.

In den Ruhestand: Der ord. Professor der Chemie an der Technischen Hochschule Braunschweig Geh. Hofrat Dr. Richard Meyer (zum 1. Oktober 1918).

Angebote.

Physiker oder Dipl.-Ingenieur

gesucht

für Arbeiten auf dem Gebiete der
Hochfrequenz.

Bewerbungen erbeten an

 **Siemens & Halske A.-G.** 
Wernerwerk, Abt. M.
Siemensstadt bei Berlin.

Physiker und Elektroingenieure

mit abgeschlossener Hochschulbildung zur experimentellen Durchbildung von Apparaten für drahtlose Telegraphie, insbesondere Verstärkern und Röhrensendern gesucht. Bewerbungen mit Angabe des Bildungsganges und der Gehaltsansprüche erbeten an

Dr. Georg Seibt,
Fabrik elektrischer Apparate,
Berlin-Schöneberg, Hauptstr. 11.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 18.

15. September 1918.

Redaktionsschluß für No. 20 am 6. September 1918.

19. Jahrgang.

INHALT:

Wilhelm Feddersen †, S. 393.

Originalmitteilungen:

F. Reiche, Zur Quantelung des

asymmetrischen Kreisels. S. 394.

H. Schmidt, Zur Theorie der Tri-

bolumineszenz. S. 399.

R. Ambronn, Über die elektrische

Leitfähigkeit von Natron-Kalk-

Silikat-Gläsern. S. 401.

C. Schaefer, Zur Herleitung der

verallgemeinerten Lagrangeschen

Gleichungen für nichtholonome

Koordinaten. II. S. 406.

O. Grottrian, Eine Zahlenbeziehung

zwischen drei Ordinaten der Hyste-

resisschleife. S. 408.

J. Bender †, Über die kritische Tem-

peratur des Quecksilbers. S. 410.

Besprechungen:

W. Schüle, Technische Thermo-

dynamik. I. S. 415.

J. Krauß, Grundzüge der maritimen

Meteorologie und Ozeanographie.

S. 415.

W. Schweyder, Die Bewegung der

Drehachse der elastischen Erde im

Erdkörper. S. 415.

O. Große, 40 Jahre Fernsprecher

(Stephan - Siemens - Rathenau).

S. 416.

Tagesereignisse. S. 416.

Personalien. S. 416.

Angebote. S. 416.

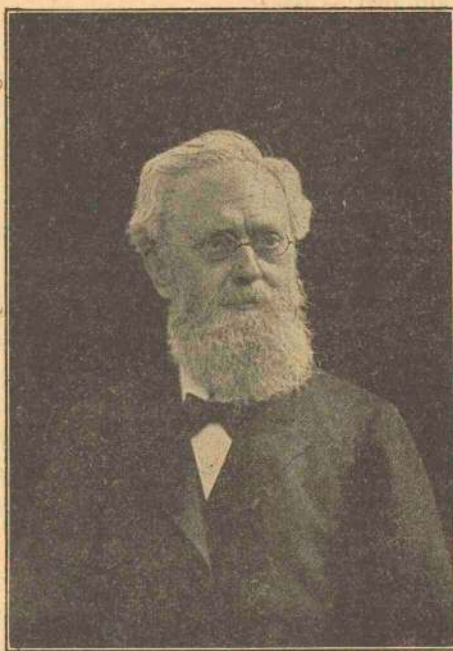
Wilhelm Feddersen †.

Am 2. Juli starb in seinem 87. Lebensjahre der Altmeister der Leipziger Physik, Geheimer Hofrat Dr. Berend Wilhelm Feddersen, Mitglied der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mit ihm ist ein Privatgelehrter aus dem Leben geschieden von einer Art und Bedeutung, wie sich deren Deutschland nur weniger zu erfreuen hat.

Seine berühmten, muster-gültigen Arbeiten über den elektrischen Funken und die Entladung der Leidener Flasche liegen ein halbes Jahrhundert zurück. Die Methoden und die Resultate, auf denen dann Hertz weiter bauen und schließlich die drahtlose Telegraphie erwachsen konnte, sind frühzeitig in die Lehrbücher übergegangen und Gemeingut geworden. Die Originalapparate, Verbindung von rotierendem Spiegel und photographischer Platte, befinden sich im Deutschen Museum zu München. Die Abhandlungen selbst haben in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften einen Neudruck erfahren. (Nr. 166.)

Am 26. März 1832 in der damals dänischen Stadt

Schleswig geboren, besuchte Feddersen das Gymnasium zu Gotha. Seine hervorragendsten akademischen Lehrer waren Wilhelm Weber, Dove, Dirichlet, Magnus, Karsten und Hankel. Des letzteren mathematisch-elektrische Vorlesungen zogen ihn 1858 nach Leipzig, wo er dauernd wohnen geblieben ist, und wo bis 1866 auch das Hauptwerk seines Lebens geleistet wurde.



Dr. W. Feddersen.

Seitdem haben ihn, abgesehen von einer unabgeschlossenen Arbeit über von ihm sogenannte Thermodiffusion in Gasen aus den siebziger Jahren, äußere Verhältnisse am Weiterexperimentieren gehindert und mehr auf humanitäre Tätigkeit gelenkt, die ihn in den Kriegsjahren

auch zu regem Verkehr mit Soldaten im Felde geführt hat.

Daneben verfolgte er aber die Fortschritte der Physik mit stetem Interesse. Besondere Freude machte es ihm, als die Funkentelegraphie zu Wellen der von ihm studierten Frequenzen zurückkehrte. Bis weit in das achte Jahrzehnt seines Lebens nahm er als regelmäßiger Gast am wöchentlichen Kolloquium des Physikalischen Instituts der Universität teil und war dem jungen Geschlecht ein schönes Vorbild von prächtigem Idealismus.

Besondere Verdienste hat sich Feddersen endlich um Poggendorffs biographisch-literarisches Wörterbuch erworben: Zunächst durch eigne Arbeit an der Fortsetzung und durch Gewinnung neuer Kräfte für die Weiterführung, dann aber durch eine gemeinsam mit sei-

ner Frau gemachte Stiftung von 100 000 M., um das segensreiche Unternehmen, für das sich inzwischen auch die kartellierten Deutschen Akademien eingesetzt hatten, für die Zukunft sicher zu stellen.

Das beigefügte Bild, das Feddersens bis in die letzten Tage auffallend feine Züge nur unvollkommen wiedergibt, stammt aus dem Jahre 1902.

Th. Des Coudres.

(Eingegangen 5. August 1918.)

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zur Quantelung des asymmetrischen Kreisel.

Von F. Reiche.

In einer Diskussion, die sich an die Göttinger Wolfskehl-Vorträge von Max Planck über die Grundlagen der Quantentheorie anschloß, erwähnte Herr M. v. Laue, daß das Problem der Bewegung des asymmetrischen Kreisels sich, nach einer Abhandlung von Kolossoff¹⁾, durch Separation der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung lösen lasse. Diese Tatsache ist in Fachkreisen offenbar wenig bekannt; so bezeichnet auch Epstein²⁾, in seiner Arbeit über die spezifische Wärme des Wasserstoffs, die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung des asymmetrischen Kreisels als nicht separierbar.

Da das Problem der Quantelung des asymmetrischen Kreisels und der Grenzübergang zum symmetrischen Kreisel von Wichtigkeit ist, vor allem wegen der Anwendung auf den Wasserstoff, so sei es gestattet, hier die Methode von Kolossoff etwas ausführlicher als in der Originalarbeit darzustellen und gleich die Quantelung der Kreiselbewegung anzuschließen.

Dabei zeigt es sich allerdings, daß man, jedenfalls in den von Kolossoff verwendeten Koordinaten, die Hamilton-Jacobische Gleichung des asymmetrischen Kreisels nicht in voller Allgemeinheit separieren kann. Vielmehr gelingt die Separation nur dann, wenn der konstante Impuls, der zum Präzessionswinkel ψ des Kreisels gehört, gleich null ist. Dies bedingt naturgemäß eine Einschränkung des Problems, die sich bei der Quantelung darin äußert, daß die eine der drei Quantenzahlen gleich null gesetzt ist.

Von Interesse dürfte noch der Umstand sein, daß man beim Grenzübergang zum symmetrischen Kreisel zu der Schwarzschild-Epstein'schen Formel für die gequantelte Energie gelangt, die sich von der Planckschen Formel wesentlich unterscheidet.

§ 1.

Der starre Körper mit den drei ungleichen Hauptträgheitsmomenten $A < B < C$ sei kräftefrei um einen festen Punkt drehbar. Seine Lage sei durch die drei Eulerschen Winkel ϑ, ψ, φ in folgender Weise charakterisiert: ist $x y z$ das im Körper feste, mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfallende Koordinatensystem, $\xi \eta \zeta$ das im Raum feste Koordinatensystem, so

ist ϑ (der „Neigungswinkel“) = $\angle(z, \zeta)$. Die Schnittlinie der beweglichen $x y$ -Ebene mit der festen $\xi \eta$ -Ebene ist die „Knotenlinie“. ψ (der „Präzessionswinkel“) ist dann der Winkel zwischen Knotenlinie und ξ -Achse, φ (der „Eigendrehungswinkel“) ist der Winkel zwischen Knotenlinie und x -Achse. (Siehe Fig. 1.)

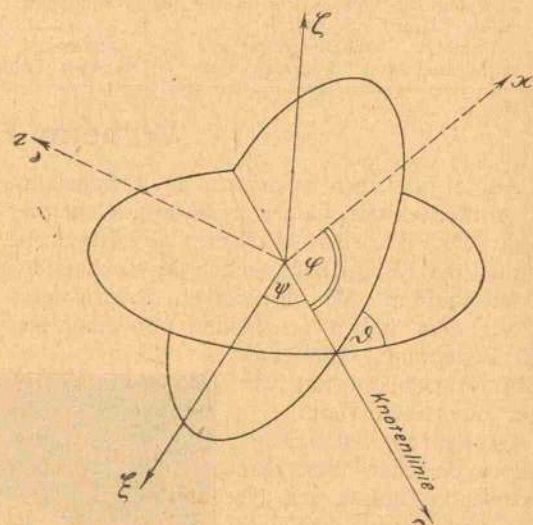


Fig. 1.

Sind p, q, r die Drehungskomponenten des Körpers bezogen auf das System $x y z$, so ist seine kinetische Energie bekanntlich:

$$T = \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2). \quad (1)$$

Dabei hängen p, q, r mit ϑ, ψ, φ in folgender Weise zusammen¹⁾:

$$\begin{cases} p = \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\varphi} \cos \varphi \\ q = \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \varphi \\ r = \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi} \end{cases} \quad (2)$$

Löst man nach $\dot{\vartheta}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}$ auf, so folgt

$$\begin{cases} \dot{\vartheta} = p \cos \varphi - q \sin \varphi \\ \dot{\psi} = \frac{p \sin \varphi + q \cos \varphi}{\sin \vartheta} \\ \dot{\varphi} = r - \cotg \vartheta (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \end{cases} \quad (2a)$$

Setzt man die Ausdrücke (2) in (1) ein, und bildet die zu ϑ, ψ, φ gehörigen Impulse $p_\vartheta, p_\psi, p_\varphi$, so folgt:

$$\begin{cases} p_\vartheta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = A p \cos \varphi - B q \sin \varphi \\ p_\psi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = A p \sin \vartheta \sin \varphi + B q \sin \vartheta \cos \varphi + C r \cos \vartheta \\ p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = C r \end{cases} \quad (3)$$

1) Mathem. Ann. 60, 232, 1905. Herr v. Laue hatte die Freundlichkeit, dem Verf. diese Literaturstelle mitzuteilen.

2) Verh. d. Phys. Ges. 18, 398, 1916.

1) Vgl. z. B. Gans u. Weber, Repertorium d. Physik Bd. I, S. 58.

Löst man diese Gleichungen nach p, q, r auf, setzt die erhaltenen Werte in (1) ein, und schreibt $\frac{\partial V}{\partial \vartheta}, \frac{\partial V}{\partial \psi}, \frac{\partial V}{\partial \varphi}$ an Stelle von $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$, so ge-

winnt man sofort die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung für die kräftefreie Bewegung des starren Körpers. Sie lautet:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{A \sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial V}{\partial \psi} \sin \varphi + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \cos \varphi - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \cos \vartheta \sin \varphi \right)^2 + \frac{1}{B \sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial V}{\partial \psi} \cos \varphi - \right. \\ & \left. \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \sin \varphi - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \cos \vartheta \cos \varphi \right)^2 + \frac{1}{C} \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)^2 = 2T. \end{aligned} \right. \quad (4)$$

Da in dieser Differentialgleichung ψ nicht selbst vorkommt, so kann man bekanntlich setzen

$$V = \beta \cdot \psi + V'(\vartheta, \varphi), \quad (5)$$

wo β eine Konstante ist. Und zwar ist

$$\beta = \frac{\partial V}{\partial \psi} = p_\psi. \quad (6)$$

Setzt man (6) in (4) ein, so reduziert sich dadurch die Hamilton-Jacobische Gleichung auf eine partielle Differentialgleichung für zwei Variable ϑ und φ . Im allgemeinen Falle, wo A, B, C voneinander verschieden sind, gelingt indessen die Separation dieser Differentialgleichung in den gewählten Koordinaten nicht. Durch Einführung neuer Variablen kann man jedoch, wie Kolossoff gezeigt hat, — unter einer gewissen Einschränkung — die Differentialgleichung auf eine separierbare Form bringen.

§ 2.

Dazu führe man zuerst die Hilfsvariablen u, v, w ein durch die Beziehungen

$$\left\{ \begin{aligned} u &= \frac{1}{\sqrt{A}} \sin \vartheta \sin \varphi \\ v &= \frac{1}{\sqrt{B}} \sin \vartheta \cos \varphi \\ w &= \frac{1}{\sqrt{C}} \cos \vartheta \end{aligned} \right. \quad (7)$$

Diese drei Hilfsvariablen sind nicht voneinander unabhängig, sondern erfüllen die Gleichung:

$$A u^2 + B v^2 + C w^2 = 1. \quad (8)$$

Es sind also durch die Gleichungen (7) und (8) an Stelle von ϑ und φ zwei neue unabhängige Variable eingeführt.

Aus (7) folgt durch Differentiation nach der Zeit und Benutzung von (2a)

$$\left\{ \begin{aligned} \sqrt{A} \cdot \dot{u} &= -q \cos \vartheta + r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sqrt{B} \cdot \dot{v} &= p \cos \vartheta - r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sqrt{C} \cdot \dot{w} &= -\sin \vartheta (p \cos \varphi - q \sin \varphi). \end{aligned} \right. \quad (9)$$

Jetzt bilde man den Ausdruck:

$$\beta^2 + ABC(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2),$$

indem man für $\beta = p_\psi$ den in (3) stehenden Ausdruck einsetzt. Dann folgt

$$\begin{aligned} \beta^2 + ABC(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) &= (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) \\ &= 2T(A^2 u^2 + B^2 v^2 + C^2 w^2). \end{aligned}$$

Also

$$T = \frac{1}{2} \frac{\beta^2 + ABC(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2)}{A^2 u^2 + B^2 v^2 + C^2 w^2}. \quad (10)$$

Jetzt führe man an Stelle der Hilfsvariablen u, v, w elliptische Koordinaten auf der Oberfläche des Ellipsoids (8) ein. Dies geschieht folgendermaßen: Wir setzen

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \frac{1}{a^2}; B = \frac{1}{b^2}; C = \frac{1}{c^2} \\ \text{wo also } a &> b > c \end{aligned} \right. \quad (11)$$

und nennen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die drei Wurzeln der in λ kubischen Gleichung

$$\frac{u^2}{a^2 + \lambda} + \frac{v^2}{b^2 + \lambda} + \frac{w^2}{c^2 + \lambda} = 1. \quad (12)$$

Dann ist

$$(-a^2) < \lambda_3 < (-b^2) \leq \lambda_2 \leq (-c^2) \leq \lambda_1 \quad (13)$$

und die Fläche $\lambda_1 = 0$ ist das betrachtete Ellipsoid (8).

Ferner ist bekanntlich

$$\left\{ \begin{aligned} u^2 &= \frac{(a^2 + \lambda_1)(a^2 + \lambda_2)(a^2 + \lambda_3)}{(a^2 - c^2)(a^2 - b^2)} \\ v^2 &= \frac{(b^2 + \lambda_1)(b^2 + \lambda_2)(b^2 + \lambda_3)}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} \\ w^2 &= \frac{(c^2 + \lambda_1)(c^2 + \lambda_2)(c^2 + \lambda_3)}{(c^2 - b^2)(c^2 - a^2)} \end{aligned} \right. \quad (14)$$

und

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 &= \frac{1}{4} (L \dot{\lambda}_1^2 + M \dot{\lambda}_2^2 + N \dot{\lambda}_3^2), \\ \text{wo} \\ L &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}{(a^2 + \lambda_1)(b^2 + \lambda_1)(c^2 + \lambda_1)} \\ M &= \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)}{(a^2 + \lambda_2)(b^2 + \lambda_2)(c^2 + \lambda_2)} \\ N &= \frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}{(a^2 + \lambda_3)(b^2 + \lambda_3)(c^2 + \lambda_3)}. \end{aligned} \right. \quad (15)$$

Endlich ist

$$\begin{aligned} A^2 u^2 + B^2 v^2 + C^2 w^2 &= \frac{\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1}{a^2 b^2 c^2} - \\ &= \frac{a^4 b^4 (a^2 - b^2) + b^4 c^4 (b^2 - c^2) + c^4 a^4 (c^2 - a^2)}{a^4 b^4 c^4 (a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)} \cdot \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \end{aligned} \quad (16)$$

Setzt man jetzt $\lambda_1 = 0$, betrachtet also nur Punkte auf dem Ellipsoid (8), so wird

$$\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 = \frac{1}{4}(M\dot{\lambda}_2^2 + N\dot{\lambda}_3^2), \quad (17)$$

wo

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)\lambda_2}{f(\lambda_2)}; \quad N = \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)\lambda_3}{f(\lambda_3)} \\ \text{und} \\ f(\lambda) = (a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda). \end{array} \right. \quad (17a)$$

Ferner

$$A^2 u^2 + B^2 v^2 + C^2 w^2 = \frac{\lambda_2 \lambda_3}{a^2 b^2 c^2} = ABC \lambda_2 \lambda_3. \quad (18)$$

Daher nach (10):

$$T = \frac{1}{2} \beta^2 + \frac{1}{4} ABC (M\dot{\lambda}_2^2 + N\dot{\lambda}_3^2) - \frac{ABC \lambda_2 \lambda_3}{2}.$$

Also werden die Impulse p_{λ_2} und p_{λ_3} :

$$p_{\lambda_2} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}_2} = \frac{1}{4} \frac{M \dot{\lambda}_2}{\lambda_2 \lambda_3}; \quad p_{\lambda_3} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}_3} = \frac{1}{4} \frac{N \dot{\lambda}_3}{\lambda_2 \lambda_3}$$

und daher die Hamilton-Jacobische Gleichung,

wenn man $\frac{\partial V}{\partial \lambda_2}$ und $\frac{\partial V}{\partial \lambda_3}$ für p_{λ_2} und p_{λ_3} schreibt:

$$2T = \frac{1}{ABC \lambda_2 \lambda_3} \left\{ \beta^2 + 4ABC \lambda_2^2 \lambda_3^2 \left[\frac{f(\lambda_2)}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_3)} \left(\frac{\partial V}{\partial \lambda_2} \right)^2 + \frac{f(\lambda_3)}{\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_2)} \left(\frac{\partial V}{\partial \lambda_3} \right)^2 \right] \right\}$$

oder:

$$\frac{f(\lambda_2)}{\lambda_2} \left(\frac{\partial V}{\partial \lambda_2} \right)^2 - \frac{f(\lambda_3)}{\lambda_3} \left(\frac{\partial V}{\partial \lambda_3} \right)^2 + \frac{\beta^2}{4ABC} \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2^2 \lambda_3^2} = \frac{T}{2} \left(\frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_2} \right). \quad (19)$$

Diese Differentialgleichung ist ersichtlich nur dann separierbar, wenn $\beta = 0$ ist. Der konstante Impuls p_ψ , der die Komponente des Gesamtimpulses in Richtung der ζ -Achse darstellt, muß also dauernd gleich null sein, mit anderen Worten: der Impuls des starren Körpers muß in der festen Äquatorebene ($\xi\eta$ -Ebene) liegen. Diese Einschränkung liegt den folgenden Betrachtungen zugrunde.

§ 3.

Wir machen jetzt also die Annahme

$$p_\psi = \beta = 0. \quad (20)$$

Dann läßt sich (19) separieren:

$$V = V_2(\lambda_2) + V_3(\lambda_3) \quad (21)$$

wo für V_2 und V_3 die gewöhnlichen Differentialgleichungen gelten:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{f(\lambda_2)}{\lambda_2} \left(\frac{dV_2}{d\lambda_2} \right)^2 + \frac{T}{2\lambda_2} = \frac{k}{2}, \\ \frac{f(\lambda_3)}{\lambda_3} \left(\frac{dV_3}{d\lambda_3} \right)^2 + \frac{T}{2\lambda_3} = \frac{k}{2}. \end{array} \right. \quad (22)$$

Dabei ist k eine neu eingeführte Konstante.

Also

$$\left\{ \begin{array}{l} V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{\lambda_2 k - T} d\lambda_2}{\sqrt{(a^2 + \lambda_2)(b^2 + \lambda_2)(c^2 + \lambda_2)}} + \text{const.} \\ V_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{\lambda_3 k - T} d\lambda_3}{\sqrt{(a^2 + \lambda_3)(b^2 + \lambda_3)(c^2 + \lambda_3)}} + \text{const.} \end{array} \right. \quad (23)$$

Nun ist nach (13)

$$a^2 + \lambda_3 \geq 0; \quad b^2 + \lambda_3 \leq 0; \quad c^2 + \lambda_3 \leq 0.$$

Daher muß in V_3 :

$$\lambda_3 k - T > 0$$

sein. Da nun λ_3 negativ ist, so folgt:

$$k < 0. \quad (24)$$

Setzt man

$$\lambda_3 = -\lambda_3'; \quad k = -k'; \quad \frac{T}{k} = f', \quad (24a)$$

so folgt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_3' > f' \\ b^2 \leq \lambda_3' \leq a^2. \end{array} \right. \quad (25)$$

Es liegt also, auf einer λ' -Achse aufgetragen, f' unterhalb a^2 . Andererseits ist nach (13):

$$a^2 + \lambda_2 \geq 0; \quad b^2 + \lambda_2 \geq 0; \quad c^2 + \lambda_2 \leq 0.$$

Also muß in V_2 :

$$\lambda_2 k - T \leq 0$$

sein. Setzt man, analog wie oben

$$\lambda_2 = -\lambda_2', \quad (24b)$$

so folgt

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_2' \leq f' \\ c^2 \leq \lambda_2' \leq b^2. \end{array} \right. \quad (25a)$$

Es liegt also, auf der λ' -Achse, f' oberhalb c^2 . Hieraus und aus dem oben abgeleiteten Resultat folgt, daß f' zwischen c^2 und a^2 liegt:

$$c^2 \leq f' \leq a^2. \quad (26)$$

Da wir später zum Grenzfall des symmetrischen Kreisels übergehen werden, indem wir $A = B$ setzen, also a^2 mit b^2 zusammenfallen lassen, so wollen wir f' zwischen c^2 und b^2 liegend annehmen.

§ 4.

Wir stellen jetzt in bekannter Weise die Quantenbedingungen auf. Diese sind hier nach (23)

$$\left\{ \begin{array}{l} [V_2] = \frac{2}{\sqrt{2}} \oint \frac{\sqrt{\lambda_2 k - T} d\lambda_2}{\sqrt{(a^2 + \lambda_2)(b^2 + \lambda_2)(c^2 + \lambda_2)}} = n_2 h \\ [V_3] = \frac{2}{\sqrt{2}} \oint \frac{\sqrt{\lambda_3 k - T} d\lambda_3}{\sqrt{(a^2 + \lambda_3)(b^2 + \lambda_3)(c^2 + \lambda_3)}} = n_3 h \end{array} \right. \quad (27)$$

Dabei sind die Integrationen über den vollen Wertbereich der Variablen zu erstrecken; n_2 und n_3 sind ganze Zahlen, h ist die Plancksche Konstante. Der Faktor 2 vor den Integralen rührt von dem Umstand her, daß nach

(14) der Zustand durch die Variablen λ_2 und λ_3 nicht eindeutig, sondern zweideutig bestimmt wird.

Wir behandeln erst das Integral nach λ_2 und schreiben es so:

$$[V_2] = \sqrt{2k} \oint \frac{(f' - \lambda_2') d\lambda_2'}{\sqrt{(a^2 - \lambda_2')(b^2 - \lambda_2')(\lambda_2' - c^2)(f' - \lambda_2')}}. \quad (28)$$

Da λ_2' auf das Intervall zwischen c^2 und f' beschränkt ist, so ist der Integrationsweg ein

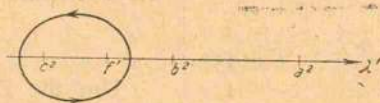


Fig. 2.

positiver Umlauf um die Verzweigungspunkte c^2 und f' (siehe Fig. 2). Setzt man

$$\lambda_2' = \frac{c^2(f' - a^2) - a^2(f' - c^2)\sin^2\chi}{(f' - a^2) - (f' - c^2)\sin^2\chi}$$

und

$$x^2 = \frac{(f' - c^2)(a^2 - b^2)}{(b^2 - c^2)(a^2 - f')} < 1; \quad n = \frac{f' - c^2}{a^2 - f'}, \quad (29)$$

so folgt

$$[V_2] = 4\sqrt{2k} \cdot \sqrt{\frac{a^2 - f'}{b^2 - c^2}} \left\{ \frac{a^2 - c^2}{a^2 - f'} \cdot \Pi\left(\frac{\pi}{2}, n, x\right) - K(x) \right\}. \quad (30)$$

Dabei ist

$$K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \chi}}$$

das vollständige elliptische Integral erster Gattung,

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}, n, x\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi}{(1 + n \sin^2 \chi) \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \chi}}$$

das vollständige elliptische Integral dritter Gattung.

Ganz analog behandeln wir $[V_3]$. Wir schreiben:

$$[V_3] = \sqrt{2k'} \oint \frac{(\lambda_3' - f') d\lambda_3'}{\sqrt{(a^2 - \lambda_3')(\lambda_3' - b^2)(\lambda_3' - c^2)(\lambda_3' - f')}}. \quad (31)$$

Der Integrationsweg ist hier ein Umlauf um die Verzweigungspunkte b^2 und a^2 (Fig. 3). Wir setzen hier

$$\lambda_3' = \frac{b^2(a^2 - f') - f'(a^2 - b^2)\sin^2\chi}{(a^2 - f') - (a^2 - b^2)\sin^2\chi}; \quad m = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - f'}. \quad (32)$$

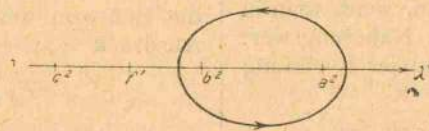


Fig. 3.

Dann folgt

$$[V_3] = 4\sqrt{2k'} \cdot \frac{b^2 - f'}{\sqrt{(b^2 - c^2)(a^2 - f')}} \cdot \Pi\left(\frac{\pi}{2}, -m, x\right). \quad (33)$$

Die Gleichung (30) läßt sich noch transformieren durch Anwendung der Formel¹⁾:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, n, \kappa\right) = -\frac{(1-\kappa^2)\sin^2\beta}{1+n} \cdot \Pi\left(\frac{\pi}{2}, -(\cos^2\beta + \kappa^2\sin^2\beta), \kappa\right) + \frac{K(\kappa)}{1+n} + \frac{\pi}{2} \frac{\sin\beta}{\sqrt{1+n}} \\ \text{wo} \end{array} \right. \quad n = \kappa^2 \operatorname{tg}^2 \beta.$$

Dann folgt nach kurzer Zwischenrechnung

$$[V_2] = 2\pi\sqrt{2k'} - [V_3] \quad (34)$$

oder

$$\sqrt{2k'} = \frac{(n_2 + n_3)h}{2\pi} \quad (35)$$

Aus (33) folgt dann, mit Benutzung von (35)

$$\frac{b^2 - f'}{\sqrt{(b^2 - c^2)(a^2 - f')}} \cdot \Pi\left(\frac{\pi}{2}, -m, \kappa\right) = \frac{n_3\pi}{2(n_2 + n_3)} \quad (36)$$

Die dritte Quantenbedingung ist hier speziell

$$\int_0^{2\pi} p_\psi d\psi = 2\pi\beta = n_1 h = 0, \quad (37)$$

d. h.: die Quantenzahl n_1 ist gleich null. Das ist die Bedingung, die die Allgemeinheit des Problems einschränkt.

§ 5.

Um die Energie T des Körpers als Funktion der Quantenzahlen zu erhalten, müßte man (36) nach T , also nach f' , auflösen. Dies ist jedoch allgemein nicht möglich, da f' sowohl in m wie auch in κ enthalten ist. Dagegen lassen sich für T leicht Näherungsformeln aufstellen, wenn zwei Trägheitsmomente (A und B) nahezu einander gleich sind. Wir setzen also

$$a^2 - b^2 = \varepsilon^2, \quad \text{wo } \varepsilon^2 \ll a^2 \quad (38)$$

und entwickeln bis zu Gliedern von der Ordnung ε^2 . Dann wird

$$\frac{b^2 - f'}{\sqrt{(b^2 - c^2)(a^2 - f')}} = \sqrt{\frac{a^2 - f'}{a^2 - c^2}} \left\{ 1 + \varepsilon^2 \left[\frac{1}{2(a^2 - c^2)} - \frac{1}{a^2 - f'} \right] \right\}$$

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}, -m, \kappa\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi}{(1 - m \sin^2 \chi) \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \chi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\chi \left\{ 1 + \left(\frac{\kappa^2}{2} + m \right) \sin^2 \chi \right\} = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\frac{\kappa^2}{2} + m}{2} \right).$$

Dabei sind

$$m = \frac{\varepsilon^2}{a^2 - f'}, \quad \kappa^2 = \frac{(f' - c^2)\varepsilon^2}{(a^2 - f')(a^2 - c^2)}.$$

Also wird

$$\frac{b^2 - f'}{\sqrt{(b^2 - c^2)(a^2 - f')}} \cdot \Pi\left(\frac{\pi}{2}, -m, \kappa\right) = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{a^2 - f'}{a^2 - c^2}} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon^2(f' - c^2)}{4(a^2 - f')(a^2 - c^2)} \right\}$$

und daher nach (36)

$$\sqrt{\frac{a^2 - f'}{a^2 - c^2}} - \frac{\varepsilon^2}{4} \cdot \frac{f' - c^2}{(a^2 - c^2)\sqrt{(a^2 - c^2)(a^2 - f')}} = \frac{n_3}{n_2 + n_3} \quad (39)$$

In erster Näherung, d. h. für $\varepsilon^2 = 0$, erhält man daraus

$$f' = a^2 - (a^2 - c^2) \left(\frac{n_3}{n_2 + n_3} \right)^2 \quad (40)$$

Die zweite Näherung erhält man, wenn man in dem Gliede mit ε^2 für f' den Näherungswert (40) einsetzt. Dann folgt nach kurzer Rechnung

$$f' = \frac{T}{k'} = a^2 - (a^2 - c^2) \left(\frac{n_3}{n_2 + n_3} \right)^2 - \frac{\varepsilon^2(n_2 + n_3)^2 - n_3^2}{2(n_2 + n_3)^2} \quad (41)$$

Unter Benutzung von (35) und (11) folgt daraus schließlich

$$T = \frac{h^2}{8\pi^2} \left\{ \frac{(n_2 + n_3)^2 - n_3^2}{2} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) + \frac{n_3^2}{C} \right\} \quad (42)$$

Für den Grenzfall des symmetrischen Kreisels ($A = B$) folgt die von Schwarzschild¹⁾ und Epstein²⁾ aufgestellte Formel

$$T = \frac{h^2}{8\pi^2} \left(\frac{(n_2 + n_3)^2 - n_3^2}{A} + \frac{n_3^2}{C} \right), \quad (43)$$

die sich von dem von Planck³⁾ abgeleiteten Ausdruck

$$T_P = \frac{h^2}{8\pi^2} \left\{ \frac{n^2}{A} + \frac{n'^2}{C} \right\} \quad (44)$$

in charakteristischer Weise unterscheidet.

1) K. Schwarzschild, Ber. d. Berliner Akad. 1916, S. 548.

2) P. Epstein, Verh. d. D. Phys. Ges. 18, 398, 1916.

3) M. Planck, Ann. d. Phys. 50, 385, 1916.

1) Vgl. z. B. Láská, Formelsammlung S. 330 (Vierweg, 1888-94).

Setzt man von vornherein $A = B$, so läßt sich die Hamilton-Jacobische Gleichung (4) vollständig separieren, und führt, wie Epstein zeigte, auf den Wert (43).

Berlin, Juni 1918.

(Eingegangen 10. Juni 1918.)

Zur Theorie der Tribolumineszenz.

Von Harry Schmidt.

A. Imhof¹⁾ hat vor einiger Zeit eine Theorie der Tribolumineszenz entwickelt, die sich in kurzer Zusammenfassung folgendermaßen wiedergeben läßt: „Spätestens während des Überganges in die feste Formart findet die Erregung der nachher tribolumineszierenden Substanz in einen Zustand A höherer Energie statt. Diese nicht lichtelektrische Erregung besteht darin, daß Metallatome oder organische Atomgruppen Elektronen entweichen lassen, welche von benachbarten Metalloidatomen in stabilerer Weise, als dies bei der Phosphoreszenz angenommen wird, gebunden werden. In einer noch nicht genauer bekannten Funktion der Zeit kehren die Elektronen sukzessive zufolge der Wärmeschwingungen der Atome nach den Ausgangsatomen zurück, bei den einen Substanzen in ziemlich kurzer Zeit (temporäre Tribolumineszenz), bei anderen nur in außerordentlich langsamer Folge. Durch mechanische Eingriffe (Brechen) werden in der Umgebung der Bruchflächen heftige Brucherschütterungen veranlaßt, welche einen plötzlichen Rücktritt vieler Elektronen zu den Ausgangsatomen bewirken. Indem diese nun Schwingungen isochroner Emissionselektronen erzwingen, wird das mit Tribolumineszenz bezeichnete Leuchten erzeugt. Die Substanz im Zustand A geht dadurch über in den energieärmeren Zustand B .“

Abgesehen davon, daß diese Theorie insofern unbefriedigend erscheinen muß, als sie auf jeden Versuch verzichtet, nähere Angaben über den Mechanismus der eigentlichen Tribolumineszenzerregung zu machen, wie sie sich in dem Entweichen von Elektronen aus bestimmten Atomen während des Kristallisationsvorganges darstellen soll, lassen sich auch mancherlei Einwände gegen sie erheben. Zunächst dürfte es überhaupt kaum möglich sein, annehmbare Ursachen für dieses Entweichen von Elektronen zu finden. Aber selbst wenn das gelänge, so erhebt sich sofort eine wesentlich größere

Schwierigkeit mit der Frage, welche Nachbaratome fähig sein könnten, die abgetrennten Elektronen mit größerer Stabilität zu binden, als dies bei der Phosphoreszenz der Fall ist. Denn wie aus den Untersuchungen über Phosphoreszenz bekannt ist, sind nur sehr wenige Atomgruppierungen imstande, eine verhältnismäßig langdauernde Aufspeicherung von Elektronen zu ermöglichen, und alles, was wir vorläufig über die Struktur dieser Gruppierungen wissen, ist das, daß sie notwendig Sulfide oder Selenide enthalten müssen¹⁾. Da aber die Mehrzahl der tribolumineszierenden Substanzen anderen Stoffklassen angehört, so muß die Annahme ihrer besonders großen Aufspeicherungsfähigkeit für Elektronen zum mindesten als eine sehr unwahrscheinliche bezeichnet werden.

In direktem Widerspruch mit der Erfahrung kommt aber die Imhofsche Theorie, wenn man den Einfluß der Temperatur sowie von roter und ultraroter Bestrahlung auf die Tribolumineszenz berücksichtigt. Für den Temperatureinfluß hat Imhof²⁾ selbst in einer früheren Arbeit wertvolles Material beigebracht. Wäre seine Theorie richtig, so müßte man erwarten, daß bei Erhöhung der Temperatur zunächst eine Zunahme der Lichtintensität einsetzt, indem durch die erhöhte allgemeine Molekularbewegung die Abgabe der aufgespeicherten Elektronen wesentlich beschleunigt wird. Bei genügender Dauer der Erwärmung müßte auf diese Weise alle aufgespeicherte Erregung zur Verausgabung gelangen, die Tribolumineszenzfähigkeit also verloren gehen, ohne beim Abkühlen wiedererlangt zu werden. Die Erfahrung dagegen lehrt das folgende. Die Kurve, welche die Intensität der Tribolumineszenz als Funktion der Temperatur darstellt, fällt im allgemeinen sehr langsam ab, um dann kurz vor dem Schmelzpunkt rasch gegen diesen zu auf Null zu sinken. Imhof gelang es, für das Zinksulfid diese Kurve angenähert experimentell zu ermitteln; seine Versuchsdaten sind in der nachstehenden Tabelle wiedergegeben.

Der Widerspruch zwischen Theorie und Erfahrung ist evident. Es findet nicht nur keine anfängliche Erhöhung der Lumineszenzintensität statt, sondern bei abnehmender Temperatur nimmt diese Intensität sogar wieder zu, was doch nach der Theorie auf keinen Fall erwartet werden kann. Ferner schreibt Imhof: „Flußspat zeigt bekanntlich sehr schöne Fluoreszenz und Thermolumineszenz. Verschiedentlich wurde die Thermolumineszenz als Ursache seiner

1) Auch Telluride dürften als Phosphoreszenzzentren in Frage kommen; eine diesbezügliche Untersuchung ist in Vorbereitung.

2) A. Imhof, diese Zeitschr. 18, 78, 1917.

1) A. Imhof, diese Zeitschr. 18, 374, 1917.

Temperatur	Relative Lumi- nesz. Intensität	Temperatur	Relative Lumi- nesz. Intensität
18°	10,00	100°	3,35
37°	10,00	30°	10,00
66°	9,25	17°	11,81
110°	6,51	85°	5,21
120°	6,51	125°	5,21
140°	4,55	170°	1,43
178°	1,52	225°	0,10
205°	0,26	265°	0,07
220°	0,25	169°	1,57
183°	0,27	95°	5,40
170°	0,88	20°	10,08
160°	1,08		

Tribolumineszenz angesehen. Durch die Temperaturuntersuchungen ergab sich nun einwandfrei, daß es sich um zwei durchaus unabhängige Erscheinungen handelt. Erhitzt man Flußspat längere Zeit auf etwa 150°, so verliert er seine Thermolumineszenz, wie bekannt, fast gänzlich und erlangt diese Eigenschaft erst wieder durch neue Belichtung oder radioaktive Bestrahlung. Läßt man aber den lange erhitzten Kristall wieder erkalten, so zeigt er durchaus ungeschwächte Tribolumineszenz.“ Diese Bemerkungen sind unverständlich. Denn wie Lenard¹⁾ gezeigt hat, stellt die Wärme keine besondere Erregungsart dar, sondern die sogenannte Thermolumineszenz kommt lediglich dadurch zustande, daß aufgespeicherte Erregung zur beschleunigten Verausgabung gebracht wird. Warum aber die aufgespeicherte Erregung der Tribolumineszenz, die doch nach Imhofs Theorie genau dasselbe darstellt wie die der Phosphoreszenz, durch die Wärme in ganz anderer Weise beeinflußt werden soll, als die letztere, ist mir unklar. Vielmehr müßte man gerade auf Grund der Imhofschen Theorie zu dem Schluß geführt werden, daß alle tribolumineszierenden Substanzen bei der Erwärmung „Thermolumineszenz“ zeigen.

Auch einige vorläufige Versuche, die ich über die Einwirkung von rotem und ultrarotem Licht auf die Tribolumineszenzfähigkeit vom Zinksulfid angestellt habe, sprechen gegen die Imhofsche Theorie. Es ist ja bekannt, daß gerade beim Zinksulfid die phosphoreszenzauslöschende Wirkung dieses Lichtes eine sehr auffallende ist. Wie Lenard²⁾ gezeigt hat, ist jene Wirkung als verursacht durch molekularlokale Temperaturerhöhungen aufzufassen, wodurch dann (wie bei der unmittelbaren Erwärmung des ganzen Präparats) die aufgespeicherte Erregung unter wesentlicher Beschleunigung verausgibt wird. Man müßte also bei Bestrah-

lung mit rotem und ultrarotem Licht eine anfängliche Intensitätssteigerung der Tribolumineszenz erwarten, der dann bald eine völlige Vernichtung der Lumineszenzfähigkeit folgen müßte. Bis jetzt war es mir aber nicht möglich, überhaupt irgendeinen merklichen Einfluß solchen Lichtes aufzufinden.

Während also die von Imhof gegebene Theorie der Tribolumineszenz in mancher Hinsicht mit der Erfahrung im Widerspruch steht, dürfte dasselbe für eine andere Theorie nicht gelten, die Lenard¹⁾ vor einiger Zeit anmerungsweise gelegentlich einer anderweitigen Untersuchung angedeutet hat. Diese Theorie soll daher im folgenden etwas näher ausgeführt werden.

Den Ausgangspunkt bildet dabei die Vorstellung, daß sich an Flüssigkeitsoberflächen elektrische Doppelschichten ausbilden. Es müssen nämlich die senkrecht zur Oberfläche gerichteten Molekularkräfte Verschiebungen der beweglichen Teile der einzelnen Moleküle nach innen zu entweder durch Drehungen oder durch innere Verzerrungen der Moleküle derart hervorbringen, daß dadurch die massiveren Teile der Moleküle dem Innern der Flüssigkeit genähert werden. Diese inneren Massenverschiebungen der an der Oberfläche gelegenen Moleküle müssen aber bei der elektrischen Konstitution der sie aufbauenden Atome und bei der elektrischen Natur der die Atome im Molekül zusammenhaltenden chemischen Kräfte gleichbedeutend sein mit elektrischen Verschiebungen in Richtung der Oberflächennormalen, d. h. mit der Herstellung einer elektrischen Doppelschicht an der Oberfläche. Die massiveren Teile der Atome sind nun, wie man weiß, mit ihrer positiven Ladung verknüpft, so daß man also die äußere Belegung der Doppelschicht als negativ geladen zu erwarten hätte. Die Beobachtungen über die Wasserfallelektrizität bestätigen diese Erwartungen aufs beste²⁾. In Fortsetzung dieser Überlegungen wird man dann leicht dazu geführt, auch in Kristallen derartige Doppelschichten anzunehmen, die sich bei der Kristallbildung infolge der Molekularkräfte ausgebildet haben. Beim Zerschneiden der Kristalle müssen infolgedessen freie Ladungen auftreten, die sich durch eine in der Luft stattfindende Entladung ausgleichen. Ist dann die betreffende Substanz ihrer Natur nach dazu geeignet, durch diese Entladung (direkt oder indirekt) zur Lumineszenz erregt zu werden, so werden wir an ihr die Erscheinung der Tribolumineszenz wahr-

1) Vgl. z. B. P. Lenard, Ann. d. Phys. 15, 459, 1904.

2) Vgl. besonders P. Lenard, Sitzber. d. Heidelberg. Akad. d. Wiss. 1917, Abh. 5 und 7.

1) P. Lenard, Sitzber. d. Heidelb. Akad. d. Wiss. 1914, Abh. 28, S. 39, Anm. 67.

2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 47, 463, 1915.

nehmen können. Daß es sich dabei stets nur um ein momentanes Aufleuchten handeln kann, erhellt ohne weiteres daraus, daß einerseits die Dauer der Erregung nur eine sehr kleine ist, andererseits aber nach den experimentellen Untersuchungen Lenards¹⁾ durch kurzdauernde Erregung im wesentlichen nur die Momentanbanden der Phosphoreszenz erregt werden. Die Folgerung, daß alle tribolumineszierenden Substanzen irgendwie lumineszenzfähig sein müssen, findet sich in allen mir bekannt gewordenen Fällen der Tribolumineszenz vollkommen bestätigt.

Die Erscheinung der temporären Tribolumineszenz, die sich darin äußert, daß eine Substanz, ohne sichtbaren Veränderungen zu unterliegen, nach einiger Zeit ihre Tribolumineszenzfähigkeit in mehr oder weniger hohem Maße verliert, ließe sich auf Grund der vorstehenden Theorie dadurch erklären, daß im Laufe der Zeit infolge der molekularen Bewegungen die elektrischen Doppelschichten gestört werden. In ähnlicher Weise können die weiter oben näher angeführten Temperatureinflüsse gedeutet werden; je tiefer die Temperatur ist, desto ausgeprägter sind die elektrischen Doppelschichten, desto intensiver also auch das Leuchten der Tribolumineszenz. Was schließlich den Einfluß ultraroter oder roter Lichtstrahlung anbelangt, so muß derselbe im allgemeinen negativ sein, da ja für eine „momentane Aufspeicherung“ der Erregung eine Beschleunigung der Elektronenrückkehr nicht möglich ist. Höchstens könnte der Fall eintreten, daß durch starke Absorption jenes Lichtes eine molekular-lokale Temperaturerhöhung und damit eine Störung der elektrischen Doppelschichten hervorgerufen wird, was aber wohl als recht unwahrscheinlich bezeichnet werden muß.

Zusammenfassung.

1. Die von A. Imhof gegebene Theorie der Tribolumineszenz steht im Widerspruch mit der Erfahrung.
2. Rotes und ultrarotes Licht vermögen die Tribolumineszenz des Zinksulfids nicht merklich zu beeinflussen.
3. Ein von P. Lenard gegebener Hinweis auf eine Erklärungsmöglichkeit der Tribolumineszenz wird näher ausgeführt. Die so erhaltene Theorie steht mit der bisherigen Erfahrung im Einklang.

¹⁾ Vgl. z. B. P. Lenard, Sitzber. d. Heidelb. Akad. d. Wiss. 1909, Abh. 3, S. 33.

Leipzig, im Juni 1918.

(Eingegangen 14. Juni 1918.)

Über die elektrische Leitfähigkeit von Natron-Kalk-Silikat-Gläsern.

(Vorläufige Mitteilung.)

Von R. Ambrohn.

In einer früheren Veröffentlichung¹⁾ wurden Beobachtungen mitgeteilt, welche über die elektrische Leitfähigkeit von drei nur aus Natron und Kalk als basischen Bestandteilen erschmolzenen Gläsern angestellt waren, die sich voneinander nur hinsichtlich der Konzentration des Natriums unterschieden, während diejenige des Kalziums sehr nahe konstant gehalten war. Es wurde nunmehr die Abhängigkeit der Leitfähigkeit solcher Gläser auch von der Konzentration an CaO festgestellt, sowie der Einfluß ermittelt, welchen die CaO -Konzentration auf die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Na_2O -Konzentration besitzt.

Bezüglich der benutzten Messungsverfahren kann hier auf die oben zitierte Arbeit²⁾ verwiesen werden. Erwähnt werde nur, daß durch Verwendung starker Silberrohre, die über die Elektrodenklötze, zwischen welchen die durch Platinierung mit festhaftenden Elektroden versehenen zylindrischen Glasstücke eingespannt wurden, von beiden Seiten einander überdeckend zusammengeschoben waren, eine möglichst gute räumliche Konstanz der Temperatur erzielt wurde. Mittels der in Fig. 2 der genannten Arbeit¹⁾ gezeichneten Schaltung wurde auch hier wieder ohne Mühe eine vorzügliche zeitliche Konstanz der Temperatur erzielt.

Die zu untersuchenden Glassorten waren in liebenswürdigster Weise nach besonderer Vorschrift von der Firma Schott & Gen. in Jena erschmolzen und zur Verfügung gestellt worden, wofür auch an dieser Stelle zu danken ich nicht unterlassen möchte. Die Zusammensetzung der Gläser zeigt Tabelle 1, wobei zugleich nochmals diejenige der bereits früher untersuchten Glassorten unter Nr. 1—3 beigelegt werde.

Man ersieht, daß sowohl der Gehalt an CaO als auch der an Na_2O in weitesten Grenzen schwankt. Nr. 11 konnte jedoch nicht untersucht werden, da es an der Luft nicht haltbar war. Die Zusammensetzung der Gläser ist nur aus der Menge der bei ihrer Herstellung verwandten Rohmaterialien bestimmt; eine genauere chemische Analyse der fertig erschmolzenen Gläser wurde bislang leider nicht ermöglicht, so

¹⁾ R. Ambrohn, Über die elektrische Leitfähigkeit von Glas und Bergkristall. I. Diss. Göttingen 1913. (Vorläufige Mitteilung s. diese Zeitschr. 14, 112, 1913.)

²⁾ Vgl. auch R. Ambrohn, Untersuchungen über die elektrische Leitfähigkeit des Bergkristalls. Nova Acta, Bd. CI, Nr. 3, 179—268. Halle 1915.

Tabelle I.

Chemische Zusammensetzung der untersuchten Glassorten in Gewichtsprozenten.

No.	Na ₂ O	CaO	SiO ₂
[1]	18,73	8,45	72,82
[2]	25,67	7,73	66,60
[3]	31,55	7,12	61,33
4	22	8	70
5	34	8	58
6	15	12	73
7	22	12	66
8	28	12	60
9	12	16	72
10	20	16	64
11	26	16	58
12	20	20	60
13	36	4	60

daß die Zusammensetzung nur als auf etwa 1 Proz. genau bekannt anzusehen ist. Ob den Gläsern als Flußmittel ein wenig Arsen beigelegt ist, ist nicht sicher bekannt. Es ist jedoch anzunehmen, daß ein solcher Zusatz, wenn vorhanden, in allen Glassorten 4—13 in angenähert gleicher Menge vorliegt und daher den Vergleich der erhaltenen Resultate untereinander nicht allzusehr stört. Dagegen sind die Gläser 1—3 zu einer viel früheren Zeit erschmolzen und die geringen systematischen Abweichungen, welche diese in ihrer Leitfähigkeit von der Reihe 4—13 zeigen werden, sind aus diesem gesonderten Schmelzprozeß leicht zu erklären.

Die Gläser wurden in Gestalt kleiner Säulen von kreisförmigem Querschnitt untersucht. Von jeder Glassorte (4—13) wurden zwei solche Säulchen von verschiedener Größe hergestellt, und zwar war die eine Serie etwa 30 mm hoch bei einem Durchmesser von ca. 11 mm und die andere Serie etwa 15 mm hoch bei einem Durchmesser von ca. 16,2 mm. Dadurch wurde der etwa mögliche Einfluß eines Übergangswiderstandes an den Elektroden auf den Wert der gemessenen Leitfähigkeit im Verhältnis von 1:4 variiert, so daß ein solcher, falls in beachtenswertem Maße vorhanden, sich hätte bemerkbar machen müssen, was indessen nicht der Fall war.

Da die Mitteilung der Einzelresultate einer späteren Veröffentlichung vorbehalten werden muß, sollen hier nur die Resultate der Widerstandsmessungen an den angeführten Glassorten beigebracht werden. Die Messungen der Widerstände wurden mit alternierendem Gleichstrom vorgenommen, indem die Stromstärke bestimmt wurde, welche eine gemessene Gleichspannung in dem das Glasstück enthaltenden Kreise erzeugte, wobei durch einen rotierenden Umschalter die Stromrichtung im Glase regelmäßig wechselte. Die Spannung wurde möglichst niedrig gehalten, um die Glassubstanz durch den Strom-

durchgang so wenig als irgend angängig zu verändern; sie wechselte zwischen 0,01 und 10 Volt, je nach der Größe der Leitfähigkeit des untersuchten Glasstückes. Die Periodenzahl des alternierenden Gleichstromes lag zwischen 10 und 100 Perioden in der Sekunde, was also 20 bis 200 Richtungswechseln des Stromes in der Sekunde entspricht. Die Widerstandsmessungen sind infolge sorgfältigster Konstruktion des Umschalters und oftmaliger Eichung der Anordnung auf etwa $\pm 0,2$ Proz. genau. Die Widerstände der Glasstücke wurden bei etwa 5 bis 10 verschiedenen Temperaturen zwischen 100 und 450 Grad Celsius bestimmt, indem bei jeder Temperatur mindestens 8 Messungen bei wechselnder Spannung und Frequenz vorgenommen wurden. Ein gesetzmäßiger Einfluß der Spannung und der Frequenz auf die Größe des gemessenen Widerstandes war nicht zu erkennen. Aus allen Messungen bei konstanter Temperatur wurde daher das Mittel genommen und aus diesen Werten die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Temperatur bestimmt.

In den früheren Veröffentlichungen war bereits gezeigt, daß die Leitfähigkeit L von Glas sich durch einen Ausdruck darstellen läßt von der Form

$$L = L_0 e^{-B/\vartheta},$$

wo L_0 und B Konstanten und ϑ die absolute Temperatur bedeuten. Die Leitfähigkeit verschwindet daher beim absoluten Nullpunkt, sie nimmt für $\vartheta = \infty$ den Wert L_0 an. Die Koeffizienten der obigen Formel sind nun aus den Widerständen, welche für die verschiedenen Temperaturen an den Glasstücken bestimmt waren, nachdem diese Widerstände unter Berücksichtigung der geometrischen Dimensionen der Glasstücke auf die Volumeneinheit reduziert wurden, nach der Methode der kleinsten Quadrate zu berechnen. Für die Glassorten 1—3 sind in der Tabelle II, welche die also berechneten Werte enthält, die früher publizierten Größen eingesetzt.

In den beiden Spalten 4 und 5 sind die mittleren Fehler der beiden Koeffizienten gegeben und dann nach deren Maßgabe aus je den beiden an zwei verschiedenen Stücken der gleichen Glassorte gewonnenen Werten die Mittel $L_{0,m}$ und B_m berechnet, deren mittlere Fehler die beiden nächsten Spalten enthalten.

In den so gewonnenen Werten von L_0 und B ist noch die Abhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit von der chemischen Zusammensetzung der Gläser enthalten. Da L_0 und B voneinander ganz unabhängig sind und jede von zwei unabhängigen Variablen abhängt, so kann der Ausdruck für diese Abhängigkeit nicht ganz

Tabelle II.

No.	L_0	B	$m(L_0)$ Proz.	$m(B)$	L_{0m}	B_m	$m(L_{0m})$ Proz.	$m(B_m)$
1	96,6	9482,0	—	—	—	—	—	—
2	155,6	8779,0	—	—	—	—	—	—
3	200,8	8155,0	—	—	—	—	—	—
4a	124,2	9292,1	+ 2,5	+ 13,6	123,86	9308,2	+ 2,9	+ 15,8
b	123,8	9314,0	1,4	8,1	—	—	—	—
5a	262,2	8210,6	1,6	9,1	265,96	8218,6	4,8	25,7
b	300,0	8275,1	4,5	24,1	—	—	—	—
6a	69,65	10455,9	2,5	14,7	69,69	10460,5	5,3	29,0
b	69,86	10473,0	4,7	25,0	—	—	—	—
7a	151,2	9724,4	3,2	17,7	149,61	9725,8	4,7	26,6
b	147,8	9726,9	3,5	19,8	—	—	—	—
8a	249,3	9022,6	1,2	6,9	243,61	8996,0	2,8	15,3
b	203,3	8888,9	2,6	15,7	—	—	—	—
9a	51,81	11120,0	8,2	46,0	52,02	11113,1	10,0	56,7
b	52,12	11109,4	5,7	32,7	—	—	—	—
10a	134,1	10258,2	4,2	21,3	153,44	10340,0	4,4	22,9
b	155,6	10350,7	1,3	7,8	—	—	—	—
12a	197,2	10819,8	3,1	16,8	209,51	10817,0	3,5	19,1
b	213,1	10816,6	1,6	9,1	—	—	—	—
13a	265,7	7924,3	5,4	30,2	269,31	7931,0	7,7	25,1
b	273,1	7933,3	5,4	17,9	—	—	—	—

einfach sein, es werden vielmehr für jede der beiden Größen mindestens drei Konstanten zu bestimmen sein.

Es sei c die Konzentration des Glases an Na_2O in Gewichtsprozenten, k diejenige an CaO , so daß die Konzentration an SiO_2 sich zu $100 - (c + k)$ bestimmt. Mit hinreichender Genauigkeit genügt dann der Ausdruck

$$L_0 = M + \mu \cdot c + \nu \cdot k$$

den Beobachtungen, wo M , μ und ν zu bestimmende Konstante bezeichnen. Das bedeutet, daß die Leitfähigkeit der Gläser bei unendlich hoher Temperatur proportional den Konzentrationen an Na_2O und CaO wird. Berücksichtigt man die Resultate an allen Glassorten 1—13, so findet man, wenn allen Beobachtungen ein Gewicht proportional der Größe von L_0 beigelegt wird, nach der Methode der kleinsten Quadrate als wahrscheinlichste Werte von M , μ und ν :

$$M = -196,65 \pm 26,44; \mu = 12,08 \pm 0,74; \nu = 6,770 \pm 1,220,$$

denen die mittleren Fehler beigelegt sind, und ebenso erhält man aus der Zusammenfassung der an den Gläsern 4—13 allein gewonnenen Resultate als wahrscheinlichste Werte für M , μ und ν :

$$M = -214,68 \pm 22,84; \mu = 12,58 \pm 0,61; \nu = 7,515 \pm 1,064,$$

welche Werte gemäß den beigelegten rechnerischen mittleren Fehlern eine größere Genauigkeit aufweisen, als die aus den Beobachtungen 1—13 gewonnenen, was dem aus den oben erwähnten Gründen in sich homogenen Material zuzuschreiben ist.

Die entsprechenden Gleichungen für L_0 lauten demgemäß:

$$L_0 = 12,08 \cdot c + 6,770 \cdot k - 196,65 \text{ bzw.}$$

$$L_0 = 12,58 \cdot c + 7,515 \cdot k - 214,68,$$

wobei die zweite Gleichung das homogenere Material umfaßt und daher bei den folgenden Ausführungen bevorzugt werden soll.

Die Ausdrücke zeigen, daß die Leitfähigkeit erst positive (d. h. physikalisch reelle) Werte annimmt, wenn eine Mindestmenge von Na_2O oder CaO in einem Glase enthalten ist, die sich berechnet aus der Gleichung

$$12,58 \cdot c + 7,515 \cdot k = 214,68.$$

Ist nur eine der Komponenten vorhanden, so müßte als Mindestkonzentration in Gewichtsprozenten

$$\text{im Falle } c = 0 \text{ an } CaO \text{ vorhanden sein} \\ k = 28,5 \text{ Proz.,}$$

$$\text{und im Falle } k = 0 \text{ an } Na_2O \text{ vorhanden sein} \\ c = 17,08 \text{ Proz.}$$

Hier und bei den folgenden Überlegungen sind nur die aus der zweiten Reihe von Beobachtungen an den Gläsern 4—13 sich ergebenden Resultate verwendet.

Diese Erscheinung, daß ein Teil der im Glase vorhandenen Na_2O - bzw. CaO -Menge für die Leitfähigkeit nicht in Betracht kommt, war bereits in der früheren Veröffentlichung¹⁾ bemerkt, doch konnte dort der Einfluß der CaO -Konzentration auf diese Bindung eines Teiles des in dem Glase vorhandenen Metalles nicht nachgewiesen werden. Jetzt aber läßt sich an Hand des beigebrachten umfangreicheren Mate-

1) Diss. Göttingen, S. 58 ff.

rials der Vorgang genauer verfolgen. Es werde zu diesem Zwecke die Zusammensetzung des Glases von Gewichtsprozenten in Atomprozente umgerechnet, d. h. es sei mit φ bzw. ψ die Anzahl der Na - bzw. Ca -Atome in je 100 Atomen der Glassubstanz bezeichnet. Man schreibt dann die Gleichung für L_0 von den c und k auf φ und ψ um durch die Substitutionen:

$$k = 1,605 \psi / (0,573 + 0,00457 \psi + 0,00026 \varphi) \\ c = 0,885 \varphi / (0,573 + 0,00457 \psi + 0,00026 \varphi).$$

Berechnet man zunächst die Atomkonzentrationen für den Fall, daß die Grenzleitfähigkeit L_0 und damit zugleich auch die Leitfähigkeit bei allen Temperaturen gerade verschwindet, daß also c bzw. k die oben berechneten Werte annehmen, so würde man, falls das Glas nur Na oder nur Ca als basischen Bestandteil enthielte, nunmehr für die kritischen Atomkonzentrationen die folgenden Werte erhalten.

Wenn das Glas nur Ca enthält, so ist $c = 0 = \varphi$ und es wird $\psi = 11,4$ bzw. 11,1. Im Falle das Glas nur Na enthält, so ist $k = 0 = \psi$ und es wird $\varphi = 10,6$ bzw. 11,1. Um also eine von Null verschiedene Leitfähigkeit bei einem reinen Natron- bzw. reinen Kalksilikatglas zu erhalten, muß dieses Glas mindestens 11 Atome Na oder mindestens 11 Atome Ca auf je 100 Atome insgesamt enthalten. In bezug auf die Bildung des festen, offenbar undissoziierbaren Bestandteiles des Glases, wozu wohl diese je 11 Atome Metall gebraucht werden, sind also 11 Atome Na 11 Atomen Ca äquivalent.

Das ist ein sehr auffälliges Resultat, denn Na ist ein einwertiges, Ca aber ein zweiwertiges Metall und trotzdem besitzen sie für den die Elektrizität nicht leitenden Teil des Glases scheinbar dieselbe Bedeutung. Nun ist über die Molekulargewichte fester Substanzen bisher fast nichts bekannt¹⁾, so daß bisher eine Entscheidung, ob die an flüssigen bzw. gasförmigen Substanzen abgeleiteten Begriffe des Molekulargewichtes bzw. der Bindung der Atome im Molekül aneinander auch für den festen Aggregatzustand übernommen werden können, nicht vorliegt. Die Mehrzahl der auf diese Frage bezüglichen Theorien erkennt allerdings bereits einen Unterschied zwischen dem festen Zustand gegenüber dem flüssigen insofern an, als im festen Aggregatzustande dem Atom eine wesentlich selbständigere Rolle zugesprochen werden muß als im flüssigen, und daß der Begriff der Wertigkeit bei festen Körpern wohl nur eingeschränkte Bedeutung besitzen dürfte.

Geht man nun von den beiden oben behandelten Grenzfällen zu dem allgemeinen Falle

über, daß nämlich Na und Ca gleichzeitig in dem Glase vorhanden sind, aber wiederum insgesamt in solcher Menge, daß die Leitfähigkeit gerade noch den Wert Null besitzt, so berechnen sich die Wertepaare für c und k aus der Gleichung

$$12,58 \cdot c + 7,515 \cdot k = 214,68.$$

Ersetzt man jetzt die c und k wiederum durch die φ und ψ , so wird

$$0,885 \varphi = 17,07 (0,573 + 0,00457 \psi + 0,00026 \varphi) - 0,598 \times 1,605 \psi$$

oder

$$0,881 \varphi = 9,78 - 0,881 \psi.$$

Man sieht, daß φ und ψ den gleichen Faktor haben, wie das ja aus den obigen Ausführungen nicht anders zu erwarten war, während die vollkommene Übereinstimmung der beiden Faktoren mit 0,881 natürlich auf einen Zufall zurückzuführen ist. Obgleich also die beiden Faktoren physikalisch eine verschiedene Bedeutung besitzen könnten, kann hier doch wohl ohne Bedenken die Gleichung in der Form geschrieben werden:

$$0,881 (\varphi + \psi) = 9,78,$$

daher

$$\varphi + \psi = 11,1 \text{ Atomprozente.}$$

Es folgt daraus also ganz allgemein die Regel: Ein reines Natron-Kalk-Silikatglas zeigt nur dann eine von Null verschiedene Leitfähigkeit, wenn sein Gehalt an Na - und Ca -Atomen zusammen mindestens 11 Atome auf je 100 Atome des Glases beträgt. Übersteigt die Summe der Na - und Ca -Atome zusammen diesen Mindestbetrag, so ist die Grenzleitfähigkeit bei unendlich hoher Temperatur proportional dem Überschuße des Glases an Na - bzw. Ca -Atomen über die oben bestimmten 11 Prozent, jedoch gelten für den Einfluß der Na -bzw. Ca -Konzentrationen verschiedene Proportionalitätsfaktoren.

Dieses Verhalten des Glases, daß auf die Menge der zur Verfestigung dienenden nicht undissoziierbaren Atome der Basen die aus der Theorie der Lösungen folgende Valenz derselben keine Bedeutung zu haben scheint, ist so auffällig, daß es sich fraglos lohnen würde, noch andere Glassorten mit anderen Metallen als Silikatbildnern zu untersuchen; denn das hier beigebrachte Material ist, da es sich nur auf Ca und Na bezieht, zu weiteren Schlüssen über den Molekularzustand fester Körper noch nicht hinreichend.

Es bleibt jetzt noch die Abhängigkeit der Größe B , welche der Veränderung der Leitfähigkeit mit der Temperatur Rechnung trägt, von den Konzentrationen c und k zu bestimmen übrig. Eine graphische Darstellung der erhal-

¹⁾ Nernst, Theoretische Chemie. 7. Aufl., S. 298f., 1913.

tenen Werte zeigte, daß man die Beobachtungen am besten durch eine vierkonstantige Formel auszudrücken vermag, welche besagt, daß B mit wachsendem c abnimmt und mit steigendem k zunimmt, doch nicht bei allen c in gleicher Weise, sondern so, daß die Abhängigkeit des B von k mit wachsendem c immer geringer wird. Ein solches Verhalten läßt sich durch den Ausdruck

$$B = \alpha c k + \beta c + \gamma k + \delta$$

darstellen.

Mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate erhält man aus den in Tabelle II gegebenen Werten von B , indem man allen gleiches Gewicht beilegt, für die α , β , γ , δ die Werte:

Bei Berücksichtigung aller 12 Glassorten:
 $\alpha = -4,0321$, $\beta = -51,927$, $\gamma = 197,63$,
 $\delta = 9477,3$;

bei Berücksichtigung allein der Glassorten 4-13:
 $\alpha = -3,4040$, $\beta = -59,045$, $\gamma = 174,00$,
 $\delta = 9803,7$.

Die Ausdrücke für B werden also

$$B = 9477,3 - 51,927 c + 197,63 k - 4,0321 c k \quad \text{bzw.}$$

$$B = 9803,7 - 59,045 c + 174,00 k - 3,4040 c k.$$

Eine Verwandlung der c und k in die Atomprozente φ und ψ bringt hier weiter keine Aufklärungen. Die Formel gibt ferner einen Wert von c , für den B von k unabhängig ist. Nach der zuverlässigeren zweiten Formel müßte dann $c = 51$ Proz. sein, was praktisch unmöglich ist, weswegen diese Überlegung keinerlei Bedeutung besitzt.

In dem B ist die Wärmetönung des Prozesses der Dissoziation des Glases enthalten und es würde natürlich von sehr großem Interesse sein, die Abhängigkeit derselben von der Konzentration an Na_2O bzw. CaO kennen zu lernen. Außerdem ist aber in B auch die Veränderung der inneren Reibung mit der Temperatur enthalten und diese beiden Größen sind nun auf keine Weise voneinander zu trennen. Eine Möglichkeit, wenigstens eine Andeutung über die Art der Zusammensetzung von B aus Wärmetönung und Reibungseinfluß zu erhalten, würde sich durch die Bestimmung der Abhängigkeit der Dissoziation von der Temperatur gewinnen lassen, wie das bereits in einer früheren Untersuchung¹⁾ für die Glassorten 1-3 durch Messungen an Konzentrationsketten, welche aus zwei verschiedenen Glassorten gebildet waren, versucht wurde. Doch waren die damals erhaltenen Resultate infolge der Schwierigkeit der

Messung so unsicher, daß an dem vorliegenden erweiterten Materiale derartige Versuche nicht wiederholt wurden.

Zum Schluß seien noch die Ausdrücke für die Leitfähigkeit reiner $Na-Ca$ -Silikatgläser in Abhängigkeit von der Na_2O - und CaO -Konzentration und von der Temperatur vollständig hingeschrieben:

für die Glassorten 1-13

$$L = (12,08 c + 6,770 k - 5477,3 - 51,927 c + 197,63 k - 4,0321 c k - 196,65) e^{\frac{1}{\theta}}$$

für die Glassorten 4-13 allein aber

$$L = (12,58 c + 7,515 k - 9803,7 - 59,045 c + 174,00 k - 3,4040 c k - 214,68) e^{\frac{1}{\theta}}$$

Die große Zahl von je sieben Konstanten darf nicht auffallen, da die Formeln die Abhängigkeit der L von drei unabhängigen Variablen ausdrücken müssen und der Faktor vor der e -Funktion von dem Exponenten vollkommen unabhängig ist. Sechs Konstanten wären das überhaupt mögliche Minimum, falls die Gehalte der Gläser an Na und Ca keinerlei Rückwirkung aufeinander bezüglich der Leitfähigkeit im Gefolge haben würden, was ja aber von vornherein ganz unwahrscheinlich ist.

Zusammenfassung.

Es wird die Abhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit reiner $Na-Ca$ -Silikatgläser von ihrem Gehalt an Na_2O und CaO , sowie von der Temperatur festgestellt. Die Abhängigkeit von der Temperatur wird durch eine einfache Exponentialfunktion mit der reziproken absoluten Temperatur im Exponenten bestimmt. Der Koeffizient der Exponentialfunktion zeigt, daß nicht alle in dem Glase vorhandenen Na - bzw. Ca -Silikate dissoziationsfähig sind, sondern daß vielmehr von je insgesamt 100 Atomen der Substanz zusammen 11 Atome Na oder Ca von vornherein festgelegt sind und erst die über diese Zahl überschießenden Atome für die Leitfähigkeit in Betracht kommen. Dabei ist besonders hinzuweisen auf den Umstand, daß in dem nicht dissoziationsfähigen Teile des Glases die zweiwertigen Ca -den einwertigen Na -Atomen gleichwertig sind.

Die Untersuchung wurde angestellt im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule in Braunschweig, indem die Mittel des Institutes dazu von dem Direktor, Herrn Professor Diesselhorst, in liebenswürdigster Weise zur Verfügung gestellt wurden, wofür auch an dieser Stelle besonders gedankt sei.

(Eingegangen 17. Juni 1918.)

1) R. Ambronn, Inaug.-Diss. S. 61 ff.

Zur Herleitung der verallgemeinerten Lagrangeschen Gleichungen für nichtholonome Koordinaten. II.

Von Clemens Schaefer.

In einer kurzen Notiz über den obigen Gegenstand¹⁾ habe ich eine mir recht einfach erscheinende Herleitung der verallgemeinerten Lagrangeschen Gleichungen aus dem Hamiltonschen Prinzip angegeben. Dazu teilte Herr F. Noether mir mit, daß er im wesentlichen dieselbe Herleitung in seiner Dissertation²⁾ bereits 1909 angegeben habe, was ich hier hervorhebe.

Die Nichtigkeit der gewöhnlichen Lagrangeschen Gleichungen für nichtholonome Koordinaten beruht darauf, daß für solche (in den Bezeichnungen meiner ersten Note) die Beziehung

$$\delta(\pi_r) = \frac{d}{dt}(\delta\pi_r)$$

nicht gilt. Daß gerade dieser Umstand die Verallgemeinerung bedingt, tritt in der dort gegebenen Darstellung nicht hervor. Deshalb mag es gestattet sein, meine erste Mitteilung im folgenden nach dieser Seite hin zu ergänzen, wobei ich wieder betonen möchte, daß ich nicht beanspruche, etwas Neues zu sagen, sondern daß nur die Frage, wie dieser Gegenstand im Unterricht zu behandeln sei, mich zu dieser zweiten Notiz veranlaßt.

Es seien, wie in der ersten Mitteilung, q_k ($k=1, 2, \dots, n$) wahre, voneinander unabhängige Koordinaten; α_{kr} , β_{rk} gewisse Funktionen von ihnen; es werden damit die n Ausdrücke gebildet:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\pi_r = \sum_k^{1,n} \alpha_{kr} \delta q_k, \\ \pi_r = \sum_k^{1,n} \alpha_{kr} \frac{dq_k}{dt} = \sum_k \alpha_{kr} \dot{q}_k \end{array} \right\} r, k = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

Die Auflösung derselben nach δq_k bzw. $\dot{q}_k$ liefere:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta q_k = \sum_r \beta_{rk} \delta\pi_r, \\ \dot{q}_k = \sum_r \beta_{rk}^* \pi_r \end{array} \right\} r, k = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

π_r steht statt $\frac{d\pi_r}{dt}$ bzw. $\dot{\pi}_r$, um die Auffassung zu verhüten, als ob es sich um Ableitungen von Größen π_r handle, was nur zutreffen würde, wenn die Gleichungen (1) integrabel, d. h. die Beziehungen

1) Cl. Schaefer, diese Zeitschr. 19, 129ff., 1918.
2) F. Noether, Münchn. Inaug.-Diss. 1909; die allgemeine Form der verallg. Lagrangeschen Gleichungen finde ich jedoch dort nicht.

$$\frac{\partial \alpha_{kr}}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial \alpha_{\lambda r}}{\partial q_k} = 0 \quad (3)$$

erfüllt wären. Sind die Integrabilitätsbedingungen (3) nicht erfüllt, was wir von jetzt ab ausdrücklich annehmen wollen, so nennt man eben die $\delta\pi_r$ und $d\pi_r$ Variationen und Differentiale von nichtholonomen Koordinaten.

Wir wollen zunächst zeigen, daß in der Tat für nichtholonome Koordinaten

$$\delta(\pi_r) \neq \frac{d}{dt}(\delta\pi_r) \text{ ist}^1).$$

Durch Differentiation der ersten Gleichung (1) findet man:

$$\frac{d}{dt}(\delta\pi_r) = \sum_k \alpha_{kr} \frac{d\delta q_k}{dt} + \sum_k \frac{d\alpha_{kr}}{dt} \delta q_k \quad (4)$$

ebenso durch Variation der zweiten Gleichung (1):

$$\delta(\pi_r) = \sum_k \alpha_{kr} \frac{d\delta q_k}{dt} + \sum_k \delta\alpha_{kr} \dot{q}_k; \quad (5)$$

und durch Subtraktion folgt:

$$\delta(\pi_r) = \frac{d}{dt}(\delta\pi_r) + \sum_k (\delta\alpha_{kr} \dot{q}_k - \dot{\alpha}_{kr} \delta q_k). \quad (6)$$

$\delta\pi_r$ stimmt also nur dann mit $\frac{d\delta\pi_r}{dt}$ überein, wenn der Ausdruck

$$\sum_k (\delta\alpha_{kr} \dot{q}_k - \dot{\alpha}_{kr} \delta q_k)$$

verschwindet. Diesen Ausdruck wollen wir passend umformen, um seine Beziehung zu den Integrabilitätsbedingungen (3) hervortreten zu lassen. Wir schreiben zunächst:

$$\dot{\alpha}_{kr} = \sum_\lambda \frac{\partial \alpha_{kr}}{\partial q_\lambda} \dot{q}_\lambda.$$

Dann wird aus (6):

$$\delta(\pi_r) = \frac{d}{dt}(\delta\pi_r) + \sum_k \delta\alpha_{kr} \dot{q}_k - \sum_k \sum_\lambda \frac{\partial \alpha_{kr}}{\partial q_\lambda} \dot{q}_\lambda \delta q_k,$$

oder, wenn wir im letzten Gliede, was statthaft ist, die beiden Summationsbuchstaben k und λ vertauschen:

$$\delta(\pi_r) = \frac{d}{dt}(\delta\pi_r) + \sum_k \dot{q}_k \left\{ \delta\alpha_{kr} + \sum_\lambda \frac{\partial \alpha_{\lambda r}}{\partial q_k} \delta q_\lambda \right\}$$

oder endlich, da $\delta\alpha_{kr} = \sum_\lambda \frac{\partial \alpha_{kr}}{\partial q_\lambda} \delta q_\lambda$ ist:

$$\delta(\pi_r) = \frac{d}{dt}(\delta\pi_r) - \sum_k \sum_\lambda \dot{q}_k \delta q_\lambda \left\{ \frac{\partial \alpha_{\lambda r}}{\partial q_k} - \frac{\partial \alpha_{kr}}{\partial q_\lambda} \right\}. \quad (7)$$

1) Man vgl. hierzu insbesondere: G. Hamel, Math. Ann. 59, 416ff., 1904.

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer ist aber nichts anderes als die linke Seite der Integrabilitätsbedingungen (3); sind diese erfüllt, so ist $\delta(\pi_r) = \frac{d}{dt}(\delta\pi_r)$; sind sie nicht erfüllt, was hier vorausgesetzt wurde, so ist:

$$\delta(\pi_r) \neq \frac{d}{dt}(\delta\pi_r).$$

Wir können mit Hilfe von (2) die Gleichung (7) noch etwas umgestalten, indem wir unter Einführung zweier neuer Summationsbuchstaben q und σ schreiben:

$$\dot{q}_k = \sum_q \beta_{qk} \cdot \pi_q^*$$

$$\delta q_k = \sum_\sigma \beta_{\sigma k} \cdot \delta\pi_\sigma.$$

Man erhält dann als allgemeine Formel aus (7):

$$\delta(\pi_r) = \frac{d}{dt}(\delta\pi_r) - \sum_{k, \sigma, \lambda, q} \left(\frac{\partial \alpha_{\lambda r}}{\partial q_k} - \frac{\partial \alpha_{kr}}{\partial q_\lambda} \right) \cdot \pi_q^* \beta_{qk} \beta_{\sigma \lambda} \delta\pi_\sigma. \quad (8)$$

Wir gehen nun zur Ableitung der verallgemeinerten Lagrangeschen Gleichungen aus dem Hamiltonschen Prinzip über. Denken wir uns zunächst L und Φ als Funktionen der wahren Koordinaten und Geschwindigkeiten q_k und $\dot{q}_k$ gegeben, so tritt in der Variation von L ein

Glied mit dem Faktor $\delta\left(\frac{dq_k}{dt}\right)$ auf. Da für

wahre Koordinaten die Operationen δ und $\frac{d}{dt}$

vertauschbar sind, so kann in diesem Falle dieses Glied in der bekannten Weise durch partielle Integration umgestaltet werden. Dies ist nicht mehr möglich, wenn L und Φ als Funktionen der q_k und π_r^* dargestellt sind; sie mögen dann in L' und Φ' übergehen. Dann kann man jedoch zum gewünschten Ziele gelangen, wenn man nun die Formel (8) benutzt. Das erste Glied der rechten Seite von (8) entspricht dem gewöhnlich allein auftretenden, und wird in der normalen Weise durch partielle Integration umgeformt; das zweite Glied der rechten Seite dagegen liefert das erforderliche Korrektionsglied der Lagrangeschen Gleichungen.

Wir gehen demgemäß aus von der Gleichung des Hamiltonschen Prinzips:

$$\delta \int (L' - \Phi') dt = 0$$

oder:

$$\int dt \sum_r \frac{\partial L'}{\partial \pi_r} \delta\pi_r + \int dt \sum_r \frac{\partial L'}{\partial \pi_r^*} \delta(\pi_r^*) - \int dt \sum_r \frac{\partial \Phi'}{\partial \pi_r} \delta\pi_r = 0^1),$$

oder, wenn wir jetzt für $\delta(\pi_r^*)$ den Wert nach (8) einführen:

$$\int dt \sum_r \left[\frac{\partial L'}{\partial \pi_r} - \frac{\partial \Phi'}{\partial \pi_r} \right] \delta\pi_r + \int dt \sum_r \frac{\partial L'}{\partial \pi_r^*} \frac{d}{dt}(\delta\pi_r) - \int dt \sum_r \frac{\partial L'}{\partial \pi_r^*} \cdot \sum_{k, \sigma, \lambda, q} \beta_{qk} \beta_{\sigma \lambda} \pi_q^* \left(\frac{\partial \alpha_{\lambda r}}{\partial q_k} - \frac{\partial \alpha_{kr}}{\partial q_\lambda} \right) \cdot \delta\pi_\sigma = 0.$$

Vertauschen wir im letzten Gliede links die Summationsbuchstaben σ und r miteinander, so daß auch in diesem Gliede jetzt der Faktor $\delta\pi_r$ auftritt, und formen das zweite Glied links in der üblichen Weise durch partielle Integration um, so folgt:

$$\int dt \sum_r \delta\pi_r \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \pi_r^*} \right) - \frac{\partial L'}{\partial \pi_r} + \frac{\partial \Phi'}{\partial \pi_r} + \sum_{k, \sigma, \lambda, q} \frac{\partial L'}{\partial \pi_\sigma^*} \beta_{qk} \beta_{r\lambda} \pi_q^* \left(\frac{\partial \alpha_{\lambda \sigma}}{\partial q_k} - \frac{\partial \alpha_{k\sigma}}{\partial q_\lambda} \right) \right] = 0,$$

oder, da die $\delta\pi_r$ voneinander unabhängig sind:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \pi_r^*} \right) - \frac{\partial L'}{\partial \pi_r} + \sum_{k, \sigma, \lambda, q} \beta_{qk} \beta_{r\lambda} \pi_q^* \frac{\partial L'}{\partial \pi_\sigma^*} \left(\frac{\partial \alpha_{\lambda \sigma}}{\partial q_k} - \frac{\partial \alpha_{k\sigma}}{\partial q_\lambda} \right) = - \frac{\partial \Phi'}{\partial \pi_r} = \Pi_r,$$

was mit der Endgleichung in der ersten Note übereinstimmt, wenn man noch im dritten Gliede links die Summationsbuchstaben λ und k miteinander vertauscht:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \pi_r^*} \right) - \frac{\partial L'}{\partial \pi_r} + \sum_{k, \lambda, \sigma, q} \beta_{q\lambda} \beta_{rk} \pi_q^* \frac{\partial L'}{\partial \pi_\sigma^*} \left(\frac{\partial \alpha_{k\sigma}}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial \alpha_{\lambda\sigma}}{\partial q_k} \right) = \Pi_r. \quad (9)$$

1) Dabei ist zu bemerken, daß $\frac{\partial L'}{\partial \pi_r}$ und $\frac{\partial \Phi'}{\partial \pi_r}$ hier in erweitertem Sinne als sonst gebraucht wird, da die Größen „ π_r “ ja gar nicht existieren. $\frac{\partial L'}{\partial \pi_r}$ ist hier als Abkürzung

für $\sum_k \frac{\partial L'}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \pi_r} = \sum_k \frac{\partial L'}{\partial q_k} \beta_{rk}$ ebenso als Abkürzung für $\sum_k \frac{\partial \Phi'}{\partial q_k} \beta_{rk}$ zu verstehen.

(Eingegangen 18. Juni 1918.)

Zahlen nach J. A. Ewing¹⁾.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
No.	Figur der Abhandlung	$\mathfrak{B}_k$	$\mathfrak{B}_r$	$\mathfrak{B}$	$\frac{\mathfrak{B}_r}{\mathfrak{B}}$	$\frac{1}{2}(\mathfrak{B}_r + \mathfrak{B})$	$\mathfrak{B}_k$	$\Delta \%$
1	4	1,89	10873	13307	0,817	12090	12225	-1,06 ^{0/10}
2	5	2,80	14537	15630	0,930	15083	15120	-0,26
3	9	2,80	12070	16000	0,754	14035	13415	+4,62
4	11	26,94	11925	14540	0,820	13232	13350	-0,90
5	13	41,35	9410	12765	0,737	11087	11010	+0,73
6	2	1,69	9120	11195	0,815	10157	10255	-0,88
7	9	17,55	11800	14780	0,798	13290	13380	-0,67
8	10	34,12	6780	9380	0,723	8080	8540	-5,39
9	12	22,40	10390	14360	0,724	12375	12270	+0,81
			$\mathfrak{B}_r$	$\mathfrak{B}$	$\frac{\mathfrak{B}_r}{\mathfrak{B}}$	$\frac{1}{2}(\mathfrak{B}_r + \mathfrak{B})$	$\mathfrak{B}_k$	
10	14I	1,56	915	1234	0,741	1074	1075	-0,09
11	16	17,90	785	1088	0,722	936	917	+2,07
12	16	15,95	598	758	0,789	678	714	-5,04
13	16	14,65	441	587	0,751	514	537	-4,28

Zahlen nach M. Wien²⁾

			$\mathfrak{B}_r$	$\mathfrak{B}$	$\frac{\mathfrak{B}_r}{\mathfrak{B}}$	$\frac{1}{2}(\mathfrak{B}_r + \mathfrak{B})$	$\mathfrak{B}_k$	
14	25 ($N=0$)	1,70	2800	3700	0,757	3250	3390	-4,13

Zahlen nach R. Gans³⁾

			$\mathfrak{B}_r$	$\mathfrak{B}$	$\frac{\mathfrak{B}_r}{\mathfrak{B}}$	$\frac{1}{2}(\mathfrak{B}_r + \mathfrak{B})$	$\mathfrak{B}_k$	
15	3	52,5	825	1090	0,757	957	960	-0,31
16	4	14,0	1100	1325	0,830	1212	1160	+4,48

Zahlen nach F. Erhardt⁴⁾

			$\mathfrak{B}_r$	$\mathfrak{B}$	$\frac{\mathfrak{B}_r}{\mathfrak{B}}$	$\frac{1}{2}(\mathfrak{B}_r + \mathfrak{B})$	$\mathfrak{B}_k$	
17	4	11,50	1348	1463	0,921	1405	1434	-2,09

1) J. A. Ewing, Experimental Researches in Magnetism, Phil. Trans. 176. (II), 523-640, 1895.

2) M. Wien, Über die Magnetisierung durch Wechselstrom. Wied. Ann. 66, 859-953, 1898.

3) R. Gans, Zur Theorie des Ferromagnetismus, Ann. d. Phys. (4), 33, 1065-1095, 1910.

4) F. Erhardt, Die reversible magnetische Permeabilität bei hohen Frequenzen. Ann. d. Phys. (4), 54, 41-60, 1917.

Berücksichtigt man bei Durchsicht der Werte von Δ in der früheren Tabelle den Einfluß, den Fehler in den Längenabmessungen und Ungenauigkeiten in den Zeichnungen auf die ermittelten Zahlen ausüben können, so ist das genäherte Bestehen der Beziehung

$$\mathfrak{B}_k = \frac{1}{2}(\mathfrak{B}_r + \mathfrak{B})$$

oder

$$\mathfrak{B}_k = \frac{1}{2}(\mathfrak{B}_r + \mathfrak{B})$$

genügend bemerkenswert, um die vorstehenden Mitteilungen als nicht überflüssig erscheinen zu lassen.

Die genannte Beziehung erweist sich als unzutreffend bei Eisen-Silizium-Legierungen mit merklichem Si-Gehalt, wie aus den Zahlen von Tafel III des kürzlich erschienenen Buches von E. Gumlich¹⁾ hervorgeht.

1) E. Gumlich, Leitfaden der magnetischen Messungen. Braunschweig, Friedr. Vieweg u. Sohn. 1918.

Aachen, Juni 1918.

(Eingegangen 1. Juli 1918.)

Über die kritische Temperatur des Quecksilbers¹⁾.

Von Julie Bender†.

Versuche, die kritische Temperatur des Quecksilbers durch Erhitzen in Quarzkapillaren festzustellen, wurden zuerst von J. Traube²⁾ und G. Teichner, die bis etwa 1000° kamen, dann von J. Koenigsberger³⁾, der bis etwa 1270°, von W. C. Menzies⁴⁾, der wohl über 1270° erhitzen konnte, angestellt. Die Verfasserin⁵⁾ hatte einige Daten schon in einer vorläufigen Mitteilung gegeben. Auch bei den im folgenden beschriebenen Versuchen wurde die kritische Temperatur noch nicht erreicht, obgleich es bei einem Versuch gelang, bis etwa 1430° C zu kommen. Doch sind die Dichten des flüssigen und gasförmigen Quecksilbers bis etwa 1400° C angenähert gemessen und dadurch die Grenzen, zwischen denen die kritische Temperatur liegen muß, genauer als bisher ermittelt worden. Das Prinzip der Messungen ist dasselbe wie früher⁶⁾. Die Quarzkapillaren wurden von W. C. Heräus in Hanau mit reinem Quecksilber gefüllt geliefert.

§ 1. Die Bestimmung der Dampfdichte geschah in der Weise, daß die Temperatur gemessen wurde, bei der das flüssige Quecksilber soeben in den Kapillaren verschwand. Kennt man bei 0° das Verhältnis f des Volumens des flüssigen Quecksilbers zu dem der ganzen Kapillaren, so ist dadurch das Verhältnis der Dichte d bei der Temperatur t , bei der gerade alles Quecksilber verdampft ist, zu der Dichte d_0 bei 0° gegeben. Man hat die Formel $d = d_0 \cdot f$ auf $H_2O = 1$ bezogen.

Auf diese Art wurde in einer Anzahl Versuche die Dampfdichte bestimmt. Die wahren Temperaturen $t_{(kor.)}$ des Quecksilberfadens sind wegen der Ausstrahlung im Innern etwas geringer (vgl. § 3) als die außen am Quarz mit Thermoelement gemessenen.

Die Messungen hätten später noch weiter ausgeführt werden sollen. Die Abhängigkeit der Dampfdichte von der Temperatur ist mit Benutzung der von Cailletet, Colardeau u. Rivière⁶⁾ bis etwa 800° gemessenen Werte auf Fig. 1 graphisch dargestellt.

1) Die Verfasserin ist im Febr. 1917 gestorben. Ihrem Wunsch entsprechend sind die sorgfältigen, aber nicht ganz abgeschlossenen Beobachtungen hier kurz zusammengestellt und erörtert. (J. Koenigsberger.)

2) J. Traube u. G. Teichner, Ann. d. Phys. 13, 620, 1904.

3) J. Koenigsberger, Chem. Ztg. 36, 1321, 1912.

4) W. C. Menzies, Amer. Chem. Soc. 35, 1065, 1913.

5) J. Bender, diese Zeitschr. 16, 246, 1915.

6) Cailletet, Colardeau et Riviere, C. R. 130, 1585, 1900.

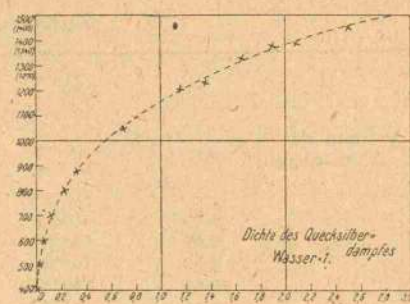


Fig. 1.

Tabelle I.

f	t in C°	d	$t_{(kor.)}$
0,05	1050	0,70	1050
0,09	1210	1,15	1210
0,10	1230	1,35	1230
0,12	1330	1,65	1295
0,14	1380	1,90	1330
0,18	1450	2,50	1380

Die kritische Temperatur wurde bei diesen Versuchen noch nicht erreicht, sie liegt jedenfalls über 1370° C. Die von J. J. van Laar¹⁾ angestellte Berechnung über die kritische Temperatur ($T_k = 1172$) stimmt also nicht zu unseren Beobachtungen; vielleicht weil Hg von etwa 1000° ab noch stärker als bimolekular aggregiert ist. Auch der kritische Druck muß nach unseren Schätzungen erheblich größer sein als 180° Atm.; denn es wurde die Dampfdichte von 2,50 erreicht, was in erster Annäherung einem Druck von über 200 Atm. entspricht.

§ 2. Die Dichtebestimmung des flüssigen Hg geschah folgendermaßen: Wenn man das Volumen der Kapillaren als konstant voraussetzt, so verhalten sich die Volumina des flüssigen Hg bei verschiedenen Temperaturen umgekehrt wie die Dichten.

Die Volumenvergrößerungen des flüssigen Quecksilbers während des Erhitzens wurden durch die Veränderung der Länge des Quecksilberfadens in der vorher sorgfältig auskalibrierten Röhre bestimmt. Die Längeänderungen des Quecksilberfadens in der Kapillare wurden mit Mikroskop gemessen, das ein Kühlobjektiv von etwa 2,5 cm Brennweite hatte. Zwischen Kapillaren und Objektiv stand ein Schirm aus Quarzglas. In seiner Mitte war eine kleine Öffnung. An dieser wurde ein plan geschliffenes Blättchen aus reinstem Quarz zwischen drei dem Quarzglasschirm aufgeschmolzenen Haken eingeschoben. Die Verlängerung des Quecksilber-

1) J. J. van Laar, Versl. K. Ak. van Wetensch. 25, 1498, 1917 (Beibl. 42, 42, 1918).

fadens wurde mit Okularmikrometer¹⁾ oder durch Verschieben des Mikroskops an einer Teilung mit Nonius, die 0,02 mm angab, abgelesen.

Die mit Quecksilber gefüllten Kapillaren aus Quarzglas wurden in einen Schutzmantel, eine unten geschlossene, sehr gut zylindrische Röhre ebenfalls aus ganz reinem Quarzglas, hineingehängt. Die Schutzröhre wurde dann oben mit feinem Asbest gegen Luftströmung abgeschlossen. Erhitzt wurde durch zwei nach Abstand und Richtungswinkel [genau regulierbare Gebläse, in die Leuchtgas, Druckluft und Sauerstoff geleitet werden konnte. Die Regulierung des Sauerstoffs erfolgte durch ein besonders feines doppeltes Reduzierventil. Diese ganze Apparatur wurde im Abzug vor Luftströmungen geschützt. Hierdurch war es möglich, die Temperatur auf etwa 10° konstant zu halten. Die Messung der Temperatur wurde mit sehr dünnem Thermoelement nach Le Chatelier (Drahtdurchmesser von etwa 0,2 und 0,1 mm) nach der Kompensationsmethode ausgeführt. Die Lötstelle des Thermoelements lag in Schlinge um die Kapillaren im Schutzrohr, etwas unterhalb der Stelle, wo der Quecksilberfaden aufhörte. Nur ein Teil der nach Mitteilung der Firma Heräus recht schwierig anzufertigenden, mit Quecksilber gefüllten Quarzglasröhren erwies sich brauchbar. Wie zu erwarten, waren die Kapillaren mit kleinstem inneren Durchmesser die besten. Beleuchtet wurde bis 900° durch Auerbrenner mit geeignetem Papierschirm; oberhalb 900° genügte das Selbstleuchten des Quecksilberfadens. Das Kalibrieren der Kapillaren geschah sowohl in der bekannten Weise durch Verschieben des Fadens wie durch direkte Messung unter dem Mikroskop. In letzterem Fall wurde, um die Elliptizität zu eliminieren, jeweils in vier Azimuten (0°, 45°, 90°, 135°) abgelesen, und das Mittel aus den vier Werten genommen. Dann wurde d^2 berechnet, auf mm Papier aufgetragen und graphisch das Volumen für jede Länge des Quecksilberfadens ermittelt.

Je höher die Temperatur und je länger die Dauer der Erhitzung, um so mehr machte sich das Erweichen des Quarzglases unter dem Einfluß der hohen Dampfdrucke, und als Folge davon eine dauernde Volumvergrößerung geltend. Nur solche Versuche waren brauchbar, bei denen das Volumen der Kapillaren vor und nach der Erhitzung auf etwa ± 5 Proz. dasselbe war, was durch Längenmessungen des Quecksilberfadens in der auskalibrierten (vgl. unten)

Kapillare festgestellt wurde, nachdem sich das Rohr wieder abgekühlt hatte.

Eine temporäre, rein elastische Ausweitung des Volumens war mit den vorhandenen Mitteln nicht nachweisbar. Der scheinbare, durch die Quarzröhre vergrößerte Durchmesser konnte mit dem oben erwähnten Kühlobjektiv und einem Okular, das aus einem etwa 20 mal vergrößernden Mikroskop bestand, auf etwa ± 5 Proz., das Volumen also auf ± 10 Proz. genau gemessen werden. Der innere wahre Durchmesser der Kapillaren war klein, etwa 0,05–0,17 mm, der äußere verhältnismäßig groß 5–10 mm. Wenn Temperatur und Längenveränderung rasch abgelesen wurden, was etwa 30–50 Sekunden erforderte, so konnte man bis 1100° erhitzen, ohne daß sich während des Erhitzens durch direkte mikroskopische Messungen des Durchmessers oder nach dem Abkühlen durch Längenbestimmung des Quecksilberfadens eine Erweiterung des Volumens von mehr als 10 Proz. feststellen ließ. Die Länge der Kapillaren blieb stets konstant.

Bis 1200° war dagegen nur etwa die Hälfte der Kapillaren verwendbar. Als unbrauchbar wurden alle Kapillaren betrachtet, bei denen die Vergrößerung des Volumens nach der Erhitzung über 15 Proz. betrug.

Es seien einige Beispiele gegeben: n gibt an, welcher Teil des Volumens V_0 am Anfang, n' , welcher am Ende des Versuchs von Hg ausgefüllt war. Der Durchmesser in der Mitte der Kapillare = d ist in Skalenteilen des Okularmikroskops gemessen. t = Temperatur in C.

Tabelle II.

XII. $n = 0,38$		XIII. $n = 0,55$		XV. $n = 0,42$	
t	d	t	d	t	d
20°	29,0	20°	25,0	20°	11,0
905	29,5	1015	25,0	1020	11,0
1010	29,0	1120	25,5	1115	11,0
1095	29,0	1210	27,0–30,5	1090	11,5
1215	29,5	Heizung abgestellt $n' = 0,30$		1355	11,0
1260	29,0			1315	11,0
1305	20,5			1345	11,0
1350	30,0 und geht bis 38, worauf Heizung abgestellt wird.			1405	11,0
$n' = 0,22$				$n' = 0,42$	

Also sind bei XII die gleichzeitig angestellten Längenmessungen bis etwa 1300°, bei XIII bis etwa 1120°, bei XV bis 1400° verwertbar.

Nur wenige Kapillaren, wie XV, konnten bis etwa 1300°, und nur in einem Fall bis 1500° erhitzt werden, ohne daß sich die Kapillare rasch erweiterte. Es gelang hierbei festzustellen, daß auch bei 1500° (unkorrig.) noch flüs-

1) Als Okular wurde ein stark vergrößerndes Huygens-Okular oder ein schwaches Mikroskop verwendet.

siges Quecksilber vorhanden war, das hell leuchtet, während der Dampfraum trotz der hohen Dampfdichte dunkel bleibt. Die kritische Temperatur¹⁾ liegt also über 1500° unkorrig. bzw. 1430° korrig.; vgl. § 3, Tab. V.

Als eine Korrektur kommt in Betracht, daß ein Teil des Quecksilbers verdampft. Da aber die Dampfdichte in anderen Versuchen (vgl. Tab. I) direkt gemessen worden war, so läßt sich diese Korrektur sicher anbringen, zumal man für die Dichtebestimmung des flüssigen Quecksilbers bis 1000° Röhren nimmt, deren Volumen zum großen Teil von flüssigem Quecksilber erfüllt ist.

Wenn das Volumen der Kapillaren = 1 gesetzt wird, f_t der von dem flüssigen Hg bei t^0 erfüllte Bruchteil, s_1 seine ohne Korrektur angenähert ermittelte Dichte, d_t die zugehörige Dampfdichte ist, so ist als Korrektur zu addieren

$$(\Delta f_t)_1 = \frac{(1 - f_t)}{s_1} d_t, \text{ worin } s_1 = \frac{s_0 \cdot f_0}{f_t}$$

s_0 ist die Dichte bei $0^0 = 13,6$. Demnach ist die Dichte des flüssigen Hg in zweiter Annäherung bei t^0

$$s_2 = \frac{s_0 \cdot f_0}{f_t + (\Delta f_t)_1}$$

In der nächsten stets genügenden Annäherung gilt:

$$(\Delta f_t)_2 = \frac{(1 - f_t) d_t}{s_2},$$

also

$$s_3 = \frac{s_0 f_0}{f_t + (\Delta f_t)_2}$$

Wir geben hier einige Beispiele

Tabelle III.

	t in ^0C	f_0	f_t	$(\Delta f_t)_1$	$(\Delta f_t)_2$	d_1	d_2	d_3
Vers. II.	500	0,39	0,43	0,00	—	12,5		
	600	0,39	0,44	0,00	—	12,15		
	800	0,39	0,40	0,00	—	11,5		
	1000	0,39	0,48	0,026	0,027	11,05	10,5	10,4
	1100	0,39	0,48	0,034	0,0	11,05	10,4	10,2
Vers. XI.	1130	0,315	0,40	0,050	0,057	10,7	9,5	9,40
	1200	0,315	0,40	0,050	0,070	10,7	9,3	9,1
	1300	0,315	0,40	0,09	0,11	10,7	8,75	8,4

Aus derart berechneten Versuchsreihen ergibt sich die folgende Tabelle:

1) Trägt man die Dichten des flüssigen und gasförmigen Quecksilbers graphisch auf, so kann man sie angenähert durch je ein Stück einer Parabel darstellen und findet durch Extrapolation, daß die kritische Temperatur des Quecksilbers zwischen 1500° und 1600° C, die kritische Dichte zwischen 4 und 5 liegen müßten.

Tabelle IV.

t in ^0C	Dichten in verschiedenen Versuchsreihen			Beobachtete Mittelwerte der Dichten	Dichte n. Gesetz d. Mittellinie berechn.
500	12,5				12,38
600	12,15				12,10
800	11,50	11,80	11,5	11,6	11,49
900		11,10	11,2	11,15	11,11
1000	10,4	11,0	10,0	10,55	10,67
1100	10,2	9,95	9,65	10,0	10,18
1130	9,40				
1200		8,55		9,1	9,57
1300		8,10		8,4	8,90
(1270)					
1370		7,8			
(1320)					

(Die eingeklammerten Zahlen sind die nach § 3 korrigierten Temperaturen, statt 1300°: 1270° und statt 1370°: 1320°.)

Die Dichte des flüssigen Hg wurde nach dem Gesetz der Mittellinie von Cailletet und Matthias berechnet, indem die Mittellinie aus den Messungen der Dichten des flüssigen und dampfförmigen Quecksilbers zwischen 0° und 360° (vgl. Tabellen von Landolt und Börnstein), die da sehr genau eine gerade Linie ergeben, über 360° hinaus verlängert wurde. Die zur Berechnung notwendigen Dichten des dampfförmigen Hg wurden der Tabelle I entnommen. Ob die bei höherer Temperatur auftretende und zunehmende Differenz zwischen beobachteten und aus dem Gesetz der Mittellinie berechneten Werten auf systematische Fehler in der Dichtebestimmung oder auf Polymerisation des Quecksilbers zurückzuführen ist, bleibe dahingestellt. Die Korrekturen der Temperaturmessung (vgl. § 3) werden erst bei etwa 1300° erheblicher. Sie sind übrigens für das Gesetz der geraden Mittellinie unwesentlich.

§ 3. Lichtemission des flüssigen und dampfförmigen Hg. In dem Dampf ist noch bei etwa 1270°, also bei einer Dichte von etwa 2,0, ein Leuchten nicht wahrzunehmen, während die Flüssigkeit gleichzeitig ein blendend weißes Licht emittiert, dessen Stärke, wie S. 413 gezeigt, etwa der des schwarzen Körpers bei 1100° entspricht. Der Dampf ist auch bis etwa 1300° im sichtbaren Gebiet völlig durchsichtig, sein metallisches und selektives Absorptionsvermögen für weißes Licht ist in den benutzten Schichtdicken stets $< 0,001$, also auch sein Leitvermögen sehr klein. — Über 1270° leuchtet oder erscheint der Dampfraum, wie schon a. a. O. beschrieben, in ganz schwach blauem Licht, falls die Röhre bei gewöhnlicher Temperatur zu mehr als $\frac{1}{3}$ mit flüssigem Hg gefüllt war. Eine vorläufige, subjektiv spektrale Untersuchung führte zu keinem Ziel, da die Helligkeit zu schwach

war. Die Lichtemission des flüssigen Hg wurde mit Wanner Pyrometer für $\lambda = 656 \mu\mu$ mit der des schwarzen Körpers verglichen. Man erhielt also die scheinbare Temperatur des Quecksilberfadens aus der Lichtemission für den schwarzen Körper berechnet. Die Außentemperatur der Kapillare wurde mit Thermoelement gemessen. Die Differenzen sind in der folgenden Tabelle angegeben. Die Mittelwerte sind unter Berücksichtigung der besten Messungen genommen.

Unter D ist dann die Differenz der mit Thermoelement gemessenen Temperatur weniger der aus der Emission unter Berücksichtigung der Reflexionsverluste unter den im folgenden angegebenen Voraussetzungen ermittelten Temperatur gegeben.

Tabelle V.

f bedeutet den mit flüssigem Hg gefüllten Raum in Bruchteilen des Ganzen. d ist der Durchmesser, lichte Weite, der Quarzkapillaren in Skalenteilen ausgedrückt

T des Thermoelements	$f = 0,2$ $d = 5$ Sk	$f = 0,5$ $d = 30$ Sk	$f = 0,5$ $d = 35$ Sk	$f = 0,5$ $d = 10$ Sk	$f = 0,5$ $d = 10$ Sk	$f = 0,4$ $d = 5$ Sk	Mittel	D
900	90	60	80	—	130	130	90	
1000	—	110	110	120	130	150	120	
1100	160	130	115	140	150	160	130	
1200	170	120	180	170	160	180	160	10
1300	210	140	230	250	210	220	200	30
1330	240	175	—	—	—	250	215	37
1380	250	—	240	200	—	—	240	50

Um die beobachteten Zahlen theoretisch verwenden zu können, mußte zunächst die Reduktion auf eine ebene freie Fläche von Hg vorgenommen werden, und demgemäß erstens der Einfluß der Krümmung des Hg -Fadens, zweitens die Intensitätsverluste und Fehler, die sein optisches Bild des kleinen Durchmessers wegen bietet, und drittens der Intensitätsverlust durch die übrigens geringe Reflexion an den Wänden der Quarzkapillare eliminiert werden. Schließlich muß dann viertens die so ermittelte Emission einer Quecksilberoberfläche auf die des schwarzen Körpers gleicher Temperatur reduziert werden. Wie man leicht sieht, sind 1 und 2 von der Temperatur unabhängig, auch für 3 trifft das zu, da sich der Brechungsexponent mit der Temperatur so wenig ändert, daß dies für unsere Versuche ohne Bedeutung bleibt. Deshalb müßte die Emission des Hg -Fadens in der Quarzkapillare immer denselben Bruchteil der Emission des schwarzen Körpers betragen.

Die Reduktion für (1) (2) (3) wurde empirisch vorgenommen. Für rotes Licht sind, wie Holborn und Henning feststellten, die optischen

Konstanten des Platins von der Temperatur unabhängig¹⁾. Platin verhält sich hinsichtlich der Emission als grauer Körper. Die ausgezogenen Kurven sind für eine ebene Fläche von Hg und Pt berechnet. Ein Platindraht von gleicher Dicke wie der Quecksilberfaden wurde in eine Quarzkapillare von den sonst benutzten Dimensionen eingeschlossen und seine Emission mit der des schwarzen Körpers verglichen. Die Reduktion der Emission des Platindrahtes in der Quarzkapillare auf den Quecksilberfaden kann rechnerisch, wenn auch nicht ganz genau, mit dem aus dem Reflexionsvermögen bei 0° berechneten Verhältnis der Emission von Quecksilber und Platin unter Berücksichtigung des verminderten Reflexionsverlustes am Quarz ausgeführt werden. Das Endresultat ist die berechnete (gestrichelte) Kurve für die Emission des Hg in der Quarzkapillare, die gelten würde,

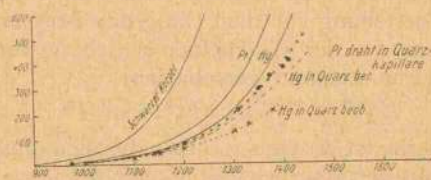


Fig. 2.

wenn die optischen Konstanten von 0° ab unverändert bleiben und wenn die mit Thermoelement außen an der Quarzkapillare gemessene Temperatur die des Quecksilberfadens wäre. Vergleicht man die beobachtete (punktierte) mit der berechneten Kurve, so sieht man, daß die beobachtete Emission mit steigender Temperatur gegen die berechnete immer stärker zurückbleibt. Wäre stetige Abnahme der selektiven oder metallischen Absorption des Hg die Ursache, so müßte zuerst eine Abnahme der Reflexion und damit eine Zunahme der Emission verglichen mit der des schwarzen Körpers eintreten. Erst später, wenn die Schicht merklich durchsichtig würde, käme die Abnahme der Emission und diese müßte von der Schichtdicke abhängig sein, also für $d = 5$ Skalenteilen bei tieferer Temperatur eintreten, als bei dem größeren Durchmesser von 35 Skalenteilen. Beides trifft nicht zu. Die anderen Möglichkeiten, eine dauernde Zunahme der Absorption (oder eine entsprechende Änderung des Brechungsindex), die eine Zunahme des Reflexionsvermögens und damit eine Abnahme der Emission bewirken würden, sind wegen der starken Dichteabnahme ausgeschlossen. Also kann die relative Abnahme der Emission mit steigen-

1) W. Holborn u. F. Henning, Sitzber. Berl. Akad. 1905, S. 311.

der Temperatur keine optischen Ursachen haben. Viel mehr wächst mit steigender Temperatur die innen vom Quecksilber ausgestrahlte Wärmemenge rascher als die von außen durch das Quarzglas nach dem Quecksilber hingeleitete. Das Wärmeleitungsvermögen des Quarzglases bei dieser Temperatur ist nicht untersucht, aber aus der Messung an Gläsern bei tieferer Temperatur läßt sich ersehen, daß es nur wenig von der Temperatur abhängt, wahrscheinlich langsamer als $\text{prop. } T$ steigt, keinesfalls aber $\text{prop. } T^4$ wächst.

Daher muß mit steigender Temperatur die Differenz zwischen der Temperatur des stark emittierenden Hg und der höheren Außentemperatur des schwächer emittierenden, weil teilweise durchlässigen Quarzglases wachsen. Eine genaue Berechnung wäre nur möglich, wenn die Absorption des Quarzglases im ganzen Ultrarot bekannt wäre. Doch kann man sich qualitativ eine Vorstellung von dem Gang der Temperaturdifferenz aus der allgemeinen Beziehung für den stationären Zustand verschaffen:

$$k'(T - T_2) = \sigma' T_2^4 - \sigma'' \bar{T}^4.$$

Hierin ist k' eine Größe, die sich multiplikativ aus der Wärmeleitfähigkeit des Quarzglases und aus einem von der geometrischen Form und den Dimensionen des Quarzhohlzylinders abhängigen, von der Temperatur nahezu unabhängigen Faktor zusammensetzt. T ist die Temperatur der Außenwand der Quarzkapillare, T_2 die der Innenwand des Quarzes und des Quecksilbers. σ' hängt von der Strahlungskonstante σ und dem Reflexionsvermögen des Quecksilbers ab und ist auf dessen Zylinderfläche bezogen.

σ'' ist Funktion der Absorption des Quarzglases und von σ . $\bar{T}$ ist die Mitteltemperatur der Quarzmasse. σ' ist bei 1200° mindestens 5 mal so groß als σ'' . Sowohl σ' wie namentlich σ'' sind schon wegen der Verschiebung des Strahlenmaximums nach kleineren Wellenlängen mit steigender Temperatur veränderlich. σ' wird etwas größer, σ'' erheblich kleiner. Aus der Formel ist zu ersehen, daß in erster Annäherung:

$$T - T_2 = \frac{\sigma' - \sigma''}{k'} T_2^4,$$

daß also die Differenz zwischen Außen- und Innentemperatur mit steigender Temperatur rasch zunimmt. Daher ist das hier eingeschla-

gene Verfahren zu einer genauen Messung der Emission des Quecksilbers bei Temperaturen über 1200° nicht verwendbar, solange nicht auf anderem Wege direkt die Temperatur des Quecksilbers gemessen werden kann. Hier ist also der Fall beobachtet, daß ein absorbierender Körper, der allseitig von einer teilweise strahlungsdurchlässigen Hülle umschlossen ist, infolge Ausstrahlung in den Außenraum eine merklich geringere Temperatur als die Hülle besitzt.

Bis 1200° stimmen beobachtete und berechnete Emission noch innerhalb einer Fehlergrenze von +15 Proz. überein. Die optischen Konstanten für Rot sind also bis 1200° nicht wesentlich anders als bei 0°. Auch bei 1380° (korrig. etwa 1330°¹⁾) ist die Emission keinesfalls sehr verschieden von der berechneten. Die Absorption des flüssigen Quecksilbers bei 1330° ist daher jedenfalls von gleicher Größenordnung wie bei 0°. Sie ist metallischer Natur; denn der Dampf, dessen Dichte bei 1330° etwa $\frac{1}{3}$ der Flüssigkeitsdichte beträgt, zeigt keinerlei selektive Absorption. Die selektive Absorption ist aber eine molekulare (bzw. atomare) Eigenschaft, die durch den Aggregatzustand meist wenig geändert wird. (Ann. d. Phys. 37, 601, 1912.) Also muß auch in der Flüssigkeit bei 1330° das nächste Absorptionsgebiet im Ultraviolett liegen; es kann nur der Brechungsindex, nicht die Absorption im Rot von der selektiven Absorption abhängen. Da aber das flüssige Hg bei 1330° noch das Rot stark absorbiert, muß ein elektrisches Leitvermögen derselben Größenordnung wie bei 0° vorhanden sein. Das beweist aber, daß eine Dichteverminderung auf etwa die Hälfte die Nahewirkung (P. Lenard) der Atome auf die Elektronen noch nicht aufhebt. Hingegen ist der Dampf auch bei 1400° trotz seiner relativ hohen Dichte (etwa 3) durchsichtig, der Abstand der Quecksilberatome ist da noch groß genug, um zu bewirken, daß sich das Elektron von dem Atom nicht loslösen und daher auch die Elektrizitätsleitung nicht übernehmen kann.

1) Der genaue Korrektionswert läßt sich nicht angeben, da die in der Tabelle berechneten Temperaturdifferenzen nur gelten, falls die optischen Konstanten des Quecksilbers im Rot von der Temperatur völlig unabhängig wären.

Freiburg i. B., Math.-physik. Institut der Universität.

(Eingegangen 1. Juli 1918.)

BESPRECHUNGEN.

W. Schüle, Technische Thermodynamik.

I. Band: die für den Maschinenbau wichtigsten Lehren nebst technischen Anwendungen. 3. erweiterte Auflage. gr. 8°. XII u. 553 S. mit 244 Textfiguren und 7 Tafeln. Berlin, J. Springer. 1917. Preis geb. M. 16.—

In der vorliegenden dritten Auflage, die den beiden ersten rasch folgte und für die Verbreitung und Beliebtheit des Werkes das beste Zeugnis ausstellt, hat der Verf. die neueren Forschungen eingehend berücksichtigt und in den älteren Text geschickt eingeflochten. Das Werk bietet zweifellos für Studierende des Maschinenbaues und der technischen Physik die beste Einführung in die Materie. Der Verf. trägt den Bedürfnissen der ausführenden Technik in weitestem Umfange Rechnung und stellt, trotzdem er den wissenschaftlichen Boden niemals verläßt, an seine Leser die geringsten Ansprüche.

Mit besonderer Sorgfalt behandelt der Verf. die Strömungslehre und ihre Anwendung auf die Turbinentheorie. Neu sind hier der wichtige Abschnitt über die Überschallgeschwindigkeit bei einfachen Mündungen, ein Beispiel für die graphische Düsenberechnung und der Abschnitt über die Verdichtungsströmung mit Widerständen. Diese Strömung tritt z. B. in Schleuderverdichtern und auch im Diffusor der Wasserdampfstrahl-Kältemaschinen auf. Letzterer Maschinengattung ist ebenfalls ein neu hinzutretener Abschnitt gewidmet, der sich allerdings im wesentlichen mit der Beschreibung der Wirkungsweise begnügt; eine erschöpfende Theorie dieser Maschine besitzen wir noch nicht.

Die Abschnitte über den Luftwiderstand (Seite 363 bis 393) sowie die Energieverhältnisse der Flugmaschine (Seite 465—477) hätten meines Erachtens in einem Werk über Thermodynamik ganz unterdrückt werden können, weil sie einerseits infolge der Vernachlässigung thermischer Einflüsse zu dem übrigen Inhalt nur in sehr losem Zusammenhang stehen und sich andererseits wegen Platzmangel eine erschöpfende Darstellung verbietet.

Der Verlag hat trotz der durch den Krieg bedingten Schwierigkeiten das Werk in derselben vorzüglichen Ausstattung herausgegeben wie die älteren Auflagen. Um den Umfang des Werkes trotz zahlreicher Einschaltungen nicht merklich zu erhöhen, ist für alle Anwendungsbeispiele, die einen erheblichen Teil ausmachen, ein kleinerer Druck gewählt worden. Es ist dadurch gelungen, den Zuwachs auf einen Bogen zu beschränken. Die Figuren und Tafeln lassen an Deutlichkeit nichts zu wünschen übrig.

Das Werk wird Vielen ein dauernder sicherer Berater bleiben und stets neue Freunde erwerben.

Plank.

Jos. Krauß, Grundzüge der maritimen Meteorologie und Ozeanographie. 8°. XII u. 221 S. mit 60 Textfiguren. Berlin, J. Springer. 1917. Geb. M. 5.—

Die Absicht des Verf., ein für den praktischen Seemann ohne eingehendere Studien der einschläglichen mathematischen und physikalischen Theorie brauchbares Lehr- und Nachschlagebuch in möglichst gedrängter Form zu geben, ist ihm recht gut gelungen. Dabei hat er noch besondere Rücksicht auf den Umfang der Kenntnisse genommen, wie sie die Prüfungs-

vorschriften für die Erwerbung der Berechtigung zu „Großer Fahrt“ vorschreiben.

Im einzelnen gliedert sich das Buch in die zwei Hauptteile, die schon der Titel erkennen läßt. Im ersten Teile, der von den 220 Seiten nahezu drei Viertel einnimmt, werden nacheinander die allgemeine Beschaffenheit der Atmosphäre, Luftzusammensetzung, sodann die Wirkungen der Temperaturen, ihre Verteilung und ihr jährlicher und täglicher Gang erörtert. Hier wie auch in den folgenden Paragraphen beschreibt der Verf. in einfacher, aber sehr zweckentsprechender Form und durch Beispiele erläutert, die für den meteorologischen Beobachtungsdienst nötigen Apparate. Sodann kommen zur Sprache der Wassergehalt der Atmosphäre, die Verteilung und Menge der Niederschläge und danach werden in den §§ 5, 7 und 8 die Bewegungsverhältnisse, in § 6 die elektrischen Vorgänge erörtert. Die folgenden Paragraphen beschäftigen sich in sehr eingehender Weise mit den Winden und mit der Beschreibung der verschiedenen, häufig an lokale Bedingungen geknüpfte Arten derselben und ihren Einfluß auf die Schifffahrt.

Der erheblich kürzer gehaltene Abschnitt über Ozeanographie behandelt zunächst die Meeresräume der Erde und das Meerwasser in chemischer und physikalischer Hinsicht, die Bildung, Höhe und Gestalt der Wellen, um sich sodann den für die Schifffahrt wichtigsten Bewegungen des Wassers, wie sie durch die Winde und Strömungen hervorgebracht werden, in ausführlicher Weise zuzuwenden. Den Schluß bildet die Darstellung des Gezeitenphänomens.

Der Text wird durch viele praktische Tabellen und schematische Zeichnungen in vorzüglicher Weise ergänzt.

In fast allen Teilen des Buches sind dem überaus reichen Beobachtungsmateriale der Deutschen Seewarte entnommene Beispiele eingestreut, die dem Buche den Charakter eines aus der Praxis für die Praxis geschriebenen Werkchens verleihen.

Ambronn.

W. Schweyder, Die Bewegung der Drehachse der elastischen Erde im Erdkörper.

4^o. 8 S. Sonderabdruck aus den Astronomischen Nachrichten. Kiel, Verlag der Astronomischen Nachrichten. Einzelne Hefte M. 1.—

In dem vorliegenden Sonderabdruck aus den Astronomischen Nachrichten gibt der Verfasser eine theoretische Darstellung über seine Untersuchungen, die sich auf breiter Basis mit der Frage des möglichen Nachweises einer Elastizität des festen Erdkörpers befassen. Es wird nachgewiesen, daß eine solche Elastizität vorhanden ist, und wie sie sich als Ausfluß der Anziehung von Mond und Sonne auf die „feste“ Erde im Vergleich mit der flüssigen, also dem nahezu frei beweglichen Teile der Erdoberfläche gestalten muß. Die mathematischen Formen der einzelnen wirkenden Kräfte sind unter bestimmten Annahmen in großer Ausführlichkeit gegeben. Die Behandlung geht von der Fragestellung aus, inwieweit die Vorgänge bei der Formänderung statischer oder dynamischer Art sein können. In einer vor kurzem an dieser Stelle besprochenen Arbeit desselben Verfassers werden Untersuchungen über die Bewegung der instantanen Rotationsachse der Erde gegenüber einer mittleren Lage der Trägheitsachse auf Grund der Resultate des internatio-

nalen Breitendienstes behandelt. Diese Untersuchungen sind auch hier für die Gewinnung absoluter Zahlenwerte für die Elastizität benutzt. Die Rechnungen führen zu dem Schluß, daß die Exzentrizität der Ellipse, die der Rotationspol um den Trägheitspol der Erde beschreibt, durch das Vorhandensein einer Elastizität vergrößert wird. Die Amplitude der Ellipse wird aber durch die Elastizität im Verhältnis von 10:7 verkleinert. Die durch eine wirklich vorhandene, aber sehr geringe Elastizität bedingten Zusatzglieder zu den Ausdrücken für Präzession und Nutation, wie sie für die starre Erde durch Sonne und Mond veranlaßt werden, können bei allen astronomischen Untersuchungen unberücksichtigt bleiben.

Alle diese Ergebnisse sind unabhängig von irgendeiner Annahme über den Verlauf der Dichtenschichtung in der Erde.

L. Ambronn.

O. Große, 40 Jahre Fernsprecher (Stephan-Siemens-Rathenau). gr. 8. 90 S. m. 16 Abbildungen. Berlin, J. Springer. 1917. M. 3.—

Die kleine historische Abhandlung behandelt in leicht zu lesender Darstellung ein in vieler Hinsicht interessantes und lehrreiches Gebiet der technischen Entwicklungsgeschichte. Besonders werden die Verdienste des damaligen Generalpostmeisters Stephan hervorgehoben, der sofort die enorme Bedeutung des Fernsprechers erkannte und seine Einführung in Deutschland mit großer Energie betrieb. Wir haben dadurch in Deutschland sofort ein hochentwickeltes staatliches Fernsprechnetz bekommen, während in andern Ländern sich der Staat erst wesentlich später durch Ankauf in den Besitz der bestehenden privaten Anlagen hat setzen müssen. Wenn der Verf. dies mit besonderer Genugtuung hervorhebt und durch statistische Angaben belegt, daß wir in Europa bei weitem an erster Stelle stehen, hätte er vielleicht nicht unerwähnt lassen sollen, daß wir von Amerika in noch viel höherem Maße übertroffen werden, und daß auch in technischer Hinsicht Amerika führend ist. Der Wettkampf privater Gesellschaften ist ein nicht zu unterschätzender Ansporn, besonders in den Entwicklungsjahren. Auch will es mir scheinen, als ob in den letzten Jahrzehnten die Schwachstromtechnik bei uns nicht gebührend gewürdigt, und z. B. von unsern Hochschulen im allgemeinen stark vernachlässigt wird.

Barkhausen.

Tagesereignisse.

Preis Ausschreiben aus dem Gebiete der Physik.

Emil Cohnstaedt-Stiftung. Die Naturwissenschaftliche Fakultät der Universität Frankfurt a. M. stellt folgende Preisaufgabe:

„Sie wünscht eine möglichst vollständige Zusammenstellung und Kritik der Literatur über Gashäute an der Oberfläche fester Körper“.

Der ausgesetzte Preis beträgt 1000 Mark. Die Bewerbungsschreiben sind bis zum 30. Juni 1920 bei der Dekanatskanzlei der Universität einzuliefern. Die Verkündung des Urteils erfolgt bei Gelegenheit des Rektoratswechsels desselben Jahres. Die Fakultät ist nicht verpflichtet, Arbeiten nachzuprüfen, die nicht in einem Institut der Universität Frankfurt entstanden sind. Interessenten erhalten die näheren Bestimmungen in der Dekanatskanzlei.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Zürich Dr. K. W. Meißner und Dr. F. Tank für Physik.

Ernannt: An der Technischen Hochschule in Stuttgart der a. o. Professor Dr. G. Grube daselbst zum o. Professor für physikalische und Elektrochemie, an der Universität Greifswald der Privatdozent an der Universität Berlin Dr. Rudolf Seeliger zum a. o. Professor der Physik, an der Bergakademie Freiberg i. S. der Dozent an der Technischen Hochschule Aachen Dr. Paul Wandhoff als ord. Professor für Markscheidkunst und Geodäsie, der Ingenieur Dr.-Ing. Paul Müller in Charlottenburg zum ord. Professor für Elektromaschinenbau an der Technischen Hochschule Braunschweig, der Assistent am Geodätischen Institut der Landwirtschaftlichen Hochschule Berlin Regierungslandmesser Wilhelm Lührs zum ord. Professor der Geodäsie an der Technischen Hochschule Braunschweig.

Ehrungen: Zum korrespondierenden Mitglied der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen der Geh. Reg.-Rat Professor Dr. Fritz Haber von der Universität Berlin.

Gestorben: Der Privatdozent der Chemie an der Universität Heidelberg Dr. Ernst Schrader, der frühere Professor der Elektrotechnik an der Columbia-Universität New York, zuletzt Direktor der Technischen Staatslehranstalten in Hamburg Professor Hans Zopke.

Angebote.

Physiker oder Physikerin

für unser physikalisches Laboratorium gesucht. Ausführliche Bewerbungsschreiben an

Siemens & Halske A.-G., Glühlampenwerk, Charlottenburg, Helmholtzstraße 4—8.

Physiker oder Dipl.-Ingenieur

gesucht

für Arbeiten auf dem Gebiete der Gasentladungen.

Bewerbungen erbeten an



Siemens & Halske A.-G.
Wernerwerk, Abt. M.
Siemensstadt bei Berlin.



PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 19.

1. Oktober 1918.

Redaktionsschluß für No. 21 am 27. September 1918.

19. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

W. Porstmann, Das metrische Formatsystem. S. 417.

R. Fürth, Statistik und Wahrscheinlichkeitsnachwirkung. S. 421.

A. Korn, Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes. X. S. 426.

W. S. Gripenberg, Einwirkung mechanischer Bearbeitung auf die Oberflächenschichten metallischen Selens. S. 429.

Berichte:

A. Coehn, Hauptversammlung der Deutschen Bunsengesellschaft für

angewandte physikalische Chemie vom 8.—10. April 1918 in Berlin. S. 429.

Personalien. S. 440.

Angebote. S. 440.

Gesuche. S. 440.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Das metrische Formatsystem.

Von W. Porstmann.

Als vor einigen Jahren sich die ersten Anfänge zur Vereinheitlichung der Formate bemerkbar machten, gingen die meisten an diesen Bestrebungen mehr oder weniger teilnahmslos vorüber; vor allem der Wissenschaftler dachte nicht im entferntesten daran, etwa Betrachtungen über Formate in seinen Tätigkeitsbereich aufzunehmen. Es waren dies Dinge der Wirtschaftspraxis, mit denen man höchstens nur insofern zu tun hatte, als man Stellung hinsichtlich des Privatbedarfs dazu nahm. Mit der Vertiefung der Aufgabe aber wurden ins Allgemeine gehende Erwägungen immer notwendiger. Wie die Ausführungen in dieser Zeitschrift (19, 311, 1918) über „Die Theorie der Formatreform“ zeigen, wurde die Vereinheitlichung von den Flächen ausgedehnt auf die Räume und zuletzt auch auf die Längen. Eine weitere Ausdehnung ist nicht möglich; andererseits wird man eine Loslösung eines der drei Teilbereiche aus ihrer Zusammenfassung und eine getrennte Behandlung z. B. der Flächen ohne Rücksicht auf Räume und Längen immer mehr für unsinnig erkennen, je mehr man sich mit den logischen Grundlagen der Formatreform befaßt. Die drei Bereiche gehören zusammen. Und der überblickende Geist sieht hier eine günstige Lösung des Problems voraus, die für ihn vergleichsweise ebenso abgeschlossen sein muß wie ein haltbares Maßsystem. Bei den Maßsystemen tritt uns die Verkettung der drei an sich getrennten Bereiche der Längen, Flächen und Räume in genau derselben Weise gegenüber wie neuerdings auch bei den Formaten. Die Beziehungen der drei Dingbereiche spiegeln sich notwendig im Aufbau eines Maßsystems wieder, das einfachste und haltbarste Form angenommen hat. Ebenso wird nur ein Formatsystem von endgültiger Kraft sein, das diesem

selben Umstand Rechnung trägt, sonst ließe sich ein einfacheres und damit wissenschaftlicheres System ausfindig machen, dem ein anderes notwendig das Feld räumen muß. Dieses Formatsystem wollen wir im voraus das metrische Formatsystem nennen, ganz gleich wie seine letztliche Gestalt nun werden wird. Es ist ein System von Formatnormen für die drei erwähnten Bereiche, das unbedingt in einer quantitativen Beziehung zum metrischen Maßsystem stehen muß, wenn es auch der Größennach, und nicht bloß verhältnismäßig, genau festgesetzt sein soll. Dieser unvermeidliche Anschluß an das Metersystem rechtfertigt die Bezeichnung „metrisches“ Formatsystem. Die dem metrischen Formatsystem entstammenden Formate heißen dann am besten „metrische Formate“, ganz entsprechend wie wir von metrischen Maßen reden. Damit ist gleichzeitig auch der Zusammenhang der zunächst der Praxis entstammenden Formatreform mit der Wissenschaft dargetan, mit Physik und Mathematik, oder wohin wir sonst die „Normenlehre“ rechnen wollen, von der klärende Ordnung in das immer mehr an Ausdehnung zunehmende jungfräuliche Gebiet zu bringen ist.

Nachdem in dem erwähnten Aufsatz an dieser Stelle die allgemeinen Grundzüge der Theorie der Formatreform zugänglich gemacht worden sind, soll jetzt auf einige wichtigere Einzelheiten hingewiesen werden, die die Anteilnahme der Wissenschaft besonders erfordern. Von den drei Sätzen zur Begründung eines Formatsystems geht der eine auf den unsere Umwelt beherrschenden Ähnlichkeitsatz zurück, der andere ruht auf der Verdopplung und Halbierung als einfachste Handhabung der Formate, der dritte betont den Anschluß an das Meter-system.

Die Form der Flachformate ist bestimmt durch die beiden ersten Grundsätze. Der Verdopplungssatz legt den Flächeninhalt benach-

barter Formate fest durch das einfachste Verhältnis $1:2$. Der Ähnlichkeitssatz gibt in Verbindung mit jenem das Verhältnis entsprechender Linien benachbarter Formate als $1:\sqrt{2}$. Gleichzeitig ist dies auch das Verhältnis der kurzen Seite zur langen des gleichen Flachformaten: Das Verhältnis von Kathete zu Hypotenuse im gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck. Es sei hier ein Wort über diese Form eingeschaltet. Sie erweist sich als sehr gut brauchbar in allerlei Verwendungen. Sie ist die einzige Form, die bei fortgesetzter Halbierung eines Formates lauter ähnliche Teilformate liefert. Ästheten könnten sie anzugreifen suchen. Doch soll die Kunst dann ein schöneres und brauchbareres Format liefern. Andere könnten die Sage heranziehen, daß der „Goldene Schnitt“ die ideale Form bestimme. Indes ist wohl diese Anschauung aus der „Alchimie der Mathematik“ heute überwunden. Es kann keiner geometrischen Form eine besondere Schönheit untergeschoben werden. Es findet jedes Format seinen ästhetischen Vertreter. Es ist einzig Gewohnheit, wenn wir dies oder jenes Format in einer gewissen Grenze auswählen, falls wir auf sogenannte Schönheitsgründe aufbauen. Nur wenn eine Form gesteckte Zwecke gut erreichbar macht, ziehen wir sie — unbewußt vielleicht ästhetische Momente unterschiebend — als ausgezeichnet vor. In diesem relativen Sinne der Schönheit, der einzig anwendbar ist, ist unsere gefundene Form ebenfalls „schön“, was man sofort empfindet, wenn man nicht ein einzelnes Format, sondern die durch fortgesetzte Halbierung daraus gewonnene Reihe betrachtet. Alle andern Ausgangsformate liefern dabei zweierlei Formen, nur dies mit dem Seitenverhältnis $1:\sqrt{2}$ liefert eine Reihe ähnlicher Formate, eine einzige Form. Diese Harmonie empfindet man als schön.

Der Satz vom Anschluß der Formate an das Metersystem bedarf besonderer Würdigung. Der geschichtlichen Entwicklung der Formate folgend, gehen wir von den Flachformaten aus, die anfänglich einzig und allein vereinheitlicht werden sollten. Nachdem die Form für die Flachformate gewonnen ist, bedarf es einer quantitativen Angabe, um eine Ausgangsnorm aufstellen zu können. Wir mögen ein Normensystem nehmen, welches wir wollen, es ist immer eine derartige Maßgröße darin enthalten. Nachdem man sich beim Gewichtssystem auf Wasser als Normstoff geeinigt hatte, trat die Frage hinzu: wieviel Wasser? Man setzte die Raumeinheit an Wasser als Gewichtseinheit fest. Und wir mögen Drucke, Arbeiten, Leistungen messen, immer ist neben der qualitativen Regelung des Maßes auch eine quanti-

tative nötig. Hier hat sich allmählich die Lösung der gleichen Frage auch nach gleicher Weise eingebürgert: „Anschluß an das Metersystem“ ist das Gesetz für die Lösung geworden. Das Metersystem enthält selbst nur die Längeneinheit als einzige wirkliche Willkür. Und diese läßt sich letzten Endes nicht umgehen. Wo es aber möglich ist, werden neue Freiheiten bei der Größenwahl vermieden durch obiges Gesetz, so daß die Längeneinheit die einzige Willkür bleibt. Den Anschluß der Flächenmaße erreicht man dadurch, daß man zur Flächeneinheit ein Quadrat mit der Längeneinheit zur Kantenlänge macht. Die Form der Raumeinheit ist infolge unsres linearen Messens am einfachsten ein Würfel, seine endgültige Größe gewinnt man, indem man die einzige willkürliche Kante gleich der Längeneinheit macht. So ist das metrische Maßsystem gewonnen, das nun seinerseits die Grundlage für die vielen physikalischen und chemischen Maßsysteme geworden ist. Es treten die vielerlei Einheiten dadurch in eine bestimmte einfachste Beziehung, ohne daß sie aber durch einander ersetzbar werden. Als Flächeneinheit muß immer eine Fläche dienen; wie diese gewonnen ist, spielt hinterher keine Rolle mehr. Als Raumeinheit kann nur ein Raum dienen, und es ist auch die Form der Raumeinheit ganz willkürlich, nur zu vielen Meßzwecken bedient man sich am einfachsten der Würfelform.

Den Anschluß der Flachformate bewirkte Wilhelm Ostwald durch diese Folgerung: Wenn eine Seite der Flachformatnorm willkürlich angenommen wird, so ist die Ausgangsnorm und damit die ganze Reihe eindeutig festgelegt. Demgemäß sei die kurze Seite gleich 1 cm. Die andere ist dann $\sqrt{2}$ cm = 1,414... cm. Auf diesen Schluß baute er dann seine Weltformate auf. Später gesellte sich den Flachformaten auch noch eine Raumformatreihe zu, die aber erst in einer späteren Arbeit erörtert werden soll. Diese Lösung der Frage liegt sehr nahe. Die Beschäftigung mit dem Seitenverhältnis der Formate an der Hand des Ähnlichkeitssatzes, die eingehenderes Denken fordert als die mit dem Flächenverhältnis benachbarter Formate im Halbierungssatz, lenkt das Augenmerk ohne weiteres auf die Seiten der Formatnorm und auf die Bestimmung der einen durch die Längeneinheit. Demgemäß dauerte es ziemlich lange, bevor sich Einwände gegen diesen ersten Versuch des Anschlusses geltend machten. Der Anschluß bezweckt die Gewinnung einer bestimmten Ausgangsnorm. Nun hat ein Rechteck zwei Seiten. Ostwald machte die kurze gleich der Längeneinheit: Weltformat I. Die lange Seite ist aber der

kurzen gleichberechtigt. Es gibt also eine zweite Möglichkeit, auf gleicher Voraussetzung eine Norm zu schaffen. (Diese zweite gleichberechtigte Norm fällt allerdings als Format in die Reihe der aus der ersten Norm abgeleiteten Formate.) Die Ostwaldsche Lösung ist eine willkürliche Wahl. Verfolgen wir den Gedanken weiter, so ergibt sich eine immer größer werdende Unberechtigung des Ostwaldschen Anschlusses, die schließlich aber auch die einzig einwandfreie Lösung an die Hand führt: Von der zu bestimmenden Norm ist uns durch die beiden ersten Sätze gegeben das Seitenverhältnis. Ein Rechteck ist bestimmt durch zwei unabhängige Stücke. Der Anschlußgedanke muß das zweite liefern. Aber warum soll das gerade eine Linie und gerade die kurze oder auch die lange Seite sein? Die Geometrie kennt unzählig viele Möglichkeiten hier. Wollen wir eine Linie wählen, so liegen uns hier schon theoretisch unendlich viele Möglichkeiten vor, wenn auch die zwei Seiten die auffälligsten sind. Warum macht man nicht die Diagonale gleich der Längeneinheit? Diese steht zu den beiden Seiten in gleicher Beziehung und ist eindeutig. Aber man könnte auch den Umfang oder den halben Umfang benutzen, das sind auch eindeutige Lösungen, die nicht ferner liegen, da sie beide Seiten symmetrisch enthalten. Da aber eine Fläche unzählig viele Linien hat, die im Grunde alle gleichberechtigt sind für den Anschluß, so müssen wir sagen: Das zweite Bestimmungsstück der Flachformatnorm kann keine Linie sein, da sonst eine Willkür lediglich durch eine andere ersetzt wird. Flächen können nicht durch Linien dem metrischen Maßsystem angeschlossen werden. Dies Ergebnis hat nicht allein für die Formatreform Wert. Die vielen Linien einer Fläche stellen letzten Endes die ganze Fläche dar, die Fläche eines Rechteckes aber ist eindeutig. Wir kommen zu der Forderung: der Anschluß von Flächen hat durch die Flächeneinheit zu erfolgen. Es ist hierbei ganz gleich, ob die Flächeneinheit ein Kreis, ein Vieleck, ein Quadrat ist, als Einheit ist sie gestaltlos, für Meßzwecke bekommt sie am besten die Quadratform. Es ist auch ganz gleich für uns, ob die Flächeneinheit mit der Längeneinheit in eine bestimmte Beziehung gebracht ist. Der Anschluß von Flächen erfolgt einzig durch die Flächeneinheit. Und je nach der günstigen Bestimmung der Flächeneinheit spiegeln sich deren Beziehungen zur Längen- und Raumeinheit auch in den Anschlußgebieten wider. Die beiden Bestimmungsstücke für die Flachformatnorm sind nunmehr: das Seitenverhältnis und der Flächeninhalt. Der Anschluß erfolgt durch die Forde-

rung: die Flachformatnorm soll gleich der Flächeneinheit sein. Die beiden Seiten x und y der Norm gewinnen wir aus den zwei Gleichungen

$$\begin{aligned}x:y &= 1:\sqrt{2} \\ x \cdot y &= 1,\end{aligned}$$

die die Symmetrie der Herleitung auch äußerlich darlegen. Die Fläche als Anschlußgrundlage enthält alle unendlichen Scheinmöglichkeiten des Anschlusses durch die Linie harmonisch vereinigt in sich, ohne eine Linie zu betonen oder hintanzusetzen. Dieser Anschluß ist von höherer Ordnung als der durch die Linie berechtigt.

Die quantitative Festlegung einer Norm erfolgt stets auf die Frage: wieviel von dem betreffenden Normstoff? Der Anschlußsatz verweist auf die Einheit. Bei den Flachformaten ist daher die Frage: wieviel Fläche? Bei den Raumformaten: wieviel Raum? Bei den Längenformaten: wieviel Länge? Man kann nicht die Frage nach einer Flächen- oder Raumgröße durch Angabe einer Linie beantworten. Die Fläche kann bloß durch Benutzung der Flächeneinheit angeschlossen werden.

Es ist unnötig breit auf diesen Anschluß eingegangen worden. Wäre diese Form von Anfang an gewählt worden, so würde sich kaum je ein Einwand erhoben haben. Der verfehlte erste Versuch, der zur Folge hatte, daß die darauf aufgebauten Formate lebhaft in der Gebrauchswelt befürwortet wurden, wird aber von einigen Anhängern noch zu halten versucht, und es ist an der Zeit, die Grundlagen der Formatreform reinlich zu klären, um ihre Entwicklung nicht fehl zu leiten.

Die gesunde Grundlage dieser Anschlußweise tritt vollends zutage, wenn es sich um dieselbe Frage bei den Raumnormen handelt. Der Raum ist zu beziehen auf die Raumeinheit; es ist unsinnig, den Raum anschließen zu wollen durch die Flächeneinheit oder gar durch die Längeneinheit. Die Raumformatnorm muß gleich der Raumeinheit sein, sie ist die einzig haltbare unparteiische Form. Der vorläufige Versuch in den Ostwaldschen Weltraumformaten bringt die verfehlte Anschlußform deutlich zur Betonung. Es bleibt dort weiter nichts übrig, als zur Regelung der dritten Dimension ebenfalls die Linie heranzuziehen. Doch soll hier zunächst nicht näher darauf eingegangen werden.

Der Umstand, daß nun die metrische Raum- und Flächeneinheit in einfachster Beziehung zur Längeneinheit stehen und sie alle drei ein nicht besser denkbare System von Einheiten für Meßzwecke bilden, führt in der Formatreform zur Gewinnung eines ebenso harmonischen For-

matsystems. Ohne jeden Zwang fügen sich nämlich die Sätze für die Formate zu einem geschlossenen System zusammen, dem metrischen Formatsystem, das erst durch unsere Weise des Anschlusses möglich ist. Die Norm soll gleich der Einheit sein, ist die Grundlage dieses Systems. Es sind keine Worte weiter darüber zu verlieren, daß die Norm für die Längenformate gleich der Längeneinheit zu sein hat. Hier gipfelt unsere Anschlußform geradezu in einer Selbstverständlichkeit.

Einwände, die den straffen und durchsichtigen Bau des metrischen Formatsystems untergraben könnten und etwas Besseres an seine Stelle setzen, sind bisher noch nicht gemacht worden. Aber es ist begreiflich, daß die Anhänger der ursprünglichen Form des Anschlusses diesen zu rechtfertigen suchen, soweit sie sich überhaupt dazu äußern. Einige Beispiele: W. Speiser sagt¹⁾: Es sei der Anschluß mit Hilfe der Flächeneinheit ein Umweg, „weil man zu der Begriffsbestimmung der Flächen- bzw. Raumeinheit erst durch Vermittlung der Längeneinheit gelangt“. Das ist ein offener Irrtum. Es gibt in der Entwicklung der Maße (vgl. „Normenlehre“ des Verf.) Flächen- und Raummaße, die mit der Längeneinheit nichts zu tun haben. Länge, Fläche und Raum sind getrennte Dinge, die wohl in einem gewissen Zusammenhang stehen, aber nicht vom einen zum andern gelangen lassen. Die genaueste Meßmethode mit Hilfe des Längenmaßes legt eine Flächeneinheit und eine Raumeinheit von gewisser Form und Größe nahe, und es ergibt sich daraus das metrische Maßsystem; es ist aber zur Begriffsbestimmung der Flächeneinheit die Längeneinheit durchaus nicht primärer Bestandteil. Und selbst wenn dies wäre, dann ist ein für allemal die Flächeneinheit und die des Raumes gewonnen, mit diesen ist dann weiter zu arbeiten. Man hält es für selbstverständlich, daß die Gewichtseinheit, da sie einen Raum haben muß, mit der Raumeinheit verknüpft wurde. Das wäre aber derselbe Umweg. Er ist nicht vermeidbar, und jeder andere Weg ist länger. Oder wie sollen die Flachformate angeschlossen werden? Der Weg über die Längeneinheit muß schon mit verbundenen Augen gegangen werden, er ist nicht eindeutig und läuft allen wissenschaftlichen Verfahren, die bei der Gewinnung von Anschlüssen geübt wurden, entgegen und liefert nicht etwa etwas Brauchbareres, so daß die Praxis zu Hilfe geholt werden könnte. Außerdem kommen wir durch ihn nicht zu

einem einwandfrei aufgebauten System von Formaten, wie wir es im metrischen Formatsystem gewonnen haben.

Von gleicher Seite ist an anderer Stelle derselbe Einwand in einigen anderen Formen vorgebracht worden. Im Grunde genommen trifft er aber den Bau des metrischen Formatsystems überhaupt nicht. Doch seien diese Spielarten angeführt, da sie die Verhältnisse klären: „Ganz gegen unsere Willkür drängt sich die Seite als primäres Element auf, da wir nur darüber zu dem sekundären Begriff des Flächenmaßes gelangen können“, „die Flachformate würden Einheitsflächen und Maßeinheiten darstellen“, „ein bestimmtes Verhältnis von Rechteckseiten sei das Primäre, während der Flächeninhalt gar nicht in Frage komme“, „durch Angabe der Seitenlängen ist ein Format unmittelbar eindeutig bestimmt, durch Angabe des Flächeninhaltes erst mittelbar“, „das Ostwaldsche Verfahren habe mindestens gleiche Berechtigung“, „die praktische Verwendbarkeit dürfe nicht außer acht gelassen werden“, usw.

Es ist mißlich, Scheingriffe abzuwehren, die den innersten Kern gar nicht berühren können. Ernsthaftige Angriffe sind indes bis heute nicht erfolgt. Daß im ersten Augenblick die Seiten in die Augen fallen, liegt ja eben dem Ostwaldschen Verfahren zugrunde, das ist aber angreifbar und führt zu einer gründlicheren Reform mit Hilfe nicht des Flächenmaßes, sondern der Flächeneinheit. Es kommt letzten Endes auf die Gewinnung eines Ausgangsformates an. Daß wir dies Format am besten durch seine beiden Seiten festlegen, ist Forderung der Praxis. Daraus folgt aber nicht, daß wir nun gerade diese beiden Seiten durch den Anschlußsatz unmittelbar festlegen. Dies würde bedingen, daß wir beide Seiten gleich der Längeneinheit machen. Es können aber zwei beliebige unabhängige Bestimmungsstücke zur Gewinnung der Seiten eines Rechtecks benützt werden. Das eine ist in unserm Falle das Seitenverhältnis, daraus folgt aber nicht, daß das andre eine Seite sein müsse, der Flächeninhalt erweist sich eben als in höherer Ordnung berufen. Das Ostwaldsche Verfahren hat in dem Maße weniger Berechtigung, als eine Linie weniger berechtigt ist zum Anschluß von Flächen an das metrische Maßsystem als die Fläche. In beiden Fällen rechnen wir aus zwei Gleichungen die beiden Seiten aus, für die Praxis sind beide Wege gleich gangbar und, wie sich gezeigt hat, auch gleich brauchbar. Man kann also auf keinen Fall den leeren Begriff von der Praxis herholen, als ob der einen Deut Klärung in die Sache brächte. Und gerade dies Verfahren wird von der Gegenseite unbegrenzt angewandt.

¹⁾ Verstreut in Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung, Dinglers polytechnischem Journal, Technik und Wirtschaft, Organisation.

Es entspringt die ganze Formatreform der sogenannten Praxis. Es stammen die Sätze aus der Praxis. Der Verdopplungssatz ist ein reines Kind derselben. Der Ähnlichkeitssatz ist eins der Praxis und der Kunst. Der Anschlußsatz ist eins der Wissenschaft — da die Praxis hier versagt. Sie kann mehrere Systeme, die auf die beiden ersten Sätze aufgebaut sind, als gleich brauchbar annehmen und kann keinen Grund angeben, warum dies oder jenes besser sein soll. Also mag man sie zu dieser Beurteilung auch nicht heranziehen. Das ist sinnlos und verschleiern. Einheitsflächen oder Maßeinheiten sind nun schließlich weder die Weltformate noch die metrischen Formate. Unsere Einheitsflächen sind bisher vielmehr Quadrate mit zentesimaler Abstufung. Die Flachformate dagegen sind Rechtecke, die nach Potenzen von Zwei wachsen.

Der Nachweis, daß das metrische Formatsystem „unpraktisch“ sei, beruht nicht etwa auf Anführung von praktischen Mängeln, sondern auf weit hergeholten, zu dem Zweck erst aufgestellten, unzutreffenden Diskussionen, die ebensowenig der schlichten Praxis entstammen wie der Wissenschaft. Z. B. wird herbeigeholt, daß bei einem Format die Seiten in die Augen springen, nicht die Fläche. Die Seiten seien für die Praxis das Primäre. Nun, ein Format kann nicht bestehen, ohne daß es Seiten hat, aber auch ohne Fläche nicht. Man schreibe auf ein Format, das vier Seiten, aber keine Fläche hat. Gerade die Fläche ist es nämlich, mit der sparsam umgegangen werden soll, der zuliebe die Formatreform geboren wurde. Die Papierfläche wird hergestellt, zerschnitten, geordnet, aufbewahrt, vergeudet, bedruckt, beschrieben, bemalt. Gerade die Praxis betont die Fläche. Und die Kanten spielen keine Rolle mehr, sobald sie für die Handhabung der Fläche glücklich geordnet sind, ebensowenig wie es für ein Gewichtsstück im Gebrauch darauf ankommt, daß es in einfacher Beziehung zur Raumeinheit Wasser steht. Wir mögen eine Formatreihe nehmen, wie wir wollen, immer werden wir ihre Kanten tabellarisch ordnen, ganz gleich, wie sie gewonnen sind.

Eine letzte Behauptung Speisers, daß die metrische Systembildung „praktisch auf eine Unmöglichkeit führe“, da sich Raumkörper ergeben sollen, „deren Seitenflächen nicht mit den Abmessungen der Flachformate übereinstimmen“, ist ungewöhnlich kühn, nachdem ich vorher eine Raumformatreihe in meiner „Normenlehre“ aufgestellt habe, die den Forderungen Speisers voll und ganz entspricht. Neuerdings sind freilich auch andere Raumformate in Erwägung gezogen worden (bei den Arbeiten des Normenausschusses der deutschen Industrie), die ganz

innerhalb des metrischen Systems liegen, aber einige andere Eigenschaften haben. Die Raumformate bieten noch reichlich viel zu bedenkende Fragen, bevor endgültige Einigung erzielt werden kann. Man kann sich aber nicht denken, wie man aus diesem Umstand dem davon ganz unabhängigen metrischen Formatsystem einen Strick drehen will, zumal auch gerade W. Speiser nicht müde wird, die „bestechliche“ innere Folgerichtigkeit und logische Einwandfreiheit des Systems zu predigen. Die Erörterung der Raumformate, die ebenfalls eine noch nicht abgeschlossene Entwicklung von den Ostwaldschen Weltraumformaten zu den metrischen Raumformaten durchmachen, ist einer späteren Arbeit vorbehalten.

(Eingegangen 4. Juni 1918.)

Statistik und Wahrscheinlichkeitsnachwirkung.

Von Reinhold Fürth.

§ 1. Wahl der Statistik.

Eines der ältesten Probleme der Statistik, das durch die Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung gelöst wird, ist das der Berechnung der relativen Häufigkeit der Anzahl günstiger Ereignisse bei wiederholtem Anstellen gewisser Serien von Beobachtungen. Die Übereinstimmung der Beobachtung mit der Theorie zeigt die Berechtigung der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Es ist daher einigermaßen erstaunlich, daß nicht von seiten der Statistik der Versuch unternommen wurde, die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf eine andere Seite der statistischen Erscheinungen anzuwenden, nämlich die Häufigkeit gewisser Zahlenfolgen einer statistischen Reihe. Vielmehr ist hierfür der Anstoß von seiten der theoretischen Physik gegeben worden, in dem Bestreben, die Gesetzmäßigkeiten, die sich bei der Brownischen Bewegung vieler ähnlicher Teilchenindividuen unter dem Mikroskop bieten, zu studieren. M. v. Smoluchowski hat in einer Anzahl von Arbeiten eine sehr vollkommene Theorie dieser „Schwankungserscheinungen“ entwickelt¹⁾ und auf die durch Beobachtungen Svedbergs und Westgrens an Kolloidteilchen gewonnene Sta-

1) M. v. Smoluchowski, Wiener Ber. 123 (2a), 2381, 1915; 124 (2a), 339, 1915; diese Zeitschr. 16, 321, 1915; 17, 557, 1916; Koll. Zeitschr. 18, 49, 1916. Eine Zusammenfassung und teilweise Ergänzung des hierher gehörigen Formelmateri als mit einer einheitlichen Bezeichnungsweise findet man in der zusammenfassenden Bearbeitung des Verfassers „Schwankungserscheinungen in der Physik“, diese Zeitschr. 19, 1918.

statistik mit schönster Übereinstimmung angewendet.

Da sich nun aber die von ihm entwickelten Formeln ihres physikalischen Gewandes völlig entkleidet in rein statistischem Sinne deuten lassen, liegt es nahe, sie auf einem Gebiet zu erproben, bei dem der rein statistische Mechanismus der Erscheinung klarer auf der Hand liegt, als bei dem der Kolloidstatistik. Einen Versuch in dieser Richtung hat kürzlich Frl. A. Podjed¹⁾ an der Statistik des Geschlechtsverhältnisses der Geborenen unternommen; dieses Beispiel ist jedoch gerade zur Illustration der v. Smoluchowskischen Gesetzmäßigkeiten nicht so sehr geeignet, da bei ihm keine Wahrscheinlichkeitsnachwirkung besteht, d. h., daß der günstige bzw. ungünstige Ausfall eines Einzelereignisses irgendeiner Serie auf den Ausfall des gleichen Einzelfalles der nächsten Serie keine Einwirkung ausübt: aufeinanderfolgende Serien sind voneinander unabhängig. Smoluchowskis Formeln leisten aber gerade für diesen Fall der Nachwirkung etwas wesentlich Neues²⁾. Im folgenden soll es daher unternommen werden, an einem Beispiel mit „Wahrscheinlichkeitsnachwirkung“ die Richtigkeit der Smoluchowskischen Formeln zu demonstrieren.

Die gewählte Statistik war folgende: Es wurden in äquidistanten Zeitintervallen (5 sec) die Anzahl der Fußgänger beobachtet, die sich auf dem Gehsteig einer Straße in der Länge einer bestimmten Hausfront aufhielten³⁾. Das Intervall war so gewählt, daß ein in einem bestimmten Intervall eintretender Mensch mit großer Wahrscheinlichkeit auch im nächsten Intervall sich noch in dem Beobachtungsraum aufhielt, die Größe des Beobachtungsraumes so, daß die Anzahl der gleichzeitig sich in ihm befindlichen Menschen mit einem Blick leicht zu übersehen war. Es wurde so eine Statistik von 505 Beobachtungen erhalten, die in Tabelle I wiedergegeben ist.

Tabelle I.

00011121221111000013211112210000000000132210000001
2232433111112211100221243220011123220002234311111123
32111111222122221100123344211112333212331002444111
343324752121222233421111221123111124211223112211332
2212332135354432112212343211331111100011111133100
34322212231220133312222321012310000111135423322100
1111221122000110001220012100012222356333123345454
42221222212333100111100001122100011000000001322210
111121233542144232111112112220122122210223122220011
022144310133000000000023112212331000111122111.

1) A. Podjed, diese Zeitschr. 19, 39, 1918.

2) s. a. E. Schrödinger, diese Zeitschr. 19, 218, 1918.

3) Dabei wurde eine Gruppe gemeinsam gehender Leute als „Einzelereignis“ notiert. Die Konsequenz der anfänglichen Außerachtlassung dieses Umstandes soll am Schlusse kurz gestreift werden.

§ 2. Schwankungsgröße.

Bezeichnet man die Zahlen der Tab. I mit n , dann ist unter den dieser Statistik zugrunde liegenden Voraussetzungen die Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer gewissen Zahl n gegeben durch

$$W(n) = \frac{e^{-\nu} \nu^n}{n!} \quad (1)$$

wo ν den Mittelwert der Zahlen n bedeutet. Dieser Mittelwert ergibt sich aus den Beobachtungen zu

$$\nu = 1,592.$$

Unter Zugrundelegung dieses Wertes resultieren für die Häufigkeiten der verschiedenen n -Werte

$$A(n) = W(n) \cdot 505$$

die in Tab. II als $A(n)$ (ber.) bezeichneten Zahlen, während die aus Tab. I entnommenen als $A(n)$ (beob.), eingetragen sind.

Tabelle II.

n	$A(n)$ (beob.)	$A(n)$ (ber.)
0	98	103
1	165	164
2	136	130
3	70	69
4	26	28
5	8	9
6	1	2
7	1	0

Führt man die „mittlere relative Schwankung“ durch die Beziehung

$$\delta = \frac{n - \nu}{\nu} \quad (2)$$

ein, so soll die Relation bestehen

$$\bar{\delta}^2 = \frac{1}{\nu} \quad \text{oder} \quad \nu^2 \bar{\delta}^2 = \nu. \quad (3)$$

Die Berechnung ergibt

$$\nu^2 \bar{\delta}^2 = 1,505$$

in bester Übereinstimmung mit dem Werte für ν .

Es gilt ferner die Beziehung

$$|\bar{\delta}| = \frac{2 e^{-\nu} \nu^\lambda}{\lambda!}, \quad (4)$$

wo λ jene größte ganze Zahl ist, die von ν übertraffen wird.

Die Berechnung gibt für

$$|\bar{\delta}| = 0,631,$$

während Formel (4) ($\lambda = 1$) ergibt

$$|\bar{\delta}| = 0,648,$$

so daß auch diese verifiziert erscheint.

§ 3. Schwankungsgeschwindigkeit.

Es trete bei der r -ten Beobachtung die Zahl n_r auf und wir fragen nach der Wahrscheinlichkeit $W(n, n+k)$ bzw. $W(n, n-k)$, daß die $r+1$ te Beobachtung eine um k größere bzw. kleinere Zahl ergibt. Die Lösung bieten folgende Smoluchowskischen Formeln

$$\begin{cases} W(n, n+k) = e^{-vP} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} P^i Q^{n-i} \frac{(vP)^{i+k}}{(i+k)!} \\ W(n, n-k) = e^{-vP} \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} P^i Q^{n-i} \frac{(vP)^{i-k}}{(i-k)!} \end{cases} \quad (5)$$

worin bedeuten: P die konstante Wahrscheinlichkeit, daß auf ein günstiges Einzelereignis der r ten Serie in der $r+1$ ten ein ungünstiges folge, $Q = 1 - P$. Die Größe P ist als ein Maß für die „Wahrscheinlichkeitsnachwirkung“ zu betrachten. Sie ist gleich 1, wenn die aufeinanderfolgenden Serien voneinander unabhängig sind und ist eine Funktion der Intervalllänge τ , mit der sie monoton gegen 0 geht.

Tab. III enthält die aus Tab. I entnommenen empirischen Häufigkeiten der verschiedenen Zahlenfolgen, derart, daß die Ziffern über den vertikalen Spalten die Größen n_r und die neben den horizontalen die darauf folgenden n_{r+1} enthalten. Die analoge aus der Formel (5) berechnete Tab. IV zeigt eine vorzügliche Übereinstimmung mit den Zahlen der Tab. III. Dabei wurde für P der aus der folgenden Überlegung sich ergebende Wert zugrunde gelegt.

Tabelle III.

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	67	23	7	1				
1	24	83	41	16	1			
2	6	46	58	18	7	1		
3	1	11	25	23	8	1	1	
4		2	5	7	7	5	0	
5			0	5	2	0	0	1
6					0	1		
7					1			

Tabelle IV.

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	59	30	7	1				
1	30	84	40	11	1			
2	8	40	57	23	5	0		
3	1	9	25	24	9	2	0	
4		2	6	9	7	3	0	
5			1	2	3	2	1	1
6					1	1		
7					0			

Bezeichnet man die Differenz zweier aufeinander folgender n -Werte mit

$$\Delta n_r = n_{r+1} - n_r$$

und bildet bei festgehaltenem Anfangswerte n das Mittel $\bar{\Delta n}$, so ergibt sich für diese „Schwankungsgeschwindigkeit“ die Formel

$$\bar{\Delta n} = P(n - v). \quad (6)$$

Bildet man dagegen das allgemeine Änderungsquadrat bei beliebigem Anfangswert, so erhält man

$$\bar{\Delta^2} = 2vP. \quad (7)$$

Die letztere Formel wurde benutzt, um die Größe P zu bestimmen, indem aus Tab. III $\bar{\Delta^2}$ berechnet wurde und für v der früher gefundene Wert eingesetzt wurde. Es ergab sich

$$P = 0,316.$$

Zur Kontrolle von Formel (6) wurden ferner aus Tab. III die Werte $\bar{\Delta n}$ entnommen, die in Tab. V als $\bar{\Delta n}$ (beob.) eingetragen sind. Die aus Formel (6) unter Zugrundelegung der angeführten Werte von v und P berechneten Werte stehen als $\bar{\Delta n}$ (ber.) daneben. Man sieht auch hier eine recht gute Übereinstimmung, zumindest in den Werten von n , wo die Anzahl der zur Mittelbildung zur Verfügung stehenden n -Werte groß genug war. Die hier nicht wiedergegebene graphische Darstellung der Tabelle zeigt, daß sich die Beobachtungen durch eine gerade Linie ausgleichen lassen, wie die Formel (6) vorschreibt.

Tabelle V.

n	$\bar{\Delta n}$ (beob.)	$\bar{\Delta n}$ (ber.)
0	-0,397	-0,510
1	-0,309	-0,187
2	+0,147	+0,136
3	+0,513	+0,458
4	+0,769	+0,780
5	+1,122	+1,102
6	+3,000	+1,42
7	+2,000	+1,75

Um zu zeigen, daß gerade die früher angegebenen Werte der Konstanten P und v die Beobachtungen richtig ausgleichen, wurden aus dem empirischen Material der Tab V nach der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werte von P und v berechnet. Es ergaben sich folgende Zahlen

$$v = 1,580, \quad P = 0,322$$

die mit den direkt sich ergebenden oben angeführten fast vollständig übereinstimmen.

§ 4. Zustandsdauer und Wiederkehrzeit.

Unter der Dauer eines n -Zustandes möge die Anzahl k von Intervallen der Länge τ verstanden werden, die zwischen dem Eintritt und

dem Aufhören dieses Zustandes ohne Unterbrechung verlaufen. Die Wahrscheinlichkeit, daß diese Dauer gerade die Länge $k\tau$ besitze, möge mit $\varphi_n(k\tau)$ bezeichnet werden, der Mittelwert dieser Dauer mit $T(n)$. Analog bezeichnen wir als Wiederkehrzeit die von zwei aufeinanderfolgenden n -Zuständen begrenzte Zeitstrecke. Ihre Wahrscheinlichkeit sei $\psi_n(k\tau)$, ihr Mittelwert $\Theta(n)$.

Für φ und ψ gelten folgende Formeln

$$\begin{cases} \varphi_n(k\tau) = W^{k-1}(n, n)(1 - W(n, n)) \\ \psi_n(k\tau) = \left\{ 1 - \frac{W(n)}{1 - W(n)}(1 - W(n, n)) \right\}^{k-1} \cdot \frac{W(n)}{1 - W(n)}(1 - W(n, n)). \end{cases} \quad (8)$$

Darin sind die Werte von $W(n)$, bzw. $W(n, n)$ aus Formel (1) bzw. (5) zu entnehmen.

Die erste dieser Formeln konnte am Beobachtungsmaterial direkt verifiziert werden, für die zweite ist die Reihe zu kurz.

In Tab. VI sind für jedes Wertepaar n und k die aus Tab. I entnommene Anzahl der die Dauer $k\tau$ besitzenden Gruppen von n -Zuständen verzeichnet. Tab. VII enthält in gleicher Weise angeordnet die aus Formel (8) entnommenen berechneten Werte, die aus $\varphi_n(k\tau)$ durch Multiplikation mit der Größe $A(n)$ hervorgehen. Man sieht auch hier trotz der verhältnismäßig geringen Zahl der zur Verfügung stehenden Werte die Formeln zur Genüge bestätigt.

Tabelle VI.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	11
0	7	9	7	4	0	1	0	1	2
1	47	13	6	11	1	3	1		
2	40	26	6	4	2	0			
3	28	15	4	0					
4	13	5	1						
5	8	0							
6	1								
7	1								

Tabelle VII.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	11
0	12	7	5	3	2	1	1	0	0
1	40	20	11	6	3	1	1		
2	45	19	8	3	2	1			
3	31	11	4	1					
4	14	4	1						
5	7	1							
6	1								
7	1								

Für die mittlere Dauer und Wiederkehrzeit hat Smoluchowski die Formel abgeleitet

$$\begin{cases} T(n) = \frac{\tau}{1 - W(n, n)} \\ \Theta(n) = T(n) \cdot \frac{1 - w(n)}{W(n)}. \end{cases} \quad (9)$$

Die empirischen Werte der $T(n)$ lassen sich der Tab. VI durch Mittelbildung über alle zu einem n gehörigen k -Werte entnehmen, auf ähnliche Weise gelangt man zu den $\Theta(n)$, während sich aus (9) die theoretischen Werte dieser beiden Funktionen ergeben. In den nun folgenden Tabellen VIII und IX findet man die beobachteten und berechneten $T(n)$ und $\Theta(n)$ nebeneinandergestellt, wobei das Intervall τ zwischen zwei Beobachtungen als Zeiteinheit zugrunde gelegt ist. Die glänzende Übereinstimmung erweist auch hier die Richtigkeit der zugrunde gelegten Formeln.

Tabelle VIII.

n	$T(n)$ (beob.)	$T(n)$ (ber.)
0	3,16	2,53
1	2,01	2,04
2	1,74	1,73
3	1,49	1,52
4	1,37	1,38
5	1,00	1,28
6	1,00	1,21
7	1,00	1,16

Tabelle IX.

n	$\Theta(n)$ (beob.)	$\Theta(n)$ (ber.)
0	13,1	9,92
1	4,14	4,26
2	4,67	4,98
3	9,44	9,60
4	25,2	23,9
5	62,0	72,6
6	—	262
7	—	1105

§ 5. Umordnung der Zahlen.

Wie schon erwähnt, kann P als ein Maß für die „Wahrscheinlichkeitsnachwirkung“ einer statistischen Reihe aufgefaßt werden, derart, daß beim Verschwinden dieser Nachwirkung $P = 1$ werden muß. Unter anderem soll dies z. B. auch bei einer Reihe mit Nachwirkung, wie der unsrigen, geschehen, wenn man die Reihenfolge ihrer Glieder nach Zufall verändert. Um dies zu erproben, wurden die Zahlen der Tab. I einzeln auf kleine Zettel geschrieben und in einer „Urne“ ausgiebig durcheinandergeschüttelt, worauf sie einzeln wieder herausgezogen wurden. Die so umgeordnete Reihe ist in Tab. X wiedergegeben. An ihr wurden nun die in § 3 vorgenommenen Operationen erneut durchgeführt und ergaben folgende Resultate:

Tabelle X.

211023201112152042143031322213112011231402102200210
 122005311023220110013121022141202301024511221222120
 011140212121013140320023122101112111313234032431210
 012122023132142002223143211022132011231222321011210
 10031221212512411412224032223011110110112230011123
 152113123312003011101142211322123023312011251521032
 221210332321224210012301141020001031233111200230103
 147222122214215310300311211142101011314333311114114
 102112111203330010321300216222214021304110311221023
 0000320243222102121100012000233112202101111331.

Aus Formel (5) läßt sich ableiten, daß für $P=1$ $W(n, n+k)$ bzw. $W(n, n-k)$ identisch werden mit $W(n)$ (Formel 1). Um diese Beziehung zu kontrollieren, wurde aus Tab. X die der Tab. III entsprechende Tab. XI entnommen, welche ebenso die Häufigkeit der verschiedenen Gruppen von aufeinanderfolgenden n -Werten enthält. Die analoge Tab. XII enthält die diesen empirischen Zahlen nach dem Vorigen entsprechenden theoretischen aus Formel 1 berechneten Häufigkeiten. Die Übereinstimmung ist genau so gut, wie die von Tab. III und IV. Ein Vergleich von XI und III zeigt deutlich, wie dort eine Tendenz zur Beibehaltung gleicher Zahlen besteht, während hier bloß eine solche gegen den Mittelwert hin zu konstatieren ist.

Tabelle XI.

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	24	33	20	15	6	0	0	0
1	29	53	48	25	7	3	0	0
2	25	44	38	18	6	3	1	1
3	17	13	22	11	5	2		
4	2	17	6	1	0			
5	1	4	2	0	1			
6	0	1			0			
7					1			

Tabelle XII.

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	20	34	28	14	5	2	0	0
1	32	53	45	23	8	3	1	1
2	25	43	35	18	7	2	0	0
3	13	23	19	10	4	1		
4	5	9	7	4	1			
5	2	3	2	1	1			
6	1	0			0			
7					0			

Entnehmen wir aus Tab. XII die zur Bestimmung von $\bar{A}^2$ nötigen Daten, so ergibt sich

$$\bar{A}^2 = 3,038,$$

während Formel (7) für $P=1$ ergeben würde

$$\bar{A}^2(\text{ber.}) = 2\nu = 3,184,$$

welche beiden Werte auf etwa 5 Proz. übereinstimmen.

Ebensogut läßt sich auch in diesem Falle Formel (6) verifizieren. Um dies zu zeigen, sind in Tab. XIII ähnlich wie in Tab. V die beobachteten und berechneten $\bar{A}_n$ für jedes n zusammengestellt. Auch hier zeigt die graphische Darstellung, daß der Ausgleich ungezwungen durch eine Gerade mit den Werten $P=1$ und $\nu=1,592$ erfolgt. Berechnet man, wie in § 3, auch hier diese Werte als diejenigen, die die Beobachtungen am wahrscheinlichsten ausgleichen, nach der Methode der kleinsten Quadrate, so ergibt die Rechnung für

$$\nu = 1,590 \quad \text{und} \quad P = 0,998,$$

womit aufs schärfste erwiesen scheint, daß, wie von vornherein zu erwarten war, durch diese Umordnung die Reihe den Charakter der Nachwirkung völlig verliert.

Tabelle XIII.

n	$\bar{A}_n(\text{beob.})$	$\bar{A}_n(\text{ber.})$
0	-1,449	-1,592
1	-0,661	-0,592
2	+0,353	+0,408
3	+1,600	+1,408
4	+2,231	+2,408
5	+3,125	+3,408
6	+4,000	+4,408
7	+5,000	+5,408

Die Berechnung von Zustandsdauer und Wiederkehrzeit ist in diesem Falle ohne wesentliches Interesse.

§ 5. Zusatzbemerkung.

Wie eingangs erwähnt, mußte bei der Beobachtung jede Gruppe zusammengehender Leute, die sich im Beobachtungsraum aufhielt, als ein Einzelereignis gezählt werden. Die Berechtigung dieses Vorgehens ergibt sich aus der Überlegung, daß ja, z. B. im Falle sämtliche Fußgänger ausschließlich paarweise auftreten würden, zweifellos bei Einzelzählung eine ganz andere Verteilung der Häufigkeiten herauskommen müßte. Wenn die Sache nun auch nicht so extrem liegt, so ist doch eine gewisse Tendenz zum gruppenweisen Auftreten der Fußgänger vorhanden, namentlich an Sonntagen, wo ich zuerst Beobachtungen anstellte. Tatsächlich zeigten diese ersten Reihen ganz andere Häufigkeitsverteilungen; der wahrscheinlichste Wert von n stimmt unter anderem mit dem Mittelwert gar nicht überein wie hier, und der beobachtete Wert von $\bar{\delta}^2$ ist viel zu groß (sogenannte übernormale Dispersion).

Möglicherweise ist die abnormale Häufigkeitsverteilung bei Svedbergs Szintillations-

beobachtungen radioaktiver Lösungen¹⁾ auf derartige „Gruppenbildung“ zurückführbar, wie bereits T. Ehrenfest²⁾ seinerzeit betont hat.

1) u. a. Th. Svedberg, Die Existenz der Moleküle, Leipzig 1912.

2) T. Ehrenfest, diese Zeitschr. 14, 675, 1913.

(Eingegangen 13. Juni 1918.)

Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes.

Von A. Korn.

X.

Die Induktion in langsam veränderlichen Feldern.

Bevor daran zu denken war, die Erscheinungen der elektrischen Strömungen in Leitern infolge des Auftretens elektromotorischer Kräfte auf mechanischer Grundlage zu behandeln, mußte erst eine mechanische Theorie der Reibung geschaffen werden. Die in Abh. IX¹⁾ gegebene mechanische Theorie der Reibung hat zu der Ableitung eines der wichtigsten Resultate in der Reibungstheorie geführt, gerade des Resultates, welches für die elektrische Strömung in Leitern benötigt ist:

Wenn wir die in leitenden Körpern vorauszusetzenden ponderablen Teilchen in ungeordneter, molekularer Bewegung, ähnlich wie in der kinetischen Gastheorie, annehmen und die mittleren Entfernungen der Teilchen genügend klein voraussetzen, so daß die Maxwell'schen Abstoßungskräfte (umgekehrt proportional der fünften Potenz der Entfernung) zu berücksichtigen sind, wird sich der Bewegung jedes Elektrons eine Kraft entgegensetzen, welche in einer ersten Annäherung der Geschwindigkeit des Elektrons proportional ist und in der der Geschwindigkeit entgegengesetzten Richtung wirkt.

Im allgemeinen wird zu dem Widerstand infolge der Reibung für die elektrische Strömung noch ein zweiter Widerstand hinzukommen, welcher darin seinen Ursprung hat, daß in vielen Fällen je ein positives und je ein negatives Teilchen durch ihre gegenseitige Anziehung zu einem Ganzen verbunden sind und sich ihrer Trennung durch elektromotorische Kräfte widersetzen. Die Erfahrung hat ergeben, daß wir bei den metallischen Leitern, welche uns zunächst interessieren, von diesen letzteren Wider-

1) Diese Zeitschr. 19, 327, 1918.

ständen abstrahieren können, daß die Bindungen zwischen positiven und negativen Teilchen, also in metallischen Leitern, sehr labil sind und die spezifischen Widerstände der Metalle tatsächlich im wesentlichen durch die Reibung bei der Bewegung der Elektronen bedingt werden¹⁾.

Nichtmetallisch leitende Körper schließen wir zunächst, abgesehen von dem idealen Nichtleiter, dem Äther, von unseren Betrachtungen aus; eine Theorie der Dielektrika ist hingegen auf Grundlage der Vorstellung zu erhalten, daß ein Dielektrikum aus dem Äther durch Einlagerung metallisch leitender Teilchen²⁾ entsteht, deren mittlere molekulare Abstände groß genug sind; so daß im allgemeinen die Maxwell'schen Abstoßungskräfte zwischen zwei eingelagerten Teilchen nicht zu berücksichtigen sind.

Zwei Hilfssätze sind für die Berechnung der in einem leitenden Ringe infolge von elektromotorischen Kräften auftretenden elektrischen Strömung vorzuschicken, deren Anwendung auch in den früheren Theorien üblich war:

1. Hilfssatz. Die Bewegung eines materiellen Teilchens von der Masse m , dessen Geschwindigkeitskomponenten u_0, v_0, w_0 den folgenden Bewegungsgleichungen genügen:

$$m \frac{d u_0}{dt} = -\kappa u_0 + X(t), \dots \quad (1)$$

findet, wenn $\frac{m}{\kappa}$ eine außerordentlich kleine Konstante ist, in erster Annäherung entsprechend den Gleichungen:

$$u_0 = \frac{X}{\kappa}, \dots \quad (2)$$

statt, abgesehen von Fällen, in denen die funktionale Abhängigkeit der Funktionen X, Y, Z von der Zeit t besondere Eigentümlichkeiten hat, welche für unsere Zwecke nicht in Betracht kommen.

2. Hilfssatz. Wenn in einem leitenden Ringe (mit der Führungskurve s und dem konstanten Querschnitte q) bei Vernachlässigung der statischen Wirkungen der einzelnen elektrischen Teilchen aufeinander, die positiven elektrischen Teilchen die Geschwindigkeiten

$$A + \bar{\alpha}, B + \bar{\beta}, C + \bar{\gamma},$$

die negativen elektrischen Teilchen die Geschwindigkeiten

1) Ich möchte mich dabei durchaus der Idee anschließen, daß in Metallen zwei Arten ponderabler Teilchen vorhanden sind, von denen die einen mit den negativen Elektronen, die anderen mit den positiven Elektronen durch besondere Anziehungskräfte gebunden sind, deren mechanische Erklärung mit Hilfe besonderer Eigenschwingungen noch aufgeschoben sei.

2) Von der elektrischen Masse Null.

$$A - \bar{\alpha}, B - \bar{\beta}, C - \bar{\gamma}$$

erhielten, so wird sich unter Mitwirkung dieser statischen Kräfte in dem Ringe in der (von vornherein willkürlich, dann aber fest gewählten) Richtung s ein elektrischer Strom bilden, von der Intensität:

$$J = \frac{kq}{s} \int_s \{ \bar{\alpha} \cos(sx) + \bar{\beta} \cos(sy) + \bar{\gamma} \cos(sz) \} ds, \quad (3)$$

wo s die Länge der Führungskurve, k eine Konstante ist, welche lediglich von der Konstitution des Leiters abhängt¹⁾.

Der erste Hilfssatz ist rein mathematischer Natur, dagegen müssen zu dem zweiten Hilfssatz noch einige Worte hinzugefügt werden:

Wenn die Strömungsgeschwindigkeiten nicht längs der Führungskurve konstant wären, müßten sich Anhäufungen von elektrischen Teilchen ein und derselben Art bilden, deren statische Kräfte sofort wieder auf einen Ausgleich hinarbeiten würden. Langsam veränderliche Felder sind dadurch gekennzeichnet, daß die Ableitungen der Funktionen

$$u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2$$

nach der Zeit nicht außerordentlich groß gegen die Quotienten dieser Vektoren durch die Zeiteinheit sein sollen, und unsere bisherige Theorie ergibt, daß solche langsam veränderlichen Felder nur dann vorhanden sein können, wenn in erster Annäherung die außerordentlich große Wirbelgeschwindigkeit der positiven Elektronenringe in dem einen Drehungssinne, der negativen Elektronenringe in dem entgegengesetzten Drehungssinne längs der Führungskurve des Ringes konstant sind. In dem Falle langsam veränderlicher Felder sind daher die statischen Kräfte

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

welche zu den durch irgendwelche äußeren Ursachen erzeugten elektromotorischen Kräften hinzuzunehmen sind, um die Konstanz jener Wirbelgeschwindigkeiten zu erreichen, so beschaffen, daß für die wirklich eintretenden Geschwindigkeiten

$$\alpha, \beta, \gamma$$

die Funktion

$$1) \text{ Es ist } k = \sqrt{\frac{u_0}{2}} \int \left| \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \right| d\tau, \quad (3a)$$

wobei das Integral über die Einheit des Volumens zu erstrecken ist, oder

$$k = N |e|, \quad (3b)$$

wenn N die Anzahl der in der Volumeneinheit vorhandenen Elektronen, $|e|$ die absolute, dem Elektron zugehörige elektrische Masse ist.

$$\alpha \cos(sx) + \beta \cos(sy) + \gamma \cos(sz)$$

längs der Führungskurve des Ringes konstant ist. Da, unter Berücksichtigung des Hilfssatzes 1:

$$\alpha = \bar{\alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \beta = \bar{\beta} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \gamma = \bar{\gamma} + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (4)$$

wo ψ eine mit ihren ersten Ableitungen in dem ganzen Ringe eindeutige und stetige Funktion ist, wird:

$$\alpha \cos(sx) + \beta \cos(sy) + \gamma \cos(sz) = \frac{1}{s} \int_s \{ \bar{\alpha} \cos(sx) + \bar{\beta} \cos(sy) + \bar{\gamma} \cos(sz) \} ds, \quad (5)$$

da

$$\int_s \frac{\partial \psi}{\partial s} ds = 0$$

sein muß. Nunmehr folgt die Formel (3) nach der Definition der Stromintensität in einem Ringe¹⁾.

Jetzt sind wir vorbereitet, die elektrische Strömung in einem Ringe zu berechnen, welche durch elektromotorische Kräfte hervorgerufen wird. Würden wir zunächst von den statischen Kräften absehen, welche die einzelnen elektrischen Teilchen aufeinander ausüben, dann würden die Geschwindigkeiten der positiven Teilchen

$$A + \bar{\alpha}, B + \bar{\beta}, C + \bar{\gamma}$$

und die Geschwindigkeiten der negativen Teilchen

$$A - \bar{\alpha}, B - \bar{\beta}, C - \bar{\gamma}$$

so beschaffen sein, daß, wenn m die zu einem Elektron gehörige ponderable Masse vorstellt (auf die Größe dieser stets mit jedem Elektron verbunden zu denkenden ponderablen Masse²⁾ kommt es hier gar nicht an),

$$m \frac{d\bar{\alpha}}{dt} = -\kappa \bar{\alpha} + \Xi, \dots \quad (6)$$

also nach Hilfssatz 1:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\kappa} \Xi, \dots \quad (7)$$

in erster Annäherung, und nach Hilfssatz 2 wird

$$J = \frac{kq}{\kappa s} \int_s \{ \Xi \cos(sx) + H \cos(sy) + Z \cos(sz) \} ds, \quad (8)$$

oder

1) Diese Zeitschr. 18, 584, 1917.

2) Man vgl. Anm. 1, S. 426.

$$J = \sigma \frac{q}{es} \int_s \{ \Xi \cos(sx) + H \cos(sy) + Z \cos(sz) \} ds, \quad (9)$$

wo

$$\sigma = k \frac{e^1}{z} \quad (10)$$

eine Konstante ist, welche lediglich von der Konstitution des leitenden Ringes abhängt, und welche wir als die Leitfähigkeit des Leiters bezeichnen wollen; Ξ, H, Z sind dabei die auf ein elektrisches Teilchen e in dem Ringe ausgeübten elektromotorischen Kräfte.

Wenn wir den Strom J_2 berechnen wollen, welcher von einem Stromringe ($J_1 s_1$) in einem leitenden Ringe s_2 erzeugt wird, haben wir in der nach (9) bestehenden Formel:

$$J_2 = \sigma \frac{q_2}{es_2} \int_{s_2} \{ \Xi \cos(s_2 x) + H \cos(s_2 y) + Z \cos(s_2 z) \} ds_2 \quad (11)$$

für Ξ, H, Z nach den Formeln 2 der Abh. VI²⁾ die Werte

$$\begin{aligned} \Xi = & -\frac{e}{4\pi c^2} \left\{ \frac{d}{dt} \int_{s_1} J_1 \frac{\cos(s_1 x)}{r_{12}} ds_1 + \right. \\ & \left. + \int_{s_1} J_1 \frac{\dot{\varphi}'_2 \cos(s_1 y) - \dot{\chi}'_2 \cos(s_1 z)}{r_{12}} ds_1 \right\}, \dots \end{aligned} \quad (12)$$

einzusetzen; dabei soll r_{12} den Abstand

$$ds_1 \rightarrow ds_2$$

vorstellen, und wir wollen mit

$$\pi'_1, \chi'_1, \varphi'_1$$

die Rotationsgeschwindigkeiten des Ringes s_1 , mit

$$\pi'_2, \chi'_2, \varphi'_2$$

die Rotationsgeschwindigkeiten des Ringes s_2 um die x -, y -, z -Achse bezeichnen.

Es folgt somit:

$$J_2 = -\frac{\sigma q_2}{s_2} \cdot \frac{1}{4\pi c^2} \cdot \frac{d}{dt} \int_{s_1} \int_{s_2} J_1 \frac{\cos(s_1 s_2)}{r_{12}} ds_1 ds_2 + \Psi, \quad (13)$$

wo:

$$1) \quad \sigma = \frac{Ne^2}{z}, \quad (10a)$$

wenn N die Anzahl der Elektronen in der Volumeneinheit ist.

2) Diese Zeitschrift 19, 12, 1918.

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{\sigma q_2}{s_2} \cdot \frac{1}{4\pi c^2} \int_{s_1} \int_{s_2} J_1 \frac{1}{r_{12}} \left\{ \cos(s_1 x) \frac{d}{dt} \cos(s_2 x) + \dots \right\} ds_1 ds_2 \\ & - \frac{\sigma q_2}{s_2} \cdot \frac{1}{4\pi c^2} \int_{s_1} \int_{s_2} J_1 \frac{1}{r_{12}} \left\{ \cos(s_2 x) (\dot{\varphi}'_2 \cos(s_1 y) - \dot{\chi}'_2 \cos(s_1 z)) + \dots \right\} ds_1 ds_2, \end{aligned} \quad (14)$$

und mit Rücksicht auf:

$$\frac{d \cos(s_2 x)}{dt} = \dot{\chi}'_2 \cos(s_2 z) - \dot{\varphi}'_2 \cos(s_2 y), \dots$$

ergibt sich:

$$\Psi = 0;$$

wir erhalten das in bekannter Weise der Erfahrung genügende Induktionsgesetz:

$$J_2 = \frac{1}{w_2} \left\{ -\frac{1}{4\pi c^2} \frac{d}{dt} \int_{s_1} \int_{s_2} J_1 \frac{\cos(s_1 s_2)}{r_{12}} ds_1 ds_2 \right\}, \quad (15)$$

wobei wir mit

$$w_2 = \frac{s_2}{\sigma q_2} \quad (16)$$

den Widerstand des Ringes bezeichnen.

Setzen wir

$$J = qi, \quad (17)$$

$$J_x = qi_x, \dots \quad (18)$$

so sind i, i_x, i_y, i_z die Größen, welche man früher als die auf die Einheit des Querschnittes bezogene Stromintensität, bzw. als die auf die Einheit des Querschnittes bezogenen Stromkomponenten bezeichnete. In den neueren Theorien werden allgemein i_x, i_y, i_z kurz als die Stromkomponenten bezeichnet; dieselben hängen mit den sichtbaren Geschwindigkeiten u_0, v_0, w_0 durch die Beziehung

$$i_x = \Sigma e u_0, \dots \quad (19)$$

zusammen,

wobei die Summe über die Einheit des Volumens zu erstrecken ist.

Das nunmehr abgeleitete Induktionsgesetz ist die Grundlage aller Formeln, welche sich auf die Induktion in langsam veränderlichen Feldern beziehen; mit Hilfe der Ampereschen Vorstellung über die magnetischen Teilchen, welche wir — abgesehen von der hinzukommenden mechanischen Interpretation — adoptiert haben, ist damit auch die Grundlage der Induktion infolge von Bewegungen magnetischer Teilchen gegeben. Durch die bisherigen Untersuchungen ist die gesamte Theorie des Elektromagnetismus, soweit sie sich auf langsam ver-

änderliche Felder bezieht, auf eine sichere mechanische Grundlage gestellt.

In der folgenden Abhandlung werde ich zu rasch veränderlichen Feldern übergehen.

(Eingegangen 14. Juni 1918.)

Einwirkung mechanischer Bearbeitung auf die Oberflächenschichten metallischen Selen.

Von W. S. Gripenberg.

Es ist bereits in verschiedener Weise festgestellt worden, daß die Oberflächenschichten des metallischen Selen durch mechanische Bearbeitung, wie Befeilen, Schleifen und Polieren, in irgendeiner Weise verändert werden.

Als vor mehr als 60 Jahren die Methoden für die Ermittlung der optischen Konstanten der Körper durch Reflexionsbeobachtungen ausgearbeitet wurden, befand sich auch das Selen unter den zuerst veröffentlichten Beobachtungsergebnissen; jedoch nur in seiner amorphen Modifikation. Von der metallischen Modifikation vermißt man jede Angabe, bis endlich vor einigen Jahren Pfund¹⁾ sowie Försterling und Fredericksz²⁾ durch Vermeidung jeglicher mechanischer Bearbeitung der Platten brauchbare Resultate erzielten.

Auf andere Weise, durch Widerstandsmessungen an Selenblöcken, stellte White³⁾ fest, daß eine merkliche Steigerung desselben nach der erstmaligen Bearbeitung mit der Feile stattfand.

Im Verfolg anderer Ziele erhielt ich zufälligerweise eine Anordnung, wobei die Widerstandsänderung durch Schleifen außerordentlich kräftig hervortritt, — 300 malige Vergrößerung — so daß ich zur näheren Untersuchung veranlaßt wurde.

1) Diese Zeitschr. 10, 349, 1909.

2) Ann. d. Phys. 43, 1227, 1914.

3) Phil. Mag. 27, 370, 1914.

Eine Selenplatte $8 \times 8 \text{ mm}^2$, 0,06 mm Dicke gab, auf ein Elektroden system bestehend aus einem auf Glas eingebrannten Goldgitter mit 0,06 mm lichter Weite und 8 Gitterstäben pro Millimeter, einen Dunkelwiderstand von etwa 1000 Ohm. Um diesen Widerstand zu erhöhen, schliß ich die Platte mit feinem Schmirgelpapier ab. Ob schon höchstens 10 Proz. von der Dicke abgenommen wurde, ergab sich jetzt ca. 300 000 Ohm. Da ähnliche Versuche mit anderen Platten analoge Ergebnisse lieferten, schienen Zufälligkeiten ausgeschlossen und es blieb nur übrig, eine stoffliche Änderung der behandelten Oberflächenschicht anzunehmen, und zwar nahm ich an, daß durch die Reibungswärme eine Umwandlung in die glasige Modifikation stattgefunden hatte. Um dies zu prüfen, erhitze ich die Zelle — ohne daß etwas an der Einstellung (Druckschraube) geändert wurde — auf die Kristallisationstemperatur. Es folgte eine gewaltige Leitfähigkeitserhöhung; nach dem Erkalten war der Widerstand von gleicher Größenordnung wie vor dem Abschleifen.

Wirft man eine dünne abgeschliffene Selenplatte auf einen heißen Metallklotz ($100-160^\circ$), so geht der Farbenumschlag: grünlich-schwarz $\rightarrow$ rötlich-bleifarben in 2 Sek. vor sich. — Eine Selenplatte, gegen einen mattgeschliffenen heißen Metallklotz frottiert, verliert überhaupt nicht ihre Bleifarbe. Das Polieren von S_{krist} muß also bei Kristallisationstemperatur geschehen.

Ein abgerundeter Glasstab von 3 mm Dicke wurde senkrecht gegen eine ebene Selenplatte gestellt und mit 1 kg belastet. Wurde nun der Stab parallel mit sich selbst verschoben mit einer Geschwindigkeit von etwa 2 cm/sek, so entstand eine Rinne, von deren Oberfläche indessen nur der tiefste Teil schwärzlich gefärbt war, offenbar weil nur dort Druck mal Geschwindigkeit genügend Wärme erzeugten, um eine Schicht von optisch wirksamer Dicke umzuwandeln.

Helsingfors (Finnland), Juni 1918.

(Eingegangen 1. Juli 1918.)

BERICHTE.

Hauptversammlung der Deutschen Bunsengesellschaft für angewandte physikalische Chemie vom 8.—10. April 1918 in Berlin.

Von Alfred Coehn.

Auch im vierten Kriegsjahre war es der Bunsen-Gesellschaft möglich, eine stattliche Mitgliederzahl zu ihrer Hauptversammlung zu-

sammenzuführen. Die Sitzungen fanden im Anschluß an die Jubiläumssitzung der Deutschen Chemischen Gesellschaft in deren Räumen im Hofmannhause statt. Das Interesse, welches die wissenschaftlichen Vorträge fanden, war so lebhaft, daß die Versammlung im Laufe der Nachmittagssitzung beschloß, über das festgesetzte Programm hinaus zu gehen und die noch aus-

stehenden Vorträge auf den nächsten Vormittag zu verlegen. Die Versammlung wurde vom ersten Vorsitzenden, Prof. Dr. Hans Goldschmidt, mit einer längeren Ansprache eröffnet, an deren Schluß Herr v. Böttinger zum Ehrenvorsitzenden der Gesellschaft ernannt wurde. Es folgte die Verleihung von drei Bunsen-Denkmünzen an die Herren Haber, Bosch und Duisberg. Herr Haber erörterte in seiner Ansprache das Verhältnis von Heereswesen und Naturwissenschaft. Herr Bosch, der Ingenieur der Badischen Anilin- und Sodafabrik, dessen Tatkraft die Durchführung der Haverschen Ammoniaksynthese in der Praxis zu danken ist, sprach von den Methoden zur Überführung des Ammoniaks in Düngemittel und Herr Duisberg verbreitete sich über die Methoden zur Herstellung von Kautschuk und Kautschuk-Ersatz.

Geh. Hofrat Prof. Dr. M. Le Blanc - Leipzig demonstriert eine Reihe von Gegenständen aus Gummi, der nach einem neuen Regenerationsverfahren hergestellt worden ist. Das neue Regenerat, Agatit genannt, kann — im Unterschiede gegen die in der Technik üblichen Verfahren — leicht in Form einer feinen Emulsion bzw. kolloiden Lösung von bestimmten Eigenschaften erhalten werden, die sich für viele Zwecke als besonders geeignet erwiesen hat.

Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Th. Paul - München:
Der Säuregrad des Brotes.

Der Säuregrad spielt bei den durch Gärung erzeugten Lebensmitteln Brot, Bier, Wein, ferner Fruchtsäften usw. eine große Rolle, und es können relativ kleine Unterschiede von ausschlaggebender Bedeutung sein. Als Säuregrad wird die Zahl definiert, welche angibt, wieviel Milligramm-Ion Wasserstoffion in 1 l des flüssigen Lebensmittels enthalten sind. Der Säuregrad der deutschen Weißweine liegt z. B. etwa zwischen 0,15 und 1,6 mg Ion H^+ in 1 l. Unsere Geschmacksorgane sind im allgemeinen nicht imstande und gewöhnt, ein wesentlich größeres Säuregradgebiet zu beherrschen. Der Säuregrad des Brotes erreicht in den bisher beobachteten Fällen noch nicht 0,1 mg Ion H^+ . Zur Bestimmung des Wertes eignet sich — bei seiner Kleinheit — die Methode der Zuckerinversion. Zur Herstellung einer klaren Lösung aus dem wässrigen Brotauszug dient ein „Ultrafilter“, das durch Überziehen eines gewöhnlichen Filters mit Kollodium nach dessen Koagulation in Wasser sich bildet. Im Anschluß an den Vortrag geht der Redner noch auf die Aufgaben und Arbeiten der Deut-

schen Forschungsanstalt für Lebensmittelchemie in München ein, deren Ziel und Zweck die Erforschung der chemischen Zusammensetzung und des Nährwerts der Lebensmittel ist.

Prof. Dr. H. Bechhold - Frankfurt a. M.:
Grundfragen der Adsorptions-therapie.

Bei Darm- und Magenerkrankungen, sowie bei infizierten Wunden und anderen werden besonders seit dem Kriege Bolus und Kohle in großem Maße als Adsorbentien angewandt. Diese bisher in der Medizin meist benutzten Pulver haben den Zweck, Bakterien und deren Stoffwechselprodukte zu adsorbieren und dadurch unschädlich zu machen. Vergleichende Untersuchungen zahlreicher Adsorbentien hatten den Zweck, zu prüfen, ob Bolus und Kohle bei der Adsorption insbesondere der Bakterien ihnen spezifisch zukommende Eigenschaften besitzen, oder ob es sich um ganz allgemeine physikalische Eigenschaften handelt, die auch anderen, bisher nicht benutzten Pulvern zukommen. Die qualitative Untersuchung durch Kontrastfärbung zeigte keine wesentlichen Unterschiede. Die quantitative Prüfung (Zählung auf Plattenkulturen) erwies bei groben Größenunterschieden die Adsorption als lediglich von der Größe der Oberfläche des Adsorbens abhängig. Unterschiede in bezug auf positive oder negative elektrische Ladung gegen Wasser kamen bei der Bakterienadsorption nicht zum Ausdruck. — Als weit überlegen gegenüber allen anderen Adsorbentien erwies sich Tier- und Pflanzenkohle, während Bolus gegenüber den vielen anderen Pulvern keine Vorzüge aufweist. Für Fälle, in denen Kohle nicht erwünscht ist, wäre die dem Kliniker unbekannte Fullererde dem Bolus weit vorzuziehen. Kristallinische Adsorbentien erwiesen sich gegen die kolloiden Adsorbente nicht überlegen.

Prof. Dr. Lothar Wöhler - Darmstadt:
Über die Schmelzelektrolyse von Natrium- und Kaliumamid.

Der Vortrag bietet vorwiegend chemisches Interesse.

Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. W. Nernst - Berlin:
Zur Anwendung des Einsteinschen photochemischen Äquivalentgesetzes.

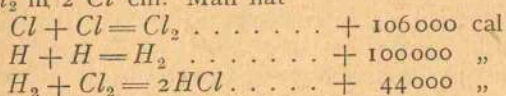
Das Einsteinsche photochemische Äquivalentgesetz liefert die Beziehung

$$\frac{Q}{h\nu} = N,$$

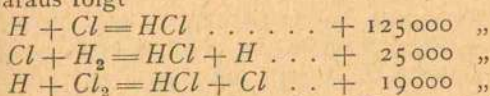
d. h. für jedes aufgenommene $h\nu$ kommt ein

Molekül zur Umsetzung. Für die Zersetzung von Bromwasserstoff und Jodwasserstoff hat Warburg die Gültigkeit des Gesetzes geprüft. Im Fall des Chlorknallgases wird eine ungeheuer viel größere Anzahl von Molekülen umgesetzt, als dem Einsteinschen Gesetz entspricht. Diese scheinbare Unstimmigkeit läßt sich folgendermaßen erklären:

Durch die Belichtung tritt die Spaltung von Cl_2 in $2 Cl$ ein. Man hat



Daraus folgt



Wendet man die aus dem Nernstschen Wärmesatz abgeleitete Näherungsformel auf die zwei letzten Gleichungen an, so zeigt sich, daß die Chloratome mit Wasserstoffmolekülen unter Bildung von Chlorwasserstoff und Wasserstoffatomen, letztere wieder mit Chlormolekülen unter Bildung von Chlorwasserstoff und Chloratomen reagieren. Ein einziges gespaltenes Chlormolekül kann also eine große Anzahl weiterer Moleküle umsetzen. Fände man einen Akzeptor, der die Chloratome aufnähme, so würde die Umsetzung nach dem Einsteinschen Gesetz verlaufen.

Es ist gelungen, dies für das Brom nachzuweisen. Durch Anwendung von Hexahydrobenzol, das sich als Akzeptor für Bromatom als sehr geeignet erwies, gelang es eine befriedigende Übereinstimmung mit dem Einsteinschen Gesetz zu erreichen.

Dr. Richard Lepsius-Berlin: Über Erfahrungen in der Anwendung von flüssiger Luft als Sprengstoff, mit Demonstrationen.

Um die flüssige Luft als Sprengstoff verwenden zu können, wird sie zunächst auf 95 bis 98 Proz. Sauerstoff rektifiziert. Man bringt sie sodann mit einem Kohlenstoffträger zusammen, der eine solche Affinität zum Sauerstoff besitzt, daß damit eine explosionsartige Verbrennung erfolgt: Ruß, Sägemehl, gepulverte feste Kohlenwasserstoffe, Naphtalin, Torf. Die Substanz muß soviel flüssige Luft aufsaugen können als zur Verbrennung erforderlich ist. Das Sprengmittel zeichnet sich vor anderen durch seine geringere Gefährlichkeit aus. Der Kohlenstoffträger, die Sprengpatrone, wird in flüssige Luft getaucht und sättigt sich mit ihr. Versagt dann die elektrische Zündung, so verliert die Sprengpatrone durch Verdampfen des Sauerstoffs in kurzer Zeit ihre Gefährlichkeit.

Flüssige Luft wird bereits in großem Maße als Sprengstoff in Kohlen- und Erzbergwerken benutzt. Da bei der Verbrennung keine giftigen Gase entstehen, kann man die mit flüssiger Luft gesprengten Stollen sofort betreten.

Direktor Dr. Schaller führt Glimmlichtbogenlampen von geringem Wattverbrauch für Signal- und Kontrollzwecke vor.

Dr. Fritz Schröter gibt über die dabei verwendete Neonbogenlampe für Gleichstrom nachfolgenden Eigenbericht: Das Edelgas Neon zeigt eine Reihe bemerkenswerter Eigenschaften, welche seine Anwendung für Beleuchtungszwecke in Gestalt Geißlerscher Röhrenlampen nahelegen. Es besitzt eine sehr hohe elektrische Leitfähigkeit, hat unter allen Gasen die geringste dielektrische Kohäsion ($1/15$ des Wertes für Luft) und die höchste spezifische Lichtstrahlung. Das Ne-Spektrum ist in lichttechnischem Sinne günstig gebaut, d. h. seine Hauptlinien liegen in dem Wellenlängenbereich $530 \mu\mu$ bis $650 \mu\mu$, in welchem der Einheit der Strahlungsleistung hohe Werte des photometrischen Wirkungskoeffizienten entsprechen. Claude, der zuerst große Mengen von Neon-Kaliumgemischen als Nebenprodukt der industriellen Luftverflüssigung gewann, hat leuchtende Neonröhren nach dem Mooreschen System mit hochgespanntem Wechselstrom betrieben und dabei einen spezifischen Wattverbrauch von $0,6 \text{ W/HK}$ bis $0,8 \text{ W/HK}$ erreicht. Seine Messungen des Potentialgefälles der positiven Lichtsäule, das in genügend weiten Röhren bis auf 1 V/cm heruntergeht, erwiesen die Möglichkeit, Neonlampen für gebräuchliche Lichtspannungen (110 oder 220 Volt) herzustellen, falls mit geringem Spannungsabfall an den Elektroden gearbeitet wird. Diese Aufgabe wird durch Vakuumbogenlampen nach Art der Cooper-Hewittschen Quecksilberdampfampe gelöst. Derartige Lampen besitzen eine Anode aus schwerflüchtigem Metall (Fe , Ni , W) und eine Kathode aus leichtflüchtigem Metall, an welchem der Lichtbogen in Form eines glühenden Dampfstrahles ansetzt. Der Kathodendampf muß nahe beim Entstehungsorte wieder verdichtet werden, wenn das reine Edelgasspektrum vom Leuchtrohr der Lampe ausgestrahlt werden soll; gelangen Metaldämpfe in das Leuchtrohr hinein, so unterdrücken sie infolge ihrer geringeren Ionisierungsspannung das Spektrum des Gases oder bilden, wie z. B. Na , Cd , Tl lichtundurchlässige, das Glas unter Abscheidung von Si reduzierende Beschläge. Daher ist für völlige Verdichtung der an der Kathode entwickelten Me-

talldämpfe und für das Abfangen zerstäubter Metallteilchen zu sorgen, was entweder durch geschickt angeordnete Kühlkammern und Erweiterungen der Röhre am kathodischen Ende oder durch Einbau von Prallflächen nach Skaupy zu erreichen ist.

Die Kathodenarbeit der Gleichstrom-Vakuumbogenlampe besteht in der Verdampfung und Ionisierung des Kathodenmaterials; sie beträgt nur einige Volt und stellt die Ionisierungsspannung des Metalles dar. Die Anodenarbeit beträgt bei *Ne* 20,2 V bei 1 Amp. und 1 mm Druck an einem Eisenzylinder von 20 qcm Oberfläche. Der spezifische Wattverbrauch ist, bezogen auf die lediglich in der nutzbaren positiven Lichtsäule umgesetzte Energie, 0,26 W/HK bis 0,28 W/HK. Durch die Elektrodenverluste und den erforderlichen Vorschaltwiderstand, den man aber in Gestalt von stromausnutzenden Glühlampen wählen kann, geht der spezifische Verbrauch auf etwa 0,5 W/HK herauf. Da wir es mit einem Volumenleuchten zu tun haben und die Absorption im *Ne* nur etwa 10 Proz. beträgt, so wird das Verhältnis mittlere sphärische Lichtstärke : mittlere horizontale Lichtstärke günstig; es beträgt über 0,86 und wird durch die willkürliche Formgebung des Leuchtrohres beeinflusst. Der spezifische Wattverbrauch ist im übrigen von dem Röhrenquerschnitt, der Stromdichte, dem Gasdruck und der Reinheit des Gases abhängig. Letzterer Umstand ist von besonderer Bedeutung, da schon unter $\frac{1}{10}$ Proz. betragende Spuren von Gasen höherer Elektroaffinität, wie sie aus Elektroden oder Gefäßwand der Lampe unter dem Einfluß der Stromwärme frei werden, die Ionisation und mithin die Strahlung des Edelgases außerordentlich herabsetzen. Unterhalb eines gewissen Röhrenquerschnittes bzw. oberhalb einer gewissen Stromdichte nimmt der Wirkungsgrad der Lampe stark ab; für Stromdichten zwischen 0,1 Amp./qcm und 1 Amp./qcm ergibt in *Ne*- oder *Ne-H*-Gemischen mit bis zu 25 Proz. *He* ein Druck in der Nähe von 1 mm das Maximum an HK/W. Die Entladung zeigt die bekannte Lichtbogencharakteristik und befolgt die vereinfachte Ayrton'sche Gleichung

$$e = a + \frac{b}{i}$$

Cooper-Hewitt und Claude versuchten vergebens, Neonbogenlampen mit Kathoden aus reinem *Hg* herzustellen. Schon Spuren von *Hg*-Dampf, die auch bei bester Kühlung in das Leuchtrohr gelangen, verdrängen das Gasspektrum durch die *Hg*-Linien. Verf. hat zuerst 1911 einen Neonbogen an einer Kaliumkathode beobachtet. Lebensfähige Neonbogen-

lampen für Gleichstrom stellte zuerst Skaupy her, indem er durch Legieren von Alkalimetallen mit Schwermetallen ein Kathodenmaterial erhielt, dessen Reaktionsfähigkeit mit dem Gefäßmaterial stark verringert ist. Die Dämpfe der Alkalimetalle binden sehr leicht alle verunreinigenden Restgase (Gehlhoff). Verf. hat nach Versuchen mit Alkalimetallamalgamen von der Formel *NaHg* bzw. *NaHg₂*, die ausgesprochene chemische Verbindungen sind und langlebige Lampen lieferten, die Alkalimetalle wieder verlassen und eine *Cd-Tl*-Legierung durchprobiert, die gute Erfolge ergab. Diese Legierung ist beim Bruch der Lampe harmlos im Gegensatz zu Legierungen oder zersetzlichen *Hg*-Verbindungen von Alkalimetallen. Der chemische Angriff auf das Glas ist dabei sehr gering. Das Austreiben und Unschädlichmachen der aus den Lampenbestandteilen stammenden Gasreste erfolgt dabei nach einer besonderen Methode, nicht durch Bindung mittels des Kathodendampfes. Die Zündung der Neonbogenlampe geschieht durch den Hochspannungsstoß einer in Verbindung mit einem Vakuumunterbrecher arbeitenden Selbstinduktionsspule. Anlaßvorrichtung und Vorschaltwiderstand sind meist in einer besonderen Armatur vereinigt. Das Anwendungsgebiet ist in erster Linie die Effektbeleuchtung, sodann die Signalbeleuchtung, nachdem erwiesen ist, daß die Zerstreuung für die vornehmlich ausgestrahlten roten Wellenlängen in trüben Medien (Nebel) geringer ist, als für die kürzeren Wellen.

Dr. J. Eggert-Berlin: Über Azetylen-silber.

Die Tatsache, daß die Azetylschwermetallverbindungen, den ihnen beigelegten chemischen Formeln gemäß, bei der Detonation in feste Stoffe zerfallen, legt es nahe, den dabei auftretenden Knall im wesentlichen auf die Erwärmung der umgebenden Luft zurückzuführen. Um zu erkennen, in welchem Maße bei dem Zerfall überdies Gase gebildet werden, wurde der Detonationsvorgang an dem zugänglichsten und definiertesten Körper dieser Art, dem Azetylsilber, im Vakuum verfolgt und gefunden, daß Menge und Art der gasförmigen Produkte wesentlich von der Herstellungsweise desselben abhängig ist.

Die verschiedenen *Ag₂C₂*-Präparate, deren Gasgehalt im Verhältnis 1 : 20 schwankt, wurden gewichtsanalytisch, ihre Explosionsgase gasanalytisch untersucht und ihre Sprengwirkung nach einer der Trautzel-Probe für Laboratoriumszwecke nachgebildeten Methode miteinander verglichen.

Interessant dürfte die Feststellung sein, daß

die Ausbauchung eines Tonzylinders, welche ein Präparat mit einer bestimmten Gasmenge zeigt, nicht äquivalent ist der Ausbauchung, die die doppelte Menge eines anderen Präparates hervorruft, das nur halb soviel Gas abzugeben imstande ist, wie das erste. Vielmehr entsteht in dem zweiten Falle eine sechsmal so starke Ausbauchung, offenbar weil infolge der größeren angewendeten Menge die mittlere Geschwindigkeit des Vorganges stark vergrößert ist.

Privatdozent Dr. Fritz Paneth-Wien: Zur Frage des Wismutwasserstoffs.

Wir kennen heute außer dem gewöhnlichen inaktiven Wismut vier radioaktive Wismutarten, seine Isotope *RaC*, *ThC*, *AcC* und *RaE*. Auf Grund zahlreicher Experimentaluntersuchungen über Isotope wissen wir, daß ihre chemischen Eigenschaften innerhalb der erreichbaren Versuchsgenauigkeit vollständig übereinstimmen, so daß wir zum Studium der chemischen Eigenschaften eines Elements je nach Zweckmäßigkeit einmal das eine und einmal das andere Isotop heranziehen können. Nun ist beim Wismut schon öfter in Analogie zum Arsen- und Antimonwasserstoff die Existenz eines gasförmigen Wismutwasserstoffs vermutet worden, sein Nachweis aber nie gelungen; der Autor hat darum versucht, ob sich die Bildung dieser Verbindung vielleicht mit einer radioaktiven Wismutart leichter feststellen ließe.

Dies ist tatsächlich bei *RaC* und *ThC* auf dem Weg über ihre Magnesiumlegierungen gelungen. Wismutwasserstoff ist bei Zimmertemperatur gasförmig und ziemlich beständig; gegen Temperaturerhöhung ist er außerordentlich empfindlich. Durch Abkühlung auf die Temperatur der flüssigen Luft läßt er sich kondensieren und durch nachträgliches Erwärmen wieder zum Teil in Gasform zurückgewinnen. Aus einer radioaktiven Wismutart, wie z. B. *RaC*, dargestellt, ist er natürlich ein radioaktives Gas, mit dem Versuche wie mit Radiumemanation angestellt werden können; durch Leiten in ein mit Zinksulfid ausgekleidetes Glasrohr läßt sich z. B. an dem allmählichen Fortschreiten des Leuchtens seine Gasnatur auch einem größeren Zuhörerkreis demonstrieren.

Nach einem analogen Verfahren ist es dem Autor auch gelungen, den schon von Lawson auf Grund einer Störung bei physikalischen Messungen vermuteten Poloniumwasserstoff darzustellen, der ein höheres Homologes zum Selen- und Tellurwasserstoff ist. Mit diesen beiden neuen radioaktiven Gasen kann man — zum Unterschied von den inerten Emanationen — chemische Reaktionen von Gasen in extremer Verdünnung studieren.

tionen — chemische Reaktionen von Gasen in extremer Verdünnung studieren.

Prof. Dr. C. Schall-Leipzig: Über anodische Esterbildung bei den Mononitrobenzoesäuren.

Prof. Dr. Otto Ruff-Breslau: Über Karbide¹⁾.

Die Besprechung des Ergebnisses der jüngsten Arbeiten über Aluminium und Kohlenstoff sowie Chrom und Kohlenstoff gibt Gelegenheit zur Beschreibung der wichtigsten Arbeitsverfahren.

Aluminium und Chrom bilden neben den bekannten Karbiden Al_4C_3 und Cr_3C_2 noch weitere, Al_3C_2 (?), Cr_5C_2 , Cr_2C (?), deren Zusammensetzung bis jetzt nur für das Cr_5C_2 sicher ermittelt worden ist. Versuche zur Darstellung von Aluminium aus Aluminiumoxyd und Kohle haben nur wenig Aussicht auf Erfolg.

Das Ergebnis der bisherigen Versuche über das Verhalten von Oxyden und Metallen im elektrischen Vakuumofen gegen freien-festen und gebunden-gelösten oder -gasförmigen Kohlenstoff läßt sich mit dem Vorbehalt, der durch die Lücken im Versuchsmaterial bedingt ist, etwa in die folgenden Sätze zusammenfassen:

1. Bildung von Karbiden.

In einer mit Kohlenstoff gesättigten Atmosphäre von Wasserstoff, Stickstoff oder Kohlenoxyd lassen sich bei hinreichend hoher Temperatur alle Oxyde bis zu den ihnen zugrunde liegenden Elementen reduzieren oder in die zugehörigen Karbide verwandeln. Kohlenstoffverbindungen der Gase wirken dabei als Überträger des Kohlenstoffs.

Der feste Kohlenstoff beteiligt sich an der Reaktion erst dann, wenn das Oxyd oder dessen Reaktionsprodukte schmelzen und Kohlenstoff aufzulösen vermögen.

Die Löslichkeit von Kohlenstoff in Schmelzflüssen ist an die Möglichkeit der Bildung von Karbiden noch bis gegen 2500° hinauf gebunden. Dafür sprechen neben anderem die Diskontinuitäten der Löslichkeitslinien für Kohlenstoff, welche mit zunehmendem Kohlenstoffgehalt die Bildung neuer Molukülarten verraten.

2. Zusammensetzung von Karbiden.

Die von Moissan dargestellten Karbide sind fast durchweg solche, welche sich nach völliger Sättigung der Grundelemente mit Kohlenstoff aus den Schmelzflüssen ausscheiden.

¹⁾ Eigenbericht des Vortragenden.

Neben ihnen bestehen noch zahlreiche andere, an Kohlenstoff gesättigte und nicht gesättigte, von verschiedener Zusammensetzung, je nach der Temperatur und der Kohlenstoffkonzentration des Mediums, in dem sie gebildet worden sind. Besonders häufig ist unter den kohlenstoffärmeren Karbiden die Form M_3C , unter den kohlenstoffreicheren die Form MC . Von der Form M_4C ist bis jetzt nur das Aluminiumkarbid bekannt. Stellt man die Karbide den Kohlenwasserstoffen zur Seite, so hat man es bis jetzt nur mit den Formen CH_4 , C_2H_6 , C_2H_4 , C_2H_2 und C_4H_{10} zu tun.

3. Die Wertigkeit der Metalle.

Die Wertigkeit der Metalle ist in den Karbiden meist kleiner als die gewöhnlich angenommene; die Schwermetalle erscheinen besonders häufig einwertig (Fe_3C , Mn_3C , W_3C , Cr_3C_2). Mit zunehmender Metallkonzentration beobachtet man gelegentlich abnehmende Wertigkeit (Cr_3C_2 , $Cr_{10}C_4$). Für den die Metallwertigkeit wahrscheinlich mindernden Einfluß der Temperatursteigerung hat sich noch kein Beispiel ohne gleichzeitigen Phasenwechsel gefunden.

4. Wertigkeit des Kohlenstoffs.

Sieht man von der Möglichkeit der Bindung der Kohlenstoffatome und Metallatome unter sich ab, so erscheint der Kohlenstoff in den Karbiden 4-, 3-, 2- und 1-wertig (Al_4C_3 , Fe_3C , Mn_3C , Mo_3C , Ca_3C , WC). Mit steigender Temperatur und zunehmender Kohlenstoffkonzentration geht eine Abnahme seiner Wertigkeit (W_3C , W_2C , WC) parallel.

5. Temperaturbeständigkeit.

a) Bei den festen und flüssigen Karbiden dürften sich alle Möglichkeiten verwirklicht finden. Dem festen oder flüssigen Metall gegenüber beständig im ganzen Temperaturgebiet sind z. B. Mn_3C , Cr_3C_2 und W_3C ; bei der Schmelztemperatur mehr oder minder weit zerfallen (in Graphit und Metall oder auch flüssiges kohlenstoffärmeres Karbid) das Fe_3C , WC , Cr_3C_2 ; in fester Form, zumindest oberhalb 900°, mäßig instabil erscheint Fe_3C , gänzlich instabil Ni_3C . Bei höheren Temperaturen vollzieht sich die Rückbildung der bei dem Schmelzen zerfallenden Karbide, mit meist deutlich erkennbarem Beständigkeitsgebiet oberhalb einer bestimmten Temperatur, beim Fe_3C , Ni_3C , Cr_3C_2 .

b) Alle Karbide zerfallen beim Verdampfen mehr oder minder weit. Dabei erweist sich das Karbid um so beständiger, je positiver sein

Metall ist; Fe_3C zerfällt beim Verdampfen fast vollständig, Al_4C_3 sehr viel weniger. Des letzteren Beständigkeit nimmt mit steigender Temperatur zu.

Es sind, wie man bei näherem Zusehen erkennen wird, Gesichtspunkte, welche mit unseren üblichen theoretischen Vorstellungen von der Beständigkeit chemischer Stoffe im Einklang sind.

Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. E. Gumlich-Charlottenburg: Über die Abhängigkeit der magnetischen Eigenschaften, des spezifischen Widerstandes und der Dichte der Eisenlegierungen von der chemischen Zusammensetzung und thermischen Behandlung¹⁾.

Die in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt ausgeführten Untersuchungen wurden veranlaßt und pekuniär unterstützt durch den Verband Deutscher Elektrotechniker; die erforderlichen mikrographischen Aufnahmen, für welche die Reichsanstalt nicht die nötigen Einrichtungen besaß, machte Herr Professor Goerens im Eisenhüttenmännischen Laboratorium der Technischen Hochschule Aachen (Vorstand Herr Geheimrat Wüst), während die Herstellung der Proben und die Ausführung der chemischen Analysen eine Reihe von Eisenhütten, in erster Linie die Firma Friedrich Krupp in Essen, übernommen hatte.

Zu vorläufigen orientierenden Versuchen, namentlich über die Wirkung des Ausglühens auf Dynamomaterial, dienten 7 käufliche Eisensorten verschiedener Herkunft, die ebenso wie die später untersuchten Legierungen sowohl in kompaktem Zustande als zylindrische Stäbe, wie auch in Form von 0,5 mm dicken Blechen zur Verwendung kamen. Als besonders reines Material stand eine kleine Probe Fischerschen Elektrolyteisens zur Verfügung. Außerdem wurden noch Legierungen mit C (bis 1,8 Proz.), Si (bis 8 Proz.), Al (bis 10 Proz.) und Mn (bis 16 Proz.) mit steigendem Prozentgehalt der Zusätze untersucht, und zwar wurden durchweg die Dichte, der spezifische Widerstand, die Lage des 1. und 2. Umwandlungspunktes, besonders aber die magnetischen Eigenschaften durch Aufnahme von Nullkurven und Hystereseschleifen, Bestimmung des Hystereseverlustes, der Koerzitivkraft, der Remanenz, Anfangspermeabilität, Maximalpermeabilität, des Sättigungswertes usw. ermittelt. Auch über die technisch wichtigen Alterungserscheinungen der Transformatorenbleche wur-

¹⁾ Eigenbericht des Vortragenden.

den zahlreiche Versuche angestellt. Die Untersuchung erfolgte meist ballistisch nach der Jochmethode an zylindrischen Stäben oder an Blechstreifen, bisweilen auch an bewickelten Ringen; die als Charakteristikum für die Beschaffenheit des Materials so wichtige Koerzitivkraft wurde stets gesondert mit dem Magnetometer bestimmt.

Das Ausglühen erfolgte bei verschiedenen Temperaturen zwischen 700 und 1100° zumeist im elektrisch geheizten Röhrenofen, und zwar anfangs in einer *N*-Atmosphäre, später im Vakuum, doch wurden auch Versuche mit anderen Gasatmosphären angestellt; auch die Abkühlungsgeschwindigkeit wurde möglichst variiert.

Die Wirkung der thermischen Behandlung auf die Dichte und den spezifischen Widerstand ist im allgemeinen gering, nur bei den *C*- und *Mn*-Legierungen erheblich, dagegen beeinflusst sie überall außerordentlich stark die magnetischen Eigenschaften. Dies beruht einmal auf der Beseitigung der durch die Bearbeitung, namentlich das Auswalzen der Bleche, hervorgerufenen mechanischen und magnetischen Härte, sodann aber auch darauf, daß der als Verunreinigung stets vorhandene, außerordentlich schädliche *C* zusammen mit dem ebenfalls im Eisen stets gelösten schädlichen *O* durch das Glühen in Form von *CO* ausgetrieben wird, während die beiden Verunreinigungen für sich allein nicht beseitigt werden können. Andererseits scheint aber auch, entgegen der landläufigen Ansicht, durch das Glühen eine molekulare Verschlechterung einzutreten, die sich dem verbessernden Einfluß überlagert und bewirkt, daß bei Wiederholung der Glühprozesse die anfängliche Verbesserung wieder einer dauernden Verschlechterung weicht. Die günstigste Glühtemperatur wurde zu etwa 800° ermittelt.

Beim direkt niedergeschlagenen *Fischer*-schen Elektrolyteisen gelang es zum erstenmal, die Magnetisierungskurven durch die thermische Behandlung willkürlich und reversibel zu beeinflussen, und zwar ergab eine langsame Abkühlung nach dem Glühen sehr steile Magnetisierungskurven mit verhältnismäßig hoher Maximalpermeabilität, eine sehr rasche Abkühlung dagegen ganz schräg liegende Kurven mit niedriger Maximalpermeabilität, aber auch kleinerem Hystereseverlust. Nach zahlreichen Wiederholungen der Erhitzung verschwand diese willkürliche Beeinflussbarkeit und es blieb eine außerordentlich schräge Kurve mit einer Remanenz von nur 850 und einer Koerzitivkraft von nur 0,15 Gauß. Derartiges Material würde sich außerordentlich gut zur Verwendung als Eisenkerne in elektrischen Meßinstrumenten

eignen, die bisher wegen der Wirkung der Remanenz eisenlos gebaut werden mußten. Leider haben sich diese Eigenschaften mit anderen Materialien bisher nicht wieder hervorbringen lassen.

Die Abhängigkeit der Dichte und des spezifischen Widerstandes von der chemischen Zusammensetzung ist, abgesehen von den *C*- und *Mn*-Legierungen, vollkommen stetig. Eine Extrapolation auf den Prozentgehalt 0 der Beimengungen ergab für reines Eisen in Übereinstimmung mit den am *Fischer*-schen Elektrolyteisen gefundenen Werten für die Dichte $s = 7,876$, den Widerstand pro m/mm^2 bei 20° $R_{20} = 0,0994 \Omega$, den Temperaturkoeffizienten des Widerstandes $\alpha_R = 0,57$ Proz.

Durch Zusatz von *Si* und *Al* wächst der spezifische Widerstand sehr stark (Größenordnung 1 Ω bei etwa 10 Proz.), während der Temperaturkoeffizient des Widerstandes sehr stark, bei den *Al*-Legierungen bis auf 0,035 Proz., abnimmt. Wegen der ersteren Eigenschaft veranlaßte die Physikalisch-Technische Reichsanstalt die Herstellung der sog. „legierten“ Bleche für Transformatoren und Dynamomaschinen; die zweite Eigenschaft wird sich voraussichtlich zur Herstellung von technischen Vorschaltwiderständen verwenden lassen.

In magnetischer Beziehung spielt der *C* die weitaus wichtigste Rolle. Er tritt in dreierlei Gestalt auf: Als Temperkohle (Graphit), wo er magnetisch nahezu unschädlich ist; als Eisenkarbid Fe_3C (Gefügebestandteile: Zementit und Perlit) und als gelöster Kohlenstoff (Gefügebestandteil Martensit). Die beiden letzteren Arten bewirken eine Verringerung der Permeabilität sowie eine Vergrößerung des Hystereseverlustes und der Koerzitivkraft. Diese beträgt pro 1 Proz. *C* rund 7 Gauß beim Perlit, 70 Gauß beim Martensit; in letzterer Form, die durch rasche Abkühlung entsteht (Stahl), spielen also auch schon Verunreinigungen von wenigen 100stel Proz. Kohlenstoff bei magnetisch weichem Material eine außerordentlich verderbliche Rolle und müssen peinlichst vermieden werden. Umgekehrt ist für die permanenten Magnete eine hohe Koerzitivkraft neben hoher Remanenz Bedingung für die Leistungsfähigkeit. Nach der vorliegenden Untersuchung nimmt nun zwar die Koerzitivkraft mit wachsendem Prozentgehalt an gelöstem *C* zu, gleichzeitig aber auch die Remanenz ab, so daß sich beide Bedingungen für reine *C*-Stähle nicht vereinigen lassen; hier wirken Zusätze von *W*, *Mo*, *Cr* usw. günstig.

Der Temperaturkoeffizient des magnetischen Moments nimmt mit wachsendem Prozentgehalt an gelöstem *C* ab; es ist gelungen,

aus reinen C-Legierungen von 1,4 Proz. durch Härtung bei 1000° permanente Magnete ohne Temperaturkoeffizient herzustellen.

Die Si-Legierungen (sog. „legierte“ Bleche) haben wegen ihres hohen spezifischen Widerstandes und des dadurch bedingten geringen Wirbelstromverlustes als Material für die Transformatoren weite Verbreitung gefunden, zeichnen sich aber auch bei niedrigen Feldstärken durch besonders gute magnetische Eigenschaften aus, trotzdem der Zusatz von Si die magnetischen Eigenschaften des reinen Eisens nicht verbessert, sondern verschlechtert, wie aus der Abnahme des Sättigungswertes mit steigendem Si-Gehalt hervorgeht. Der günstige Einfluß des Si ist sekundärer Art, indem bei etwa 4–5 Proz. Si-Gehalt die stets vorhandenen Verunreinigungen durch C nicht in Lösung bleiben, sondern auch bei rascher Abkühlung in Form von Perlit abgeschieden werden, der wiederum durch dauerndes Glühen und langsames Abkühlen in die unschädliche Form der Temperkohle übergeführt werden kann.

Ganz ähnlich wirkt Al-Zusatz, wenn auch, wohl infolge technischer Unvollkommenheiten bei der Herstellung, die vorzüglichen Ergebnisse der Si-Legierungen noch nicht erreicht werden konnten. Durch Glühen bei 1100° sinkt die Remanenz der 10 proz. Al-Legierungen bis auf etwa 1500, was ähnlich wie bei dem Fischerschen Elektrolyteisen eine Verwendbarkeit zu Eisenkernen in elektrischen Meßinstrumenten verspricht, namentlich, wenn es gelingen sollte, die Koerzitivkraft noch wesentlich weiter herunterzusetzen.

Die magnetischen Eigenschaften der Mn-Legierungen haben eine praktische Verwendung noch nicht gefunden, sind aber wissenschaftlich sehr interessant. Sie zeigen große Ähnlichkeit mit den Kohlenstofflegierungen, ja die Koerzitivkraft steigt unter Umständen sogar bis auf 130 Gauß an (gegen bis 70 Gauß bei den C-Legierungen), aber die gleichzeitige sehr starke Abnahme der Magnetisierbarkeit und speziell der Remanenz läßt eine praktische Verwendung zu permanenten Magneten nicht zu. Im Gegensatz zu den C-Legierungen macht Abschrecken das Material magnetisch weicher statt härter.

Zwischen 8–10 Proz. Mn-Gehalt zeigen Dichte, spezifischer Widerstand, Koerzitivkraft, Sättigungswert usw. sprungweise Änderungen, die auf das Auftreten von austenitischen Gefügebestandteilen zurückzuführen sind. Diese letzteren bewirken, daß bei Legierungen von 14 Proz. aufwärts die Magnetisierbarkeit vollständig verschwindet; das Material hat nicht mehr ferromagnetischen, sondern nahezu para-

magnetischen Charakter angenommen, aber auch die niedrigeren Legierungen zeigen diesen Zustand je nach der vorhergehenden thermischen Behandlung. Mit zunehmendem Prozentgehalt an Mn sinkt nämlich der zweite Umwandlungspunkt Ac_2 , wo das Material die Magnetisierbarkeit verliert, von etwa 760° bis 660° ; die entsprechende Temperatur Ar_2 dagegen, wo die Magnetisierbarkeit wieder auftritt, sinkt noch außerordentlich viel stärker und liegt bei etwa 12 proz. Legierungen noch weit unter Zimmertemperatur, so daß also ein und dieselbe derartige Legierung bei gewöhnlicher Temperatur magnetisierbar oder unmagnetisierbar sein kann, je nachdem man sie vorher auf tiefe Temperatur abgekühlt oder auf eine Temperatur über Ac_2 erwärmt hat. Diese beiden verschiedenen Phasen, deren Unmagnetisierbarkeit auch durch Abschrecken des Materials aus der Temperatur des zugehörigen Umwandlungspunktes Ac_2 erhalten werden kann, zeigen bei derselben Temperatur auch verschiedene Dichte und verschiedenen spezifischen Widerstand. Der Übergang vom austenitischen in den martensitischen Zustand beim Abschrecken erfolgt ganz plötzlich und macht sich häufig durch ein hörbares Knacken bemerkbar. Die ganzen Verhältnisse liegen offenbar ähnlich wie bei den sog. nicht reversiblen Nickelstählen, die beim Bau von Kriegsschiffen bereits eine umfangreiche praktische Verwendung gefunden haben.

Prof. Dr. O. Hönigschmid-München:
Über das Thoriumblei.

Die im Vorjahre¹⁾ mitgeteilte Untersuchung über das Atomgewicht des von F. Soddy aus Ceylon-Thorit isolierten Bleies ergab einen Wert von 207,77, der erheblich niedriger ist, als der auf Grund der Lebensdauer von Uran und Thor berechnete zu 208,0. Soddy suchte diese Diskrepanz damit zu erklären, daß er annimmt, nur 35 Proz. des Thoriumbleies seien stabil, während 65 Proz. weiter zerfallen. Lawson hingegen suchte für diese Differenz die Erklärung in der Annahme, daß der Thorit ein Umwandlungsprodukt des auf gleicher Lagerstätte gefundenen Thorianit sei und bei seiner Entstehung auch das bereits in primärem Thorianit vorhandene Isotopengemenge von Uranblei und Thorblei aufgenommen habe.

Als Beitrag zur Klärung dieser Frage wurden jetzt einige neue Proben von Blei aus Thorit und Thorianit untersucht. Zunächst ein Thoritblei, das K. Fajans aus einem norwegischen Thorit isoliert hatte und dem Vortragenden zur Verfügung stellte. Dieser Thorit

1) Diese Zeitschr. 18, 114, 1917.

enthielt nach Fajans neben 30,1 Proz. *Th* und 0,45 Proz. *U* nur 0,35 Proz. *Pb*. Infolge des kleinen Urangelhalts war also ein sehr hohes Atomgewicht für das Blei zu erwarten, da es nahezu reines Thoriumblei mit nur geringen Beimengungen von Uranblei sein sollte. Tatsächlich wurde hierfür durch Analyse des Chlorids das höchste Atomgewicht gefunden, welches bisher für auf radioaktivem Wege entstandenes Blei überhaupt ermittelt worden ist, nämlich 207,90. Fajans berechnet unter der Annahme der vollkommenen Stabilität von Uran- und Thorblei für dieses spezielle Thoritblei ein Atomgewicht, das er zwischen die Grenzen 207,97 und 208,00 einschließt. Es ist wohl nicht angängig, aus der Differenz zwischen dem gefundenen und berechneten Werte irgendwelche weitgehenden Schlüsse zu ziehen, da sowohl die Grundlagen der Berechnung wie das ermittelte Atomgewicht noch mit kleinen Unsicherheiten behaftet sind.

Außer diesem Thoritblei wurden auch Bleiprobe aus Ceylon-Thorianit untersucht zwecks Überprüfung der oben besprochenen Annahme Lawsons.

Es standen drei Thorianite zur Verfügung von folgender Zusammensetzung: 1. *Th* und selt. Erden = 78,2 Proz., *U* 11,9 Proz. und Blei 2,34 Proz.; 2. *Th* und selt. Erden = 79,11 Proz., *U* 12,2 Proz., Blei 3,11 Proz.; 3. *Th* und selt. Erden = 72,52 Proz., *U* 18,1 Proz., Blei 3,5 Proz. Als Atomgewichte für diese Bleiprobe wurden die Werte ermittelt: 1. 207,21, 2. 206,91, 3. 206,84.

Aus diesen Resultaten lassen sich vorläufig keine sicheren Schlüsse ziehen, denn die gefundenen Atomgewichtswerte sind durchgehend um einige Einheiten der ersten Dezimale niedriger, als die theoretisch berechneten. Auffallend ist die Tatsache, daß der Thorianit II trotz sonst gleicher Zusammensetzung erheblich mehr Blei enthält als I. Der Altersunterschied der beiden Minerale kann nicht so groß sein, daß sich daraus diese Differenz erklären ließe. Auch würde ein höheres Alter des Thorianits II keine Erklärung für das niedrigere Atomgewicht des aus diesem Mineral isolierten Bleies geben. Es legen diese Beobachtungen vielmehr die Vermutung nahe, daß der Thorianit ein sekundäres, durch Infiltration von Thorerde in Uraninit entstandenes Mineral sei, bei dessen Bildung im Uraninit vorgebildetes Uranblei aufgenommen wurde. Eine Vermutung allerdings, die sonst durch keine Tatsache gestützt wird.

In einer zweiten Mitteilung berichtete der Vortragende über eine von ihm ausgeführte Revision des Atomgewichts von Skandium.

Prof. Dr. K. Fajans-München: Beitrag zur Kenntnis und Auffassung isotoner Bleiarten¹⁾.

Der Vortragende hat vor Jahresfrist²⁾ ausführlich den Standpunkt begründet, daß, um den bisherigen Begriff des chemischen Elementes aufrecht zu erhalten, die Isotope als verschiedene Elemente desselben chemischen Typus aufgefaßt werden müssen. Dabei ergab sich die Definition: „Ein chemisches Element ist ein Stoff, der durch kein physikalisches oder chemisches Mittel in einfachere Bestandteile zerlegt und nicht als Gemisch anderer Stoffe erkannt wurde.“ Bei der Anwendung dieser Definition auf die bis jetzt bekannten Stoffe ergab sich eine Schwierigkeit nur bei den in wägbaren Mengen zugänglichen, keine eigene Radioaktivität aufweisenden Bleiarten mit Verbindungsgewichten (V.-G.) zwischen 206,0 und 207,77, von denen eine größere Anzahl mit deutlich verschiedenen V.-G. aus Uran- und Thormineralien isoliert worden ist. Es war von vornherein wahrscheinlich, jedoch bis jetzt noch nicht bewiesen, daß diese Bleiarten nicht etwa eine größere Reihe verschiedener neuer Elemente (Atomarten) vorstellen, sondern Gemische nur dreier Elemente sind: des Uranbleies (A.-G. 206,0), des gewöhnlichen Bleies (207,2) und des Thorbleies (208,1). Da die Zerlegung eines Isotopengemisches noch auf große Schwierigkeiten stößt, muß man andere Wege einschlagen, um den für eine eindeutige Anwendung der obigen Definition notwendigen Beweis der Gemischnatur jener Bleiarten durchführen zu können.

Der Vortragende liefert zunächst einen Beitrag zur Frage des aus Thormineralien stammenden Bleies. Er hat das Blei aus einem norwegischen Thorit, der 30,10 Proz. Thor, 0,45 Proz. Uran und 0,35 Proz. Blei enthielt, isoliert. Das Blei müßte ein Gemisch von Thorblei und von etwas Uranblei vorstellen und ein berechnetes V.-G. 207,97–208,00 aufweisen. Professor O. Hönigschmid hat das V.-G. gütigst bestimmt und den höchsten, bis jetzt für Blei beobachteten Wert 207,90 erhalten, der nur unbedeutend von dem theoretischen abweicht.

Weiterhin wird ein Beweis für die Gemischnatur der aus Uranmineralien stammenden Bleiarten mit V.-G. zwischen 206 und 207 geliefert. Bei diesen war anzunehmen, daß sie Gemische von Uranblei (206,0) und gewöhnlichem Blei (207,2) vorstellen. Trifft das zu, so muß, wie gezeigt wird, für Blei aus Uranmineralien vom gleichen geologischen Alter eine einfache Be-

1) Eigenbericht des Vortragenden.

2) Jahrb. d. Radioakt. u. Elektronik 14, 314, 1917.

ziehung zwischen der von Radium *D* herrührenden β -Strahlenaktivität des Bleies und seinem V.-G. bestehen. Um diese Konsequenz zu prüfen, wurde die β -Aktivität von drei Bleipräparaten gemessen, die alle aus Joachimstaler Pechblende stammen und für deren V.-G. Richards und Lembert bzw. Hönigschmid fanden: 206,40, 206,61 und 206,73. Durch die Messungen wurde die erwartete Beziehung in qualitativer Hinsicht vollkommen und in quantitativer Hinsicht sehr annähernd bestätigt. Dadurch kann es als erwiesen gelten, daß die betreffenden Bleiarten Gemische vorstellen und keine Elemente sind.

Fräulein Dr. Lise Meitner-Berlin-Dahlem:

Die Muttersubstanz des Aktiniums, ein neues radioaktives Element von langer Lebensdauer.

Die Frage nach der Muttersubstanz des Aktiniums ist in den letzten Jahren von verschiedenen Seiten untersucht worden, ohne einer Lösung nähergebracht zu werden. Die vielen negativen Versuche ließen zwar die Existenz dieser Muttersubstanz unangezweifelt, erweckten aber eine starke Unsicherheit bezüglich der Gruppe des periodischen Systems, in der sie zu suchen sei. In gemeinschaftlich mit Prof. O. Hahn ausgeführten Versuchen wurde die bisher nur hypothetische Substanz aufgefunden und in radioaktiv reinem Zustande dargestellt. Daß es sich dabei wirklich um die Muttersubstanz des Aktiniums handelt, wurde durch den Nachweis der Aktiniumbildung bewiesen, und zwar

1. durch Aufnahme von α -Strahlenkurven,
2. durch die Messung der Aktiniumemanation, deren Zunahme seit Monaten von Tag zu Tag verfolgt werden konnte,
3. durch den aktiven Niederschlag, der in wachsenden Mengen an negativ geladenen Platten gesammelt werden konnte.

Die Lebensdauer der neuen Substanz ist sicher größer als 1000 Jahre. Da in dem neuen radioaktiven Element tatsächlich die lange gesuchte Muttersubstanz des Aktiniums vorliegt, wird für dieselbe der Name „Protaktinium“ vorgeschlagen.

Ein eingehender Bericht über die Versuche ist inzwischen in dieser Zeitschrift 19, 208, 1918 erschienen.

Prof. Dr. M. Bodenstein-Hannover: Die Geschwindigkeit der Vereinigung von Stickoxyd mit Sauerstoff¹⁾.

Die an sich sehr geschwinde Reaktion braucht erhebliche Zeiten zu ihrer Vollendung, wenn sie sich bei sehr niedrigen Drucken voll-

zieht. Um ihre Geschwindigkeit zu messen, wurde so verfahren: von abgemessenen Mengen Stickoxyd und Sauerstoff wurden durch kurzes Öffnen eines Doppelhahnes in ein vorher leergepumptes Reaktionsgefäß gewisse Mengen überführt, die sich durch Ermittlung der in den Meßgefäßen zurückgebliebenen Anteile genau feststellen ließen. Im Reaktionsgefäß wurden sie durch Rollenlassen einer großen Porzellankugel gemischt. Aus den überführten Mengen und dem Volum des Reaktionsgefäßes ergaben sich die Anfangsdrucke der beiden Gase, die Geschwindigkeit ihrer Umsetzung wurde verfolgt durch Beobachtung der Druckabnahme an einem Bromnaphthalinmanometer, wobei für das sich praktisch unendlich schnell einstellende Gleichgewicht $2NO \rightleftharpoons N_2O_4$ kleine Korrekturen anzubringen waren. Die benutzten Gesamtdrucke waren im Höchstfalle etwa 250 mm Bromnaphthalin, gleich etwa $\frac{1}{30}$ Atmosphäre, wobei für 90 Proz. Umsetzung etwa eine halbe bis eine Stunde gebraucht werden. Das genügt vollkommen, um Geschwindigkeitsmessungen auszuführen, die an Sicherheit und Übereinstimmung den üblichen durchaus nicht nachstehen.

Die Reaktion folgt ganz streng dem Gesetz der dritten Ordnung $\frac{dx}{dt} = k \cdot [NO]^2 \cdot [O_2]$. Die Konstanten sind (für Mole/ccm und Minuten) bei 0° $2,10 \cdot 10^6$, bei 30° $1,69 \cdot 10^6$, bei 60° $1,34 \cdot 10^6$ und bei 90° $1,08 \cdot 10^6$, also ganz ausgesprochen fallend mit steigender Temperatur. Zusatz von H_2O -Dampf, von SO_2 und von NO_2 beeinflussen sie nicht.

Prof. Dr. G. Bredig-Karlsruhe: Kohlendioxydabspaltung aus Ketokarbonsäuren. Ein Beitrag zur Katalyse in nichtwässrigen Lösungsmitteln.

Prof. Dr. Fritz Weigert-Leipzig: Zur Kenntnis der Phototropie¹⁾.

Unter Phototropie wird nach Marckwald die Eigenschaft verschiedener organischer Stoffe verstanden, sich im Licht reversibel zu färben. Die Färbung geht durch Wärme und nach Stobbe auch durch solche Lichtstrahlung zurück, die von den neuen, bei der Färbung entstandenen Banden absorbiert wird. Da diese Erscheinungen nur auf den kristallisierten Zustand beschränkt sind und in Lösungen ausbleiben, bot die Untersuchung einzelner Kristallindividuen Interesse.

Die Versuche wurden am farblosen β -Tetrachlor- α -ketonaphthalin ausgeführt, dessen phototrope Rotviolett-färbung zuerst von Marckwald studiert wurde, und zwar wurde die Ab-

¹⁾ Eigenbericht des Vortragenden.

¹⁾ Eigenbericht des Vortragenden.

sorption, die Erregung und Aufhellung mit polarisiertem Licht untersucht, dessen elektrischer Vektor definierte Schwingungsrichtungen zu den Kristallachsen hatte. Dabei ergaben sich zwei verschiedene Absorptionsspektren, je nachdem der elektrische Vektor in Richtung der *c*-Achse oder in der *a-b*-Ebene schwang. Im ersten Falle wurde beim unerregten und erregten Kristall das gleiche Spektrum mit zwei Banden bei 395 und 375 $\mu\mu$ beobachtet, im zweiten Fall im unerregten Zustand eine im Violett steil einsetzende Endabsorption, im erregten außerdem noch im Gelbgrün eine Bande mit einem flachen Maximum bei 525 $\mu\mu$ welche die Färbung des Kristalls verursacht. Der Absorptionskoeffizient war immer größer als im ersten Falle, bei dem die Banden auftraten.

Dieselben Banden wurden als Kontrastbanden aufgefunden, als die Lösungen des Stoffes in Äther und Benzol untersucht wurden. Dies läßt darauf schließen, daß die Kristallmoleküle dieselbe Atomanordnung haben wie die Lösungsmoleküle, und daß es möglich ist, ein Lösungsspektrum in Teilspektren aufzulösen, wenn alle Moleküle gleichartig orientiert sind, wie dies in den Kristallen der Fall ist.

Die Erregung fand bei allen Schwingungsrichtungen des elektrischen Vektors statt, aber stärker, wenn er in der *c*-Richtung lag, als in der *a-b*-Ebene, trotzdem die Absorption im ersten Falle geringer war. Die Aufhellung trat nur bei der zweiten Orientierung ein, weil nur unter diesen Bedingungen die gelbgrünen Strahlen absorbiert werden. Es ist dies im Einklang mit dem Grotthusschen Gesetz.

Alle Beobachtungen an dem phototropen Stoff lassen sich deuten, wenn man eine frühere Hypothese heranzieht, nach der bei Strahlungs-umformungen der primäre Vorgang eine Abstoßung derjenigen Atome ist, deren verbindende Valenzelektronen bei der Lichtabsorption beteiligt sind. Dadurch können Atome von eng benachbarten Molekülen einander so stark genähert werden, daß Absorptionsänderungen eintreten. Falls diese im sichtbaren Spektralgebiet liegen, erscheint der Körper nach der Belichtung gefärbt. Durch Absorption in den neuen Banden entfernen sich die optisch gekoppelten Atome voneinander und der Anfangszustand wird wieder erreicht.

Prof. Dr. G. Grube-Stuttgart: Über das elektromotorische Verhalten des Sauerstoffs und seine anodische Entwicklung unterhalb des reversiblen Sauerstoffpotentials¹⁾. (Nach Versuchen von B. Dulk.)

Die bekannte Erscheinung der Überspannung sauerstoffentwickelnder platinierter Platinelektroden führt man darauf zurück, daß das Platin nicht vollkommen unangreifbar ist, sondern daß der elektrolytisch gebildete atomare Sauerstoff mit dem Platin der Elektrodenoberfläche Platinoxide bildet, die sekundär unter Entwicklung molekularen gasförmigen Sauerstoffs sich zersetzen und so die anodische Sauerstoffentwicklung vermitteln. Frühere Versuche haben gezeigt, daß, soweit in 2n.H₂SO₄ die Anodenpotentiale den Wert $\epsilon_h = +1,6$ Volt nicht überschreiten, das Platintrioxyd, das auf der Elektrode nicht in freiem Zustande, sondern in Form einer Lösung in dem nicht oxydierten Platin der Elektrodenoberfläche von stetig sich änderndem Dissoziationsdruck vorhanden ist, die Sauerstoffentwicklung vermittelt. Ausgehend von der Tatsache, daß das Anodenpotential sauerstoffentwickelnder Platinelektroden durch Überlagerung von Wechselstrom heruntergedrückt wird, wurden systematische Messungen des Potentialverlaufs der Sauerstoffentwicklung an Platinelektroden bei überlagertem Wechselstrom ausgeführt, durch die zunächst ermittelt werden sollte, wie weit das Potential einer sauerstoffentwickelnden Anode auf diese Weise erniedrigt werden kann, und die weiterhin der Feststellung dienen sollten, ob außer dem Platintrioxyd noch andere Platinoxide bei der Sauerstoffentwicklung elektromotorisch wirksam sind.

Dabei ergaben sich die folgenden Resultate: Überlagert man eine in 2n.H₂SO₄ mit Gleichstrom konstanter Stärke anodisch bis zur Sauerstoffentwicklung polarisierte Elektrode mit Wechselstrom wachsender Stärke, so sinkt das Anodenpotential mit wachsender Wechselstromstärke und erreicht schließlich, nachdem der Wert $\epsilon_h = 1,23$ Volt ohne Unstetigkeit durchschritten ist, Potentiale von $\epsilon_h = 1,0 - 1,1$ Volt. Dabei entwickelt auch unterhalb 1,23 Volt die Anode reinen Sauerstoff. Es ergibt sich also die überraschende Tatsache, daß eine mit Wechselstrom überlagerte, mit Gleichstrom polarisierte Platinelektrode unterhalb des Potentials der reversiblen Sauerstoffelektrode — $\epsilon_h = +1,23$ Volt — noch Sauerstoff von Atmosphärendruck zu entwickeln vermag. Da an der Richtigkeit des Wertes $\epsilon_h = +1,23$ Volt für das Potential der reversiblen Sauerstoffentwicklung, da dasselbe nach verschiedenen Methoden übereinstimmend gefunden wurde, nicht zu zweifeln ist und somit Sauerstoff von Atmosphärendruck unter +1,23 Volt in 2n.H₂SO₄ am Platin elektrolytisch nicht entwickelt werden kann, so muß die unterhalb dieses Potentials beobachtete Sauerstoffentwicklung ihre Ursache in einer sekundären Reaktion haben.

1) Eigenbericht des Vortragenden.

Verwendet man, bei sonst gleicher Versuchsanordnung, $n. NaOH$ als Elektrolyten, so erhält man Potentialkurven von anderer Form als bei Schwefelsäure. Die Kurven zerfallen in drei durch ausgeprägte Richtungsänderungen voneinander geschiedene Stücke, deren erstes sich von dem Potential $\varepsilon_k = +1,25$ Volt — dem Anodenpotential bei reiner Gleichstromelektrolyse — bis 0,7 Volt erstreckt, deren zweites die Potentiale von 0,7—0,42 Volt und deren drittes die Potentiale unterhalb 0,42 Volt umfaßt. Den drei Kurvenstücken des Potentialverlaufs entsprechen aller Wahrscheinlichkeit nach drei verschiedene, die Sauerstoffentwicklung vermittelnde Anodenvorgänge. Man muß auf Grund des geschilderten Tatbestandes annehmen, daß zwischen 1,25—0,7 Volt ein höheres, noch unbekanntes Platinoxid PtO_x und zwischen 0,7—0,42 Volt das Platintrioxyd die Sauerstoffentwicklung vermittelt. Da unterhalb 0,42 Volt, dem Potential der reversiblen Sauerstoffentwicklung in $n. NaOH$, ein Platinoxid nicht mehr Sauerstoff von Atmosphärendruck entwickeln kann, so muß hier ein neuer sauerstoffentwickelnder Vorgang einsetzen. Wahrscheinlich besteht dieser in einer Reaktion des Wasserstoffsuperoxyds, das an einer mit Wechselstrom überlagerten Platinanode in $n. NaOH$ reichlich gebildet wird, mit den Oxyden des Platins.

Durch das Auftreten der Diskontinuität im Potentialverlauf bei 0,42 Volt in $n. NaOH$, welcher Wert in $2n. H_2SO_4$ 1,23 Volt entsprechen würde, dürfte auch indirekt der experimentelle Nachweis erbracht sein, daß dieses bisher nur theoretisch errechnete Potential dem Potential der reversiblen Sauerstoffentwicklung entspricht.

(Eingegangen 5. Mai 1918)

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der wissenschaftliche Mitarbeiter am Meteorologischen Institut in Berlin Dr. Karl Joester zum Observator ebenda, der Laborator der Chemie an der Universität Lund Dr. L. Ramberg zum Professor der Chemie an der Universität Upsala, Dr. W. E. Ringer zum ord. Professor für physiologische Chemie an der Universität Utrecht, der Professor der Chemie an der Universität Mailand Dr. Giacomo Satelli zum Leiter der chemischen Abteilung am Polytechnikum in Budapest.

Verliehen: Dem Privatdozenten für Chemie an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr.-Ing. Adolf König der Titel Professor.

Gestorben: Der frühere ord. Professor der Chemie an der Universität Würzburg Dr. Julius Tafel, der frühere a. o. Professor der Chemie an der Technischen Hochschule Stuttgart Dr. Max Philip, der ord. Professor der höheren Mathematik an der Technischen Hochschule Berlin Geh. Reg.-Rat Dr. Emil Lampe.

Berichtigung: Die in der letzten Nummer S. 416 erwähnte Ernennung von Dr. Paul Müller zum ord. Pro-

fessor für Elektromaschinenbau in Braunschweig ist noch nicht erfolgt, sondern die Berufung erst für die Zeit nach dem Kriege in Aussicht genommen.

Angebote.

Physiker

oder physikalisch gebildete Chemiker (auch Damen) für Laboratorium und Fabrikation von Vakuumröhren für drahtlose Telegraphie gesucht. Angebote unter **S. H. 527** an den Verlag dieser Zeitschrift Leipzig, Königstraße 2 erbeten.

Physiker oder Dipl.-Ingenieur

gesucht

für Arbeiten auf dem Gebiete der magnetischen Meßapparate.

Bewerbungen erbeten an

 **Siemens & Halske A.-G.**
Wernerwerk, Abt. M.
Siemensstadt bei Berlin. 

Physiker oder Physikerin

für unser physikalisches Laboratorium gesucht. Ausführliche Bewerbungsschreiben an

Siemens & Halske A.-G., Glühlampenwerk,
Charlottenburg, Helmholtzstraße 4—8.

Gesuche.

Physiker

mit abgeschlossener Hochschulbildung, mit guten Kenntnissen auf den Gebieten der Radioaktivität, Elektronik und Elektrotechnik sucht Stellung an einem Forschungslaboratorium eines größeren industriellen Unternehmens. (Invalide, linke Unterschenkelprothese.)

Anschrift: **Dr. Rudolf Thaller, Gmunden O.Ö.**

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 20.

15. Oktober 1918.

Redaktionsschluß für No. 22 am 11. Oktober 1918.

19. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

A. Rubinowicz, Bohrsche Frequenzbedingung und Erhaltung des Impulsmomentes. I. Teil. S. 441.

Zusammenfassende Bearbeitungen:

W. Voigt, Die Resultate der geometrischen Strukturtheorien und die Ergebnisse der Analyse durch Röntgenstrahlen. Spezieller Teil II. S. 446.

Besprechungen:

A. Wegener, Das detonierende Meteor vom 3. April 1916 in Kurhessen. S. 462.

A. Sommerfeld, Der innere Aufbau des chemischen Atoms und seine Erforschung durch Röntgenstrahlen. S. 463.

H. Bock, Die Uhr. Grundlagen

und Technik der Zeitmessung. S. 463.

R. Biedermann, Die Sprengstoffe. S. 464.

F. A. Schulze, Große Physiker. S. 464.

Personalien. S. 464.

Gesuche. S. 464.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Bohrsche Frequenzbedingung und Erhaltung des Impulsmomentes¹⁾.

I. Teil.

Von A. Rubinowicz.

Die Bohr-Sommerfeldsche Theorie der wasserstoffähnlichen Serienspektren fußt im wesentlichen auf zwei Annahmen:

Die erste bestimmt in der Mannigfaltigkeit der möglichen Elektronenbahnen durch Quantenbedingungen eine diskrete Schar „stationärer“ Zustände. Gemäß der zweiten Voraussetzung strahlt ein Elektron, das aus einer Quantenbahn A in die Bahn E übergeht, eine monochromatische Lichtwelle aus, deren Frequenz ν durch die Bohrsche Frequenzbedingung

$$h\nu = W_A - W_E \quad (1)$$

gegeben ist. W_A und W_E sind die den beiden Quantenzuständen A und E entsprechenden Energiewerte.

Für den uns zunächst interessierenden Fall, daß kein äußeres Feld auf das Atom einwirkt, wird eine stationäre Bahn durch die „azimutale“ und die „radiale“ Quantenbedingung

$$\int_0^{2\pi} p_\varphi d\varphi = 2\pi p_\varphi = nh, \quad \int p_r dr = n'h$$

festgelegt.

Unsere Überlegungen knüpfen an die Tat-

1) Als die vorliegende Arbeit schon fertiggestellt war, erschien der erste Teil einer Abhandlung von N. Bohr (On the Quantum Theory of Line-Spectra, Kopenhagener Akademie 1918), in deren Fortsetzung aus der Forderung, daß im Grenzfalle langer Wellen die klassische Elektronen- und die neuere Quantentheorie miteinander übereinstimmen müssen, u. a. vermutlich auch die hier erhaltenen Ergebnisse abgeleitet werden dürften. Auf die Bedeutung unserer Beziehung (6) für den Fall zirkular-polarisierter Wellen wird bereits am Schlusse des erschienenen ersten Teiles der Bohrschen Abhandlung hingewiesen. Auf den Rat von Herrn Prof. Sommerfeld, dem ich auch hier für sein freundliches Interesse an der vorliegenden Arbeit danken möchte, habe ich mich aber dennoch mit Rücksicht auf die prinzipielle Bedeutung, die bei uns dem Satze von der Erhaltung des Impulsmomentes beigemessen wird, und auf unsere mehr axiomatische Begründung der Resultate zur Publikation meiner Arbeit entschlossen.

sache an, daß das für die stationäre Bahn A (Quantenzahlen m, m') durch

$$p_\varphi = \frac{mh}{2\pi}$$

gegebene Impulsmoment des Atoms beim Übergange des Elektrons in die Bahn E (Quantenzahlen n, n') sich im allgemeinen ändern wird. Da nach der klassischen Elektrodynamik für das System:

„Atom + das beim Elektronenübergange ausgestrahlte elektromagnetische Feld“

der Satz von der Erhaltung des Impulsmomentes gelten sollte, so entsteht für uns die Frage, inwieweit dieser ganz fundamentale, in seiner Bedeutung weit über die klassische Elektrodynamik hinausragende Satz auch bei einer solchen Bohrschen Ausstrahlung erfüllt ist, d. h. inwieweit die aus diesem Satze gezogenen Folgerungen, die vor allem in einem Auswahlprinzip und in einer, wenn auch nicht ganz vollständigen Polarisationsregel gipfeln, sich an den spektroskopischen Beobachtungen bestätigen lassen.

Wir erörtern im folgenden zunächst die Verhältnisse bei Abwesenheit eines äußeren elektrischen oder magnetischen Feldes. Von den hier erhaltenen Ergebnissen läßt sich direkt an der Erfahrung nur das Auswahlprinzip an den Feinstrukturen der Balmer- und der Helium-Linien prüfen. Es ist sehr bemerkenswert, daß unser Auswahlprinzip im allgemeinen, wenn auch nicht inhaltlich, so doch wenigstens praktisch, die „exaktere Fassung“ der Sommerfeldschen Quantenungleichungen:

$$m' \geq n' \text{ ausnahmslos gültig,}$$

$$m \geq n \text{ im allgemeinen gültig}$$

zu ersetzen vermag. Nur die schwächste, am weitesten gegen Rot hin gelegene Komponente im Gleichstrombilde der Heliumlinien 4686 Å.-E. und 3203 Å.-E. dürfte nach dem zunächst erhaltenen Auswahlprinzip nicht beobachtbar sein, was sich dann später bei Erörterung des Stark-Effektes zwanglos durch den Einfluß

des elektrischen Feldes (das ja bei jeder Entladung vorhanden ist) erklären läßt. Dasselbe gilt von der großen Anzahl der Komponenten in der mit Funkenanregung erhaltenen Feinstruktur der Heliumlinie 4686.

Einen schönen Erfolg unserer Theorie liefert ihre Anwendung auf den Zeeman-Effekt. Wir sind hier nicht nur imstande, das Fehlen der nach der Sommerfeld-Debyeschen Theorie zu erwartenden überzähligen Linien zu erklären, sondern können auch bis zu einem gewissen Grade über die Polarisationsverhältnisse (Auftreten und Lage der zirkularpolarisierten Komponenten) Aufschluß erteilen.

Beim Stark-Effekt erhalten wir vor allem eine Erklärung der Epsteinschen Polarisationsregel.

Wenn wir im folgenden unsere Überlegungen stets so anstellen, als ob das übergehende Elektron ganz nach den Gesetzen der klassischen Elektrodynamik strahlen würde, so ist dies in Wirklichkeit nur ein Zugeständnis an unsere Bequemlichkeit, nicht aber jene Auffassung des Sachverhaltes, die wir hier vertreten möchten. Wir wollen uns vielmehr das Atom und den durch die Maxwell'schen Gleichungen beherrschten Äther als ein einziges einheitliches System denken, für das uns als Ideal die Aufstellung einer einheitlichen Quantenbedingung vorschwebt. Dies läßt sich jedoch vorläufig noch nicht durchführen, da wir die gegenseitige Beeinflussung, also sozusagen die Koppelung, der beiden Einzelsysteme nicht kennen. Wir kommen auf diesem Wege jedoch schon ein beträchtliches Stück vorwärts, wenn wir von der Koppelung nur voraussetzen, daß sie das Erfülltsein der Sätze von der Erhaltung der Energie und des Drehimpulses für das System „Atom + Äther“ gewährleistet. Zum Beweise der Bohrschen Frequenzbedingung genügt schon die speziellere Annahme, daß allein der Energiesatz beim Strahlungsvorgange besteht, wobei noch die Voraussetzungen notwendig sind, daß vor der Ausstrahlung das Atom in irgendeinem Quantenzustande sich befindet und nach der Ausstrahlung, wo Atom und Äther aufeinander nicht mehr einwirken, sowohl das Atom, als auch die fortschreitende Strahlung, jedes für sich, gequantelt sind und daß ein „Ätheroszillator“ nur ein einziges Energiequantum aufnehmen kann¹⁾. In der vorliegen-

den Mitteilung wollen wir nun aber die Konsequenzen der weiteren Annahme ziehen, daß für das System „Atom + Äther“ auch der Satz von der Erhaltung des Drehimpulses gilt.

Von unserem Standpunkte aus denken wir uns, daß das strahlende Atom dem Äther einen gewissen Betrag an Energie und Impulsmoment zur freien Verfügung überläßt und daß die eigentliche Ursache für den Schwingungscharakter im Äther und nicht im Atom gelegen ist. Bei dem Strahlungsvorgang entsteht für den Äther die Aufgabe, gemäß den Maxwell'schen Gleichungen eine Welle zu formen, die die verfügbaren Energie- und Impulsgrößen aufnimmt. Diese Welle sowie die Gültigkeit der Maxwell'schen Gleichungen im Äther ist nach unserer Auffassung physikalisch gesichert. Wenn wir weiterhin diese entstehende Welle auch durch eine Elektronenschwingung am Orte des Atoms im Sinne der Theorie des Hertz'schen Dipols beschreiben werden, so halten wir diese an das klassisch strahlende Elektron anknüpfende Vorstellung nicht für physikalisch wirklich. Sie ist, wie wir oben sagten, nur ein Zugeständnis an unsere Bequemlichkeit. In der Tat können wir auf Grund der in der klassischen Theorie ausgearbeiteten Formeln am einfachsten und plausibelsten die Singularitäten angeben, die am Orte des leuchtenden Atoms vorhanden sein müssen. Die eigentliche Ursache für das Entstehen der Lichtwelle sehen wir dagegen in der quantenmäßigen Zustandsänderung des Atoms. Um stets im Auge zu behalten, daß wir bei den folgenden Erörterungen das nach den Gesetzen der klassischen Elektrodynamik strahlende Elektron einzig nur im Sinne der obigen Auffassung verwenden, wollen wir es zeitweilig auch als das „Ersatzelektron“ bezeichnen.

Es ist selbstverständlich, daß wir im Sinne der Bohrschen Frequenzbedingung die beim Elektronenübergange entstehende Kugelwelle uns streng monochromatisch denken und daher unser Ersatzelektron rein harmonisch schwingen lassen. Dessen ungeachtet legen wir den Betrachtungen der beiden ersten Paragraphen eine beliebige periodische Umlaufbahn des Ersatzelektrons zugrunde, um mit Rücksicht auf die Feinstruktur der Heliumlinie 4686 Å.-E. zu zeigen, daß wir das Auswahlprinzip (12) nicht umgehen können, auch wenn wir unsere Auffassung des Strahlungsvorganges aufgeben, und uns vorstellen, daß der Übergang des Elektrons aus einer stationären Bahn in eine

1) Vgl. L. Flamm, diese Zeitschr. 19, 116, 1918 und die Ansprache von Prof. Sommerfeld bei der Planck-Feier in der Deutsch. Phys. Ges. zu Berlin am 26. April 1918 (inzwischen erschienen in der Broschüre: Zu Max Plancks sechzigstem Geburtstag, Karlsruhe

1918, Verlag der C. F. Müllerschen Hofbuchhandlung), wo diese Überlegungen des Verfassers mitgeteilt und als Versöhnung der Undulations- und Quantenhypothese gedeutet wurden.

andere in irgendeiner Weise, etwa in einer Spiralbahn erfolgt, wobei das Elektron nach den Gesetzen der klassischen Elektrodynamik strahlt. Unser Auswahlprinzip (12) wird nämlich, wie wir zeigen, auch unter der Annahme erhalten, daß das strahlende Elektron eine beliebige periodische Bahn durchläuft, deren Größe und Gestalt sich auch langsam ändern kann.

§ 1. Zusammenhang zwischen der Ausstrahlung von Energie und Drehimpuls bei einer elektromagnetischen Kugelwelle. Wir betrachten das Strahlungsfeld eines in einer geschlossenen Bahn mit der Periode $\tau = 1/\nu$ sich bewegenden Elektrons, das wir uns durch einen entsprechenden Hertzischen Oszillator ersetzt denken, und wollen eine Beziehung zwischen dem Drehimpuls und der Energie, die die von diesem Oszillator entsandte elektromagnetische Welle trägt, kennen lernen¹⁾.

Der die Lage des Elektrons bestimmende Radiusvektor $\vec{s}$ wird sich durch eine Fouriersche Reihe

$$\vec{s} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi\nu n t + b_n \sin 2\pi\nu n t) \quad (2)$$

darstellen lassen, wo a_n und b_n von der Zeit unabhängige Vektoren bedeuten. In dem uns besonders interessierenden Falle eines harmonisch schwingenden Ersatzelektrons ist speziell

$$\vec{s} = a_1 \cos 2\pi\nu t + b_1 \sin 2\pi\nu t. \quad (3)$$

Nach M. Abraham²⁾ ist dann der von unserem Elektron in der Sekunde ausgestrahlte Drehimpuls, wie man unschwer aus dem ausgestrahlten Felde berechnet, gleich

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3} [\dot{\vec{s}} \ddot{\vec{s}}] \quad (4)$$

während nach Hertz die sekundlich ausgestrahlte Energie³⁾

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{\vec{s}}^2$$

beträgt. Mithin wird während einer Schwingung an Drehimpuls

$$\Delta\mathcal{J} = \int_0^{1/\nu} \frac{2e^2}{3c^3} [\dot{\vec{s}} \ddot{\vec{s}}] dt = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{(2\pi\nu)^3}{2\nu} \sum_{n=1}^{\infty} n^3 [a_n b_n]$$

und an Energie

$$\Delta W = \int_0^{1/\nu} \frac{2e^2}{3c^3} \dot{\vec{s}}^2 dt = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{(2\pi\nu)^4}{2\nu} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \frac{(a_n^2 + b_n^2)}{2}$$

ausgestrahlt. Zwischen $|\Delta\mathcal{J}|$ und ΔW besteht demnach die Beziehung:

$$|\Delta\mathcal{J}| = \frac{\Delta W}{2\pi\nu} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^3 2[a_n b_n]}{\sum_{n=1}^{\infty} n^4 (a_n^2 + b_n^2)}. \quad (5)$$

Selbstverständlich kann unter $|\Delta\mathcal{J}|$ auch der während einer hinreichend viele Schwingungen umfassenden Zeit ausgestrahlte Drehimpuls und unter ΔW die in der gleichen Zeit ausgestrahlte Energie verstanden werden. Schließlich bleibt (5) angenähert auch richtig, wenn die Vektoren a_n und b_n nicht, wie wir es vorausgesetzt haben, von der Zeit unabhängig sind, sondern sich mit der Zeit langsam ändern und wir $|\Delta\mathcal{J}|$ und ΔW für ein Zeitintervall nehmen, in dem zwar a_n und b_n merklich konstant sind, das andererseits aber gegenüber $1/\nu$ doch schon hinreichend groß ist. (5) gilt mithin, auch wenn das Elektron in einer Spiralbahn läuft, die durch langsame Änderung der Größe und Gestalt einer geschlossenen, periodischen Bahn entsteht.

Für den Fall einer rein zirkularen Schwingung des Elektrons, wo a_1 senkrecht zu b_1 steht und beide ihrem absoluten Betrage nach gleich sind, während sonst

$$a_n = b_n = 0 \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

ist, wird (5) gleich

$$|\Delta\mathcal{J}| = \frac{\Delta W}{2\pi\nu} \quad (6)$$

und läßt sich für diesen Sonderfall nach H. Busch¹⁾ einfach aus dem Energiesatze ableiten. Wir bemerken aber, daß während bei der früher angedeuteten Ableitung die Beziehung (5) aus dem ausgestrahlten Felde allein erhalten werden kann, bei der energetischen Ableitung von (6) die Vorstellung eines Ersatzelektrons nicht gut auszuschalten ist.

§ 2. Die Bohrsche Frequenzbedingung und der Satz von der Erhaltung des Drehimpulses. Auswahlprinzip. Wir stellen die folgenden Überlegungen unter der Annahme an, daß unser Atom weder der Einwirkung eines elektrischen, noch der eines magnetischen Feldes unterliegt. Das Impulsmoment des Atoms vor und nach der Ausstrahlung möge durch die Vektoren $\vec{p}_m$ und $\vec{p}_n$ mit den Absolutbeträgen $\frac{mh}{2\pi}$ und $\frac{nh}{2\pi}$ gegeben sein. Bezeichnet ϑ den Winkel zwischen $\vec{p}_m$ und $\vec{p}_n$, so verliert das Atom bei einem Elektronenübergang ein Impulsmoment $|\Delta\mathcal{J}|$ vom absoluten Betrage

1) M. Abraham, diese Zeitschr. 15, 914, 1914; H. Busch, diese Zeitschr. 14, 455, 1913.

2) M. Abraham, l. c.

3) Vgl. M. Abraham, Theorie der Elektrizität, Bd. 2, 3. Aufl., S. 63. Leipzig 1914.

1) H. Busch, l. c. und M. Abraham, diese Zeitschr. 15, 914, 1914.

$$|\Delta \mathfrak{P}| = |p_m - p_n| = \frac{h}{2\pi} \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos \vartheta} \quad (7)$$

und die Energie

$$\Delta W = W_{m, m'} - W_{n, n'} \quad (8)$$

Nach (5) haben wir also:

$$\begin{aligned} h\nu \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos \vartheta} &= \\ &= (W_{m, m'} - W_{n, n'}) \cdot \frac{\left| \sum_{n=1}^{\infty} n^3 2 [a_n b_n] \right|}{\sum_{n=1}^{\infty} n^4 (a_n^2 + b_n^2)} \end{aligned}$$

Dies kann aber mit der Bohrschen Frequenzbedingung (1) nur dann in Einklang gebracht werden, wenn

$$\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos \vartheta} = \frac{\left| \sum_{n=1}^{\infty} n^3 2 [a_n b_n] \right|}{\sum_{n=1}^{\infty} n^4 (a_n^2 + b_n^2)} \quad (9)$$

ist. Es ist jedoch offenbar

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} n^3 2 [a_n b_n] \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^3 2 |a_n b_n| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^3 2 |a_n| \cdot |b_n| \end{aligned}$$

und da

$$2 |a_n| \cdot |b_n| \leq a_n^2 + b_n^2$$

und daher auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2 n^3 |a_n| \cdot |b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^4 (a_n^2 + b_n^2)$$

so ist

$$\frac{\left| \sum_{n=1}^{\infty} n^3 2 [a_n b_n] \right|}{\sum_{n=1}^{\infty} n^4 (a_n^2 + b_n^2)} \leq 1. \quad (10)$$

Mit Rücksicht auf

$$|m - n| \leq \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos \vartheta} \quad (11)$$

ergibt sich daher aus (9) und (10):

$$|m - n| \leq 1. \quad (12)$$

d. h. $m - n = -1, 0, +1$.

Wir erhalten daher zunächst als Resultat das folgende Auswahlprinzip:

Ein mit Ausstrahlung verbundener Übergang des Elektrons aus einer stationären Bahn (m, m') in eine andere (n, n') ($m + m' > n + n'$) kann nicht in beliebiger Weise erfolgen, sondern ist an die Bedingung geknüpft, daß sich dabei die das Impulsmoment des Atoms bestimmende azimutale Quantenzahl m höchstens um eine Eins ändert.

Dieses Resultat gilt offenbar nicht nur für

die wasserstoffähnlichen Spektren, sondern ganz allgemein für alle Fälle wo kein äußeres Feld vorhanden ist und von allen das Atom konstituierenden Elektroden nur eines in eine neue stationäre Bahn übergeht. Es bleibt schließlich, wie wir in der Einleitung hervorgehoben haben, auch richtig, wenn wir uns denken, daß der Übergang des Elektrons in einer in § 1 näher charakterisierten Spiralbahn erfolgt.

§ 3. Polarisationsverhältnisse. Doch auch über den Zusammenhang zwischen den Polarisationsverhältnissen der emittierten Strahlung und der Lage der Anfangs- und der Endbahn des Elektrons können wir leicht einigen Aufschluß gewinnen. Von den drei in (12) enthaltenen Möglichkeiten betrachten wir zunächst die beiden Fälle

$$m - n = \pm 1, \quad (13)$$

die ersichtlich nur dann bestehen können, wenn in den beiden Ungleichungen (10) und (11) die Gleichheitszeichen gelten. Da für $n \leq 2$ jedesmal wenn a_n und b_n nicht beide zugleich verschwinden,

$$n^3 2 |a_n| \cdot |b_n| < n^4 (a_n^2 + b_n^2)$$

so erfordert (10) offenbar daß

$$a_n = b_n = 0 \text{ für alle } n = 2, 3, 4, \dots$$

und daß

$$2 |a_1 b_1| = a_1^2 + b_1^2$$

d. h. daß die Vektoren a_1 und b_1 ihrem absoluten Betrage nach gleich groß sind und zueinander senkrecht stehen. Das Ersatzelektron bewegt sich also im Falle (13) auf einem Kreise und sendet streng monochromatisches zirkular-polarisiertes Licht aus. Das Gleichheitszeichen in der Ungleichung (11) verlangt dann, daß $\vartheta = 0$ ist, d. h. daß die stationären Anfangs- und Endbahnen in der gleichen Ebene liegen. Da das ausgestrahlte Impulsmoment auch vektoriell mit dem beim Elektronenübergange vom Atome verlorenen übereinstimmen muß, läuft jetzt unser Ersatzelektron in der gemeinsamen Ebene der stationären Anfangs- und Endbahn. Damit sind aber in diesen beiden Fällen selbst bei Mitberücksichtigung der allgemeinen Elektronenbahnen (2) die Polarisationsverhältnisse vollkommen bestimmt.

Nicht ebenso eindeutig festgelegte Resultate erhalten wir in dem noch zu betrachtenden Falle

$$m - n = 0$$

auch dann nicht, wenn wir im Sinne der Einleitung von der Betrachtung allgemeinerer als harmonischer Schwingungen des Ersatzelektrons absehen und uns auf die Betrachtung des Elektrons in der Grundschwingung beschränken. Für die allgemeinere Bahn (2) und die speziell-

lere (3) ergibt sich aus (9) und (10) in beiden Fällen nur die gleiche, die Größe des Winkels ϑ einschränkende Relation

$$1 \geq \cos \vartheta \geq 1 - \frac{1}{2n^2}. \quad (14)$$

(9) liefert dann für jeden der Ungleichung (14) entsprechenden Winkel ϑ im Falle der Bahn (2) nur ein ungefähres Maß für die Abweichung der Bahnkurve des strahlenden Elektrons von der Kreisform. In dem für uns eigentlich wichtigen Falle der rein harmonischen Schwingung des Ersatzelektrons wird durch (9) dagegen jedem nach (14) zulässigen Winkel ϑ eine bestimmte, mit kleiner werdendem ϑ abnehmende Exzentrizität der Bahnellipse zugeordnet. Insbesondere entspricht

$$\cos \vartheta = 1 - \frac{1}{2n^2} \text{ nach (7) } |p_m - p_n| = \frac{h}{2\pi}$$

also, wie soeben gezeigt, einer zirkular-polarisierten Lichtwelle, während in dem anderen Grenzfalle von (14) ($\cos \vartheta = 1$) aus (9) $[a_1, b_1] = 0$ folgt, d. h. a_1 und b_1 haben die gleiche Richtung, das Elektron strahlt also linear-polarisiertes Licht aus. Wir bemerken, daß im Zeemaneffekt (s. u. § 7) für $m-n=0$ eben der letztere Grenzfall der wirkliche zu sein scheint. Was nun die räumliche Lagerung der im Falle $m-n=0$ von unserem harmonisch schwingenden Ersatzelektron ausgesandten elliptisch-polarisierten Welle betrifft, so wird durch die Forderung, daß das beim Elektronenübergange vom Atome abgegebene Impulsmoment auch seiner Richtung nach sich in der ausgestrahlten Kugelwelle wiederfinden soll, nur die Lage der Normalen auf die Ebene der elliptischen Bahnkurve unseres Ersatzelektrons bestimmt. Die Lage der Achsen dieser Ellipse ist dadurch noch keineswegs gegeben. Wir können daher aus unseren Überlegungen im Grenzfalle $\cos \vartheta = 1$, wo die Ebenen der Anfangs- und Endbahn zusammenfallen und dadurch auch noch die Lage dieser Normalen unbestimmt wird, über die räumliche Orientierung der jetzt zu einer Geraden ausgearteten Ellipse überhaupt nichts aussagen.

§ 4. Energetische Ableitung der Polarisationsverhältnisse für den Fall der zirkular-polarisierten Welle. (Die obigen auf zirkularpolarisierte Wellen¹⁾ bezüglichen Überlegungen lassen sich zum großen Teile schon aus unserer Annahme herleiten, daß bei einem mit der Ausstrahlung einer solchen Lichtwelle verbundenen Elektronenübergange der gesamte freiwerdende Über-

schuß an Energie und Drehimpuls an die entstehende (nach der Bohrschen Frequenzbedingung) monochromatische Lichtwelle übergeht und daß die schon aus energetischen Betrachtungen für das Ersatzelektron sich ergebende Beziehung (6) erfüllt ist.

Für zirkular-polarisiertes Licht folgt nämlich aus (6), (7) und (8) mit Rücksicht auf die Bohrsche Frequenzbedingung zunächst

$$\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos \vartheta} = 1, \quad (15)$$

was zusammen mit (11) das Auswahlprinzip (12) gibt. Im Falle $m-n=\pm 1$ der Ungleichung (12) liefert dann (15) $\vartheta=0$, d. h. die stationären Anfangs- und Endbahnen liegen in der gleichen Ebene. Daraus folgt aber nach (7), daß das Atom beim Strahlen einen Drehimpuls verliert, dessen Achse senkrecht auf dieser Ebene steht, womit die Orientierung der zirkular-polarisierten Welle im Raume gegeben ist. Für $m-n=0$ wird, wenn zirkular-polarisiertes Licht emittiert werden

soll, ϑ nach (15) durch $\cos \vartheta = 1 - \frac{1}{2n^2}$ bestimmt.

Wie wir bereits bemerkt haben, zeigt jedoch die Erfahrung am Zeemaneffekt, daß gerade im Falle $m-n=0$ linear-polarisiertes Licht ausgesendet wird. In diesem Falle wird aber überhaupt kein Drehimpuls ausgestrahlt, und die jetzt eben gemachten Überlegungen sind daher hier nicht anwendbar.

Man kann selbstverständlich jetzt die Voraussetzungen und Folgerungen teilweise umkehren und für zirkular-polarisiertes Licht und den Sonderfall $m-n=\pm 1$ die Bohrsche Frequenzbedingung auch auf diesem Wege beweisen. Die wahre Ursache für ihr Bestehen sehen wir aber im Sinne der Einleitung in der Möglichkeit, den Äther zu quanteln.

Wenn wir auch auf dem jetzigen Wege unsere früheren Ergebnisse im wesentlichen wieder erhalten, so hat sich doch der frühere umständlichere, mehr ins Einzelne gehende Weg schon deshalb nicht als überflüssig erwiesen, als wir uns dort überzeugen konnten, daß unserem Auswahlprinzip (12) eine viel umfassendere Bedeutung zukommt, als es nach unseren letzten Erörterungen scheinen könnte, in denen (12) nur als eine einschränkende Bedingung für den Sonderfall zirkular-polarisierter Wellen auftritt. Die formelle Übereinstimmung des jetzigen und des früheren Auswahlprinzipes ist offenbar in dem Umstand begründet, daß die Kreisbahnen bei gegebener Frequenz und gegebener ausgestrahlter Energie den größten Betrag an Drehimpuls aussenden. Nach den Überlegungen des § 2 hat ja das

Verhältnis $\frac{|\Delta \mathfrak{P}|}{\Delta W}$ [vgl. Formel (10)] für eine Kreisbahn den größten Betrag.

¹⁾ Als zirkular-polarisierte Wellen bezeichnen wir abkürzend stets Kugelwellen, die von einem zirkular schwingenden Ersatzelektron emittiert gedacht werden können.

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Die Resultate der geometrischen Strukturtheorien und die Ergebnisse der Analyse durch Röntgenstrahlen.

Von W. Voigt.

Spezieller Teil II.

VI. Klasse. Drei zueinander normale gleichartige Achsenscharen.

Fundamentale Sätze der Kristallographie lehren, daß (wenn man zwei entgegengesetzte Richtungen als nur eine einzige auffaßt) sechszählige Symmetrieachsen nur einzeln auftreten, vierzählige nur einzeln oder zu drei zueinander normalen verbunden, dreizählige nur einzeln oder zu vier in die Diagonalen eines Würfels fallenden verbunden. Dabei verlangt das letzte System das gleichzeitige Auftreten von drei entweder zwei- oder vierzähligen Symmetrieachsen in den Richtungen der Würfelachsen, und diese drei Achsen sind dann in dem Sinne gleichwertig, daß die durch jede einzelne zwei- oder vierzählige Achse unter sich verknüpften Flächenpole durch die dreizählige Deckdrehung mit denen der anderen zum Austausch kommen. Die Polyeder mit diesen Achsensystemen sind diejenigen des regulären Kristallsystems.

Den vorstehenden Sätzen entsprechen analoge in der Strukturtheorie; sie lassen die Strukturtypen des regulären Systems charakterisiert sein durch drei zueinander normale Scharen zwei- oder vierzähliger Dreh- oder Schraubenachsen, die in dem Sinne einander gleichwertig sind, daß die durch die Deckoperationen je der einen Schar in sich verknüpften Atomsysteme durch eine dreizählige Deckdrehung um die Richtung einer Diagonalen des orthogonalen Systems mit den anderen zum Austausch gelangen. Um die Strukturtypen dieses Charakters handelt es sich im vorliegenden letzten Teil der systematischen Zusammenstellung.

Abteilung A. Zweizählige Achsen.

Die Typen dieser Abteilung gehen durch Spezialisierung aus solchen der Abteilung B der II. Klasse hervor. Jene Typen sind durch zweizählige Haupt- oder Vertikalachsen und dazu normale zweizählige Neben- oder Querachsen charakterisiert, wobei die Nebenachsen jederzeit in zwei zueinander normalen Richtungen auftreten. Gleichwertig in dem oben geprägten Sinne sind nun allerdings diese drei zueinander normalen Achsensysteme der Klasse II B im allgemeinen nicht; es befinden sich aber unter ihnen solche, denen bei speziellen Verfügungen

über die Grundstrecken a, b, c diese Eigenschaft erteilt werden kann. Es sind dies die Typen Nr. 5, 8, 10, 11, 13 und nur diese, da nur sie Achsen derselben Art in den drei zueinander normalen Richtungen besitzen.

Die Spezialisierung geschieht in dem Sinne, daß gewisse durch die zweizähligen Achsen bestimmte und mit ihren Kanten diesen parallele rechteckige Zellen kubische Form erhalten und damit die Einfügung einer diagonalen dreizähligen Drehachse gestatten. Man kann diese Zelle so wählen, daß ihre Kantenlängen mit den ihnen parallelen Deckschiebungen zusammenfallen, die mit

$$a_1, a_2, a_3 \text{ bei } |a_1| = |a_2| = |a_3|$$

bezeichnet werden mögen. Die figürliche Darstellung wird (ebenso wie in den früheren Fällen, an die angeknüpft werden soll) durchsichtiger bei Beschränkung auf den achten Teil eines solchen Elementarbereichs, also einem Würfel mit den Kanten $\frac{1}{2}a_h$; man kann einen solchen „Achtelwürfel“ in jedem Falle nach der bloßen Anschauung leicht zum vollen Elementarwürfel ergänzen.

Dabei ist indessen zu bemerken, daß, wenn auch kristallographisch mit drei zueinander normalen gleichwertigen Achsen die Existenz einer dreizähligen Achse in jedem Oktantenpaar zwischen den zweizähligen Achsen verknüpft ist, doch unter analogen Umständen keineswegs jede der vier Diagonalen eines Achtelwürfels eine dreizählige Achse des Atomsystems zu sein braucht. Vielmehr kann u. A. nur eine einzige diese Eigenschaft besitzen; die Gleichwertigkeit aller vier Diagonalen kommt dann dadurch zum Ausdruck, daß in den acht Teilwürfeln jede Gattung von Diagonalen zweimal die Rolle einer dreizähligen Achse spielt.

Um ein Beispiel dafür zu geben, seien die vier Achtelwürfel der unteren und der oberen Schicht des Vollwürfels (mit den Kanten a_h)

nach dem Schema $\begin{array}{cc} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{array}$ bzw. $\begin{array}{cc} 6 & 5 \\ 7 & 8 \end{array}$ numeriert

und die Würfel diagonale 1,5 mit a , 2,6 mit b , 3,7 mit c , 4,8 mit d bezeichnet. Ist dann in den Achtelwürfeln 1 und 5 die Diagonale $\parallel a$, in 2 und 6 die $\parallel d$, in 3 und 7 die $\parallel b$, in 4 und 8 die $\parallel c$ dreizählige Achse, so liegt das oben geschilderte Verhältnis vor, daß jeder Achtelwürfel nur eine dreizählige Symmetrieachse besitzt (die zusammen ein „windschiefes“ System geben), und daß doch dabei im Vollwürfel alle vier Diagonalen gleichwertig sind.

Die figürliche Darstellung geschieht im

übrigen weiterhin nach den oben benutzten Prinzipien (— Dreh-, — — — Schraubenachse). Die vordere untere Ecke des gezeichneten Achtelwürfels spielt gewissermaßen die Rolle des Koordinatenanfangs, indem von ihr z. B. die drei Grundstrecken a_1, a_2, a_3 ausgehend gedacht sind. Die Begrenzung und Orientierung des Achtelwürfels ist dabei so gewählt, daß jedenfalls die von diesem Eckpunkt ausgehende Diagonale eine dreizählige Achse ist. Demgemäß ist diese Begrenzung nicht stets identisch mit der des rechteckigen Parallelepipedon in den Figuren für die Typen II B, aus welchen die neuen regulären abgeleitet werden. Es wird hierauf im einzelnen Falle hingewiesen werden.

Was die Anordnung der Deckoperationen in der Strukturformel angeht, so sind wieder die Dreh- bzw. Schraubenachsen an die Spitze gestellt und die Deckschiebungen daran geschlossen. Die Verwendung der Drehungen und Schraubungen allein liefert aus einem Ausgangsatom eine charakteristische elementare Gruppe von 12 Atomen, deren Wiederholung gemäß den Deckschiebungen dann den Gesamtaufbau ergibt. Je nachdem die Deckschiebungen dem Bravais-Gitter Γ_r, Γ_r' oder Γ_r'' in § 5 entsprechen, kommen von diesen Elementargruppen dem Vollwürfel eine, vier oder zwei zu. Für den ersten Teil dieser Operation bedient man sich in gewissen Fällen mit Vorteil der Konstruktion auf der Kugelfläche.

Unter den auftretenden verschiedenen elementaren Gebilden sei dasjenige hervorgehoben, das durch drei zueinander normale sich schneidende Drehachsen $\mathcal{A}_h(2,0)$ bestimmt ist, und das, wie man leicht einsieht, mit der Polfigur der allgemeinsten Form der regulären Tetartoedrie ($A_x^2 \sim A_y^2 \sim A_z^2$), dem tetraedrischen Pentagondodekaeder, übereinstimmt. Sohncke bezeichnet dieses Atomsystem als „regulären Zwölfpunkt“.

Fig. 60, die als Darstellung der zwei Halbkugeln in stereographischer Projektion zu ver-

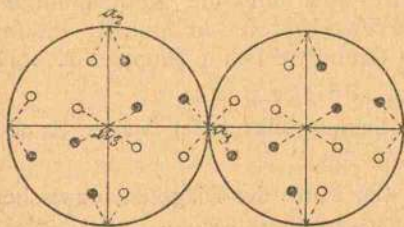


Fig. 60.

stehen ist, gibt sowohl in den $\bullet$, wie den $\circ$ eine Anschauung von dieser Anordnung in den beiden enantiomorphen Formen. Bei Hinzut-

treten eines Spiegelpunktes im Kugelmittelpunkt vervollständigt sich der Zwölfpunkt zu dem aus $\bullet$ und $\circ$ zusammengesetzten „zentrischen Vierundzwanzigpunkt“. Ein außerhalb liegender Spiegelpunkt erzeugt zu einem Zwölfpunkt in korrespondierender Lage das Gegenbild. In beiden Fällen müssen auch die Atome $\bullet$ und $\circ$ sich spiegelbildlich entsprechen.

Der Übergang von den oben genannten Typen der Abteilung II B zu den neuen regulären ist in jedem Falle äußerst einfach. Nr. 5, $\mathcal{A}(2,0), \mathcal{D}_a(2,0), a, b, c$ besitzt nach Fig. 22 parallel a, b, c zweizählige Drehachsen; die Verfügung $|a|=|b|=|c|$ und Hinzunahme einer dreizähligen Achse $\mathcal{D}(3,0)$ in einer Diagonale führt von dem in Fig. 22 dargestellten Prisma direkt zu dem Achtelwürfel eines ersten regulären Typs mit lauter Drehachsen in den Würfelkanten.

Nr. 53. Kubisches Zwölfpunktssystem.

Formel: $\mathcal{A}_3(2,0), \mathcal{D}(3,0), a_3$. Abhängige Achsen: $\mathcal{A}_1(2,0)$ und $\mathcal{A}_2(2,0)$ durch den o-Punkt gehend, entsprechend der von dieser Ecke ausgehenden diagonalen Achse $\mathcal{D}(3,0)$. In den Gegenkanten drei durch $\mathcal{D}(3,0)$ gleichfalls verknüpfte Achsen $\mathcal{D}_h(2,0)$. In den Zwischenkanten abwechselnd sich entsprechende Achsen $\mathcal{B}_h(2,0)$ und $\mathcal{C}_h(2,0)$ (Fig. 61). Das Atomsystem besteht

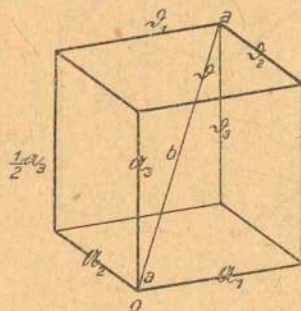


Fig. 61. Nr. 53.

für den gezeichneten Achtelwürfel aus einem nach den Kanten a_1, a_2, a_3 orientierten Zwölfpunkt um den o-Punkt; durch seine Wiederholung um alle Knotenpunkte eines leeren kubischen Raumgitters mit den Grundstrecken a_h entsteht daraus der gesamte Aufbau des Typs. (Sch. $\mathcal{T}^1$.)

Nr. 53a. Spiegelpunkt

- im Schnittpunkt dreier Achsen $\mathcal{A}_h$ oder $\mathcal{D}_h$; (Sch. $\mathcal{T}_h^1$),
- im Mittelpunkt der Diagonale zwischen zwei derartigen Schnittpunkten. (Sch. $\mathcal{T}_h^2$.)

Nr. 53 β . Spiegelebene

- a) durch zwei benachbarte $\mathcal{A}_h$ und $\mathcal{D}_h$. (Sch. $\mathcal{T}_d^1$)

Nr. 53 γ . Gleitspiegelebene

- a) ebenso gelegen; Gleitbetrag $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$. (Sch. $\mathcal{T}_d^4$)

Verdoppelt man das in Fig. 27 dargestellte, für Nr. 10, $\mathcal{A}(2,0)$, $\mathcal{D}_e(2,0)$, $a + \frac{1}{2}c$, $b + \frac{1}{2}c$, c charakteristische Prisma¹⁾, indem man die Wiederholung (mit vertauschten $\mathcal{A}$ und $\mathcal{D}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$) davorsetzt, so erkennt man, daß das Mittelstück zwischen zwei Achsenebenen $\mathcal{A}\mathcal{D}$ ein Prisma von den Kanten $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$ gibt, mit Drehachsen in allen Kanten und parallelen Schraubenachsen durch das Zentrum. Die Verfügung $|a|=|b|=|c|$ führt zu dem Achtelwürfel eines zweiten regulären Typs, mit Drehachsen in den Würfelkanten.

Nr. 54. Rhombendodekaedrisches Zwölfpunktersystem¹⁾.

Formel: $\mathcal{A}_3(2,0)$, $\mathcal{D}(3,0)$, a_3 , $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$. Abhängige Achsen: $\mathcal{A}_1(2,0)$ und $\mathcal{A}_2(2,0)$ wie $\mathcal{A}_3$ vom o-Punkt ausgehend; ihnen gleichartige $\mathcal{A}_1'$, $\mathcal{A}_2'$, $\mathcal{A}_3'$ durch die Gegenecke. Die Nebenkanten tragen Achsen $\mathcal{D}_h(2,0)$; durch den Mittelpunkt geht ein Kreuz von Schraubenachsen $\mathcal{B}_h(2,1)$. (Fig. 62). Die Schraubenachsen $\mathcal{B}_h$ bedingen

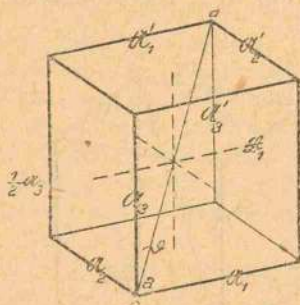


Fig. 62. Nr. 54.

eine Abweichung von dem vorigen Typ, die sich auch in dem Auftreten der mit den $\mathcal{A}_h$ gleichartigen Achsen $\mathcal{A}_h'$ ausdrückt und in Beziehung steht zu der Deckschiebung $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$. Der Atomaufbau ist in diesem Fall gegeben durch Zwölfpunkte in den Knotenpunkten eines zentrierten kubischen Raumgitters mit den Grundstrecken a_h ; die Gegenecke zum Nullpunkt ist der erste jener zentrischen Knotenpunkte. (Sch. $\mathcal{T}^3$).

Nr. 54 α . Spiegelpunkt

- a) im Schnittpunkt dreier Achsen $\mathcal{A}_h$ oder $\mathcal{A}_h'$. (Sch. $\mathcal{T}_h^5$)

¹⁾ Die Nr. 54 und 55 sind gegenüber den Sohnecken vertauscht, um Parallelismus zur folgenden Klasse zu erzielen.

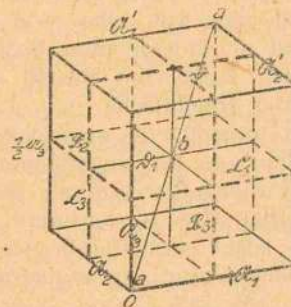
Nr. 54 β . Spiegelebene

- a) durch eine Achse $\mathcal{A}_h$ und $\mathcal{D}(3,0)$. (Sch. $\mathcal{T}_d^3$)

Das Achsensystem von Nr. 8, $\mathcal{A}(2,0)$, $\mathcal{D}_a(2,0)$, $a + \frac{1}{2}c$, $b + \frac{1}{2}c$, c bildet nach Fig. 25 Zellen mit den Kanten $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$, bei denen in zwei Gegenecken je drei zweizählige Drehachsen zusammentreffen, die also durch die Verfügung $a=b=\frac{1}{2}c$ und Zufügung einer dreizähligen Achse $\mathcal{D}(3,0)$ in der bezüglichen Diagonale regulären Charakter erhalten. Da c und $2a$, $2b$ Deckschiebungen von Nr. 25 sind, so entspricht eine Zelle von den Kanten a , b , $\frac{1}{2}c$ dem Achtelwürfel und es ist a mit $\frac{1}{2}a_1$, b mit $\frac{1}{2}a_2$, c mit a_3 zu vertauschen.

Nr. 55. Oktaedrisches Zwölfpunktersystem.

Formel: $\mathcal{A}_3(2,0)$, $\mathcal{D}(3,0)$, a_3 , $\frac{1}{2}(a_1 + a_2)$. Abhängige Achsen: $\mathcal{A}_1(2,0)$, $\mathcal{A}_2(2,0)$ vom o-Punkt aus, $\mathcal{A}_1'(2,0)$, $\mathcal{A}_2'(2,0)$, $\mathcal{A}_3'(2,0)$ von der Gegenecke ausgehend, je durch die diagonale Achse $\mathcal{D}(3,0)$ gleichartig. In den Flächenmitten Schraubenachsen $\mathcal{B}_h(2,1)$ und $\mathcal{C}_h(2,1)$ durch das Würfelzentrum Drehachsen $\mathcal{D}(2,0)$ (Fig. 63). Die hierin

Fig. 63¹⁾. Nr. 55.

liegende Abweichung gegenüber Nr. 53 steht im Zusammenhang mit den geänderten Deckschiebungen. Der Aufbau besteht wieder aus nach den a_h orientierten Zwölfpunkten, die sich jetzt aber um die Knotenpunkte eines flächenzentrierten kubischen Raumgitters mit den Grundstrecken a_h gruppieren. (Sch. $\mathcal{T}^2$)

Nr. 55 α . Spiegelpunkt

- a) im Schnittpunkt dreier Achsen $\mathcal{A}_h$ oder $\mathcal{A}_h'$; (Sch. $\mathcal{T}_h^3$),
b) in der Mitte der Diagonalen zwischen zwei solchen Schnittpunkten. (Sch. $\mathcal{T}_h^4$)

Nr. 55 β . Spiegelebene

- a) durch zwei gegenüberliegende Kanten,

¹⁾ In Fig. 63 ist durch ein Versehen die vertikale Hinterkante (rechts oben) gestrichelt statt ausgezogen.

zwischen denen eine dreizählige Achse verläuft. (Sch. $\mathfrak{I}_d^2$.)

Nr. 55 γ . Gleitspiegelebene

- a) ebenso gelegen; Gleitbetrag $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$. (Sch. $\mathfrak{I}_d^5$.)

Das Achsensystem von Nr. 11, $\mathfrak{A}(2,0)$, $\mathfrak{D}_b(2,0)$, $a + \frac{1}{2}c$, $b + \frac{1}{2}c$, c zeigt nach Fig. 28 auf den drei Flächen des rechteckigen Prismas mit den Kanten $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{2}a$ zyklisch sich genau entsprechende Bildung; man gelangt also durch die Spezialisierung $|b| = |c| = |a|$ wiederum direkt zu dem Achtelwürfel eines vierten Typs, bei dem nun keine Achse mehr durch eine Ecke geht. Wegen $a = \frac{1}{2}(b + c)$ entspricht der ursprünglichen Deckschiebung $a + \frac{1}{2}c$ die neue $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$.

Nr. 56. Reguläres zusammengesetztes Zweipunktschraubensystem.

Formel: $\mathfrak{A}_3'(2,0)$, $\mathfrak{D}(3,0)$, a_3 , $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$. Die Achse $\mathfrak{A}_3'$ liegt in der Mittellinie der Fläche $\frac{1}{2}a_2 \cdot \frac{1}{2}a_3$ durch den Nullpunkt, durch den auch die diagonale Achse $\mathfrak{D}(3,0)$ geht. Mit $\mathfrak{A}_3'$ sind durch $\mathfrak{D}(3,0)$ verknüpft Achsen $\mathfrak{A}_1'(2,0)$, $\mathfrak{A}_2'(2,0)$; ebenso untereinander die in den Gegenflächen liegenden $\mathfrak{D}_1(2,0)$, $\mathfrak{D}_2(2,0)$, $\mathfrak{D}_3(2,0)$ (Fig. 64). Die komplizierte Anordnung der Atome innerhalb eines Vollwürfels läßt sich mit Hilfe der

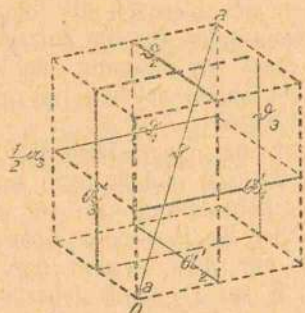


Fig. 64. (Nr. 56).

Fig. 60 für den Sohnckeschen regulären Zwölfpunkter einigermaßen veranschaulichen.

Die drei Achsen $\mathfrak{A}_h'$ tragen die Polpaare $\bullet \dots \bullet$ (oder $\circ \dots \circ$), die in Figur 60 den Richtungen $+a_h$ zugeordnet sind, die Achsen $\mathfrak{D}_h$ diejenigen von den Richtungen $-a_h$. Die auf $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{A}_3'$ liegenden Paare sind dabei miteinander durch $\mathfrak{D}(3,0)$ verknüpft, die auf $\mathfrak{A}_1'$ und $\mathfrak{D}_1$ liegenden durch $\mathfrak{A}_3'$, die auf $\mathfrak{A}_2'$ und $\mathfrak{D}_2$ durch $\mathfrak{A}_1'$, die auf $\mathfrak{A}_3'$ und $\mathfrak{D}_3$ durch $\mathfrak{A}_2'$. (Sch. $\mathfrak{I}^5$.)

Nr. 56 α . Spiegelpunkt

- a) in einer Ecke des Achtelwürfels, dessen

Flächen die zweizähligen Achsen tragen. (Sch. $\mathfrak{I}_h^7$.)

Nr. 56 γ . Gleitspiegelebene

- a) durch zwei gegenüberliegende Kanten des Achtelwürfels; Gleitbetrag $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$. (Sch. $\mathfrak{I}_d^4$.)

Begrenzt man in Fig. 30, die dem Typ Nr. 13, $\mathfrak{A}(2,1)$, $\mathfrak{D}_a'(2,1)$, a , b , c entspricht, das Prisma mit den Kanten $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$ rechts und links nicht durch Ebenen $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{D}$, sondern durch Ebenen, die $\mathfrak{D}_a'$ enthalten, so trägt dies Prisma ein System Schraubenachsen, die sich für die drei Flächenpaare zyklisch entsprechen. Die Verfügung $|a| = |b| = |c|$ gibt daraus unmittelbar den Achtelwürfel des letzten Typs dieser Abteilung.

Nr. 57. Reguläres abwechselndes Zweipunktschraubensystem.

Formel: $\mathfrak{A}_3'(2,1)$, $\mathfrak{D}(3,0)$, a_3 . Die Achse $\mathfrak{A}_3'$ fällt nicht in eine Kante, sondern in die Mittellinie einer Fläche $\frac{1}{2}a_1 \cdot \frac{1}{2}a_3$ des Achtelwürfels. Abhängige Achsen: die zu $\mathfrak{A}_3'$ parallele $\mathfrak{B}_3(2,1)$ auf der Gegenfläche, dazu die gemäß $\mathfrak{D}(3,0)$ ihnen entsprechenden auf den andern Flächenpaaren (Fig. 65). Um eine Vorstellung von dem

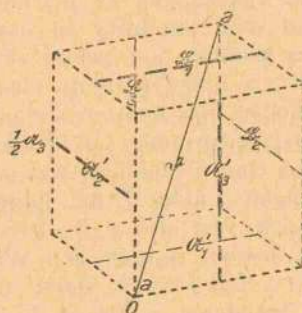


Fig. 65. Nr. 57.

Gesamtaufbau zu erhalten, beachte man, daß das Stück $\mathfrak{A}_1'$ innerhalb des gezeichneten Achtelwürfels durch die Achse $\mathfrak{A}_3'$ verknüpft ist mit einer Parallelen $\mathfrak{B}_1'$ die um a_2 von $\mathfrak{B}_1$ nach vorn liegt und daß Analoges für $\mathfrak{A}_2'$ und $\mathfrak{A}_3'$ bezüglich paralleler $\mathfrak{B}_2'$ und $\mathfrak{B}_3'$ gilt. Nun liefert die Deckbewegung $\mathfrak{A}_1'(2,1)$ aus einem (etwa nahe dem linken Ende des gezeichneten $\mathfrak{A}_1'$ liegenden) Ausgangsatom ein verschränktes Paar im Abstand $\frac{1}{2}a_1$; ihm entspricht durch die Deckbewegung $\mathfrak{A}_3'$ ein Paar auf $\mathfrak{B}_1'$, und durch $\mathfrak{D}(3,0)$ werden weitere Paare auf $\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{A}_3'$, $\mathfrak{B}_2'$, $\mathfrak{B}_3'$ diesen zugeordnet. Dieser „Zwölfpunkter“ ist nun bei allen Knotenpunkten eines leeren kubischen Raumgitters anzubringen. (Sch. $\mathfrak{I}^4$.)

Nr. 57a. Spiegelpunkt

- a) in einer Ecke des Achtelwürfels, dessen Oberfläche die zweizähligen Achsen trägt. (Sch. $\mathfrak{T}_{h^*}$.)

Von den Typen dieser Abteilung entsprechen Nr. 53—57 der kristallographischen Symmetrie $\{A_x^2 \sim A_y^2 \sim A_z^2\}$, Nr. 53a—57a der Symmetrie $\{C, A_x^2 \sim A_y^2 \sim A_z^2\}$. Nr. 53b—55b und Nr. 53c bis 56c der Symmetrie $\{E_{xy}, A_x^2 \sim A_y^2 \sim A_z^2\}$, die mit $\{S_x, S_y\}$ äquivalent ist.

Abteilung B. Vierzählige Achsen.

Wie die Abteilungen B der früheren Klassen aus denen A durch die Einführung von zweizähligen Querachsen zu den in den A allein vorhandenen Hauptachsen abgeleitet wurden, so läßt sich der Übergang von den Scharen orthogonaler zweizähliger zu solchen vierzähliger Achsen ebenfalls durch Hinzunahme von weiteren zweizähligen Achsen zu den ersteren ausführen, die in mancher Hinsicht den früheren Querachsen analog auftreten, insbesondere natürlich auch bezüglich Lage und Art denselben Bedingungen genügen müssen, durch ihre Deckbewegungen vorhandene Achsen nur in die Lagen gleichartiger zu bringen. Die Möglichkeit, durch Einfügung neuer zweizähliger Achsen vorhandene zweizählige zu vierzähligen zu machen, beruht wesentlich auf dem unschwer zu beweisenden Satz, daß die Kombination zweier zweizähliger Drehachsen $\mathfrak{U}(2,0)$ und $\mathfrak{B}(2,0)$, die einen Winkel $2\pi/m$ einschließen, das Auftreten einer Schraubenachse $\mathfrak{S}$ im gemeinsamen Lot l beider Achsen bedingt, die bei einer Drehung $4\pi/m$ eine Schiebung $= 2l$ liefert, unter l die Länge dieses Lotes verstanden. Ist also z. B. $m=8$, d. h. schließen die beiden Achsen den Winkel 45° ein, und ist das Lot $l = \frac{1}{4}c$, dann ist bei 90° Drehung die Schiebung $= \frac{1}{2}c$, d. h. die resultierende Schraubenachse hat den Charakter $\mathfrak{S}(4,2)$. Ist $l=0$, d. h. schneiden sich die beiden Achsen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$, so kommt man zu einem Fall der Kristallographie, und die resultierende Achse ist $\mathfrak{S}(4,0)$. Hieraus ergibt sich, daß man die orthogonalen zweizähligen Drehachsen der Typen Nr. 53—57 zu vierzähligen Drehachsen machen kann, wenn man sie schneidende, zu vierzähligen Schraubenachsen, wenn man von ihnen um $\frac{1}{4}a$ oder $\frac{1}{8}a$ entfernte zweizählige Drehachsen hinzufügt, die mit den vorhandenen Winkel von 45° einschließen. Für diese Querachsen sind hiermit die Richtungen der Flächendiagonalen der in den Fig. 61—65 dargestellten Achtelwürfel vorgeschrieben, und die Forderung, daß ihre Einführung keine neue Achsen bewirken darf, begrenzt die Möglichkeiten ihrer

Lage für die Typen 53, 54, 55 auf solche durch eine Ecke oder durch das Zentrum des Würfels, für die Typen 56 und 57 auf solche durch die Punkte mitten zwischen Zentrum und Ecke auf einer dreizähligen Achse. So liefern Nr. 53, 55, 57 je zwei verschiedene, Nr. 54 und 56 je zwei gleichwertige Anordnungen, im ganzen also acht.

Dieser methodische Weg, den Schönflies eingeschlagen hat, gibt die Resultate vielleicht nicht so unmittelbar anschaulich, wie der zuvor von Sohncke benutzte, der deshalb hier bevorzugt werden soll. Sohncke geht von den Typen der Abteilung IV B aus, die vierzählige Hauptachsen und zweizählige Querachsen besitzen, und untersucht, in welchen Fällen man derartige Querachsen vierzählig machen kann, ohne das Hauptachsensystem dadurch zu stören. Allgemein gilt nämlich folgendes.

Eine Achse $\mathfrak{U}(4,0)$ oder $\mathfrak{U}(4,2)$ ist von selbst gleichzeitig auch zweizählige Drehachse $(2,0)$; für erstere ist das unmittelbar klar, für letztere ergibt es sich leicht, weil hier die Drehung um 180° eine Schiebung verursacht, die Deckschiebung ist. Eine Achse $\mathfrak{U}(4, \pm 1)$ gibt bei Drehung um 180° dasselbe Resultat, wie eine Achse vom Charakter $(2,1)$. Hieraus folgt denn, daß ohne Störung des Vertikalachsensystems Querdrehachsen $\mathfrak{D}(2,0)$ den Charakter $(4,0)$ oder $(4,2)$, Querschraubenachsen $\mathfrak{P}(2,1)$ den Charakter $(4, \pm 1)$ beigelegt erhalten dürfen.

Es ergeben sich hiernach die folgenden allgemeinen Bedingungen für die Zulässigkeit der Erweiterung eines der Systeme aus Klasse IV Abteilung B zu einem solchen mit gekreuzten vierzähligen Achsen:

Das System der Querachsen $\mathfrak{D}_a(2,0)$ und $\mathfrak{P}_a(2,1)$ bzw. $\mathfrak{D}_b(2,0)$ und $\mathfrak{P}_b(2,1)$ muß durch Drehung oder Schraubung um eine zu a bzw. b parallele Achse bei geeigneter Spezialisierung der Länge c mit dem System der Vertikalachsen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zur Deckung gebracht werden können, derart, daß die $\mathfrak{D}(2,0)$ in zweizählige Drehachsen oder vierzählige Achsen von dem Charakter $(4,0)$ oder $(4,2)$, die $\mathfrak{P}(2,1)$ in zweizählige oder vierzählige Schraubenachsen, letztere von dem Charakter $(4, \pm 1)$ und halber Schiebungsgröße, hineinfallen.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so erhält man das gesuchte reguläre Achsensystem einfach dadurch, daß man in dem bezüglichen Typ aus IV B den Querachsen die Natur derjenigen Vertikalachsen beilegt, in welche sie bei der beschriebenen Deckoperation hineinfallen. Eine diagonale Drehachse $\mathfrak{D}(3,0)$ entsteht dann von selbst. Die Strukturformel des Ausgangstyps liefert bei angemessener Umdeutung unmittelbar die Strukturformel des neuen Typs.

Den obigen Bedingungen genügen nun von den Typen IV B die Nr. 33—39, darunter 33 und 34 auf zwei Weisen, so daß wiederum 8 neue Typen entstehen. Die folgende Entwicklung wird der Reihe nach an Nr. 35, 36, 33, 34, 37/38 anknüpfen, deren Achsensysteme in den Fig. 47, 48, 45, 46, 49 dargestellt sind. Sollen die Achsen $\mathfrak{D}_0$ und $\mathfrak{P}_0$ (parallel den Grundkanten der in jenen Figuren dargestellten Prismen) mit den Vertikalachsen zur Deckung gebracht werden, so kann man die Figuren ohne weiteres benutzen, indem man nur die Höhendimension (also c) nach Bedürfnis verändert, um zur Würfel-form zu gelangen. Bei Verwertung der Achsen $\mathfrak{D}_a$ und $\mathfrak{P}_a$ (parallel den Diagonalen der Grundfläche) verfährt man am besten so, daß man die in den Figuren dargestellten Prismen nach den vier Seitenflächen so weit fortgesetzt denkt, daß ein Prisma zwischen vier Vertikalachsen $\mathfrak{C}$ entsteht mit Achsen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in den Mittellinien der Seitenflächen, dies vergrößerte Prisma durch die geforderte Veränderung der Höhe zum Würfel macht und dann die Deckung der Quer- in die Vertikalachsen vornimmt. Nach diesen allgemeinen Regeln ist es leicht, die neuen regulären Typen zu erhalten. Ihre figürliche Darstellung geschieht durch Wiedergabe eines Achtelwürfels, durch dessen vordere untere Ecke eine Achse $\mathfrak{D}(3,0)$ geht. Die Wiedergabe der Achsen ist die frühere. (— Drehachsen $(2,0)$ oder $(4,0)$, — — Schraubachsen $(2,1)$, — · — · Schraubachsen $(4,1)$, — · · — · Schraubachsen $(4,2)$.) Im Interesse der Übersichtlichkeit beschränken sich die Figuren auf die Darstellung der zu den Kanten des Achtelwürfels parallelen Achsen.

Die Strukturformel $\mathfrak{A}_1(4,0)$, $\mathfrak{A}_2(4,0)$ stellt (und zwar ohne Zuhilfenahme von $\mathfrak{A}_3(4,0)$ oder $\mathfrak{D}(3,0)$) ein System von 24 Atomen dar, die gegeneinander liegen wie die Flächenpole eines Pentagonikositetraeders. Dies System nennt Sohncke den regulären „Vierundzwanzigpunkter“. Er spielt in dieser Abteilung die analoge Rolle wie der Zwölfpunkter in der vorigen.

Fig. 66, die (wie 60) als stereographische Projektion der beiden Halbkugeln zu verstehen ist, gibt in den $\bullet$ und $\circ$ die beiden enantiomorphen Formen dieses Punktsystems. Tritt ein im Kugelmittelpunkt liegender Spiegelpunkt

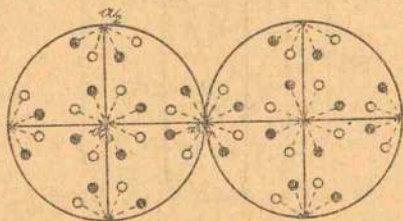


Fig. 66.

hinzu, so entsteht der aus den $\bullet$ und $\circ$ zusammengesetzte zentrische Achtundvierzigpunkter. Liegt ein Spiegelpunkt außerhalb, so entstehen beide Formen in korrespondierenden Lagen.

Wir gehen nun zu den einzelnen Typen über. Bei Nr. 35, $\mathfrak{A}(4,0)$, $\mathfrak{D}_0(2,0)$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, lassen sich gemäß Fig. 47, wenn man das dargestellte Prisma nach Obigem zu einem solchen mit den Grundkanten $\mathfrak{a}$ erweitert und (das Doppelte der gezeichneten Höhe) $|\mathfrak{c}| = |\mathfrak{a}|$ macht, durch eine Drehung um die Mittellinie $\mathfrak{a}$ der horizontalen Grundfläche die Querachsen $\mathfrak{D}_a$ mit den Vertikalachsen in verlangter Weise zur Deckung bringen. Das Prisma liefert direkt die Hälfte des Vollwürfels des neuen Typs, dessen Kanten statt $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ wieder $\mathfrak{a}_h$ heißen mögen; daraus folgen für die Deckschiebungen die Beträge $\mathfrak{a}_h$.

Nr. 58. Kubisches Vierundzwanzigpunktersystem.

Formel: $\mathfrak{A}_3(4,0)$, $\mathfrak{D}(3,0)$, $\mathfrak{a}_3$. Der Aufbau besteht aus Vierundzwanzigpunktern, deren Zentren in den Knotenpunkten eines (leeren) Würfelgitters mit den Grundstrecken $\mathfrak{a}_h$ liegen, und deren Achsen in die $\mathfrak{a}_h$ fallen. Alle Kanten des Achtelwürfels tragen Drehachsen; die durch den o-Punkt gehenden entsprechen $\mathfrak{A}(4,0)$, die durch

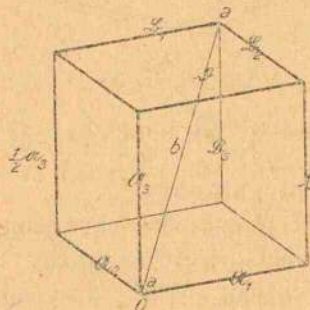


Fig. 67. Nr. 58.

die Gegenecke $\mathfrak{B}(4,0)$, die Zwischenkanten $\mathfrak{C}(2,0)$ (Fig. 67). (Sch. $\mathfrak{D}^1$.)

Nr. 58a. Spiegelpunkt

- im Schnittpunkt dreier Achsen $\mathfrak{A}_h$ oder $\mathfrak{B}_h$; (Sch. $\mathfrak{D}_h^1$),
- im Mittelpunkt der zwei solche Schnittpunkte verbindenden Diagonale. (Sch. $\mathfrak{D}_h^2$.)

Fig. 48, die sich auf den Typ Nr. 36 mit $\mathfrak{A}(4,0)$, $\mathfrak{B}(4,2)$, $\mathfrak{C}(2,1)$, $\mathfrak{D}_0(2,0)$ bezieht, läßt erkennen, daß aus diesem Typ zwei reguläre zu gewinnen sind. Das System der (von links nach rechts gerichteten) Querachsen $\mathfrak{D}_0(2,0)$ und $\mathfrak{P}_0(2,1)$ läßt sich durch Drehung um die horizontale, von hinten nach vorn gehende, Mittellinie des Prismas mit den Vertikalachsen in richtiger

Weise zur Deckung bringen, wenn $\frac{1}{2}c = d$. Das Prisma in der Figur wird durch $d_h = \frac{1}{2}a_h$ zum Achtelwürfel des neuen Typs; die Deckschiebungen, $a + \frac{1}{2}c$ und c nehmen wegen $a = d_1 + d_2$, $c = a_3$ die Form $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$ und a_3 an. So nach ergibt sich der neue Typ

Nr. 59. Rhombendodekaedrisches Vierundzwanzigpunktersystem.

Formel: $\mathcal{U}_3(4,0)$, $\mathcal{D}(3,0)$, a_3 , $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$. Die Anordnung besteht aus Vierundzwanzigpunktern, mit den Zentren in den Knotenpunkten eines zentrierten Würfelgitters von den Grundstrecken a_h .

Der Achtelwürfel trägt in den je drei durch zwei gegenüberliegende Ecken gehenden Kanten Achsen $\mathcal{U}_h(4,0)$, in den übrigen Kanten $\mathcal{B}_h(4,2)$. Die Verbindungslinien der Zentren gegenüber-

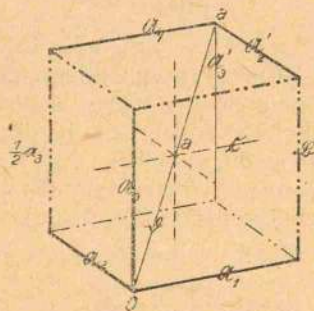


Fig. 68. Nr. 59.

liegender Flächen sind Achsen $\mathcal{C}_h(2,1)$ (Fig. 68). (Sch. $\mathcal{D}^5$).

Nr. 59a. Spiegelpunkt

- a) in einer ausgezeichneten Ecke, oder im Mittelpunkt des Achtelwürfels. (Sch. $\mathcal{D}_h^9$.)

Zu dem zweiten aus Nr. 36 zu gewinnenden regulären Typ gelangt man von dem nach S. 451 erweiterten Parallelepipedon in Fig. 48. Im Falle $\frac{1}{2}c = a$ läßt sich das System der Querachsen $\mathcal{Q}_a(2,0)$ und $\mathcal{P}_a(2,1)$ durch eine Drehung um die zu a parallele Achse durch das Zentrum

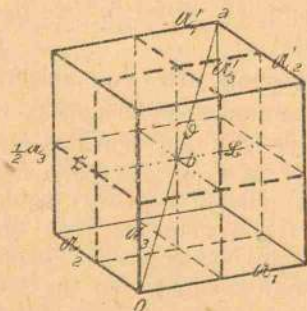


Fig. 69. Nr. 60.

der Mittelfläche in verlangter Weise mit den Vertikalachsen zur Deckung bringen.

Das erweiterte Prisma der Fig. 48 wird zum Achtelwürfel des neuen Typs, der (bei einer um $\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}c$ gegen Fig. 48 verschobenen Begrenzung) sich in der durch Fig. 69 wieder gegebenen regulären Form darstellt. Die Deckschiebungen $a + \frac{1}{2}c$, c gewinnen bei Benützung der Beziehungen $c = a_3$, $a = \frac{1}{2}a_1$ zu den Kanten a_h des Vollwürfels sogleich die neue Form.

Nr. 60. Oktaedrisches Vierundzwanzigpunktersystem.

Formel: $\mathcal{U}_3(4,0)$, $\mathcal{D}(3,0)$, $\frac{1}{2}(a_1 + a_3)$, a_3 . Alle Kanten des Achsenwürfels tragen Achsen vom Typ $\mathcal{U}(4,0)$, die Mittellinien der Flächen solche vom Typ $\mathcal{C}(2,1)$, das Achsenkreuz durch den Mittelpunkt solche $\mathcal{B}(4,2)$. Der Aufbau läßt sich auffassen als bestehend aus regulären Vierundzwanzigpunktern, mit ihren Mittelpunkten in den Knotenpunkten eines flächenzentrierten kubischen Raumgitters von den Grundstrecken a_h liegend, mit ihren Achsen nach den a_h orientiert. (Sch. $\mathcal{D}^3$).

Nr. 60a. Spiegelpunkt

- a) im Schnittpunkt von drei Achsen $\mathcal{U}_h(4,0)$ (Sch. $\mathcal{D}_h^3$),
b) im Schnittpunkt von drei Achsen $\mathcal{B}_h(4,2)$. (Sch. $\mathcal{D}_h^4$).

Auch der Typ Nr. 33 mit $\mathcal{U}(4, \pm 1)$, $\mathcal{B}(4, \mp 1)$, $\mathcal{C}(2,0)$ kann auf zwei Weisen so umgestaltet werden, daß zwei (bzw. drei) zueinander normale Scharen vierzähliger Achsen entstehen. Dreht man nämlich in Fig. 45 das System der Querachsen um die zu d parallele Mittellinie $\mathcal{P}_d$ des Prismas unter rechtswinkliger Schiebung um $\frac{1}{2}d$, so fallen die Querdreh- und -schraubenachsen $\mathcal{Q}_d$ und $\mathcal{P}_d$ in vertikale Dreh- und Schraubenachsen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{U}$, falls nur $\frac{1}{2}c = d$. Begrenzt man weiter das Gebiet vorn und hinten, statt wie in Fig. 45 durch Ebenen durch $\mathcal{U}\mathcal{B}$, durch solche, die Achsen $\mathcal{C}$ enthalten, so gelangt man zu dem System vierzähliger Dreh- und Schraubenachsen, wie es Fig. 70 darstellt. Aus den Deck-

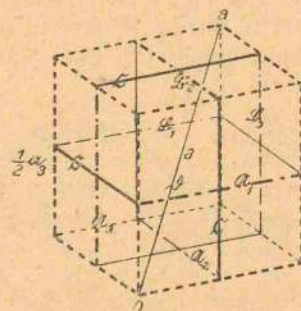


Fig. 70. Nr. 61.

schiebungen $a + \frac{1}{2}c$, c von Nr. 33 werden bei Einführung der Kanten a_h des Vollwürfels jetzt $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$ und a_3 .

Nr. 61. Reguläres Gegenschraubensystem erster Art.

Formel: $\mathcal{A}_3(4, \pm 1)$, $\mathcal{D}(3, 0)$, a_3 , $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$. Die Achse $\mathcal{A}_3(4, \pm 1)$ ist um $\frac{1}{4}a_2$ vom o-Punkt entfernt, die $\mathcal{B}_3(4, \mp 1)$ um $\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_2$. Dazu kommen Achsen $\mathcal{C}_1(2, 0)$ normal zu $\mathcal{A}_3$ und $\mathcal{B}_3$ in den Mittellinien der Würfelflächen. Die übrigen Achsen folgen daraus gemäß $\mathcal{D}(3, 0)$. Eine zweite Achsenverteilung mit den Abständen $\frac{1}{4}a_1$ und $\frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{4}a_1$ für $\mathcal{A}_3$ und $\mathcal{B}_3$ ist nur in der Aufstellung verschieden. Ein Drehungssinn ist nicht vorhanden. Das elementare Atomsystem besteht (wegen der die $\mathcal{A}_h$ schneidenden Achsen $\mathcal{C}_h(2, 0)$) aus drei durch $\mathcal{D}(3, 0)$ verknüpften, zusammengesetzten einfach gewundenen Vierpunktern (vom Typ Fig. 42) auf den Achsen $\mathcal{A}_h$. Dieser „Vierundzwanzigpunkter“ wiederholt sich bei allen Knotenpunkten eines zentrierten kubischen Raumgitters. (Sch. $\mathcal{D}^8$).

Nr. 61a. Spiegelpunkt

- a) in einer Ecke oder im Mittelpunkt des Würfels, dessen Flächen die sämtlichen Achsen tragen. (Sch. $\mathcal{D}_h^{10}$).

Ein zweiter Typ leitet sich aus Nr. 33 am einfachsten ab, wenn man das nach S. 451 erweiterte Prisma in Fig. 45 so begrenzt, daß die Grundflächen um $\frac{1}{2}c$ unterhalb der in der Figur gezeichneten liegen. Dann lassen sich bei $\frac{1}{2}c = a$ die Querachsen $\mathcal{D}_a(2, 0)$ und $\mathcal{B}_a(2, 1)$ durch Drehung um eine zu a parallele Mittellinie mit den Vertikalachsen $\mathcal{C}(2, 0)$ und $\mathcal{A}(4, \pm 1)$, $\mathcal{B}(4, \mp 1)$ zur Deckung bringen. Hieraus folgt eine Achsenverteilung, die für einen Achtelwürfel mit Drehachsen in den Kanten durch Fig. 71 dargestellt wird. Die Deckbewegung

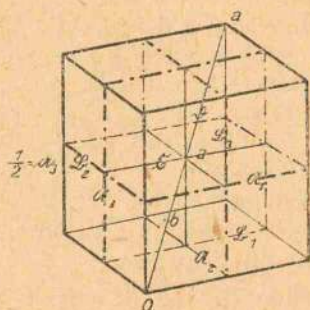


Fig. 71. Nr. 62.

$a + \frac{1}{2}c$, c wird, wenn man wieder die Kanten a_h des Vollwürfels einführt, zu $a_1 + \frac{1}{2}a_3$, a_3 .

Nr. 62. Reguläres Gegenschraubensystem zweiter Art.

Formel: $\mathcal{A}_3(4, \pm 1)$, $\mathcal{D}(3, 0)$, $\frac{1}{2}(a_1 + a_3)$, a_3 . Die Achse $\mathcal{A}_3(4, \pm 1)$ liegt wieder um $\frac{1}{4}a_2$ (oder $\frac{1}{4}a_1$), die $\mathcal{B}_3(4, \mp 1)$ um $\frac{1}{4}a_1$ (oder $\frac{1}{4}a_2$) vom o-Punkt; zu ihnen kommen parallele Achsen in den Gegenflächen des Achtelwürfels. Endlich Drehachsen $\mathcal{C}_3(2, 0)$ in den bez. Würfelfkanten und der Mittellinie. Die andern $\mathcal{A}_h$ und $\mathcal{B}_h$ folgen aus diesen durch $\mathcal{D}(3, 0)$. Das elementare Atomsystem ist dasselbe wie in Nr. 61; es wiederholt sich aber hier bei allen Knotenpunkten eines flächenzentrischen kubischen Raumgitters. (Sch. $\mathcal{D}^4$).

Nr. 62a. Spiegelpunkt

- a) im Schnittpunkt dreier Achsen $\mathcal{C}(2, 0)$; (Sch. $\mathcal{D}_h^7$),
b) in der Mitte der Diagonale zwischen zwei derartigen Schnittpunkten. (Sch. $\mathcal{D}_h^8$).

Das Achsensystem des Typs Nr. 34 mit $\mathcal{A}(4, 2)$, $\mathcal{B}(4, 2)$, $\mathcal{C}(2, 0)$ in Fig. 46 führt mit Hilfe des nach S. 451 bis zu den benachbarten $\mathcal{C}$ -Achsen erweiterten Parallelepiped zu einem weiteren regulären Typ. Bei $c = a$ wird das System der $\mathcal{D}_a$ mit den Vertikalachsen in verlangter Weise deckbar. Das Parallelepiped liefert

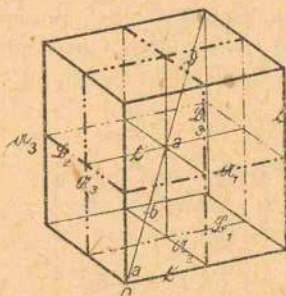


Fig. 72. Nr. 63.

hier den Vollwürfel (Fig. 72); die Deckbewegung a , c wird zu a_1 , a_3 .

Nr. 63. Reguläres zweigängiges Vierpunktschraubensystem.

Formel: $\mathcal{A}_3(4, 2)$, $\mathcal{D}(3, 0)$, a_1 , a_3 . $\mathcal{A}_3(4, 2)$ im Abstand

Verknüpfung durch $\mathfrak{D}(3,0)$; dasselbe wiederholt sich für alle Knotenpunkte eines leeren kubischen Raumgitters. (Sch. $\mathfrak{D}^2$.)

Nr. 63a. Spiegelpunkt

- a) in einem Schnittpunkt von $\mathfrak{D}(3,0)$ mit drei $\mathfrak{C}(2,0)$; (Sch. $\mathfrak{D}_h^3$),
- b) in der Mitte der Diagonale zwischen zwei benachbarten Schnittpunkten. (Sch. $\mathfrak{D}_h^4$.)

Das Querachsensystem von Nr. 37/38 mit $\mathfrak{A}(4, \pm 1)$, $\mathfrak{B}(4, \pm 1)$, $\mathfrak{C}(2,1)$ in Fig. 49 enthält in der Ebene, die um $\frac{1}{8}c$ über der Grundfläche liegt, Querschraubenachsen $\mathfrak{P}_a(2,1)$ im gegenseitigen Abstand $\frac{1}{2}a$. Dasselbe System wiederholt sich um $\frac{1}{2}c$ darunter und darüber. Erweitert man die Konstruktion auf ein Prisma, das einerseits vier Achsen $\mathfrak{C}(2,0)$ im relativen Abstand a zu Seitenkanten, andererseits die Querschnitte $-\frac{3}{8}c$ und $+\frac{5}{8}c$ zu Grundflächen hat, und macht dann $c=a$, so kann man durch Drehen um die in der Mittelfläche des erweiterten Prismas liegende, von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{A}$ verlaufende Diagonale und Schiebung um $\pm \frac{1}{4}a$ Querachsen $\mathfrak{P}_a(2,1)$ in alle Vertikalachsen bringen; die $\mathfrak{P}_a(2,1)$ können also auf zwei Weisen mit Achsen vom Charakter $(4, \pm 1)$ vertauscht werden. So entsteht ein Typ, für den das erweiterte Prisma den Vollwürfel liefert, und bei dem drei orthogonale Systeme Achsen von den Typen $\mathfrak{A}(4, \pm 1)$, $\mathfrak{B}(4, \pm 1)$, $\mathfrak{C}(2,1)$ in Abständen $\frac{1}{4}a$ aneinander vorbeigehen. Das komplizierte Achsensystem ist in Fig. 73 durch

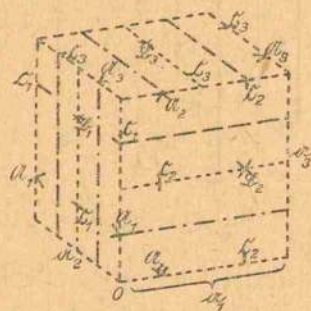


Fig. 73.

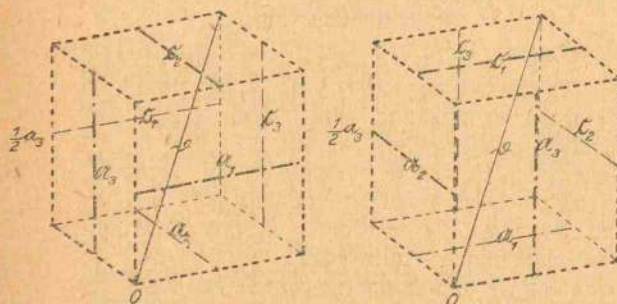


Fig. 74 u. 75. Nr. 64 u. 65.

Wiedergabe der Lagen von Achsen und von Schnittpunkten solcher in drei Flächen des Vollwürfels veranschaulicht. Das gesamte Achsensystem ist mit seinem Spiegelbild nicht zur Deckung zu bringen, so wenig wie die Achsen vom Typ $(4, +1)$ und $(4, -1)$. Fig. 74 und 75 geben die Achtelwürfel für die beiden enantiomorphen Ausbildungen wieder.

Nr. 64/65. Rechtes und linkes reguläres Vierpunktschraubensystem.

Formel: $\mathfrak{A}_3(4, \pm 1)$, $\mathfrak{D}(3,0)$, a_1, a_3 . Der elementare Atomaufbau besteht aus einfach gewundenen Vierpunktern um die Achsen $\mathfrak{A}_h$, die untereinander durch $\mathfrak{D}(3,0)$ und mit ähnlichen um die Achsen $\mathfrak{B}_h$ durch die zu beiden normalen $\mathfrak{C}_h$ verknüpft sind. Dieses System von $6 \times 4 = 24$ Atomen wiederholt sich bei allen Knotenpunkten eines leeren kubischen Raumgitters. (Sch. $\mathfrak{D}^6$ und $\mathfrak{D}^7$.)

§ 10. Gruppierung nach kristallographischen Symmetrien.

Wie schon angekündigt, sollen die im vorstehenden an die Sohnckeschen 65 Typen angeschlossenen 230 Strukturen nun den 32 kristallographischen Gruppen eingeordnet werden; dabei mögen — was für die Anwendung vorteilhaft ist — Unterabteilungen gemäß dem Charakter der Deckschiebungen oder (was nach § 5 dasselbe ist) nach dem Charakter des ihnen entsprechenden Bravais'schen Raumgitters eingeführt werden. Die Symbole Γ für diese letzteren sind die nach S. 241 von Schönflies vorgeschlagenen.

I. Triklines System.

1. Holodrie $\{C\}$.

Γ_C : Nr. 1a.

2. Hemiedrie $\{O\}$.

Γ_O : Nr. 1.

II. Monoklines System.

3. Holodrie $\{C, A_x^2 \text{ oder } C, E_x\}$.

Γ_m : Nr. 2a, a und b; Nr. 3a, a und b.

Γ_m' : Nr. 4a, a und b.

4. Hemiedrie $\{E_x\}$.

Γ_m : Nr. 1'β, a; Nr. 1'γ, a; Γ_m' : Nr. 1''β, a; Nr. 1''γ, a.

5. Hemimorphie $\{A_x^2\}$.

Γ_m : Nr. 2 und 3; Γ_m' : Nr. 4.

III. Rhombisches System.

6. Holodrie $\{C, A_x^2, A_y^2 \text{ oder } C, A_x^2, E_x\}$.

Γ_v : Nr. 5a, a, b, c und d; Nr. 6a, a, b, c und d; Nr. 12a, a, b, c, d, e und f; Nr. 13a, a und b.

Γ_v' : Nr. 7a, a, b, c und d; Nr. 9a, a und b.

Γ_v'' : Nr. 8 α , a und b; Γ_v''' : Nr. 10 α ,
a und b; Nr. 11 α , a und b.

7. Hemiedrie $\{A_x^2, A_y^2\}$.

Γ_v : Nr. 5, 6, 12, 13; Γ_v' : Nr. 7, 9;
 Γ_v'' : Nr. 8; Γ_v''' : Nr. 10, 11.

8. Hemimorphie $\{A_x^2, E_x\}$.

Γ_v : Nr. 2' β , a und b; Nr. 2' γ , a, b, c, d;
Nr. 3' β , a und b; Nr. 3' γ , a und b.
 Γ_v' : Nr. 2'' β , a; Nr. 2'' γ , a; Nr. 3'' β , a;
Nr. 4'' β , a und b; Nr. 4'' γ , a und b.
 Γ_v'' : Nr. 4''' β , a; Nr. 4''' γ , a; Γ_v''' : Nr. 4''' β ,
a und b; Nr. 4''' γ , a und b.

IV. Trigonales System.

9. Holodrie $\{C, A_x^3, A_y^3 \text{ oder } C, A_x^3, E_x\}$.

Γ_h : Nr. 20 α , a und b; Nr. 24 α , a und b.
 Γ_{rh} : Nr. 21 α , a und b.

10. Enantiomorphe Hemiedrie $\{A_x^3, A_y^3\}$.

Γ_h : Nr. 18/19, 20, 22/23, 24; Γ_{rh} :
Nr. 21.

11. Hemimorphe Hemiedrie $\{A_x^3, E_x\}$.

Γ_h : Nr. 16 β , a und b; Nr. 16 γ , a und b.
 Γ_{rh} : Nr. 17 β , a; Nr. 17 γ , a.

12. Paramorphe Hemiedrie $\{C, A_x^3\}$.

Γ_h : Nr. 16 α , a; Γ_{rh} : Nr. 17 α , a.

13. Tetartoedrie $\{A_x^3\}$.

Γ_h : Nr. 14/15, 16; Γ_{rh} : Nr. 17.

V. Tetragonales System.

14. Holodrie $\{C, A_x^4, A_y^4 \text{ oder } C, A_x^4, E_x\}$.

Γ_q : Nr. 34 α , a, b, c, d; Nr. 35 α , a, b,
c, d; Nr. 39 α , a, b, c, d; Nr. 40 α ,
a, b, c, d.

Γ_q' : Nr. 33 α , a und b; Nr. 36 α , a und b.

15. Enantiomorphe Hemiedrie $\{A_x^4, A_y^4\}$.

Γ_q : Nr. 31/32, 34, 35, 37/38, 39, 40.
 Γ_q' : Nr. 33, 36.

16. Hemimorphe Hemiedrie $\{A_x^4, E_x\}$.

Γ_q : Nr. 28 β , a und b; Nr. 28 γ , a und b;
Nr. 29 β , a und b; Nr. 29 γ , a und b.

Γ_q' : Nr. 27 β , a; Nr. 27 γ , a; Nr. 30 β , a;
Nr. 30 γ , a.

17. Paramorphe Hemiedrie $\{C, A_x^4\}$.

Γ_q : Nr. 28 α , a und b; Nr. 29 α , a und b.
 Γ_q' : Nr. 27 α , a; Nr. 30 α , a.

18. Tetartoedrie $\{A_x^4\}$.

Γ_q : Nr. 25/26, 28, 29; Γ_q' : Nr. 27, 30.

19. Hemiedrie mit Spiegelachse

$\{S, A_x^2 \text{ oder } A_x^2, A_y^2, E_{xy}\}$.

Γ_q : Nr. 5' β , a; Nr. 5' γ , a; Nr. 7' β , a;
Nr. 7' γ , a, b, c; Nr. 12' β , a; Nr. 12' γ , a.

Γ_q' : Nr. 8' β , a; Nr. 8' γ , a; Nr. 10' β , a;
Nr. 11' γ , a.

20. Tetartoedrie mit Spiegelachse $\{S_x\}$.

Γ_q : Nr. 2''' δ , a; Γ_q' : Nr. 4''' δ , a.

VI. Hexagonales System.

21. Holodrie $\{C, A_x^6, A_y^6 \text{ oder } C, A_x^6, E_x\}$.

Γ_h : Nr. 51 α , a und b; Nr. 52 α , a und b.

22. Enantiomorphe Hemiedrie $\{A_x^6, A_y^6\}$.

Γ_h : Nr. 47/48, 49/50, 51, 52.

23. Hemimorphe Hemiedrie $\{A_x^6, E_x\}$.

Γ_h : Nr. 45 β , a und b; Nr. 46 β , a;
Nr. 46 γ , a.

24. Paramorphe Hemiedrie $\{C, A_x^6\}$.

Γ_h : Nr. 45 α , a; Nr. 46 α , a.

25. Tetartoedrie $\{A_x^6\}$.

Γ_h : Nr. 41/42, 43/44, 45, 46.

26. Hemiedrie mit dreizähliger Hauptachse

$\{A_x^3, A_y^3, E_x\}$.

Γ_h : Nr. 20 β , a und b; Nr. 24 β , a und b.

27. Tetartoedrie mit dreizähliger Hauptachse

$\{A_x^3, E_x\}$.

Γ_h : Nr. 16 β , c.

VII. Reguläres System.

28. Holodrie $\{C, A_x^4, A_y^4\}$.

Γ_c : Nr. 58 α , a und b; Nr. 63 α , a und b.

Γ_c' : Nr. 60 α , a und b; Nr. 62 α , a und b.

Γ_c'' : Nr. 59 α , a; Nr. 61 α , a.

29. Enantiomorphe Hemiedrie $\{A_x^4, A_y^4\}$.

Γ_c : Nr. 58, 63, 64/65; Γ_c' : Nr. 60, 62.

Γ_c'' : Nr. 59, 61.

30. Hemimorphe Hemiedrie $\{S_x, S_y \text{ oder } E_{xy}, A_x^2 \sim A_y^2 \sim A_z^2\}$.

Γ_c : Nr. 53 β , a; Nr. 53 γ , a.

Γ_c' : Nr. 55 β , a; Nr. 55 γ , a.

Γ_c'' : Nr. 54 β , a; Nr. 56 γ , a.

31. Paramorphe Hemiedrie

$\{C, A_x^2 \sim A_y^2 \sim A_z^2\}$.

Γ_c : Nr. 53 α , a und b; Nr. 57 α , a.

Γ_c' : Nr. 55 α , a und b.

Γ_c'' : Nr. 54 α , a; Nr. 56 α , a.

32. Tetartoedrie $\{A_x^2 \sim A_y^2 \sim A_z^2\}$.

Γ_c : Nr. 53, 57; Γ_c' : Nr. 55.

Γ_c'' : Nr. 54, 56.

§ 11. Allgemeine Gesichtspunkte für die
Vergleichung beobachteter Strukturen
mit der Theorie.

In den folgenden Abschnitten sollen einige
Anwendungen der im vorstehenden zusammen-
gestellten Resultate der Strukturtheorie gemacht
werden. Es handelt sich darum, einmal beob-
achtete Strukturen mit den theoretischen Typen
zu vergleichen und ihnen einzuordnen, sodann
diese Vergleichung zu Schlüssen über die Sym-
metrie der Atome zu benutzen.

In bezug auf ersteres mag daran erinnert
werden, daß in der Zusammenstellung des

vorigen Paragraphen jeder der 32 kristallographischen Gruppen diejenigen Strukturtypen zugeordnet sind, die bei beliebiger Symmetrie der einzelnen Atome, bei beliebiger Lage und Orientierung des Ausgangsatoms gegen die Dreh- und Schraubenachsen die Symmetrien der Kristallgruppe besitzen. Es können aber Repräsentanten der höher symmetrischen Kristalle auch Atomanordnungen von im allgemeinen niedrigerer Symmetrie aufweisen, die durch spezielle Bildung, Lage und Orientierung der Atome diejenige spezielle Ausgestaltung erhalten haben, die sie mit der höher symmetrischen Kristallgruppe vereinbar machen. Die in der vorstehenden Zusammenstellung den 32 Gruppen zugeteilten Strukturen sind also keineswegs die einzigen ihnen entsprechenden. Zur Deutung des beobachteten Atomaufbaues eines holoedrischen Kristalles wird man daher z. B. auch die gewissen hemiedrischen Formen des Systems entsprechenden Strukturtypen heranziehen dürfen, die bei spezieller Ausbildung mit der holoedrischen Symmetrie verträglich sind. Es wird auch gelegentlich eine Mehrdeutigkeit vorliegen, insofern mehrere Strukturtypen durch Spezialisierungen mit der beobachteten Anordnung zur Übereinstimmung gelangen können. Dies wird besonders dann stattfinden, wenn in Wirklichkeit die Anzahl der Atome des Elementarbereichs (wie oft stattfindet) beträchtlich kleiner ist, als die nach den Symmetrieelementen bei beliebiger Lage des Ausgangsatoms abzuleitende, von den theoretischen Atomen also eine größere Zahl zusammenfällt. Welchen von mehreren mit der Beobachtung vereinbaren Typen man schließlich zur Deutung heranziehen wird, ist bis zu einem gewissen Grade Geschmacksache. Im folgenden werden die Sohnckeschen Typen, die nur Deckoperationen erster Art zulassen, in den Vordergrund gestellt und gezeigt, daß man mit denselben gegenüber der erdrückenden Mehrzahl der beobachteten Strukturen auskommt. Die Tatsache, daß eine Anordnung eine Deckoperation zweiter Art zuläßt, ist keineswegs ein Beweis dafür, daß diese Operation zur Ableitung der Struktur aus einem Ausgangsatom nötig ist. Wenn z. B. die von Bragg angegebene Struktur des Diamants als ein überzeugender Beweis für die Notwendigkeit der erweiterten Strukturtheorie hingestellt wird, so liegt dem ein Irrtum zugrunde: die Struktur läßt sich glatt unter einen der Sohnckeschen Typen ordnen.

Da diese Typen die möglichst einfachen sind, so bedeutet ihr Überwiegen auch eine Vereinfachung der Betrachtung. Und wenn geltend gemacht werden sollte, daß bei ihrer Anwendung auf Strukturen mit Spiegelungen den Eigen-

symmetrien der Atome eine wesentliche Rolle zufällt, so ist demgegenüber zu bemerken, daß die erweiterte Theorie doch sehr ähnlich verfährt, indem sie für dasselbe Element entweder zwei Arten von Atomen in sich spiegelbildlich entsprechender Ausbildung, oder aber eine Art mit spiegelbildlicher Eigensymmetrie voraussetzt. —

Bei der Vergleichung einer beobachteten Struktur mit den theoretischen Typen ist natürlich wohl darauf zu achten, daß je nach der Lage des Ausgangsatoms die demselben Typ entsprechenden Anordnungen sich recht verschiedenartig darstellen können. So können für spezielle Lagen des Ausgangsatoms Typen von enantiomorpher Natur diesen Charakter verlieren, und umgekehrt Typen ohne prinzipiellen Drehungssinn, d. h. mit gleichviel und gleichartigen $+$ - und $-$ -Achsen, die Bevorzugung einer Rotationsrichtung zeigen.

Bei Typen, die nebeneinander parallele Schrauben- und Drehungsachsen aufweisen, kann je nach der Lage des Ausgangsatoms der eine oder der andere Charakter dominierend werden.

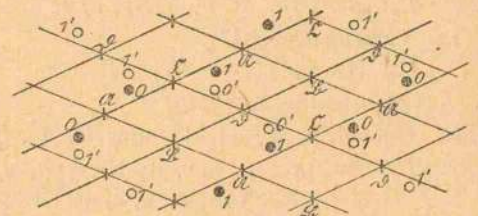


Fig. 76.

Fig. 76 gibt als Beispiel hierfür die Atomanordnung zu Nr. 11 $\mathcal{A}(2,0)$, $\mathcal{D}(2,0)$ bei gleichzeitigen $\mathcal{B}(2,1)$, $\mathcal{C}(2,1)$, $\mathcal{D}(2,0)$. Die schwarzen Punkte entsprechen der Strukturformel ohne Querachse $\mathcal{D}$, die leeren Kreise geben das durch die Querachse Hinzutretende. Absichtlich sind in der Figur die Atome etwa in die Mitte zwischen die Achsen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{C}$ (bzw. $\mathcal{D}$) gelegt. Rückt man sie nahe an $\mathcal{A}$, dann erscheint der Aufbau als aus Atompaaren des Typs (Fig. 5') um die Achsen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ bestehend; rückt man sie näher an $\mathcal{C}$, dann aus Vierpunktern von der Art (Fig. 8') um die Achsen $\mathcal{C}$, und zwar in zwei spiegelbildlichen Ausbildungen. Diese Beispiele weisen darauf hin, daß bei Einordnung einer durch die Beobachtung gelieferten Struktur in die Reihe der 230 Typen einige Vorsicht geübt werden muß. —

Was nun zweitens die Schlüsse angeht, die aus der Vergleichung beobachteter Strukturen mit theoretischen über die Symmetrie der einzelnen Atome gewonnen werden können, so ist dazu allgemein folgendes zu sagen.

Fällt eine beobachtete Struktur mit einer theoretischen in der Weise zusammen, daß erstere für das Elementargebiet die theoretische Maximalzahl der (mit Hilfe der Deckoperationen des Typs aus einem Ausgangsatom abzuleitenden) Atome aufweist, so gestattet ein solcher Befund keinerlei Schlüsse über die Symmetrie der wirklichen Atome. Einzig die relative Orientierung dieser Atome läßt sich dann aus dem theoretischen Typ feststellen. Ist die beobachtete Struktur aber eine Ausartung einer theoretischen, in dem Sinne, daß erstere durch das (natürlich mit den Symmetrieelementen vereinbare) Zusammenrücken mehrerer „theoretischer“ Atome aus der letzteren hervorgeht, so eignet dem wirklichen Atom mindestens diejenige Symmetrie, welche der Komplex der zusammenrückenden theoretischen Atome besitzt. Weist z. B. der theoretische Typ eine n -zählige Drehachse auf, welche demgemäß ebene n -Punkte trägt, und zeigt der beobachtete Typ statt dessen auf der Achse ein einfaches Atom, so ist dieses als durch Zusammenrücken der Atome des n -Punkters entstanden zu betrachten und muß demgemäß eine n -zählige Symmetrieachse besitzen. Es ist aber nicht ausgeschlossen, daß das wirkliche Atom noch andere Symmetrieelemente besitzt, die etwa in andern Kristallen (an deren Aufbau das Atom beteiligt ist) zur Geltung kommen; — der einzelne Kristall liefert nur Auskunft über das Minimum von Elementen, das die spezielle Struktur verlangt.

Weiter kann u. U. die Gesamtsymmetrie des Kristalls eine Ergänzung der aus der Struktur zu gewinnenden Schlüsse verlangen. In dem oben erwähnten Fall einer n -zähligen Drehachse würde z. B. eine Symmetrie $\{C, A_x^n\}$ oder $\{A_x^n, E_x\}$ durch die bloße Annahme der A_x^n für das Atom nicht erreichbar sein. Hier kommen jene Schlußweisen zur Anwendung, deren sich Sohncke (dem Beobachtungen über Strukturen nicht zur Verfügung standen) bedient hat.

§ 12. Diskussion der durch die Beobachtung erschlossenen Strukturen einiger regulärer Kristalle¹⁾.

Wie bereits oben angedeutet, findet sich die auffallende Kleinheit der wirklichen Atomzahlen eines Elementarbereichs, verglichen mit den theoretisch aus den Symmetrien folgen-

den besonders ausgeprägt bei gewissen Kristallen des regulären Systems. Bei den holodrischen Kristallen von *Cu*, *Ag*, *Au* besteht nach der Beobachtung die Struktur aus einem flächenzentrischen kubischen Gitter I_c' mit je einem einfachen Atom in jedem Knotenpunkt; es steht also je ein Atom an Stelle der nach Symmetrie zu erwartenden Zahl von 48. Es ist unzweifelhaft das Natürlichste, diese Struktur als eine Ausartung der Sohnckeschen Nr. 55 oder 60 aufzufassen, bei der der Zwölf- bzw. Vierundzwanzigpunkter die Symmetrie der regulären Holodrie $\{C, A_x^4, A_y^4\}$ hat und zu einem einzigen Atom zusammengeschrumpft ist. —

Bei einer Anzahl von binären Verbindungen¹⁾ — repräsentiert durch *NaCl* und *KCl* —, die regulär holodrisch oder enantiomorph hemiedrisch kristallisieren, bildet nach der Beobachtung jede Atomgattung ein flächenzentrisches Raumgitter I_c' , doch so, daß das eine gegen das andere um $\frac{1}{2}a_x$ verschoben ist. Das Auffallendste an diesem Ergebnis ist, daß dieselbe Struktur für die zwei wesentlich verschiedenen kristallographischen Symmetrien — $\{C, A_x^4, A_y^4\}$ und $\{A_x^4, A_y^4\}$ — gefunden wurde. Den ersten Fall (*NaCl*) kann man auf den soeben besprochenen der Elemente *Cu*, *Ag*, *Au* bis zu einem gewissen Grade zurückführen; die Sohnckeschen Typen Nr. 55 und 60 geben in der Tat bei einem Ausgangsatom in einer Würfecke direkt das flächenzentrische kubische Gitter in der Normallage, bei einem solchen in einer Kantenmitte aber ein ebensolches Gitter in der verschobenen Lage. Man muß dann nur sowohl dem *Na*- wie dem *Cl*-Atom die Symmetrie $\{C, A_x^4, A_y^4\}$ beilegen, um eine mit der Holodrie vereinbare Struktur zu erhalten. Dieses Verhältnis legt offenbar nahe den zweiten Fall (*KCl*) analog aufzufassen, also, da die Symmetrie des *Cl*-Atoms nach dem Verhalten in *NaCl* festliegt, dem *K*-Atom die Symmetrie $\{A_x^4, A_y^4\}$ beizulegen, die mit den herangezogenen Sohnckeschen Typen vereinbar ist. Der andere Ausweg, für die hemiedrisch kristallisierenden Verbindungen die ganze Anordnung ein wenig von der für die holodrischen nachgewiesenen I_c' abweichend anzunehmen²⁾, würde erst dann befriedigen, wenn eine solche Struktur (welche natürlich dieselbe Atomzahl haben müßte, wie oben vorausgesetzt) angegeben werden könnte, die ohne spezielle Annahme über die Symmetrie des *K*-Atoms der Formel $\{A_x^4, A_y^4\}$ entspräche. Dies müßte aber, da diese Formel nur Deck-

1) Die meisten Feststellungen von Strukturen durch Röntgenstrahlanalyse verdankt man W. H. und W. L. Bragg, die eine Zusammenstellung ihrer Resultate in der Monographie *X-Rays and Crystal Structure*, London 1916 gegeben haben.

1) *NaCl*, *LiCl*, *PbS*, *KCl*, *KBr*, *KJ*, *RbCl*, *RbBr*, *RbJ*, *CsCl*, *CsBr*, *CsJ* u. a.

2) Siehe W. H. und W. L. Bragg, l. c. S. 157.

operationen erster Art voraussetzt, die Struktur eines Sohnckeschen Typs sein; ich sehe nicht, daß einer von diesen den gestellten Anforderungen zu genügen vermag. Aber auch wenn letzteres zu ermöglichen wäre, so würde die von *NaCl* abweichende Struktur in letzter Instanz doch auf der von *Na* abweichenden Atom-symmetrie von *K* beruhen; — es erscheint da doch eigentlich einfacher, eben diese Abweichung unter Beibehaltung des Raumgitters Γ_c' zur Erklärung zu benutzen. —

Das Braggsche Atomsystem für den regulär kristallisierenden Diamant (und Silizium) wird meist beschrieben als bestehend aus zwei identischen, mit *C*-Atomen besetzten Raumgittern Γ_c' , die um $\frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3)$ gegeneinander verschoben sind; damit ist es also aus zwei verschiedenen Ausgangsatomen und Achsensystemen abgeleitet. Die Strukturtheorie will aber den Aufbau mit Hilfe einer Formel aus einem einzigen Ausgangsatom gewinnen. Um die Vergleichung der Tatsachen mit den Typen der vorstehenden Zusammenstellung zu erleichtern, empfiehlt sich die frühere Darstellungsweise, angewandt auf vier zu einer Fläche (etwa $a_1 a_2$) des Vollwürfels parallele Ebenen im Abstand $0, \frac{1}{4}a_3, \frac{2}{4}a_3, \frac{3}{4}a_3$, die mit 0, 1, 2, 3 bezeichnet werden mögen.

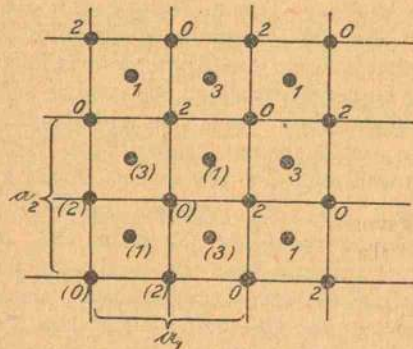


Fig. 77.

Die Atomgruppierung innerhalb der Periode a_3 stellt sich dann dar gemäß Fig. 77.

Auf den über der Grundfläche $a_1 a_2$ liegenden Vollwürfel entfallen dabei acht Atome.

Zu solchen acht Atomen kann man nun mit Hilfe der Formel des Sohnckeschen Typs Nr. 64 gelangen, wenn man das Ausgangsatom speziell in den 0-Punkt der Konstruktion Fig. 74 legt. Die Schraubenachse $\mathfrak{A}_1(4, +1)$ gibt aus demselben innerhalb der Periode die weiteren drei Punkte mit den Koordinaten ($\frac{1}{4}a_k = b_k$ gesetzt): $b_1, b_2, b_3; 2b_1, 0, 2b_3; 3b_1, -b_2, b_3$, und die Achse $\mathfrak{D}_3(3, 0)$ fügt hinzu (durch zyklische Vertauschung der Indizes zu erhalten): $b_1, b_2, b_3; 2b_1, 2b_2, 0; b_1, 3b_2, -b_3$ und $b_1, b_2, b_3; 0,$

$2b_2, 2b_3; -b_1, b_2, 3b_3$. Da die $a_k = 4b_k$ die Perioden darstellen, so sind die Punkte mit Koordinaten $-b_k$ (die außerhalb des Vollwürfels liegen) äquivalent mit solchen von den Koordinaten $3b_k$, und man erhält als Punktsystem innerhalb des Vollwürfels: $0, 0, 0; b_1, b_2, b_3; 2b_1, 0, 2b_3; 3b_1, 3b_2, b_3; 2b_1, 2b_2, 0; b_1, 3b_2, 3b_3; 0, 2b_2, 2b_3; 3b_1, b_2, 3b_3$. Das sind aber die acht in der Figur mit eingeklammerten Zahlen markierten Punkte. Die Enantiomorphie des Typs Nr. 64 kommt bei der speziellen Lage des Ausgangsatoms nicht zur Geltung. Die Symmetrie des *C*-Atoms im Diamant läßt sich durch die Art der Entstehung seiner Struktur aus dem allgemeinen Typ Nr. 64 erschließen; man findet sie tetraedrisch, wie das auch der Anordnung der Nachbaratome um ein beliebig gewähltes Atom entspricht. Es ist bekannt, daß Bragg diese Anordnung als den Ausdruck der Lage der vier *C*-Valenzen nach den Ecken eines umschriebenen Tetraeders betrachtet.

Der Aufbau der hemimorph-hemiedrisch kristallisierenden Zinkblende (*ZnS*) läßt sich durch die Fig. 77 beschreiben, wenn man in den Punkten 0 und 2 *Zn*-, in den Punkten 1 und 3 *S*-Atome angebracht denkt. Die beiden Strukturen fallen unter den Typ Nr. 55; die erstere entspricht einem Ausgangsatom im 0-Punkt, die zweite einem solchen im Zentrum eines Achtelwürfels. Das weitere folgt daraus wie oben.

Der Aufbau des holodrischen Flußspats (*CaF₂*) ergibt sich, wenn man in Fig. 77 die Punkte in den Mitten quadratischer Felder mit 1 und 3 bezeichnet. Die Struktur fällt in demselben Sinne unter den Typ Nr. 60, wie die von Zinkblende unter Nr. 55. Auch hier kann auf weitere Auseinandersetzung verzichtet werden.

Ähnliche Überlegungen, wie oben an die Struktur von *KCl* und verwandter Verbindungen, lassen sich an diejenige von Kuprit (*Cu₂O*) anknüpfen, die einer holodrischen Symmetrie entspricht, obwohl die Substanz hemimorph-hemiedrisch kristallisiert. Der Aufbau kann beschrieben werden als bestehend aus einem zentrierten kubischen Raumgitter Γ_c'' für die *O*-, einem flächenzentrischen Γ_c' für die *Cu*-Atome, die gegeneinander um $\frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3)$ verschoben sind. Es muß genügen, hierauf nur hinzuweisen.

Es mag erinnert werden, daß alle bisher besprochenen Fälle regulärer Kristalle sich glatt unter Sohnckesche Strukturtypen ordnen ließen, und nirgends eine Deckoperation zweiter Art heranzuziehen war. Dies scheint nicht mehr durchführbar zu sein bei der strukturtheoretischen Deutung der Atomanordnung in Pyrit (*FeS₂*),

der paramorph-hemiedrisch nach $\{C, A_x^2 \sim A_y^2 \sim A_z^2\}$ kristallisiert.

Die für diesen Kristall von den Braggs aus der Beobachtung erschlossene Atomverteilung geht dahin, daß die Eisenatome in den Knotenpunkten eines flächenzentrischen kubischen Raumgitters I'_c liegen, die Schwefelatome hingegen in den nach S. 446 „windschiefen“ Diagonalen der Achtelwürfel, in einem Abstand vom Zentrum, der kein kleinzahliger Bruchteil der Diagonale zu sein, aber in der Nähe von $\frac{1}{5}$ zu liegen scheint.

Für die Vergleichung mit den theoretischen Typen ist es vorteilhaft, den Aufbau der S-Atome wieder in der schon mehrfach benutzten Weise darzustellen. Wir legen dazu in den Vollwürfel parallel zu der Fläche $a_1 a_2$ vier Ebenen in den den Abständen u , $\frac{1}{2}a_3 - u$, $\frac{1}{2}a_3 + u$, $a_3 - u$, wobei $u < \frac{1}{4}a_3$, und bezeichnen die Atome in diesen vier Ebenen durch deren Ordnungsnummer 1, 2, 3, 4; dann entsteht für die parallel a_3 be-

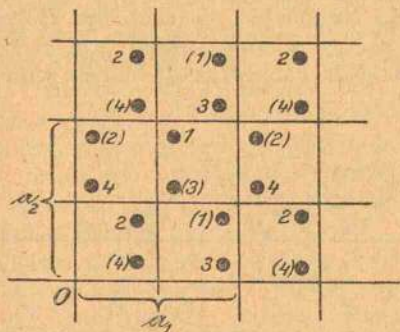


Fig. 78.

trachtete Anordnung das in Fig. 78 wiedergegebene Bild; die Abstände der Atome von den nächsten Seiten der Viertelquadrate sind jedesmal gleich u .

Um diesen Aufbau mit den Strukturtypen zu vergleichen ist es bequem, zunächst den in demselben enthaltenen Spiegelpunkt zu beseitigen. Dies geschieht, indem man die mit (1), (2), (3), (4) bezeichneten Atome hinwegdenkt. Das so vereinfachte System von nur vier Atomen entspricht nun, wie man leicht sieht, dem Typ Nr. 57, dessen maßgebende Achsen in Fig. 65 dargestellt sind. Ein Ausgangspunkt mit den Koordinaten $\frac{1}{2}a_1 - u$, $\frac{1}{2}a_2 - u$, $\frac{1}{2}a_3 - u$ liefert nämlich durch die Deckoperation $\mathfrak{U}_1(2,1)$, $\mathfrak{D}(3,0)$ bei Berücksichtigung der Periodizität a_h innerhalb des Vollwürfels insgesamt die Punkte: $\frac{1}{2}a_1 - u$, $\frac{1}{2}a_2 - u$, $\frac{1}{2}a_3 - u$; $a_1 - u$, u , $\frac{1}{2}a_3 + u$; $\frac{1}{2}a_1 + u$, $a_2 - u$, u ; u , $\frac{1}{2}a_2 + u$, $a_3 - u$, und das sind genau die Punkte 2, 3, 1, 4 in Fig. 78, zu denen nun noch die Spiegelpunkte (1), (2), (3), (4)

hinzuzunehmen sind, um das vollständige System zu liefern.

Die Anordnung der S-Atome im Pyrit entspricht also dem Typ 57a, a in der Ausartung, daß das Ausgangsatom auf der dreizähligen Achse $\mathfrak{D}(3,0)$ nahe dem Mittelpunkt des Vollwürfels liegt. Die spezielle Lage des Ausgangsatoms ist dabei durch das Zusammenrücken von den drei durch $\mathfrak{D}(3,0)$ verknüpften Punkten entstanden zu denken. Es ist somit dem betr. S-Atom eine dreizählige Achse (A_d^3) parallel der Diagonale $\mathfrak{D}(3,0)$ beizulegen. Dem Ausgangsatom muß nun ein ihm bezüglich des Würfelzentrums spiegelbildlich entsprechendes Atom zugeordnet werden. Da die Annahme zweier spiegelbildlichen Atomarten aber sonst durch nichts nahe gelegt wird, so hat man jedem S-Atom außer der Achse A_d^3 noch solche Symmetrieelemente beizulegen, daß zwei Atome die dem Würfelzentrum die gleiche Seite der Achse A_d^3 zukehren, Spiegelbilder voneinander sind. Dazu genügt, daß durch A_d^3 eine Symmetrieebene geht und die zwei Atome angemessen gegeneinander orientiert sind. Ähnlich muß man alle übrigen Paare von S-Atomen des Systems gebildet denken. Das S-Atom würde dann mindestens die Symmetrie $\{A_d^3, E_x\}$ der hemimorphen Hemiedrie des trigonalen Systems haben.

Den Aufbau der Fe-Atome nach dem Raumgitter I'_c leitet man am konsequentesten aus demselben Typ Nr. 57a, a ab, indem man das Ausgangsatom in den Koordinatenanfang legt.

Die vorstehend gegebene Deutung der Anordnung der S-Atome im Pyrit wird in bedeutungsvoller Weise gestützt durch die für Kobaltglanz (CoSAs) nachgewiesene Struktur. Dieselbe entsteht aus derjenigen von Pyrit durch Ersetzung der Fe- durch Co-Atome und Vertauschung der Hälfte der S. mit As-Atomen. Kobaltglanz kristallisiert regulär hemimorph nach der Formel $\{S_x, S_y\}$, entbehrt also des Zentrums C. Dieser Symmetrie wird entsprochen, wenn man in dem Schema Fig. 78 die Punkte (1), (2), (3), (4) mit As-Atomen besetzt. Es entspricht dann die Anordnung sowohl der S- wie der As-Atome dem Sohnckeschen Typ Nr. 57. Auf die allgemeine Bedeutung der Strukturen von FeS_2 und CoSAs wird am Schlusse dieser Arbeit eingegangen werden.

§ 13. Diskussion der durch die Beobachtung erschlossenen Strukturen einiger trigonaler Kristalle.

Außer bei regulären Kristallen sind die Strukturen besonders vielfach bei trigonalen untersucht worden, und da manche der hier erhaltenen

Resultate hervorragendes Interesse bieten, so mag über sie einiges berichtet werden.

Wismut, Antimon, Arsen, holodrisch kristallisierend, besitzen nach der Beobachtung einen Aufbau, wo die Atome in den Ecken zweier axial gegeneinander verschobenen Rhomboeder liegen. Diese Anordnung läßt sich aus einem Ausgangsatom mit Hilfe des Sohnckeschen Typs des zusammengesetzten Rhomboedersystems Nr. 21 ableiten.

Bei diesem tragen die Achsen $\mathfrak{A}$ des Schemas (Fig. 31) zusammengesetzte ebene Dreipunkter (Fig. 33') in solchen Höhen, daß die Zentren von acht benachbarten in den Ecken eines Rhomboeders liegen. Ziehen sich die Dreipunkter nach der zugehörigen Achse $\mathfrak{A}$ hin zusammen, so wird aus jedem von ihnen ein Punktpaar, durch dessen Mitte die Querachse $\mathfrak{Q}(2,0)$ hindurchgeht. Damit ist der beobachtete Typ gewonnen. Den wirklichen Atomen ist nach dieser Entstehung des Aufbaues jedenfalls eine dreizählige Achse beizulegen; damit das Atompaar die volle holodrische Symmetrie $\langle C, A_z^3, A_x^2 \rangle$ der bezüglichen Kristalle aufweise, muß jedes Atom noch eine Symmetrieebene normal zu $\mathfrak{Q}$ besitzen.

Die Struktur des enantiomorph-hemiedrischen Quarzes (SiO_2), — Formel $\langle A_z^3, A_x^2 \rangle$ — erledigt sich sehr einfach. Die O-Atome gruppieren sich gemäß dem Sohnckeschen Typ Nr. 18/19 (rechtes und linkes zusammengesetztes Dreipunktschraubensystem) und die Si-Atome gemäß dessen Ausartung, die entsteht, wenn das Ausgangsatom auf der Querachse liegt. Da die Anzahl der O-Atome die größte dem Typ entsprechende ist, so gibt die Struktur über deren Symmetrie keinen Aufschluß; für das Si-Atom liefert sie die Notwendigkeit einer zweizähligen Symmetrieachse.

Der Atomaufbau von Graphit läßt sich nach den Beobachtungen von Debye und Scherrer¹⁾ folgendermaßen beschreiben. Parallel der Spaltungsebene der Substanz denke man innerhalb der Periode c drei Ebenen und in einer jeden C-Atome in einem regulär sechseckigen Netz derart angebracht, daß in der zweiten und dritten Ebene die Zentren der Maschen über verschiedenen Maschenecken der ersten Ebene liegen. Fig. 79 gibt diesen Aufbau in der früheren Weise wieder und deutet durch die Zahlen 1, 2, 3 die Ordnungszahl der Ebenen an, in denen die bezüglichen Atome liegen. Dieser Aufbau entspricht jedenfalls der Symmetrie des trigonalen Systems.

Vonden Sohnckeschen Typen ist es Nr. 22/23

1) P. Debye und Scherrer, diese Zeitschrift 18, 291, 1917.

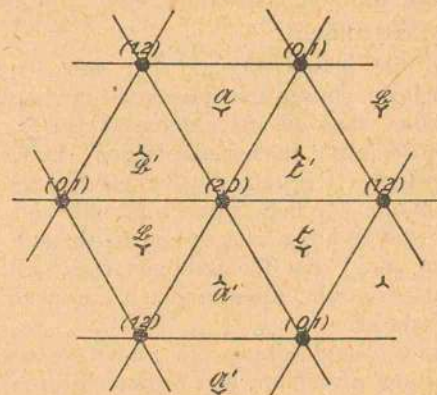


Fig. 79.

(rechtes oder linkes abwechselndes Dreipunktschraubensystem) mit der Formel $\mathfrak{A}(3+1)$, $\mathfrak{Q}_a(2,0)$, a , c , welches diesen Aufbau umfaßt. Die diesem Typ im allgemeinen entsprechende Atomanordnung ist in Fig. 80 durch Punkte $\bullet$ wiedergegeben. Liegt die Querachse $\mathfrak{Q}_a$ um h über der Nullfläche, so sind die Höhen der Punkte o' , $1'$, $2'$ bzw. gleich $2h$, $\frac{1}{3}c + 2h$, $\frac{2}{3}c + 2h$. Nun kann man die Höhen von o' , $1'$, $2'$

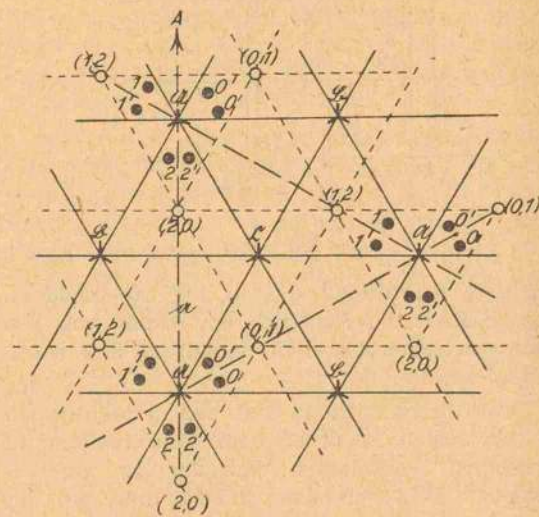


Fig. 80.

bzw. mit denen von 1, 2, o — oder wegen der Periode c mit 1, 2, 3 — zusammenfallen lassen, wenn man $h = \frac{1}{6}c$ macht; legt man weiter das Ausgangsatom in die Vertikalebene durch a , und zwar in den Abstand $\frac{1}{3}a$ von $\mathfrak{A}$, so gelangt man zu dem Aufbau, der in Fig. 80 durch die $\bullet$ mit den eingeklammerten Zahlen angedeutet ist. Das ist aber genau das, was nach Fig. 79 die Beobachtung ergeben hat; die punktierten Linien in Fig. 80 entsprechen dabei dem Netz in Fig. 79.

Es ist bemerkenswert, daß das Dreipunktschraubensystem Nr. 22/23 im allgemeinen enantiomorph ist, nämlich eine Rechts- und eine Linksbildung umfaßt. Bei der beschriebenen speziellen Ausbildung ist dieser Charakter verschwunden. Die Achsen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ haben allerdings alle denselben Drehungssinn, aber zwischen ihnen treten, wie Fig. 79 zeigt, im vorliegenden Falle weitere Schraubenachsen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ von entgegengesetztem Drehungssinn auf, wodurch der frühere enantiomorphe Charakter aufgehoben wird.

Da die Anzahl der C-Atome im Elementarbereich mit der maximalen aus der Strukturformel folgenden übereinstimmt, so ist hier aus dem Strukturtyp ein Schluß auf die Atomsymmetrie zunächst nicht möglich, und auch eine Heranziehung der Symmetrie des Graphitkristalls ist nicht angängig, da dieselbe nicht feststeht. Die aus Fig. 79 ersichtliche Tatsache, daß jedes C-Atom im Mittelpunkt eines gleichseitigen Dreiecks liegt, dessen Ecken gleichfalls von C-Atomen besetzt sind, legt natürlich den Schluß nahe, daß das Atom eine dreizählige Symmetrieachse und drei durch dieselbe gehende Symmetrieebenen besitze. Die Entdecker der Struktur nehmen an, daß von den vier Valenzen des C-Atoms drei nach jenen Nachbaratomen und die vierte normal zu deren Ebene gerichtet wäre; das C-Atom würde also in Graphit und Diamant verschiedene Natur haben. —

Schließlich mag noch auf die strukturtheoretische Deutung der von W. H. Bragg angegebenen komplizierten Atomanordnungen in Kalkspat (CaCO_3)¹⁾ und Dolomit ($\text{CaMg}(\text{CO}_3)_2$) eingegangen werden, die bzw. der Holoedrie $\{C, A_x^3, A_x^2 \text{ oder } C, A_x^3, E_x\}$ und der paramorphen Hemiedrie $\{C, A_x^3\}$ zugehören. Zur Darstellung zunächst der Struktur von Kalkspat mögen innerhalb der Periode c zwölf Ebenen 0, 1, ... 11 normal zu A_x^3 gelegt werden. Die Ca-Atome nehmen dann die in Fig. 81 durch $\odot$ bezeichneten Plätze ein, wobei jede Zahl 3, 5, 7 durch 9, 11, 13 $\equiv 1$ ergänzt zu denken ist. Sie bilden also dieselbe Anordnung in den Ecken zweier parallel A_x^3 gegeneinander verschobenen Rhomboeder, wie die Atome von Bi, Sb, As, von denen im Eingang dieses Paragraphen gesprochen ist. Die C-Atome liegen in denselben Vertikalen, wie die Ca-Atome, je in der Mitte zwischen zwei von jenen; sie verhalten sich diesen also strukturell genau analog. Die O-Atome bilden ebene Dreipunkte um die C-Atome, und zwar für zwei vertikal einander

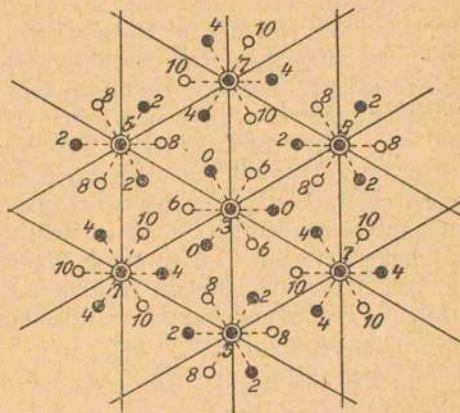


Fig. 81.

folgende um beiläufig 60° gegeneinander gedreht, wie das die $\bullet$ und $\circ$ mit den beigeetzten (geraden) Zahlen in Fig. 81 veranschaulichen. Die O-Atome entsprechen demnach demselben Sohnckeschen Typ Nr. 21 ($\mathfrak{A}(3,0)$, $\mathfrak{D}(2,0)$, $a + \frac{1}{3}c$, c) der auch die Konfiguration der Ca- und C-Atome umfaßt, — ein Umstand, der auch die gegebene Deutung der letzteren Anordnungen stützt. Es sind somit auch zur Darstellung der Struktur von Kalkspat (wie der gleichen von Magnesit MgCO_3 und Natronsalpeter NaNO_3) Deckoperationen zweiter Art nicht erforderlich. Das Ca-, wie das C-Atom muß parallel A_x^3 eine dreizählige Symmetrieachse besitzen, und die Kombination der beiden gleichartigen durch die Querachse verknüpften Atome außerdem nach der Kristallform noch ein Symmetriezentrum. Das C-Atom erscheint dabei in einer Anordnung, die der in Graphit analog ist und von der im Diamant abweicht.

Über die Symmetrie der O-Atome ergibt die Struktur keine Auskunft. Der Typ Nr. 21 entspricht der Symmetrie $\{A_x^3, A_x^2\}$; das ihr zur Holoedrie $\{C, A_x^3, A_x^2\}$ fehlende Symmetriezentrum muß sonach durch die Eigensymmetrie der O-Atome bedingt sein. Die Dreipunkterpaare der O-Atome gewinnen jedenfalls die holoedrische Symmetrie, wenn jedes Atom eine durch die Achse hindurchgehende Symmetrieebene besitzt. Die Zweiwertigkeit des O-Atoms legt aber vielleicht den Gedanken an eine rotatorische Symmetrie, die Rotationsachse nach dem zentralen C-Atom hin, noch näher.

Hämatit (Fe_2O_3) und Rubin (Al_2O_3) besitzen Strukturen, deren Einordnung im wesentlichen mit der von Kalkspat erledigt ist. Die O-Atome haben dieselbe Lage wie in Kalkspat; die C-Atome sind beseitigt und die Ca-Atome durch ein axiales Paar Fe- bzw. Al-Atome ersetzt zu denken.

1) Kalkspat analog aufgebaut ist auch Magnesit (MgCO_3) und Natronsalpeter (NaNO_3).

Die Struktur von Dolomit weicht nach Bragg nur darin von der für Kalkspat ab, daß an Stelle des doppelten Rhomboedergitters für die *Ca*-Atome zwei einfache je für die *Ca*- und die *Mg*-Atome auftreten. Solche einfache Gitter werden von dem Sohnckeschen Typ Nr. 17 ($\mathcal{A}(3,0)$, $a + \frac{1}{3}c$, c) umfaßt, aus dem durch Hinzutreten der Querachse $\mathcal{Q}(2,0)$ der für die Doppelgitter heranzuziehende Typ Nr. 21 entsteht. Die Vertauschung des einen *Ca*- mit einem *Mg*-Atom bringt eben diese Querachse in Wegfall und bedingt damit die Wandelung der kristallographischen Symmetrie aus $\{C, A_x^3, A_x^2\}$ im $\{C, A_x^3\}$.

Die für Kristalle des trigonalen Systems festgestellten Strukturen ordnen sich sämtlich glatt unter die Sohnckeschen Typen und bestätigen was S. 246 im voraus gesagt ist. Von allen vorstehend besprochenen erfordert überhaupt nur die Struktur von Pyrit die Heranziehung der Fedorow-Schönfliesschen Theorie. Man wird an dieser Tatsache nicht einfach vorbeigehen können. Sie regt offenbar erneut die Fragen an, die schon Sohncke gegenüber der Erweiterung seiner Theorie durch Deckoperationen zweiter Art empfand. Letztere setzen für dasselbe Element zwei sich spiegelbildlich entsprechende Atome voraus, die nur dann zusammenfallen, wenn jedes Atom spiegelbildliche Eigensymmetrie besitzt. Man wird, solange nicht andere Beobachtungen das Gegenteil feststellen, den letzteren Fall als allgemein erfüllt betrachten. Wenn aber nur eine Atomart vorhanden ist, so läßt sich ein jedes Atom mit jedem andern durch eine Operation erster Art zur Deckung bringen, und es entsteht daraus das Verlangen nach einem Weg zu Strukturen, die nicht unter die Sohnckeschen 65 fallen, der

die Operationen zweiter Art vermeidet. Sohncke hat, wie S. 239 bemerkt, den bezüglichen Weg in der Einführung mehrerer Ausgangsatome für die Deckoperationen gesehen¹⁾. Die Ergebnisse der Analyse von Strukturen durch die Beobachtung ist m. E. dieser Auffassung nicht ungünstig und eine Reduktion der im allgemeinen 230 Strukturtypen auf nur 65 wesentlich verschiedener wäre gewiß zu begrüßen. Die oben besprochenen Fälle von Kalkspat — Dolomit, Pyrit — Kobaltglanz, bei denen der Übergang vom ersten zum zweiten sich vollzieht, indem in einer Struktur mit Atompaaren das eine Atom jedes Paares durch das eines andern Elements ersetzt wird, legen sie offenbar besonders nahe. Eine eigene Stellung nimmt dabei der zweite Fall ein, bei dem die Struktur mit Atompaaren (Pyrit) sich keinem Sohnckeschen Typ unterordnet, wohl aber die daraus durch Austausch des einen Atoms entstehende (Kobaltglanz). Die Möglichkeit von Auswechselungen der geschilderten Art läßt offenbar die Glieder jener Atompaare strukturell nicht besonders eng verknüpft erscheinen und legt es nahe, die einzelnen Glieder auf eigene Ausgangsatome zurückzuführen. Unzweifelhaft ist die Fedorow-Schönfliessche Theorie der erweiterten Sohnckeschen an Geschlossenheit überlegen; aber die letztere entbehrt doch auch nicht ihrer eigenen Vorzüge.

1) Denselben Standpunkt vertritt Sommerfeld in seiner „Physikalischen Kristallographie“. Leipzig 1907.

Göttingen im März 1918.

(Eingegangen 11. April 1918.)

BESPRECHUNGEN.

Alfred Wegener, Das detonierende Meteor vom 3. April 1916, 3 1/2 Uhr nachmittags in Kurhessen. (Aus den Schriften der Ges. z. Beförderung d. gesamten Naturwissenschaften zu Marburg. XIV. Bd. 1. Heft.) gr. 8. 83 S. mit vielen Abbildungen. Marburg a. L. N. C. Elwert'sche Verlagshandlung (G. Braun). 1917. M. 2.—

Der Verf. hat unter Beihilfe einer großen Anzahl von Beobachtern und andern sich für diesen Meteoritenfall interessierender Leute ein umfangreiches Material über dieses Ereignis zusammengebracht und dasselbe in ausgiebigster Form einer systematischen Bearbeitung unterworfen, die zu vielerlei bemerkenswerten Resultaten geführt hat. Es dürften nur wenige Meteoritenfälle in so vollkommener Weise Gelegenheit gegeben haben, alle dabei in

Betracht kommenden Erscheinungen zu verfolgen und bis zur schließlichen Auffindung des zur Erde gekommenen Meteorsteines in Verbindung miteinander zu bringen. Zunächst gibt der Verf. die Mitteilungen von über hundert Beobachtungsstellen, und stellt dieselben nach Zeit, Ort und nach ihren Einzelheiten, die sich auf die Höhe über dem Horizont, das Azimut der Wahrnehmung, die Lichterscheinungen und die dabei aufgetretene Rauchentwicklung und die Schallphänomene beziehen, zusammen.

Auf graphischem Wege ist der Verf. zu Schlüssen über die Höhe des Meteors zur Zeit seiner Sichtbarkeit und über die Länge der durchlaufenen Bahn, sowie zu Angaben betr. des Ortes seines Niederfalles gekommen, der sich nachträglich auch gut bestätigt hat. Von besonderem Werte sind in dem Schriftchen die außerordentlich vielen Vergleiche mit früheren Ereignissen ähnlicher Art, die der

Verf. aus einer umfangreichen, am Schlusse chronologisch zusammengestellten Literatur, verwertet hat, woraus hervorgeht, daß die aus der Erscheinung geschlossenen Tatsachen sich zum größten Teil sehr gut in die Ergebnisse früherer Ermittlungen einfügen. Die Höhe für die erste Wahrnehmung folgt zu etwa 80—90 km, die des Erlöschens zu nahe 16 km, bei einem Durchmesser der leuchtenden Masse von nahezu 400 m. Von besonderem physikalischen Interesse sind die Schlüsse, die der Verf. aus den wahrgenommenen Lichterscheinungen und den Färbungen auf die Konstitution der Atmosphäre glaubt ziehen zu können, indem er die anfängliche grünliche Färbung auf die Durchfärbung der „Wasserstoffosphäre“ und die spätere rötliche und intensiv rote Farbe des Meteors auf seinen Weg durch die „Stickstoffosphäre“ zurückführt im Gegensatz zu v. Niessl, dessen Untersuchungen über Meteorfälle besonders vielseitig sind und stets zum Vergleich herangezogen werden, der aber den Wechsel der Färbung durch eine abnehmende Temperatur des Meteors glaubt erklären zu sollen. —

Über die Auffindung dieses interessanten Meteors in dem Rommershausener Wald bei Treysa, also ganz nahe der von Wegener aus den gesammelten Beobachtungen rechnerisch ermittelten Stelle und seine physikalische Beschaffenheit hat Herr Geheimrat Richarz in der Marburger Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenschaften und in der Sitzung des Marburg-Gießener physikalischen Kolloquiums nähere Mitteilungen gemacht, und eine zusammenfassende Bearbeitung von ihm wird, wie der Verf. mitteilt, demnächst erscheinen. —

Kurze Angaben über diese Referate finden sich in „Die Naturwissenschaften“, Heft 22 und 39 des Jahrganges 1917. — A.

A. Sommerfeld, Der innere Aufbau des chemischen Atoms und seine Erforschung durch Röntgenstrahlen. (Vorgetragen an der Universität München.) 15×25 cm, 16 S. mit 13 Abbildungen. Sonderabdruck aus der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. Berlin, Julius Springer. 1917. M. 1.20

Der Charakter des vorliegenden Vortrages entspricht vorzüglich seinem Zweck, einem weiteren nicht fachmännisch gebildeten Zuhörerkreis einige Einblicke in die wunderbaren Geheimnisse der Atomstruktur zu gewähren, die die Forschung der letzten Jahre zu lüften vermochte. Wie reichhaltig dabei trotz der Kürze des Vortrages das Dargebotene ist, ersieht man am besten aus der Aufzählung der Kapitelüberschriften:

1. Die Atome und ihre Anordnung im natürlichen System der Elemente. 2. Radioaktivität, α - und β -Strahlen. 3. Rutherfords Kerntheorie. Die Kernladung als Ordnungszahl des Systems der Elemente. 4. Beispiele von Atom- und Molekül-Modellen. 5. Die Spektralanalyse der Röntgenstrahlen. Die charakteristischen Röntgenspektren. 6. Röntgenspektren und natürliches System der Elemente. Gegensatz zwischen Röntgenspektren und sichtbaren Spektren. 7. Quantentheorie der Spektrallinien.

Die Frische der Darstellung macht die Lektüre des Aufsatzes auch für den mit dem Gebiet vertrauten Physiker sehr empfehlenswert und genüßreich. Besonders interessieren werden ihn die drei Gesetze der Elektronenbewegungen im Atominnern, die Sommerfeld in origineller Weise in Analogie zu den Keplerschen Gesetzen der Planetenbe-

wegungen formuliert hat. Diese Gesetze bilden einen anschaulichen Ausdruck der grundlegenden Erkenntnisse, die die glänzenden Arbeiten Sommerfelds ergaben, als er die Bohrschen Annahmen über das Zustandekommen der Spektrallinien auf Ellipsenbahnen ausdehnte. Dadurch wurde es ihm möglich, die Feinstruktur des Wasserstoff- und Heliumspektrums sowie der charakteristischen Röntgenspektren weitgehend aufzuklären. Über diese Fragen findet man in dem vorliegenden Vortrag allerdings nur kurze Andeutungen und man legt die Broschüre aus der Hand mit dem lebhaften Wunsch, bald aus der Feder des Verfassers eine eingehendere zusammenfassende Darstellung des Gebietes zu erhalten.

K. Fajans.

H. Bock, Die Uhr, Grundlagen und Technik der Zeitmessung. 8. V u. 121 S. mit 55 Abbildungen im Text. 2, umgearbeitete Auflage. Leipzig, B. G. Teubner. 1917. M. 1.20. geb. M. 1.50

Das der bekannten Teubnerschen Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt“ als Nr. 216 zugehörnde Bändchen gibt einen recht guten Überblick über die Einrichtungen unserer Pendel- und Taschenuhren. Eine kurze Erläuterung der astronomischen Grundlagen der Zeitmessung ist der Beschreibung der Uhren selbst vorausgeschickt. Der Verf. gibt in engem Rahmen die Beschreibung und Wirkungsweise der einzelnen Teile einer Uhr und erläutert außer dem äußeren Aufbau in den einzelnen Kapiteln das Wesen und den Zweck der Hemmungen, die verschiedenen Arten der als Antriebskräfte benutzten Einrichtungen, die Herstellung und Anordnung der Räder mit Zahnformen und die Achsensysteme. Besonders ausführlich, wenn auch in dem Rahmen des Buches natürlich durchaus nicht erschöpfend, sind die als „Regler“ benutzten Pendel und Unruh-Konstruktionen mit ihren Kompensationsvorrichtungen beschrieben. Wobei auch deren geschichtliche Entwicklung mit eingeflochten ist. Die sogenannten „Gänge“ werden in ihren Hauptformen für transportable und fest aufgestellte Uhrwerke sehr eingehend beschrieben. Die Methoden der Gangregulierung werden aufgezählt und in ihrer Wirkungsweise beleuchtet, was auch für den Nichtfachmann, der aber doch seine Uhr in guter Übereinstimmung mit der wirklichen Zeit halten will, von erheblichem Wert sein dürfte.

Schließlich sind noch drei Kapitel der Zeitübermittlung für größere Uhrenanlagen in Instituten, Städten und ganzen Ländern, sowie der Beurteilung der Güte der Uhren und ihrer Fabrikation gewidmet. Auf S. 18 mag ein sinnstörender Druckfehler berichtigt werden, es muß dort bei der Berechnung der Pendellänge anstatt „Sekunde“ Minute gesetzt werden, denn für ein Minutenpendel gilt die errechnete Pendellänge. — Bei der Aufzählung der Fabrikanten von erstklassigen Pendeluhrn hätten neben den heute allerdings in erster Linie stehenden Riefleruhren auch die von Knoblich, Bröcking oder Dencker in Hamburg, von Hohwii in Amsterdam erwähnt werden können. Wenn auch manche ungleichförmige Behandlung des Stoffes vorhanden ist, so kann das Werkchen doch als ein sehr zu empfehlender Leitfaden allen denen und darunter auch besonders denjenigen Forschern empfohlen werden, denen es bei ihren Arbeiten auf genaue Zeitangaben ankommt, die aber der einschlägigen Materie nicht so nahe stehen, wie z. B. der Astronom, für den

seine Uhr eines der wesentlichsten Meßinstrumente ist und der infolgedessen natürlich über deren Bau und Einrichtung ganz genau unterrichtet sein muß. — A.

R. Biedermann, Die Sprengstoffe, ihre Chemie und Technologie. Aus der Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt“. 286. Bd. IV u. 124 S. mit 12 Abbildungen. 2. Aufl. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1917. M. 1.20, geb. M. 1.50.

Das Bändchen wendet sich wie die ganze Sammlung an den großen Kreis der Gebildeten, nicht an den Fachmann. Es versteht sich bei der Stellung des Verf. als Mitglied des Patentamtes, der zugleich seit langen Jahren den Chemiker-Kalender herausgibt, daß es in dem genannten Rahmen einen sachgemäßen Überblick bietet und auf der Höhe ist. Es bespricht die Sprengstofffabrikation in ihrer geschichtlichen Entwicklung, sodann die Theorie der Sprengstoffe, d. h. Druck-, Wärmeentwicklung, Empfindlichkeit usw. und schließlich die Technologie derselben im einzelnen, also Nitroglycerin, Schießbaumwolle usw. Naturgemäß kann die Darstellung nur an der Oberfläche bleiben und muß der Kürze wegen sich meist auf das Grundsätzliche und praktisch Bedeutsame beschränken. Am Schlusse ist ein Literatur-Verzeichnis für weitergehende Bedürfnisse angefügt. Die zweite Auflage hat trotz der Zensur noch mancherlei aufgenommen, was, wie das Sprengluft-Verfahren mit Ruß — nicht mit Holzkohle —, erst durch die Nöte des Krieges seine große Bedeutung entfalten konnte.

Das Büchlein ist daher dem Physiker zu empfehlen, um sich schnell einen Überblick über den praktisch wichtigen Teil dieses ihm fremden Gebietes zu verschaffen, aber auch der Chemiker wird mit Interesse und Nutzen die kurze Darstellung gern in sich aufnehmen und überrascht sein, wie fruchtbringend die jüngste Zeit auf diesem, früher bei uns sehr vernachlässigten Gebiete gewesen ist.

Lothar Wöhler.

F. A. Schulze, Große Physiker. Band 324 der Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt“. Zweite Auflage. IV u. 115 S. mit 6 Bildern. Leipzig, B. G. Teubner. 1917. M. 1.50, geb. M. 2.—

Die Schrift, die unter dem Namen „Die großen Physiker und ihre Leistungen“ im Jahre 1910 in der bekannten Teubnerschen Sammlung erschienen war, liegt jetzt in zweiter Auflage mit verändertem Titel vor. Wie der Verf. im Vorwort selber sagt, hat es so viele wirklich große Physiker gegeben, daß es schwer war, diejenigen unter ihnen auszuwählen, die auf beschränktem Raume in erster Linie besprochen zu werden verdienten. Die Wahl fiel auf Galilei, Newton, Huygens, Faraday, Helmholtz, Hertz. So wird gewissermaßen ein Abriss der Entwicklungsgeschichte der Physik gegeben vom Beginn der modernen Naturforschung ab, den wir in jene Zeit legen dürfen, da die Lehren Kopernikus' und Keplers sich Eingang verschafften, bis in die Jetztzeit. Die Auswahl muß eine sehr glückliche genannt werden. Der Verf. gibt nicht eine Lebensbeschreibung der Physiker im eigentlichen Sinne, sondern mehr eine Würdigung ihrer Werke, soweit dies in dem engen Rahmen möglich ist. Der äußere Lebenslauf wird dabei nur in ganz großen Zügen geschildert. Spezielle Fach-

kenntnisse erfordert die Lektüre nicht, vielmehr wird jeder Gebildete, soweit er sich nur überhaupt für die Naturwissenschaften und ihre Entwicklung interessiert, das Buch mit Nutzen lesen. Jedem der sechs Abrisse ist ein Bildnis beigegeben.

Zu wünschen wäre, daß bei nötig werdender Neuauflage, verschiedene Sprachschnitzer beseitigt, stilistische und sprachliche Unebenheiten abgeschliffen würden, da durch sie nicht nur die Freude an der Lektüre, sondern stellenweise auch ein leichtes und schnelles Verständnis etwas beeinträchtigt wird.

V. Pieck.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der Privatdozent an der Deutschen Universität in Prag Dr. Arthur Scheller zum a. o. Professor für Astronomie an der Universität Innsbruck, der a. o. Professor an der Universität Innsbruck Dr. Friedrich Edler v. Lerch zum ord. Professor der Experimentalphysik ebendasselbst.

Ehrungen: Professor Dr. Niels Bohr in Kopenhagen wurde für seine Untersuchungen über die Konstitution der Materie und Serienspektren die Prof. C. M. Guldberg-Medaille von der Universität Kristiania verliehen.

Verliehen: Dem Privatdozenten für Chemie an der Universität Breslau Dr. Ernst König, dem Privatdozenten für Pharmazie und Nahrungsmittelchemie an derselben Hochschule Dr. Peter Danckwortt, dem Dozenten und Privatdozenten für Chemie und Technologie der Nahrungsmittel und Genußmittel und für gerichtliche Chemie an der Technischen Hochschule Danzig Dr. Engelhardt Glimm, sowie dem Privatdozenten für reine Mathematik an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Ernst Jacobsthal der Titel Professor.

Vom Lehramt zurück: Der Privatdozent für chemische Technologie an der Technischen Hochschule München Dr. Hugo Jacob.

Gestorben: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Christiania Dr. Peter Ludwig Sylow, der Professor der Chemie an der Universität Bordeaux Pierre Blarez (im Felde gefallen).

Gesuche.

Physikerin,

in Berlin promoviert, sucht wissenschaftliche Betätigung auf physikalischem oder physikalisch-chemischem Gebiet. Halbtagsstellung in Groß-Berlin bevorzugt. Angebote unter **S. H. 528** an die Physikalische Zeitschr., Leipzig, Königstr. 2.

Physiker

Dr. phil., mit Erfahrungen auf dem Gebiete der Elektronenemission und Vakuumtechnik, und langjähriger wissenschaftlicher Tätigkeit an physikalischen Hochschulinstituten, sucht geeignete Laboratoriumsstellung. In Frage kommt nur leitende Stellung mit hohem Gehalt und Gewinnbeteiligung. Angebote zu richten unter **S. H. 529** an die Geschäftsstelle der Physikalischen Zeitschrift in Leipzig, Königstraße 2.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 21.

1. November 1918.

Redaktionsschluß für No. 23 am 25. Oktober 1918.

19. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

A. Rubinowicz, Bohrsche Frequenzbedingung und Erhaltung des Impulsmomentes. II. Teil. S. 465.

P. Debye u. P. Scherrer, Atom-
bau. S. 474.

J. Wimmer, Über den Einfluß

ultraroter Eigenfrequenzen auf den Brechungsexponenten im sichtbaren Spektralgebiet. S. 483.

Besprechungen:

E. Lecher, Lehrbuch der Physik. S. 486.

H. Usener, Der Kreisel als Richtungsweiser. (Bemerkungen von

A. Sommerfeld u. H. Usener.) S. 487.

E. Hinselmann, Unveränderlichkeit oder Veränderlichkeit der Lage der Erdachse? S. 487.

A. Kowalewski, Newton, Cotes, Gauß, Jacobi. S. 488.

Personalien. S. 488.

Gesuche. S. 488.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Bohrsche Frequenzbedingung und Erhaltung des Impulsmomentes.

II. Teil.

(Fortsetzung und Schluß zu S. 445.)

Von A. Rubinowicz.

§5. Feinstruktur der wasserstoffähnlichen Spektrallinien. Unsere obigen Überlegungen beziehen sich zunächst auf Atome, die nicht der Einwirkung eines elektrischen oder magnetischen Feldes unterworfen sind. Die hier erhaltenen Folgerungen lassen sich somit unmittelbar nur soweit sie sich auf das Auswahlprinzip (12) beziehen, an der Feinstruktur der H -Balmerlinien und der Linien des ionisierten Heliums (im folgenden stets als He^+ -Linien bezeichnet) prüfen. Die auf die Polarisation des von dem Atome ausgesandten Lichtes bezüglichen Resultate können jedoch in unserem Falle, wo ein äußeres Feld nicht vorhanden ist, und die stationären Bahnen mithin keine bestimmte räumliche Lagerung besitzen, zunächst nicht unmittelbar mit der Erfahrung verglichen werden. Dies wird erst ermöglicht, wenn wir in den folgenden Paragraphen unsere ganze Theorie auf den Fall des Zeeman- und des Stark effektes verallgemeinern. In dem zunächst Folgenden besprechen wir die Feinstrukturen.

Beim Übergange des Elektrons aus der Quantenbahn m, m' in die Bahn n, n' ($m + m' > n + n'$) müßte bei Berücksichtigung des Einflusses der relativistischen Massenveränderlichkeit, bei Ausschluß der Pendelbahnen und bei Nichtvorhandensein eines sonstigen Auswahlprinzipes die entstehende Spektrallinie aus $(m + m')$ ($n + n'$) Komponenten bestehen, wie dies bei der Funkenanregung der Heliumlinie 4686 in der Tat der Fall zu sein scheint.

Zur Bezeichnung der einzelnen Komponenten wollen wir nach Paschen¹⁾ und Som-

merfeld¹⁾ das ganze Liniengebilde zunächst entsprechend der Vielfachheit der Endbahn in $n + n'$ Gruppen I, II, III, ... teilen und in diesen, je nach der Vielfachheit der Anfangsbahn, die $m + m'$ Komponenten $a, b, c, \dots$ unterscheiden, beide Male im Sinne wachsender radialer Quantenzahl (von 0 bis $n + n' - 1$ bzw. bis $m + m' - 1$) also von der Kreisbahn zur Ellipse größter Exzentrizität hin gezählt.

Unser Auswahlprinzip

$$|m - n| \leq 1$$

besagt nun offenbar, daß jedem n höchstens drei Werte m entsprechen können, d. h. von allen Linien der Liniengruppen I, II, III, ... können höchstens je drei Linien sichtbar sein. Dieses Auswahlprinzip ist offenbar seinem Wesen nach verschieden von den Sommerfeldschen Quantenungleichungen, die aus den Versuchsergebnissen Paschens abgeleitet sind. Dennoch werden wir uns gleich an Beispielen überzeugen können, daß auch unser Auswahlprinzip — mit Ausnahme je einer Komponente der Heliumlinien 4686 und 3203 — praktisch die „exaktere“ Fassung der Sommerfeldschen Quantenungleichungen zu ersetzen und demnach sonst im allgemeinen die Paschenschen Gleichstromfeinstrukturen gut wiederzugeben vermag.

In den folgenden, im wesentlichen aus der Sommerfeldschen Abhandlung entnommenen Figuren sind die durch die „exaktere“ Sommerfeldsche Quantenungleichung

$$\begin{aligned} m' &\geq n' \text{ ausnahmslos gültig,} \\ m &\geq n \text{ im allgemeinen gültig} \end{aligned}$$

ausgeschlossenen Linien punktiert eingezeichnet, Linien, die nach der „gröberen“ Quantenungleichung

$$m' > n' \text{ und } m > n \text{ ausnahmslos gültig}$$

fortfallen sollten, nach der exakteren aber doch noch möglich sind, durch einen kurzen Pfeil angedeutet. Die nach den beiden obigen Quan-

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. 50, 901, 1916.

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 51, 1, 1916.

tenungleichungen möglichen Linien sind ausgezogen. Ihre Länge ist proportional ihrer vermutlichen Intensität. Eine unter der Bezeichnung der Linie angebrachte Ziffer 0 oder 1 bedeutet, daß die Linie durch unser Auswahlprinzip (12) ausgeschlossen bzw. zugelassen wird.

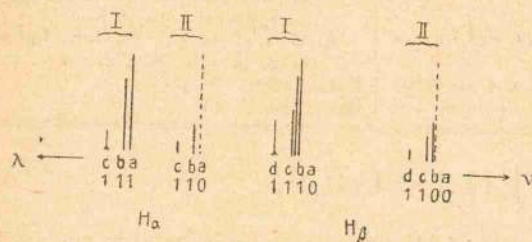


Fig. 1.

Wir betrachten zunächst die Balmerreihe des Wasserstoffs. Für H_α (Fig. 1) stimmt unser Schema mit dem Sommerfeldschen vollständig überein. Bei H_β (Fig. 1) sollte nach unserem Auswahlprinzip auch Ia und IIb fortfallen. Nach unserem Auswahlprinzip besteht überhaupt jede Linie der Balmerreihe aus drei Komponenten der Gruppe I und zwei der Gruppe II. Die Unterschiede gegenüber den Sommerfeldschen Quantenungleichungen sind aber experimentell nicht feststellbar, da die Einzelkomponenten jeder der Gruppen I und II bisher nicht aufgelöst werden konnten und die Gruppen I und II nur als je eine Linie beobachtet werden, zusammen also ein Dublett geben. Aber selbst die durch den Ausfall von Komponenten bedingte Änderung der Dublettweite dürfte versuchsmäßig kaum feststellbar sein, da die einzelnen Komponenten in den Gruppen I und II mit wachsender Ordnungszahl der Linien immer näher aneinander rücken.

Sehr eingehend läßt sich dagegen unsere Theorie an den Feinstrukturen der He_+ -Linien prüfen. Diese Linien wurden bekanntlich früher als die erste und die zweite Nebenserie des Wasserstoffs beschrieben und werden ohne Rücksicht auf die Relativitätskorrektur durch die Formeln

$$\nu = 4N \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (16)$$

$$\nu = 4N \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (17)$$

dargestellt. Die Hauptlinie der Serie (16) ($m=4$) hat die Wellenlänge 4686 Å.-E. Ihre Feinstruktur (Fig. 2) wurde von Paschen¹⁾ sowohl bei Gleichstrom- als bei Funkenanregung überaus sorgfältig gemessen und bildet eine der stärksten Stützen der Sommerfeldschen Theorie. Mit Ausnahme von Id, wo, im Wider-

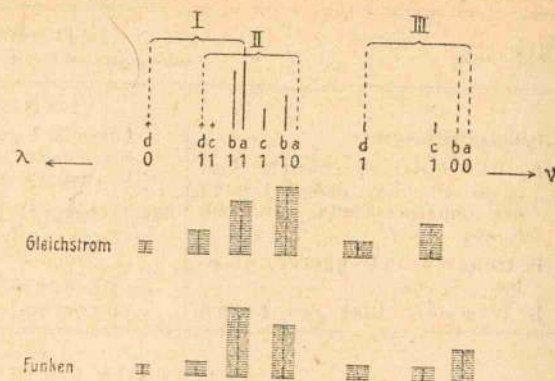


Fig. 2.

spruche mit dem Auswahlprinzip (12), $m-n=2$, werden sämtliche mit den Sommerfeldschen exakteren Quantenungleichungen verträglichen Linien auch hier durch unser Auswahlprinzip zugelassen. Die Tatsache, daß Id im Gleichstrombilde ganz deutlich (schwach auch im Funkenbilde) zu beobachten ist und daß ferner im Funkenbilde auch alle anderen nach (12) nicht zulässigen Komponenten beobachtet werden, zeigt uns handgreiflich, daß die Bedingungen für die Gültigkeit unseres, für ein kräftefreies Feld strenge Gültigkeit beanspruchenden Auswahlprinzips (12) beim Experimente nicht immer erfüllt sind. Wir sehen den Grund hierfür in einer beginnenden Beeinflussung des Strahlungsvorganges durch das in jeder Geißleröhre stets vorhandene elektrische Feld, das, noch zu schwach um die Lage der Linien merklich zu verändern, sie gleichwohl wegen des beim Stark effekt gültigen Auswahlprinzips schon hervorzurufen vermag [vgl. § 8 Gl. (32)].

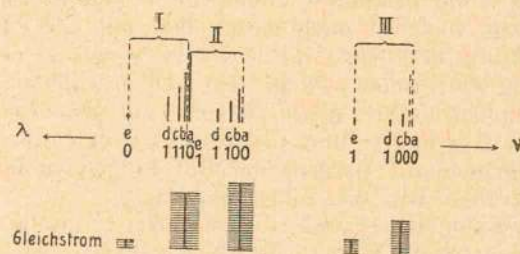


Fig. 3.

Auch bei der zweiten Linie der Serie (16) ($m=5$) mit der Wellenlänge 3203 Å.-E. ist die schwächste beobachtete Komponente Ie (Fig. 3) mit dem Auswahlprinzip (12) nicht verträglich, was wir hier ebenfalls als einen beginnenden Einfluß des Stark effekts deuten. Die sonstigen aus der Fig. 3 zu entnehmenden Unterschiede gegen die Sommerfeldschen Quantenungleichungen lassen sich wohl an den Paschen'schen Beobachtungen kaum kontrol-

¹⁾ F. Paschen, l. c.

hier. Das gleiche gilt sicherlich auch von den übrigen Gliedern der Serie (16) sowie von der ganzen Serie (17).

§ 6. Über die Möglichkeit der Übertragung unserer Betrachtungen auf den Fall des Zeeman- und des Starkeffekts. Versucht man auf dem bereits beschrittenen Wege unsere Theorie für den Zeeman- und Starkeffekt zu verallgemeinern, so stößt man zunächst auf eine Schwierigkeit: Wenn ein äußeres Feld vorhanden ist, dann besteht der Satz von der Konstanz des Impulsmoments schon für das Atom allein im Falle des elektrischen Feldes nur für die eine, zur Feldrichtung parallele Komponente, im Falle des magnetischen Feldes aber überhaupt nicht mehr. In seiner vektoriellen, dreikomponentigen Form gilt ja dieser Satz allein für Systeme, die nur inneren Kräften unterworfen sind. Die hier auftretende Schwierigkeit steckt jedoch in Wirklichkeit nur in einer für unsere jetzigen Zwecke zu weit gehenden Idealisierung der tatsächlichen Verhältnisse und sie ist überwunden, wenn wir das Atom zusammen mit den das elektrische oder magnetische Feld erzeugenden Leitern und Magneten als ein System auffassen. Es muß also auch für den Fall des Zeeman- und des Starkeffekts möglich sein, grundsätzlich auf dem gleichen Wege, den wir bei nicht vorhandenem äußeren Felde gegangen sind, zu einem Auswahlprinzip und zu einer Polarisationsregel zu gelangen.

Der eigentliche Weg zur Behandlung des Zeeman- und des Starkeffekts besteht demnach in dem Grenzübergange aus einem Dreikörperproblem. Unser Ziel können wir aber auch bei diesem Vorgehen nur erreichen, wenn wir über die Art des Grenzübergangs und über den Impulsmomentaustausch zwischen Atom und felderzeugendem Körper während der Ausstrahlung gewisse Festsetzungen treffen. Wir versuchen es daher beim Zeemaneffekt zunächst (§ 7) mit einem einfacheren Verfahren, nämlich mit der Annahme, daß das Auswahlprinzip und die Polarisationsregel bei Einwirkung des magnetischen Feldes ebenso lauten, wie sie sich aus unseren bisherigen Überlegungen bei den durch die gleichen Quantenzahlen bestimmten Übergängen des Elektrons für den Grenzfall eines „äußeren magnetischen Feldes von der Stärke Null“ ergeben. Diese Annahme wird der Erfahrung schon von vornherein wenigstens insoweit gerecht, als sowohl das Auswahlprinzip als auch die Polarisationsregel Dinge betreffen, die beim Zeemaneffekt von der Stärke des magnetischen Feldes vollkommen unabhängig sind.

Auf den Fall des Starkeffekts lassen sich,

wie wir dies im § 8 auseinandersetzen werden, die obigen einfachen Überlegungen, was man schon von vornherein erkennen kann, nicht anwenden; hier sind wir gezwungen auf den zuerst angedeuteten Weg zurückzugreifen.

Im § 8 werden wir ferner auch auf die Bedeutung dieses prinzipiellen Weges für den Fall des Zeemaneffekts zurückkommen und die beiden beim Zeemaneffekt möglichen Wege miteinander vergleichen.

§ 7. Zeemaneffekt. Die Quantelung des Zeemaneffekts läßt sich in dem Falle eines „magnetischen Feldes von der Stärke Null“ mit Hilfe der räumlichen Polarkoordinaten¹⁾ r, φ, ϑ , deren Achse $\vartheta=0$ mit der Richtung des äußeren Feldes zusammenfällt, einfach durchführen. Um eine hinreichend genaue Quantelung im Falle der nicht verschwindenden magnetischen Feldstärke zu erzielen, genügt es dann im wesentlichen, dieses Koordinatensystem um die Richtung des Feldes $\mathfrak{H}$ mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\mathfrak{f}} = \frac{e}{m} \cdot \frac{\mathfrak{H}}{c}$$

(e/mc spezifische Ladung des Elektrons, $\mathfrak{H}$ magnetische Feldstärke) rotieren zu lassen, wobei die Richtungen der Winkelgeschwindigkeit und des Feldes miteinander übereinstimmen.

Sind $p_r, p_\varphi, p_\vartheta$ die den Koordinaten r, φ, ϑ entsprechenden Impulse, so lauten für $\mathfrak{H}=0$ die Quantenbedingungen

$$\int_0^{2\pi} p_\varphi d\varphi = n_1 h, \int p_\vartheta d\vartheta = n_2 h, \int p_r dr = n' h. \quad (18)$$

Sie bestimmen Ellipsen von genau den gleichen Abmessungen, wie unsere früheren zweidimensionalen Quantenbedingungen

$$2\pi p = n h, \int p_r dr = n' h,$$

wobei zwischen den „alten“ und den „neuen“ Quantenzahlen der Zusammenhang

$$n = n_1 + n_2, n' = n'$$

besteht. Durch (18) wird aber außerdem auch die räumliche Lage der Ellipsen festgelegt, und zwar so, daß die Normale auf die Ebene der jeweils durchlaufenen stationären Bahn mit der Richtung des magnetischen Feldes den durch

$$\cos \alpha = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \quad (19)$$

bestimmten Winkel α bildet. Da demnach $\cos \alpha$ von n' nicht abhängt, so sind die zugehörigen

¹⁾ Im folgenden richten sich unsere Bezeichnungen nach A. Sommerfeld, diese Zeitschr. 17, 491, 1916. Die Quantentheorie des Zeeman-Effektes wurde gleichzeitig auch von P. Debye, diese Zeitschr. 17, 507, 1916 entwickelt.

im ganzen $n = n_1 + n_2$ räumlichen Lagen einer durch die Quantenzahlen n, n' bestimmten gequantelten Ellipse unabhängig von n' und allein durch die azimutale Quantenzahl n , d. h. durch die Größe ihres Impulsmoments gegeben. Mit Rücksicht auf den (nach der klassischen Elektrophtheorie bestehenden) nahen Zusammenhang zwischen dem Impuls- und dem magnetischen Moment ist mithin für die räumliche Lage der gequantelten Ellipse allein ihr magnetisches Moment maßgebend.

Für die Energie der Bahn n_1, n_2, n' gilt dann im Falle $\mathfrak{H} = 0$ der Ausdruck

$$W_0 = - \frac{N h}{(n_1 + n_2 + n')^2}.$$

Ist aber das äußere Feld $\mathfrak{H}$ von Null verschieden, so ist die Energie einer gequantelten Bahn durch¹⁾

$$W = W_0 + \frac{1}{2} p_z f$$

gegeben, wo $f = |\mathfrak{f}|$ und p_z die Projektion des im rotierenden Bezugssystem räumlich konstanten Impulsmoments auf die Richtung des magnetischen Feldes bedeutet. Nun ist p_z seinem Vorzeichen nach²⁾ positiv oder negativ, je nachdem das Elektron um die positive Richtung des magnetischen Feldes im Sinne einer Rechts- oder Linksschraube sich bewegt. Da das stets positive Phasenintegral $\int p_z d\chi = n_1 h$ im Sinne des umlaufenden Elektrons zu nehmen ist, so gilt offenbar:

$$\int_0^{+2\pi} p_z d\chi = + 2\pi \cdot p_z = n_1 h$$

wenn $\dot{\chi}$ und mithin p_z positiv sind und

$$\int_0^{-2\pi} p_z d\chi = - 2\pi \cdot p_z = n_1 h$$

wenn $\dot{\chi}$ und mithin p_z negativ sind.

Es wird daher

$$W = W_0 \pm \frac{n_1 h}{4\pi} f$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem das Elektron um die Richtung des Feldes im Sinne einer Rechts- oder Linksschraube läuft. Die Schwingungszahlen der in

1) Vgl. A. Sommerfeld, diese Zeitschr. 17, 491, 1916. Diese Beziehung wird erhalten, wenn in dem letzten dort auf S. 493 gegebenen Ausdrucke für W aus der dortigen Beziehung (8) das p_z eingeführt wird. χ ist im rotierenden Bezugssysteme die dem Winkel φ im ruhenden Systeme entsprechende Koordinate.

2) Vgl. A. Sommerfeld, I. c. S. 493, Formel (8) und beachte die Tatsache, daß das dort benutzte System von räumlichen Polarkoordinaten so beschaffen ist, daß der Richtung des magnetischen Feldes $\mathfrak{H} = 0$ ein Anwachsen des Winkels χ durch eine Rechtsschraube zugeordnet ist.

einem magnetischen Felde ausgesandten Linien werden daher durch:

$$\nu = N \frac{1}{(n_1 + n_2 + n')^2} - \frac{1}{(m_1 + m_2 + m')^2} \pm \frac{e H}{m c 4 \pi} (m_1 - n_1) \quad (20)$$

gegeben, wobei bezüglich der Wahl des Vorzeichens die obige Festsetzung zu beachten ist.

Wir kehren nun zur Betrachtung des Falles $\mathfrak{H} = 0$ zurück und wollen hier die Überlegungen des § 2 mit Rücksicht auf die räumliche Quantelung weiter fortführen.

Zunächst betrachten wir den Fall, wo

$$m - n = (m_1 + m_2) - (n_1 + n_2) = \pm 1 \quad (21)$$

ist. Da hier nach § 2 die Anfangs- und die Endbahn in der gleichen Ebene liegen, so muß nach (19)

$$\frac{n_1}{n_1 + n_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad (22)$$

sein. Den Gleichungen (21) und (22) wird zunächst offenbar entsprochen durch

$$\begin{cases} n_1 = m_1 = 0 \\ m_2 - n_2 = \pm 1, \end{cases} \quad (23a)$$

d. h. Anfangs- und Endbahn liegen in einer Ebene durch die Richtung des magnetischen Feldes. Setzt man nun $n_1 \neq 0$ und $m_1 \neq 0$ voraus, so folgt aus (21), indem man dort aus (22) $m_1 + m_2$ oder $n_1 + n_2$ einsetzt:

$$(m_1 - n_1) \frac{n_1 + n_2}{n_1} = (m_1 - n_1) \frac{m_1 + m_2}{m_1} = \pm 1,$$

was nur für

$$\begin{cases} n_2 = m_2 = 0 \\ m_1 - n_1 = \pm 1 \end{cases} \quad (23b)$$

möglich ist. Dies bedeutet aber mit Rücksicht auf (19), daß die Anfangs- und Endbahnen des Elektrons jetzt in der Ebene senkrecht zur Feldrichtung liegen. Beachten wir noch die für $m - n = \pm 1$ im § 3 erhaltenen Ergebnisse, so können wir sagen: Bei Berücksichtigung der räumlichen Quantelung wird im Falle $m - n = \pm 1$ rein zirkular-polarisiertes Licht ausgestrahlt, wobei die Anfangs- und Endbahn, sowie die zirkulare Bahn des Ersatzelektrons alle in der gleichen Ebene liegen, die entweder durch die Richtung des magnetischen Feldes geht (Fall 23a) oder zu ihr senkrecht steht (Fall 23b). Der Fall (23b) entspricht den beiden äußeren, im Längseffekte zirkular-polarisierten Zeeman-komponenten. Der Fall (23a) kann aber in Wirklichkeit nicht vorkommen. Ihm entspricht ja die mittlere Triplettkomponente und diese müßte, wenn (23a) auftreten sollte, sowohl im Längs- als auch im Quereffekt, und zwar unpolarisiert bzw. nur teilweise polarisiert beobachtbar sein.

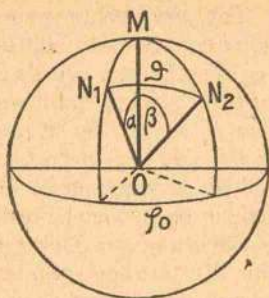


Fig. 4.

In dem noch zu betrachtenden Falle

$$m - n = (m_1 + m_2) - (n_1 + n_2) = 0 \quad (24)$$

muß nach (14) der von den Ebenen der Anfangs- und der Endbahn eingeschlossene Winkel ϑ der Ungleichung

$$\cos \vartheta \geq 1 - \frac{1}{2n^2} \quad (25)$$

entsprechen. Bezeichnen wir mit α und β die Winkel, die die Normalen ON_1 bzw. ON_2 (vgl. Fig. 4) auf die Ebenen der Anfangs- und der Endbahn mit der Richtung OM des Feldes einschließen und mit φ_0 den Winkel, den die Projektionen dieser Normalen auf die Ebene senkrecht zum Felde miteinander bilden, so ist

$$\cos \alpha = \frac{n_1}{n_1 + n_2}, \quad \cos \beta = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad (26)$$

und aus dem Dreiecke $N_1 N_2 M$ folgt

$$\cos \vartheta = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \varphi_0.$$

(25) gibt somit

$$\frac{n_1 m_1 + \sqrt{n^2 - n_1^2} \sqrt{m^2 - m_1^2} \cos \varphi_0}{n^2} \geq 1 - \frac{1}{2n^2}$$

oder umgeformt:

$$-(n^2 - n_1^2)(n^2 - m_1^2) \sin^2 \varphi_0 - \frac{1}{4} \geq \geq n^2 [(n_1 - m_1)^2 - 1] + n_1 m_1. \quad (27)$$

Diese Ungleichung kann nur für

$$n_1 - m_1 = 0$$

erfüllt sein.

Da nämlich stets n_1 und m_1 gleiches Zeichen haben und mithin

$$n_1 m_1 \geq 0$$

ist, so müßte nach (27)

$$0 > n^2 [(n_1 - m_1)^2 - 1]$$

gelten, was offenbar nur für

$$m_1 - n_1 = 0 \quad (23c)$$

bestehen kann. Aus (24) und (26) folgt dann aber $\alpha = \beta$, d. h. für den Fall, daß sich bei der Strahlung des Atoms sein Impulsmoment nicht ändert, liegen die Ebene der Anfangs- und der Endbahn unter dem gleichen Winkel

zur Richtung des magnetischen Feldes geneigt. Damit ist aber noch nicht gesagt, daß die beiden Ebenen miteinander auch zusammenfallen. Daher sind die Polarisationsverhältnisse durch die bisherigen Voraussetzungen noch nicht bestimmt und selbst aus der ad hoc gemachten Annahme, daß die Anfangs- und Endbahn in der gleichen Ebene liegen, folgt jetzt nur (vgl. § 3), daß unser harmonisch schwingendes Ersatzelektron rein linear-polarisiertes Licht aussendet (was ja beim Zeeman effekt in Wirklichkeit zutrifft), ohne daß wir aber die räumliche Lage der Geraden, in der unser Ersatzelektron schwingt, irgendwie festlegen könnten. Wir bemerken noch, daß auch aus der Voraussetzung $m - n = 0$ eindeutig als Folgerung $m_1 - n_1 = 0$ sich ergibt.

Die obigen für $\mathfrak{S} = 0$ abgeleiteten Ergebnisse sollen nun durch die schon früher angekündigte Annahme, daß sie auch in einem magnetischen Felde von nicht verschwindender Feldstärke unverändert bestehen bleiben, auf den wirklichen Fall des Zeeman effekts übertragen werden. Nach der von Sommerfeld und Debye entwickelten Theorie sollten nach (20), wie bekannt, neben dem beobachteten Triplett noch weitere in Wirklichkeit nicht beobachtete Linien auftreten, nämlich falls in (20) $|m_1 - n_1| > 1$ gesetzt wird. Selbst durch die Sommerfeldschen Quantenungleichungen kann diese Diskrepanz in der Balmer serie nur bei H_α behoben werden. Nach unseren Annahmen ist dagegen (vgl. 23 a, b und c).

$$|m_1 - n_1| \leq 1$$

und von der in (20) enthaltenen Mannigfaltigkeit von Linien kann daher nur das normale Triplett auftreten. Weiter ergibt sich jetzt im Falle $m_1 - n_1 = \pm 1$, d. h. im Falle der beiden äußeren Triplettkomponenten in vollständiger Übereinstimmung mit der Erfahrung nach (23 b) eindeutig die Erklärung der Tatsache, daß diese beiden Komponenten durch eine zirkuläre Schwingung des Ersatzelektrons zustande kommen. Selbst der Sinn der zirkulären

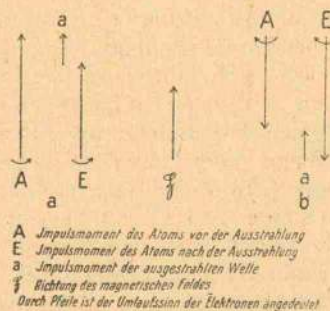


Fig. 5.

Polarisation läßt sich aus unseren Annahmen vorhersagen. Nach (20) wird nämlich beim Ausstrahlen der nach Violett hin gelegenen Triplettkomponente für den Fall, daß das Elektron die Feldrichtung im Sinne einer Rechtsschraube umkreist, der Absolutbetrag des Impulsmoments unseres Atoms beim Elektronenübergange abnehmen, im Falle einer Umkreisung im Sinne einer Linksschraube aber zunehmen. Das Impulsmoment der ausgestrahlten Welle hat dann in beiden Fällen die Richtung des magnetischen Feldes $\mathfrak{H}$ (vgl. Fig. 5a u. 5b). Nach der Beziehung (4) wird ein so gerichtetes Impulsmoment von einem Ersatzelektron ausgestrahlt, dessen Umlaufssinn der Feldrichtung durch eine Rechtsschraube zugeordnet ist und das mithin einem entgegen der Richtung der Kraftlinien blickenden Beobachter rechtszirkuläres Licht zustrahlt. Wir bemerken noch, daß im Falle der Fig. 5a die Umlaufsrichtung des Elektrons in der Anfangs- und Endbahn mit der Umlaufsrichtung des strahlenden Ersatzelektrons identisch ist, daß dies in der Fig. 5b aber nicht mehr zutrifft. Die Umlaufsrichtung des Elektrons in den stationären Bahnen und die des Ersatzelektrons sind hier einander entgegengesetzt gerichtet. Bei der gegen das Rot hin gelegenen äußersten Triplettkomponente ist naturgemäß der Sinn der Polarisation der entgegengesetzte. Diese Ergebnisse sind in Übereinstimmung mit der Beobachtung (vgl. etwa M. Abraham, Theorie der Elektrizität, Bd. 2, 3. Aufl. S. 73).

Nicht ebenso befriedigend sind die Ergebnisse unserer Theorie für die mittlere Triplettkomponente, d. h. für den Fall $m_1 - n_1 = 0$, wo — wie schon oben bemerkt wurde — die Polarisationsverhältnisse nur bei Anwendung weiterer Hilfsannahmen bis auf eine kleine Lücke festgelegt werden können (s. o. Formel 23a und c).

Wir bemerken jedoch, daß wir auch beim Zeemaneffekt den Weg über das Dreikörperproblem grundsätzlich für richtiger halten. Nur die Berücksichtigung der Impulsmomente der sämtlichen Faktoren, welche zusammen ein nur inneren Kräften unterworfenen System bilden, rechtfertigt die Benutzung des Satzes von der Erhaltung des Impulsmoments. Aus dem Grenzfall $\mathfrak{H} = 0$ läßt sich in Strenge für $\mathfrak{H} \neq 0$ nichts extrapolieren. In der Tat stimmen auch die jetzt erhaltenen Ergebnisse mit jenen, die wir auf dem Wege über das Dreikörperproblem erhalten (vgl. § 8), nicht ganz überein.

§ 8. Starkeffekt. Wir wollen hier zunächst kurz zeigen, daß eine formelle Anwendung der beim Zeemaneffekt benutzten Gedankengänge beim Starkeffekt schon aus theoretischen Gründen nicht durchführbar ist

und in der Tat am Widerspruche mit der Erfahrung scheitert. Sodann soll der zum Ziele führende Weg beschritten werden.

Wir beginnen damit, daß wir an einige Ergebnisse der Theorie von Epstein¹⁾ und Schwarzschild²⁾ erinnern. Die Quantelung unseres Problems gelingt in einem System von räumlichen parabolischen Koordinaten. Liegt etwa x in der Richtung des elektrischen Feldes und ist y die Entfernung von der x -Achse, so bilden x , y und ein Winkel φ ein System von Zylinderkoordinaten und die parabolischen Koordinaten ξ , η , φ werden dann durch die Beziehung

$$x + iy = \frac{1}{2} (\xi + i\eta)^2, \varphi = \varphi$$

gegeben.

Sind nun m_1, m_2, m_3 bzw. n_1, n_2, n_3 die den Koordinaten ξ , η , φ entsprechenden Quantenzahlen der Anfangs-, bzw. Endbahn, so werden in einem elektrischen Felde von der Feldstärke E von einem H -Atom die Linien

$$\left\{ \begin{aligned} \nu &= N \left(\frac{1}{(n_1 + n_2 + n_3)^2} - \frac{1}{(m_1 + m_2 + m_3)^2} \right) + \\ &\quad + \frac{3h}{8\pi^2 m e c} E \cdot Z \\ Z &= (m_1 + m_2 + m_3)(m_1 - m_2) - \\ &\quad - (n_1 + n_2 + n_3)(n_1 - n_2) \end{aligned} \right. \quad (28)$$

emittiert.

Beim Grenzübergange $E = 0$ liefert (28) unmittelbar die Balmerische Formel mit Vernachlässigung der Relativitätskorrektur. Die für $E = 0$ sich hier ergebenden stationären Bahnen sind aber geometrisch durchaus von den „richtigen“ verschieden, die bei der Quantelung mit Hilfe der ebenen Polarkoordinaten r , φ und mit Rücksicht auf die Relativität erhalten werden. Damit im Einklange steht die Tatsache, daß das Impulsmoment p einer solchen in parabolischen Koordinaten gequantelten Ellipsenbahn für $E = 0$ jetzt durch

$$p^2 = \frac{h^2}{4\pi^2} \{ (n_1 + n_3)(n_2 + n_3) + n_1 n_2 - \\ - 2 \sqrt{n_1 n_2 (n_1 + n_3) (n_2 + n_3)} \cos \beta' \sqrt{2A} \} \quad (29)$$

gegeben wird, wo A die Energie und β' eine durch die Quantenzahlen nicht näher bestimmte Konstante bedeutet. p hat somit überhaupt nur in dem Fall, wo n_1 oder n_2 verschwindet, einen durch Quantenzahlen eindeutig festgelegten Wert und ist im allgemeinen kein ganzzahliges

Vielfaches von $\frac{h}{2\pi}$.

1) P. Epstein, Ann. d. Phys. 50, 489, 1916.

2) K. Schwarzschild, Berl. Ber. 1916, S. 548.

3) Vgl. P. Epstein, l. c. S. 496.

Sucht man nun die Überlegungen des § 2 formell auf die jetzigen Verhältnisse (und zwar zunächst wie beim Zeemaneffekt für $E=0$) zu übertragen, so scheitert man vor allem schon an dem Vorhandensein von Sonderfällen, wo bei einem Elektronenübergang sich p um Vielfache von $\frac{h}{2\pi}$ ändert, die größer als 1 sind, was offenbar nicht zulässig ist. So kann z. B. die $Z=18$ entsprechende stärkste p -Komponente von $H_{\gamma}^{1)}$ allein nur durch den Übergang des Elektrons aus der Anfangsbahn $m_1=4$, $m_2=0$, $m_3=1$ in die Endbahn $n_1=1$, $n_2=0$, $n_3=1$ zustande kommen. Nach (29) muß dabei das Impulsmoment des Atoms im Grenzfalle, wenn $E=0$ ist, von

$$p = \frac{h}{2\pi} \sqrt{5} \text{ auf } p = \frac{h}{2\pi} \sqrt{2} \quad (30)$$

abnehmen. Nun ist aber die Polarisierung dieser Linie nach den Beobachtungen Starks²⁾ im Längs- und Quereffekt eine solche, wie sie im Bilde der klassischen Theorie einem Elektron entspricht, welches parallel dem elektrischen Felde schwingt, und es dürfte demnach das Atom bei der Ausstrahlung dieser Linie sein Impulsmoment überhaupt nicht ändern, im Widerspruche mit (30).

Selbstverständlich dürfen wir über dieses Versagen des jetzt versuchten Weges nicht weiter staunen. Wie wir schon oben bemerkt haben, ergibt zwar die Epstein-Schwarzschildsche Quantelung im feldlosen Falle $E=0$ für die stationären Bahnen bekanntlich die richtigen Energiewerte; die Bahnen und die hier den Bahnen zugeordneten Impulsmomente (29) sind jedoch offenbar falsch. Sie widersprechen nämlich der für $E=0$ mit Hilfe der ebenen Polarkoordinaten r, φ erhältlichen (und wie von P. Epstein wiederholt betont wurde auch beim Stark effekt für $E=0$ eigentlich richtigen) Quantelung, die allein den Forderungen des Relativitätsprinzips und damit der Feinstruktur entspricht. Es ist daher vollständig einleuchtend, daß wir aus der für $E=0$ falschen Quantelung durch Extrapolation auf $E \neq 0$ ein richtiges Resultat nicht erhalten können. Um auf dem jetzt beschrittenen Wege zum Ziele zu gelangen, müßten wir von der bisher nicht durchgeführten Quantelung des Stark effekts bei Berücksichtigung des Relativitätseinflusses ausgehen. Außerdem bleibt natürlich gegen den oben betrachteten Weg nach unseren allgemeinen Gesichtspunkten (vgl. § 6 und das über den Zeemaneffekt im § 7 Gesagte) auch

hier der Einwand voll zu Recht bestehen, daß Schlüsse auf die Polarisierung des ausgesandten Lichtes nur mit Rücksicht auf das Impulsmoment aller an dem Systeme beteiligten Faktoren gemacht werden dürfen.

Eine Übereinstimmung der Beobachtungen am Stark effekt mit unseren allgemeinen Betrachtungen läßt sich aber in der folgenden Weise erzielen. Wir denken uns zunächst, daß der das elektrische Feld erzeugende Körper sich im Endlichen befindet, eine endliche Masse besitzt und frei beweglich ist. Elektron, Kern und felderzeugender Körper bilden dann ein nur inneren Kräften unterworfenen System, dessen Impulsmoment sich zeitlich nicht ändert. Von diesem „wirklichen“ Falle aus gelangen wir dann, indem wir den felderzeugenden Körper immer weiter vom Atom wegrücken und dabei die Ladung des Körpers entsprechend anwachsen lassen zu dem von Epstein und Schwarzschild rechnerisch behandelten Grenzfalle des Stark effekts. Uns handelt es sich vor allem darum, den Beitrag des unendlich fernen, felderzeugenden Körpers zum Impulsmomente $\mathfrak{J}$ des gesamten Systems „Atom + felderzeugenden Körper“ im Grenzfalle festzustellen. Dies kann durch eine einfache Rechnung oder noch einfacher durch eine Überlegung erschlossen werden. Zweifellos läßt sich unser Grenzübergang so einrichten, daß im Grenzfalle $\mathfrak{J}$ einen endlichen Wert hat. Bekanntlich ist nun das Impulsmoment unseres, dem Einflusse des elektrischen Feldes unterworfenen Atoms nur in seiner zur Feldrichtung e parallelen Komponente zeitlich konstant, während es in der dazu senkrechten zeitlich veränderlich ist. Da nun $\mathfrak{J}$ konstant ist, so muß mithin im Grenzfalle das Impulsmoment des felderzeugenden Körpers in seiner zu e senkrechten Komponente zeitlich veränderlich (indem es das veränderliche Impulsmoment des Atoms kompensiert) und in seiner zu e parallelen Komponente zeitlich konstant sein. Da noch, wie eine nähere Abschätzung zeigt, im Grenzfall bei einer ins Auge gefaßten Bewegung des Atoms das Impulsmoment des felderzeugenden Körpers nur bis auf einen konstanten Beitrag bestimmt ist, so können wir sagen: Die zur Feldrichtung e parallelen Komponenten der Impulsmomente von Atom und felderzeugendem Körper stehen während der Bewegung des Atoms in keiner Wechselbeziehung zueinander und haben voneinander unabhängige, zeitlich konstante Werte.

Diese letzterwähnte Tatsache legt uns die für das Folgende grundlegende Annahme nahe, daß auch während eines Elektronenübergangs die zur Feldrichtung e parallele Komponente

1) Vgl. P. Epstein, l. c. S. 512.

2) J. Stark, Elektrische Spektralanalyse chemischer Atome. Leipzig 1914, vgl. S. 33.

des Impulsmoments vom felderzeugenden Körper ungeändert bleibt. Die Änderung der in die Feldrichtung e fallenden Komponenten des gesamten Impulsmomentes $\mathfrak{J}$ ist dann bei einem Elektronenübergang gleich der Änderung der zu e parallelen Komponente des Impulsmoments des Atoms. Da nun diese Größe nach Epstein vor, bzw. nach dem Elektronenübergang gleich $m_3 \frac{h}{2\pi}$ bzw. $n_3 \frac{h}{2\pi}$ ist, so ist nach der jetzt gemachten Voraussetzung die Änderung der in die Richtung von e fallenden Komponente von $\mathfrak{J}$ bei einem Elektronenübergang durch

$$(m_3 - n_3) \frac{h}{2\pi} \quad (31)$$

gegeben.

Beträgt nun der Absolutbetrag des Impulsmoments $\mathfrak{J}$ vor bzw. nach der Ausstrahlung $m \frac{h}{2\pi}$ bzw. $n \frac{h}{2\pi}$, wo m und n jetzt eventuell nicht mehr ganze Zahlen sein werden (solange die Quantelung des Dreikörperproblems nicht durchgeführt ist, läßt sich darüber nichts Bestimmtes aussagen), so folgt jetzt aus dem § 2, da die dortigen Schlüsse keineswegs an der Ganzzahligkeit von m und n hängen, ebenso wie dort

$$|m - n| \leq 1,$$

d. h. die Änderung des Absolutbetrages des gesamten Impulsmoments $\mathfrak{J}$ kann bei der Ausstrahlung höchstens $\frac{h}{2\pi}$ betragen. Da aber bei dem Elektronenübergang die Änderung der in die Richtung von e fallenden Komponenten höchstens gleich dem Absolutbetrage der höchstzulässigen gesamten Änderung dieses Vektors sein kann, so erhalten wir jetzt aus (31), daß

$$|m_3 - n_3| \leq 1$$

ist, d. h. es besteht für die Versuchsbedingungen des Starkeffektes das nachstehende

Auswahlprinzip: Ein Übergang des Elektrons aus einer stationären Bahn m_1, m_2, m_3 in eine andere n_1, n_2, n_3 ($m_1 + m_2 + m_3 > n_1 + n_2 + n_3$) kann bei Vorhandensein eines äußeren elektrischen Feldes nur so erfolgen, daß sich dabei die Quantenzahl m_3 höchstens um eine Einheit ändert, d. h.

$$m_3 - n_3 = +1, 0, -1. \quad (32)$$

Wir bemerken gleich, daß man in der Tat feststellen¹⁾ kann, daß bei allen beim Stark-effekt beobachteten Linien stets solche Über-

gänge vorhanden sind, wo die Quantenzahl m_3 sich höchstens um eine Eins ändert, d. h. unser Auswahlprinzip widerspricht nicht der Erfahrung.

Nunmehr gehen wir zur Besprechung der Polarisationsverhältnisse über. Bekanntlich hat Epstein empirisch eine Polarisationsregel aufgestellt, die sich ausnahmslos bewährt hat und folgendermaßen lautet:

Bei allen Elektronenübergängen, wo $m_3 - n_3$ eine gerade, bzw. ungerade Zahl ist, erscheint bei Beobachtung des Quereffektes (d. h. senkrecht zu den Kraftlinien) die entstehende Lichtwelle so polarisiert, als ob sie (im Bilde der klassischen Theorie) von einem zur Feldrichtung parallel, bzw. senkrecht schwingenden Elektron (p - und s -Komponenten) herrühren würde.

Nach unserer Bemerkung zum Auswahlprinzip ersetzen wir hier zunächst die Epstein'sche Alternative: $m_3 - n_3$ gerade- oder ungeradzahlig durch die Alternative: $m_3 - n_3$ gleich 0 oder gleich ± 1 . Für den Fall $m_3 - n_3 = \pm 1$ gelten dann bei allen in § 2 benutzten Ungleichungen die Gleichheitszeichen; die Änderung des gesamten Impulsmomentes $\mathfrak{J}$ hat hier den höchstzulässigen Betrag $h/2\pi$, erfolgt in der Richtung e des Feldes (da ja hier die höchstzulässige Änderung von $\mathfrak{J}$ schon in der Richtung e der einen Komponente vor sich geht, muß die Richtung der ganzen Änderung eben mit der Richtung dieser Komponente zusammenfallen), und unser Ersatzelektron muß rein zirkularpolarisiertes Licht ausstrahlen, wobei es sich in der Ebene senkrecht zu den Kraftlinien bewegt. Damit ist offenbar die eine Hälfte der Epstein'schen Regel bewiesen. Für den Fall $m_3 - n_3 = 0$ können wir zur Erklärung der Epstein'schen Polarisationsregel nur durch die ad hoc gemachte Zusatzhypothese gelangen, daß sich für $m_3 - n_3 = 0$ überhaupt das Impulsmoment unseres gesamten Dreikörpersystems nicht ändert. Unser harmonisch schwingendes Ersatzelektron muß dann (vgl. § 3) rein linear-polarisiertes Licht aussenden, wobei aber die Richtung der Geraden, in der das Ersatzelektron sich bewegt, noch unbestimmt bleibt.

Unsere Theorie fordert aber auch, daß alle Linien, für die $m_3 - n_3 = \pm 1$ ist, d. h. daß alle s -Komponenten des Quereffektes auch im Längseffekt (d. h. in der Richtung der Kraftlinien) sichtbar sind. Diese Linien werden nämlich durch ein in der Ebene senkrecht zur Feldrichtung zirkular schwingendes Ersatzelektron ausgesendet. Darüber hinaus können wir aber noch behaupten, daß im Längseffekt diese Linien unpolarisiert erscheinen müssen. Jetzt wird zwar einer bestimmten Komponente der

¹⁾ Herr P. Epstein hatte die Freundlichkeit, die Richtigkeit dieser Behauptung an der Hand seiner Aufzeichnungen zu prüfen.

durch das elektrische Feld zerlegten Spektrallinie im allgemeinen ein Wert $m_3 - n_3 = +1$ oder -1 eindeutig zugeordnet und damit bei jeder Komponente eindeutig festgelegt, ob das Impulsmoment des Atoms, wenn sie ausgestrahlt wird, dem absoluten Betrage nach, ab- oder zunimmt; da hier aber die Energie des Elektrons (im Gegensatze zum Zeemaneffekt) von seinem Umlaufsinne um die Feldrichtung vollständig unabhängig ist, so kann hier bei einer ins Auge gefaßten Komponente diese Impulsmomentänderung im oder entgegen dem Sinne des Feldes erfolgen, je nach dem Sinne, in dem das Elektron in der Anfangs- oder Endbahn läuft. Dies bedeutet aber, daß bei jeder Komponente im Längseffekt sowohl rechts als auch links zirkulares Licht ausgestrahlt werden kann und daher diese Linien im Längseffekt unpolarisiert erscheinen müssen. Dies wird durch die Beobachtungen Starks¹⁾ vollständig bestätigt.

Das Auswahlprinzip (32) enthält im Gegensatze zum Auswahlprinzip (12) keine Festsetzungen über den Betrag der bei einem Elektronenübergange stattfindenden Änderung des gesamten Impulsmoments des Systemes „Kern + Elektron“. Darin liegt eine Möglichkeit, die teilweise Nichtübereinstimmung von (12) mit den beobachteten Feinstrukturen (vgl. § 5) zu erklären. Ist nämlich ein äußeres, wenn auch noch so schwaches elektrisches Feld vorhanden, so kommt es nicht mehr auf die Änderung des gesamten Impulsmoments an, sondern nur auf die Änderung seiner zur Feldrichtung parallelen Komponente. Diese kann aber, wenn nur die Anfangs- und Endbahn des Elektrons gegen das Feld entsprechend geneigt sind, sehr wohl entsprechend der Ungleichung (32), kleiner als $\hbar/2\pi$ sein, während z. B. wie bei der Komponente $1d$ der He_+ -Linie 4686 Å.-E. die Änderung des gesamten Impulsmoments gleich $2 \frac{\hbar}{2\pi}$ ist (vgl. § 5). Allerdings handelt

es sich hier, solange wir nicht eine Theorie des Starkeffekts mit Berücksichtigung des Relativitätseinflusses haben, vorläufig nur um eine unbewiesene, wenn auch sehr wahrscheinliche Vermutung.

Wir können jetzt auch sofort übersehen, zu welchen Resultaten beim Zeemaneffekt das hier eingeschlagene Vorgehen führt. Während wir in § 7 in den dortigen Bezeichnungen das Auswahlprinzip

$|m - n| \leq 1$ und gleichzeitig $|m_1 - n_1| \leq 1$ hatten, tritt jetzt an dessen Stelle allein die Forderung

$$|m_1 - n_1| \leq 1,$$

ohne daß gleichzeitig $m - n$ irgendwelchen Einschränkungen unterworfen wäre. Dadurch wird vor allem die Zahl der Entstehungsmöglichkeiten der Triplettkomponenten, insbesondere die der beiden äußersten (s. u.), erheblich vermehrt. Die Aussagen des § 7 über die Polarisationsverhältnisse bleiben dabei vollinhaltlich bestehen.

Die Frage, welcher von den beiden, beim Zeemaneffekte eingeschlagenen Wege der richtigere ist, läßt sich, bevor das Dunkel des Ausstrahlungsvorganges noch nicht aufgeheilt ist, eigentlich nicht abschließend beantworten. Grundsätzlich für richtiger (vgl. § 6 und den letzten Absatz des § 7) halten wir das beim Starkeffekt angewandte Verfahren. Doch auch die Intensitätsverhältnisse im Zeeman-Triplett scheinen diese Ansicht zu stützen. Nach § 7 sollte nämlich die Intensität der mittleren Triplettkomponente im Vergleiche zu den beiden äußeren Komponenten mit der Ordnungszahl der zerlegten Balmerlinie wachsen und im allgemeinen noch größer sein als 2:1, wie dies wirklich beobachtet wird. Es kommen ja nach § 7 für die Erzeugung der beiden äußeren Triplettkomponenten nur jene Quantenbahnen in Betracht, die in der Ebene senkrecht zur Feldrichtung verlaufen, während die die mittlere Komponente liefernden Bahnen eine beliebige durch Quantenzahlen festgelegte Orientierung haben können. Die Zahl der Entstehungsmöglichkeiten der mittleren Komponente ist daher im allgemeinen um vieles größer als die der beiden äußeren zusammengenommen.

Das beim Starkeffekt angewandte Verfahren zur Quantelung schränkt aber auch beim Zeemaneffekte bei keiner Triplettkomponente die räumliche Orientierung der gequantelten Anfangs- und Endbahnen¹⁾ ein.

Zusammenfassung.

Aus der Forderung, daß beim Übergang des Elektrons aus einer stationären Bahn in eine andere das vom Atome verlorene Impulsmoment in der ausgestrahlten Welle sich vollständig wiederfindet, wird ein Auswahlprinzip erhalten, dem praktisch die Sommerfeldschen Quantenungleichungen gleichwertig sind. Die Verallgemeinerung der Theorie für den Fall des Zeemaneffekts erklärt vor allem das Nichtauftreten der nach der Sommerfeld-Debyeschen Theorie zu erwartenden, beim Versuche aber nicht beobachteten überzähligen Komponenten. Schließ-

1) J. Stark, l. c. S. 33.

1) Vgl. hierzu A. Sommerfeld, Münchner Ber. 1917, S. 83.

lich kann beim Zeeman- und Stark effekt eine an der Erfahrung sich bestätigende, wenn auch nicht ganz vollständige Polarisationsregel angegeben werden.

München, Institut für theoretische Physik, im Mai 1918.

(Eingegangen 22. Mai 1918.)

Atombau.

Von P. Debye und P. Scherrer.

Wenn wir heutzutage zu der Überzeugung gekommen sind, daß die Atome als Planetensysteme bewegter elektrischer Massen aufzufassen sind, so erwächst uns die Aufgabe diese Planetensysteme im einzelnen genau so zu ergründen, wie das von Astronomen in ihrem Gebiet gemacht wird, um dann auf Grund des erhaltenen Bildes nunmehr alle Atomäußerungen verstehen zu können. Es ist keine Frage, daß das ungeheure, an Genauigkeit unübertroffene Material, welches die Spektralanalytiker im Laufe der Zeit zusammengebracht haben, im Sinne der auf Bohr zurückgehenden Quantenansätze verarbeitet, dabei eine Hauptrolle spielen wird. Ganz unberechtigt wäre es indessen, wenn wir daraufhin die vielen anderen mit der Atomstruktur eng verknüpften Erscheinungen bei der Verfolgung des Hauptzieles vernachlässigen wollten, auch dann, wenn dieselben in quantitativer Hinsicht wesentlich weniger weit verfolgt werden können, als uns das bei Wellenlängenbestimmungen geläufig ist. Eine Frage von sehr großer Bedeutung, nämlich die nach der Erklärung der chemischen Valenz, ist offenbar verhältnismäßig wenig eng verknüpft mit den Erfahrungen auf spektralem Gebiete, welche sich ja der Hauptsache nach auf freie Atome beziehen. Es liegt nahe, auch die Valenzzahlen zum Wirkungsquantum in Beziehung zu setzen; ja, man kann sogar in einem Falle von einer Erfüllung dieser Forderung sprechen, wenn man bedenkt, wie im Modell des Wasserstoffmoleküls der die Atome bindende Valenzstrich der chemischen Formel mit Erfolg durch einen einquantigen Elektronenring ersetzt wird. Man wird sich sofort die Frage vorlegen, ob auch in anderen Fällen, nicht nur bei Wasserstoff, ähnliche Elektronenringe die Rolle der Valenzstriche übernehmen können und insbesondere, ob man ihre ev. Existenz mit experimentellen Mitteln nachweisen kann. Eine diesbezügliche Frage, welche in besonderer Weise unser Interesse beansprucht, ist die, welche uns vorgelegt wird, sobald wir uns das Gleichgewicht der Kräfte im Kristall und damit die Gründe für

die Möglichkeit der Kristallstrukturen näher überlegen.

Tatsächlich folgt ja sofort aus der Bedingung, daß das elektrostatische Potential der Potentialgleichung genügen soll, die Tatsache, daß jenes Potential nirgends im Raume ein Maximum oder Minimum haben kann. Das bedeutet aber, daß ein Kristall, bei dem wir zwischen den Atomen nur elektrische Kräfte annehmen, niemals ein im stabilen Gleichgewicht befindliches Gebilde darstellt. Es ist verlockend, diese Schwierigkeit durch Heranziehung von gequantelten Elektronenringen im oben bezeichneten Sinne zu umgehen. Wie wir uns vielfach in Gesprächen überzeugen konnten, hat man tatsächlich von verschiedenen Seiten Versuche gemacht, um diese Idee quantitativ zu verwerten.

Gerade bei Kristallen aber sind wir in der glücklichen Lage, die Grundidee der Elektronenringe auf ihre Richtigkeit direkt experimentell zu prüfen; eine Tatsache, welche in unmittelbarem Zusammenhange steht, mit dem einzigen Punkte in der v. Laueschen Interferenztheorie¹⁾, der dort nur formell gefaßt wird. Diese Theorie nämlich geht von dem Ansatz aus, daß ein von Strahlung getroffenes Atom eine Sekundärstrahlung in den Raum hinaus-schickt, welche in fester Phasenbeziehung zur auffallenden Welle steht, und deren Amplitude und Raumverteilung ebenfalls bestimmt ist. Über die Art dieser letztgenannten Größen wird indessen keine Annahme gemacht. Es wird das alles nur phänomenologisch gefaßt durch Einführung der unbestimmten v. Laueschen Strahlenkoeffizienten ψ , deren spezielle Eigenschaften im übrigen für den unmittelbaren Zweck der v. Laueschen Theorie ja auch nicht herangezogen zu werden brauchen. Indessen zeigte sich bald die Wichtigkeit einer näheren Bestimmung jener Größen ψ . Bekanntlich wurden ja die Bragg-schen Fortschritte zu einem wesentlichen Teile erst dadurch ermöglicht, daß über diese Koeffizienten die Annahme gemacht wurde, sie seien dem Atomgewicht des betreffenden zerstreuen-den Atoms (wenigstens annähernd) proportional. Es scheint Bragg selbst nicht aufgefallen zu sein und wurde auch sonst wenig beachtet, daß diese Annahme im Widerspruche zu den Erfahrungen steht, welche man schon vorher über die Zerstreuung von Röntgenstrahlung gesammelt hat und als gesichert anzusehen hatte. Barkla²⁾ hatte schon seine Resultate über den in üblicher Weise gemessenen Zerstreuungs-

¹⁾ Siehe z. B. den Enzyklopädie-Artikel (V, 24) Wellenoptik von M. v. Laue, S. 459.

²⁾ C. G. Barkla, Phil. Mag. 7, 543, 1904; 21, 648, 1911.

koeffizienten s in Materie von der Dichte ρ (wenigstens für Substanzen von kleinem Atomgewicht) zusammengefaßt in der Formel

$$\frac{s}{\rho} = 0,2. \quad (1)$$

Nun bedeutet s die gesamte von 1 cm^3 der Substanz pro Sekunde zerstreute Strahlung, wenn eine Primärstrahlung von der (überall gleichen) Intensität I die Zerstreuung anregt. Nennt man den Zerstreuungskoeffizienten des Atoms σ (so daß also ein Atom, bestrahlt mit der Intensität I pro Sekunde im ganzen die Energie σI zerstreut), dann wird

$$s = \frac{\sigma \rho}{A m_H},$$

wobei A das Atomgewicht und m_H die Masse eines Wasserstoffatoms bedeutet. Das Barklasche Gesetz besagt also

$$\sigma = 0,2 m_H A, \quad (2)$$

d. h. die von einem Atom zerstreute Intensität ist dem Atomgewicht proportional. Der Braggsche Ansatz indessen behauptet dieselbe Proportionalität von der zerstreuten Amplitude, und doch bewähren sich beide Ansätze. Das kann natürlich nur so verstanden werden, daß beide Ansätze Näherungen sind für das richtige Gesetz unter verschiedenen äußeren Bedingungen.

Das Barklasche Gesetz hatte zur Zeit seiner Entstehung den Umstand für sich, daß auch die theoretische Begründung nicht ausstand. Befindet sich nämlich ein einziges völlig freies Elektron in einem Röntgenstrahlenbündel von der Intensität I und berechnet man nach der klassischen Elektrodynamik die Streustrahlung, die von diesem Elektron infolge der von der Primärstrahlung aufgezwungenen Bewegung ausgesandt wird, so findet man dafür den Betrag:

$$\frac{8 \pi}{3} \frac{\epsilon^2}{\mu^2 c^4} I^1)$$

wobei ϵ die Ladung, μ die Masse des Elektrons und c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Eine wesentliche Eigenschaft der Streustrahlung eines Elektrons besteht nach dem angegebenen Ausdruck darin, daß dieselbe ihrem Betrage nach von der Wellenlänge der Primärstrahlung völlig unabhängig ist. Sind nun pro Atom Z Elektronen vorhanden, dann wird man für dessen Zerstreuungskoeffizienten σ annehmen:

$$\sigma = \frac{8 \pi}{3} \frac{\epsilon^2}{\mu^2 c^4} Z. \quad (3)$$

Nun erübrigt es nur noch, im Zusammenhange

mit der durch die Röntgenstrahlenuntersuchungen vermittelten Bedeutung des periodischen Systems der Elemente, für Z den Wert $\frac{A}{2}$ zu substituieren, um das Barklasche Gesetz in der Form:

$$\sigma = \frac{4 \pi}{3} \frac{\epsilon^4}{\mu^2 c^4} A$$

zu bekommen. Auch der Zahlenfaktor hat den richtigen Wert, denn mit

$$\epsilon = 4,77 \cdot 10^{-10}, \quad \frac{\epsilon}{\mu} = 5,30 \cdot 10^{-17}$$

und

$$c = 3,00 \cdot 10^{10}$$

wird

$$\frac{4 \pi}{3} \frac{\epsilon^4}{\mu^2 c^4} = 0,27 \cdot 10^{-24},$$

während man für den in (2) vorkommendem Faktor $0,2 m_H$ den Wert

$$0,2 m_H = 0,33 \cdot 10^{-24}$$

findet. Die Brücke von hier zum Braggschen Gesetz wird unserer Meinung nach durch eine Bemerkung geschlagen, welche der eine von uns 1915 veröffentlicht hat¹⁾, und welche den Ausgangspunkt unserer inzwischen angestellten Untersuchungen bildete. Dort wurde nämlich gezeigt, daß man festhalten darf an der Grundidee der Erzeugung der Streustrahlung durch die Elektronen. Denn, hat man lange Röntgenwellen (lang im Verhältnis zu den Elektronenabständen), dann werden im Atom die Elektronen alle in Phase schwingen und deshalb nicht ihre Streuintensitäten, sondern ihre Streuamplituden addieren. Das bedeutet, daß σ nicht nach (3), sondern nach der Formel

$$\sigma = \frac{8 \pi}{3} \frac{\epsilon^4}{\mu^2 c^4} Z^2 \quad (4)$$

zu rechnen ist. Dieses aber wäre mit $Z = \frac{A}{2}$ das Braggsche Gesetz.

Die quantitative Durchführung der Aufgabe (die im wesentlichen eine Interferenzrechnung ist), zeigt, daß man bei jeder genügend kleinen Wellenlänge um den Primärstrahl einen Winkelraum abgrenzen kann, in dem das Braggsche Gesetz $\sigma \sim A^2$ gilt. Die Öffnung desselben indessen wird mit abnehmender Wellenlänge der Primärstrahlung immer kleiner. Außerhalb dieses Winkelraums bekommt man bald das Barklasche Gesetz $\sigma \sim A$.

So versteht man, wie bei den Braggschen Versuchen, bei denen der Hauptsache nach nur

1) I. I. Thomson, Conduction of electricity through gases. Cambridge 1903, page 271.

1) P. Debye, Ber. d. Königl. Ges. d. Wiss. Göttingen, 27. Febr. 1915.

kleine Glanzwinkel verwendet wurden, die Proportionalität der Amplitude mit dem Atomgewicht eine gute Näherung sein konnte.

Gibt man die Stichhaltigkeit dieser Überlegung zu, dann ist das wesentliche Resultat derselben, auf das es uns für das folgende hauptsächlich ankommt, dieses: Die Streuung der Röntgenstrahlen wird nur von den Elektronen erzeugt. Intensitätsmessungen haben die Bedeutung von Messungen eines Interferenzeffektes der Elektronen, müssen also über Zahl und Lagerung der Elektronen Aufschluß erteilen können.

Darin, daß sowohl das Braggsche, wie das Barklasche Gesetz je nach Umständen aus den Versuchen hervorgeht, liegt zugleich der Nachweis, daß das Wellenlängengebiet, in dem die fraglichen Interferenzen eine wesentliche Rolle spielen, innerhalb experimentell zugänglicher Grenzen liegt. Die spezielle Verwertung und quantitative Durchführung dieser Überlegungen, so, wie sie im folgenden versucht wird, bezieht sich auf drei Punkte, welche in den drei folgenden Paragraphen kurz skizziert werden sollen.

§ 1. Die Frage der Elektronenringe als Koppelungsglieder im Kristallbau.

Da die Elektronen die Ursache für die Streuung sind, hat das, was man bei den Kristallinterferenzen als die Koordinaten des Atoms bezeichnet, unmittelbar mit der Lage des Kernes und damit der Hauptmasse des Atoms nichts zu tun. Dem entspricht es, daß im allgemeinen ein Atom, d. h. in Wirklichkeit seine „Elektronenwolke“ nicht durch einen strahlenden Punkt ersetzt werden kann. Anders ausgedrückt: Auch für die Interferenzbeobachtungen müssen die Atome Struktur zeigen. Freilich zeigt eine einfache Rechnung, welche wir in dieser Übersicht nicht reproduzieren wollen, daß der Effekt jener Atomstruktur sich bei Interferenzversuchen nur als Intensitätseffekt bemerkbar machen wird, wodurch er natürlich im allgemeinen weniger auffällig ist. Die Überlegung genügt aber schon, um festzustellen, daß man z. B. nicht von einem Widerspruche reden darf, wenn einerseits die oberflächliche Betrachtung eines *KCl* und eines *NaCl* Röntgendiagramms zu keinen Unterschieden zwischen den beiden Strukturen führt, und andererseits Ätzversuche an den Kristallen die beiden Körper in verschiedene Gruppen verweisen.

In besonderen Fällen kann aber jener Effekt auch auffällig werden; ein Beispiel hierfür wäre der Diamant, wenn die Valenzstriche in Wirklichkeit durch Elektronenringe zu ersetzen wären:

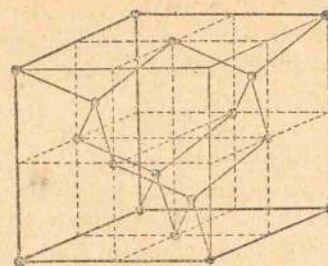


Fig. 1.

Nehmen wir z. B. an, der Elektronenring bestehe aus zwei Elektronen, die in einer Ebene senkrecht zum Bindestrich kreisen, dann hätte jedes C-Atom seinen vier Valenzen entsprechend vier Elektronen abgegeben. Jedes Atom würde also für die Zerstreuung noch zwei Elektronen übrig haben. Dafür würde jetzt die Mitte jedes Valenzstriches auch mit zwei Elektronen besetzt zu denken sein und also gleich stark zerstreuen; denn man kann leicht einsehen, daß der gedachte Ring für genügend lange Wellen so wirkt, als ob die beiden umlaufenden Elektronen in seinem Mittelpunkte gelagert wären.

Man hat also jetzt ein neues Modell mit einem neuen Strukturfaktor *S*. Während derselbe nach der üblichen Auffassung die Form hat¹⁾

$$S = 6 \left(1 + e^{i\frac{\pi}{2}(h_1+h_2+h_3)} \right) \left(1 + e^{i\pi(h_1+h_2)} + e^{i\pi(h_2+h_3)} + e^{i\pi(h_3+h_1)} \right), \quad (5)$$

wird er jetzt gleich:

$$S' = 2 \left[\left(1 + e^{i\frac{\pi}{2}(h_1+h_2+h_3)} \right) + e^{i\frac{\pi}{4}(h_1+h_2+h_3)} \right. \\ \left. \left(1 + e^{i\frac{\pi}{2}(h_1+h_2)} + e^{i\frac{\pi}{2}(h_2+h_3)} + e^{i\frac{\pi}{2}(h_3+h_1)} \right) \right] \\ \left(1 + e^{i\pi(h_1+h_2)} + e^{i\pi(h_2+h_3)} + e^{i\pi(h_3+h_1)} \right). \quad (5')$$

In der folgenden Tabelle sind in der ersten Kolonne die Indizes der reflektierenden Ebenen nach steigendem Glanzwinkel geordnet. In der zweiten Kolonne sind die Quadrate des absoluten Betrages von *S* dividiert durch 64 eingetragen, welche als rohes Maß für die zu erwartende Reflexionsintensität gelten können. In der dritten Kolonne endlich stehen die Werte von $|S'|^2/64$.

Wir bemerken noch, daß in der Tabelle I alle

1) Die Amplitude ist entsprechend unserer Überlegungen nicht gleich dem Atomgewicht, sondern gleich der Elektronenzahl gesetzt.

Tabelle I.

Indizes		
(111)	18	11,6
(002)	0	0
(022)	36	4
(113)	18	0,34
(222)	0	16
(004)	36	4
(113)	18	2
(024)	0	0

möglichen Reflexionen enthalten sind für die Wellenlänge

$$\lambda = 1,58 \cdot 10^{-8} \text{ cm,}$$

etwa der Cu_α -Strahlung entsprechend. Für kürzere Wellen gibt es mehr, für längere weniger mögliche Reflexionen.

Zunächst zeigt uns die Tabelle, daß auch bei Annahme von Elektronenringen die Reflexionen (002) und (024) genau so durch innere Interferenz ausgelöscht werden, wie beim üblichen Modell¹⁾, dagegen sollte die Reflexion (222), d. h. die Reflexion zweiter Ordnung an der Oktaederebene sich in großer Stärke bemerkbar machen.

Schon Bragg hat indessen von einer solchen Reflexion nichts bemerken können. Eine Kontrollaufnahme mit Diamantpulver nach unserer Methode zeigt, trotzdem das photographische Verfahren wesentlich empfindlicher ist, keine Linie an der der Reflexion (222) entsprechenden Filmstelle, während die benachbarte Linie (004) gut vorhanden ist. Im übrigen entspricht auch sonst das Diagramm in seiner Intensitätsverteilung durchaus nicht der in der zweiten Kolonne angegebenen Zahlenreihe, was schon durch eine oberflächliche Betrachtung festgestellt werden kann.

So kommen wir zu dem Schlusse, daß im Diamant nach Analogie mit dem H_v -Modell gebildete Elektronenringe nicht die gegenseitige Bindung der C-Atome bewirken. Es liegt nahe, auch in anderen Fällen diese Sachlage zu vermuten und tatsächlich haben wir keinen Fall von Elektronenringen als Bindungen im Kristall finden können.

§ 2. Zählung der den Atomen zukommenden Elektronenzahlen.

Nach den Ausführungen der Einleitung ist für genügend lange Wellen die von einem als Elektronenkomplex mit z -Elektronen aufgefaßten Atom zerstreute Amplitude proportional mit z .

¹⁾ Die Reflexion (002) bedeutet Reflexion zweiter Ordnung an der Hexaederebene (001), Entsprechendes gilt für (024) usw.

Die Braggsche Annahme war die rohe Form dieses Gesetzes. Bei beliebiger Wellenlänge können wir dieselbe Proportionalität erwarten für genügend kleine Streuwinkel, oder ganz präzise: Die Proportionalität der Amplitude mit z ist das für verschwindenden Streuwinkel geltende Grenzgesetz bei beliebiger Wellenlänge. Der Faktor in diesem Gesetze ist theoretisch bekannt. Eine absolute Bestimmung der Elektronenzahl bedingt also eine absolute Messung der Streuintensität. Hat man es indessen mit mehratomigen Kristallen zu tun, dann kann an Stelle der absoluten die relative Bestimmung der Elektronenzahlen von den beteiligten Atomen mit sehr viel geringerem Arbeitsaufwand auf Grund von relativen Intensitätsmessungen ausgeführt werden.

Stellen wir uns auf den Standpunkt, daß die eben besprochene Proportionalität mit z für alle Streuwinkel genau richtig ist, dann kann man leicht einige Fälle ausfindig machen, in denen dieses Gesetz ohne viel Mühe zur Entscheidung über die Frage der Elektronenzuordnung zu den Atomen herangezogen werden kann.

Verabreden wir, daß im folgenden die üblichen chemischen Zeichen für die Atome, die vom Atom zerstreute Amplitude bedeuten, dann ist der Strukturfaktor z . B. für Sylvin (KCl) folgendermaßen gebaut:

$$S = \{ 1 + e^{i\pi(h_1+h_2)} + e^{i\pi(h_2+h_3)} + e^{i\pi(h_3+h_1)} \} \\ \{ K + Cl e^{i\pi(h_1+h_2+h_3)} \}.$$

Aus dem ersten Faktor folgt, daß Ebenen mit gemischten (aus geraden und ungeraden zusammengesetzten) Indizes nicht reflektieren. Der zweite Faktor besagt, daß die reflektierte Amplitude:

Bei Ebenen, deren Indizesumme gerade ist, proportional

$$K + Cl,$$

und bei Ebenen, deren Indizesumme ungerade ist, proportional

$$K - Cl$$

wird.

Schon Bragg hat Sylvin untersucht und stellte fest, daß Ebenen mit ungerader Indizesumme keine Reflexion geben innerhalb der Grenzen seiner Meßgenauigkeit. Ist das Resultat genau richtig, dann würde das heißen:

$$K = Cl. \quad (6)$$

Nun hat aber K in freiem Zustande 19 Elektronen, Cl dagegen 17 Elektronen. Die Beziehung (6) kann also, wenn die Amplitude proportional der Elektronenzahl ist, mit gewöhnlichen Atomen nicht erfüllt werden, hätte indessen das Kaliumatom im Kristall ein Elektron

abgegeben und dem Chloratom übermittelt, dann wäre $K=18$ und $Cl=18$ und damit (6) erfüllt. Wäre man also überzeugt, daß die Beziehung (6) in Strenge durch die Braggschen Messungen bestätigt sei, dann hätte diese Feststellung zur Folge, daß im Kristallverband nicht die Atome, sondern die Ionen Kalium und Chlor vorkommen, und zwar einfach geladen mit positivem K -Ion und negativem Cl -Ion.

Nun ist aber die von Bragg erreichte Empfindlichkeit nicht groß genug, um diese Feststellung zu machen, handelt es sich doch um die Frage, ob neben Reflexionen von der Intensität $(K+Cl)^2=36^2=1296$ noch solche von der Intensität $(K-Cl)^2=2^2=4$ bemerkt werden können. Dagegen ist unser photographisches Verfahren imstande, auch diese Frage zu erledigen. Als Versuchsobjekt verwendeten wir unter anderem Natriumfluorid. Wie die Aufnahme ergibt, ist dieses ähnlich wie KCl und $NaCl$ gebaut. Die folgende Tabelle enthält das Resultat der Ausmessung einer NaF -Aufnahme:

Tabelle II.

Intensität	$\sin \frac{\theta}{2}$	Indizes	$\frac{\sin \theta/2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}}$
s—m	0,298	002	0,149
st	0,328	002	0,164
s—m	0,417	022	0,148
st	0,465	022	0,164
s	0,515	222	0,149
*s	0,542	113	0,164
st	0,570	222	0,165
s	0,592	004	0,148
m	0,658	004	0,164
st	0,734	024	0,164
st	0,804	224	0,164
ss	0,837	044	0,148
*ss	0,853	115	0,164
		333	
s	0,890	006	0,148
		244	
m	0,930	044	0,164
ss	0,941	026	0,149
*s	0,977	135	0,165

ss = sehr schwach, s = schwach, m = mittel, st = stark.

Die Aufnahme wurde mit Cu -Strahlung gemacht. Die fettgedruckten Zahlen beziehen sich auf Cu_α , die in gewöhnlichem Druck auf Cu_β . Daß wir es mit regulären Kristallen zu tun haben, wird durch die Konstanz der Zahlen in der letzten Kolonne dargetan.

Die Hauptsache, worauf es uns ankommt, ist nun die folgende: für gewöhnlich ist $Na=11$ und $F=9$. Sind im Kristall einfach geladene Ionen vorhanden, dann wird $Na=10$ und $F=10$, und dann sollten wir erwarten, daß Ebenen mit ungerader Indizessumme nicht reflektieren. Durch einen Stern haben wir nun in der

Tabelle drei Linien hervorgehoben, deren Indizessumme nach Ausweis der dritten Kolonne ungerade ist, und die trotzdem vorhanden sind. Zwar sind sie schwach, aber doch genügend ausgeprägt, um, wie die vierte Kolonne zeigt, gut meßbar zu sein.

Halten wir nun an unserem vorläufig angenommenem Standpunkte fest, daß die zerstreute Amplitude durchweg proportional der Elektronenzahl ist, dann folgt aus der Aufnahme

$$Na \neq F$$

und das würde am einfachsten dahin zu deuten sein, daß die Atome nicht geladen sind.

Andererseits aber würde diese Annahme große Schwierigkeiten mit sich bringen. Zwar ist unseres Wissens NaF nicht auf Restzahlen untersucht, die Analogie im Bau mit $NaCl$ und so weiter macht aber die Existenz eines ultraroten Absorptionsgebietes äußerst wahrscheinlich. Wie man ein solches aber mit Hilfe von ungeladenen Atomen verstehen sollte, ist uns ganz unklar.

Die Überlegungen in der Einleitung lassen vielmehr einen anderen Ausweg ohne weiteres zu. Es ergab sich dort, daß der Theorie nach das verfeinerte Braggsche Gesetz (mit Elektronenzahlen an Stelle von Atomgewichten) nur ein Grenzesetz für kleine Winkel ist. Außerdem haben wir einen anderen Einfluß, nämlich die Temperaturbewegung der Atome, hier noch nicht berücksichtigt. Von dieser ist bekannt, daß sie eine verschiedene Schwächung der Streukoeffizienten der Atome bedingt, falls dieselben Temperaturbewegungen mit verschiedener Amplitude ausführen, was nicht von der Hand zu weisen ist, da die Massen der beiden Atome verschieden sind. Nach den früher zu diesem Effekte mitgeteilten Formeln¹⁾ hat er mit dem anderen zuerst genannten Umstände die Eigenschaft gemein, daß er für verschwindenden Zerstreuungswinkel verschwindet.

Beides weist also darauf hin, daß einwandfreie Resultate nur erreicht werden können, wenn es gelingt, die relativen Zerstreuungskoeffizienten für den Grenzfall eines verschwindenden Streuwinkels experimentell zu fassen. Im übrigen weist schon eine Besonderheit unserer Aufnahme in diese Richtung. Neben den drei durch einen Stern hervorgehobenen Linien könnte noch eine mit ungerader Indizessumme, nämlich die Linie (111) erwartet werden. Dieselbe müßte bei

$$\sin \frac{\theta}{2} = 0,284$$

auftreten, ganz am Anfange des Films, also bei

1) P. Debye, Ann. d. Phys. 43, 49, 1914.

sehr kleinem Streuwinkel. Wir konnten sie aber nicht entdecken.

Zugleich als Übergang zu dem im § 3 behandelten Gegenstand soll jetzt über Intensitätsmessungen berichtet werden, welche die relativen Elektronenzahlen bei LiF nunmehr einwandfrei bestimmen. LiF kristallisiert wieder ähnlich wie $NaCl$, KCl , NaF usw. Nur insofern ist gegen NaF und KCl ein Unterschied vorhanden, als im freien Zustande $Li=3$ und $F=9$ ist, so daß auch dann, wenn die „Gitterpunkte“ Ionen sind, ein Verschwinden der Reflexion an Ebenen mit ungerader Indizesumme nicht zu erwarten ist. Nach wie vor sind nur Ebenen mit ungemischten Indizes vorhanden. Bei Ebenen mit gerader Indizesumme ist der Strukturfaktor proportional $(Li + F)$, bei Ebenen mit ungerader Summe ist derselbe proportional $(Li - F)$.

Es wurde eine neue Aufnahme mit LiF -Pulver als strahlender Substanz nach unserer Methode hergestellt, und zwar wurde dafür gesorgt, daß die Schwärzungen den Wert 1 nicht überstiegen¹⁾. Hat man diese Vorsorge getroffen, dann ist, wie Friedrich und Koch nachgewiesen haben²⁾, einfache Proportionalität zwischen Schwärzung und Intensität vorhanden, sofern die Schwärzung von Röntgenstrahlung herührt. Wesentlich ist natürlich darüber hinaus, daß die Linien, die man vergleichen will, von Röntgenstrahlung einheitlicher Wellenlänge erzeugt wurden, und das ist bei unserer Aufnahme ja von selbst erfüllt. Alle verglichenen Linien rühren von der K_α -Strahlung von Kupfer her. Mit einem Hartmannschen Mikrophotometer, bei dem ähnlich wie beim Kochschen selbstregistrierenden, mit Hilfe von Kaliumzellen die zu beobachtende Intensität in den Ausschlag eines Elektrometers umgesetzt wurde, haben wir dann die zu den verschiedenen Indizes gehörigen Linien photometriert. Zunächst erhalten wir also als Maß der Schwärzung der betreffenden Stelle in der Linie den Ausschlag des Elektrometers. Von Herrn Hartmann bezogen wir aber eine Schwärzungsskala, das ist eine photographische Platte mit Feldern bekannter, mittels direkter Messung bestimmter Schwärzungen. Mit Hilfe dieser Skala war es möglich, die beobachteten Elektrometerauslässe in absolute Schwärzungen und damit nach dem Friedrich-Kochschen Gesetz in Intensität der Röntgenstrahlung umzusetzen. Für jede Linie wurde in dieser Weise eine Intensitätskurve ge-

zeichnet, deren Flächeninhalt nach Abzug der Schleierschwärzung der Intensität der Linie direkt proportional zu setzen ist.

Um nun von der Intensität zum beobachteten Strukturfaktor zu kommen, bedarf es noch einer (theoretisch begründeten) Reduktion, welche im folgenden § 3 auseinandergesetzt wird. Ist dieselbe ausgeführt, dann entstehen im vorliegenden Falle schließlich Zahlen, welche in unserer Bezeichnungsweise proportional den Größen

$$(Li + F)^2, \text{ bzw. } (Li - F)^2$$

sind, jedesmal für den betreffenden Streuwinkel unter dem die Linie auftritt. Den Streuwinkel selbst kann man am einfachsten messen durch die Summe der Indizesquadrate

$$h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = H^2$$

der betreffenden Linie, denn bekanntlich gilt,

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\lambda^2}{4a^2} (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2),$$

wenn λ die benutzte Wellenlänge und a die Gitterkonstante ist. Folgende Tabelle enthält das Resultat der Messungen

Tabelle III.

h_1, h_2, h_3	$H^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$	$(Li + F)^2$, bzw. $(Li - F)^2$.
111	3	*107
002	4	239
022	8	112
113	11	*17,6
212	12	63,8
004	16	46,6
123	19	*7,95
024	20	28,8
224	24	17,2

Durch einen Stern sind die Intensitätszahlen, welche zu Ebenen mit ungerader Indizesumme gehören, hervorgehoben. Dieselben sind also proportional $(Li - F)^2$. Alle anderen Zahlen gehören zu Ebenen mit gerader Indizesumme und sind demnach proportional $(Li + F)^2$. Trägt man die $(Li + F)^2$ proportionalen Zahlen der Tabelle als Funktion von $H^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$ auf, dann kann man durch dieselbe eine glatte Kurve legen. Das wurde getan. Die drei $(Li - F)^2$ proportionalen Zahlen liegen, wie schon die Tabelle zeigt, weit unterhalb dieser Kurve. Nun kann man schließlich die letzteren Zahlen vergleichen mit den Ordinaten der Kurve an derselben Stelle und so jedesmal für einen bestimmten Winkel, d. h. also für einen bestimmten Wert von H^2 , in unserer Darstellung das Verhältnis

$$\left(\frac{Li + F}{Li - F} \right)^2$$

1) Bekanntlich versteht man unter der Schwärzung einer Stelle des Films den gewöhnlichen Logarithmus des Verhältnisses der auffallenden zur durchgelassenen Intensität.

2) W. Friedrich und P. P. Koch, Ann. d. Phys. 45, 399, 1914.

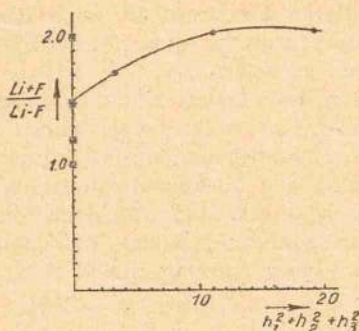


Fig. 2.

bilden. Die folgende kleine Tabelle enthält das Resultat; durch Fig. 2 wird der Inhalt der Tabelle veranschaulicht.

Tabelle IV.

$H^2 =$ $h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$	$\frac{F + Li}{F - Li}$
3	1,72
11	2,04
19	2,06

Jenes Verhältnis ist, wie man sieht, nicht konstant; uns interessiert der für $H^2 = 0$ und damit für $\vartheta = 0$ zu erwartende Grenzwert. Um diesen Grenzwert von Willkür möglichst frei zu bestimmen, legen wir durch die drei Punkte eine quadratische Kurve, deren Gleichung man leicht zu

$$\frac{F + Li}{F - Li} = 1,523 + 0,0728 H^2 - 0,00234 H^4$$

bestimmt. Damit haben wir gefunden, daß als Grenzwert für verschwindenden Streuwinkel der Wert

$$\frac{F + Li}{F - Li} = 1,52$$

experimentell zu erwarten steht.

Nach der Theorie hat man folgendes zu erwarten:

a) Atome ungeladen

$$\frac{F + Li}{F - Li} = \frac{9 + 3}{9 - 3} = 2$$

b) *Li* einfach positiv geladen

$$\frac{F + Li}{F - Li} = \frac{10 + 2}{10 - 2} = 1,5 \quad \text{oder}$$

c) *Li* zweifach positiv geladen

$$\frac{F + Li}{F - Li} = \frac{11 + 1}{11 - 1} = 1,2 \quad \text{oder}$$

usw.

Diese Zahlen sind in der Figur durch Sterne auf der Ordinatenachse hervorgehoben. Man sieht,

daß das Experiment innerhalb der Genauigkeitsgrenzen für den Fall b) entscheidet. Somit ist experimentell gezeigt, daß im *LiF*-Kristall das *Li* einfach positiv, und das *F* einfach negativ geladen ist, so wie uns das von der Elektrolyse her geläufig ist.

Es sollte der *LiF*-Fall hier nur mehr als Beispiel für das experimentelle Vorgehen besprochen werden. Über andere Fälle, insbesondere über die Frage, ob in ähnlichen Kristallen einwertige Atome einfach oder mehrwertig, ihrer Wertigkeit entsprechend, mehrfach geladen sind, werden wir in einer ausführlichen Mitteilung berichten¹⁾.

§ 3. Größe des Elektronensystems der Atome.

Schon eine oberflächliche Betrachtung der Tabelle III macht auf einen Umstand aufmerksam, der als allgemeines Merkmal allen Interferenzbeobachtungen zukommt. Während H^2 von 4–24 geht, nimmt die $(Li + F)^2$ proportionale Intensität ab von 239 auf 17,2, d. h. sie sinkt auf etwa den 14ten Teil. Nun kennen wir zwar den Temperatureffekt als Ursache für eine in H^2 exponentielle Abnahme der für die Interferenzen verantwortlichen Streuamplitude der Atome. Ein Eingehen auf die Zahlenverhältnisse zeigt aber, daß eine so starke Abnahme, wie sie das Experiment ergibt, auf Grund der thermischen Bewegung nicht zu erwarten ist, auch wenn man berücksichtigt, daß die erforderlichen Daten für *LiF* nur schätzungsweise bekannt sind.

Eine Entscheidung über die Frage, ob außer der Temperaturbewegung noch ein anderer Grund vorhanden ist, der ebenfalls eine Abnahme der Streuamplitude mit zunehmendem Winkel bedingt, wird man am besten erhalten durch Untersuchung einer Substanz, deren Temperaturbewegung möglichst gering ist. Bei Diamant nun sind wir in dieser Lage und können, da die spezifische Wärme in ihrem Verlaufe genau bekannt ist, außerdem noch quantitativ angeben, welchen Betrag jener Einfluß hat.

Das Diamantpulver, mit dem eine Aufnahme nach unserm Verfahren hergestellt wurde, war uns von Professor Keesom in Utrecht zur Verfügung gestellt. Demselben möchten wir auch hier für seine Hilfe danken. Das Pulver war nicht ganz so fein, als es zur Erlangung einer gut photometrierbaren Aufnahme mit nicht

¹⁾ Herr Born, mit dem wir vor einigen Monaten über diese Untersuchungen sprachen, hat inzwischen die Erfahrungen an ultraroten Strahlen verwertet, um die Ladungen im Gitter zu schätzen. Berl. Ak. 1918, S. 604, ähnlich wie das von W. Dehlinger, diese Zeitschr. 15, 276, 1914, versucht wurde.

gepunkteten Linien nötig ist. Wir konnten aber dieser Schwierigkeit einfach dadurch Herr werden, daß wir das aus dem Pulver bestehende Stäbchen während der Aufnahme von Zeit zu Zeit um einen kleinen Winkel drehen und gelegentlich ein wenig hoben und senkten.

Die fertige Aufnahme wurde dann photometriert, so wie das im § 2 beschrieben ist. Die erhaltenen Resultate stellen somit die wirklichen Intensitäten der Linie dar; dieselben sind in Spalte 3 der Tabelle V eingetragen, Spalten 1 und 2 enthalten die Indizes der Linien und deren Quadratsumme H^2 .

Tabelle V.

Indizes	H^2	Intensität	θ	$\gamma\theta$	R	$C^2 = \frac{\gamma}{R\theta}$
111	3	406	0,780	521	4,38	119
022	8	158	0,860	184	2,04	46
113	11	94	0,982	96	3,20	30
004	16	55	1,20	46	2,00	23
133	19	171	1,20	142	11,26	13

Nun gilt es aus den Intensitäten J den Zerstreuungskoeffizienten des C-Atoms zu bestimmen.

Zunächst haben wir zu diesem Zwecke eine mehr äußerliche Korrektur vorzunehmen. Wegen der Absorption der Strahlung im Stäbchen wird nicht jedes Volumelement desselben von derselben Primärintensität getroffen, außerdem wird die von einem Volumelement ausgehende Streustrahlung auf ihrem Wege innerhalb des Stäbchens zum Teil absorbiert. Im idealen Falle wäre die Absorption verschwindend, die wirklich beobachtete Intensität entsteht aus der idealen durch Multiplikation mit einem Faktor θ , der noch Funktion der Beobachtungsrichtung ist. Derselbe wird dargestellt durch ein nicht ohne weiteres auswertbares Doppelintegral. Wir haben deshalb θ als Funktion von ϑ durch graphische Ausführung der vorgeschriebenen Integration bestimmt; ein Verfahren, das zwar ziemlich mühsam ist, aber gut zum Ziele führt. Die Zahlen, welche bis auf einen gemeinsamen (für alles Folgende) unwesentlichen Zahlenfaktor diesen Koeffizienten θ für diejenigen Richtungen, in denen die Linien auftraten, darstellen, sind in Tabelle V in Spalte 4 enthalten. Spalte 5 gibt daraufhin die auf Absorption im Stäbchen korrigierte ideale Intensität.

Nunmehr haben wir zu überlegen, wie diese ideale Intensität mit der Streuamplitude C des Atoms verknüpft ist.

1. Aus der v. Laueschen Theorie folgt bekanntlich, daß jene Intensität proportional ist dem Quadrate des absoluten Betrages des Struk-

turfaktors S . Derselbe hat für Diamant unter Zugrundlegung der Braggschen Atomanordnung den Wert:

$$S = C \{ 1 + e^{i\pi(h_1 - h_2)} + e^{i\pi(h_2 + h_3)} + e^{i\pi(h_3 + h_1)} \} \\ \{ 1 + e^{i\frac{\pi}{2}(h_1 + h_2 + h_3)} \}.$$

2. Die Streustrahlung ist nach bekannten Versuchen polarisiert bei unpolarisierter Primärstrahlung. Das bedingt nach üblicher Rechnung, daß ein zweiter Faktor, der Polarisationsfaktor, in der Intensität auftritt mit dem Werte

$$\frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2}.$$

3. Bei unserem Verfahren wird nicht jede reflektierende Ebene gleich stark berücksichtigt. Vielmehr kommt bei ungeordneter Anordnung der Teilchen des Pulvers jede Fläche proportional der Anzahl verschiedener Stellungen, in denen sie eine Kristallform begrenzen kann, zur Reflexion. Die Hexaederebene 001 z. B. 6mal, die Oktaederebene 111 dagegen 8mal, usw. Dem durch diese Zahlen 6, 8, usw. definierten Häufigkeitsfaktor Z ist die zu beobachtende Intensität ebenfalls proportional.

4. Schließlich tritt noch ein Faktor hinzu, der ganz analog dem von H. A. Lorentz für die v. Lauesche Anordnung berechneten ist.

Ein Parallelstrahlenbündel von genau passend gewählter Wellenlänge und Einfallrichtung erzeugt in der Richtung, für die die Reflexionsbedingung¹⁾ streng erfüllt ist, eine Intensität, welche proportional dem Quadrate der bestrahlten Atomzahl ist. In Nachbarrichtungen ist indessen ebenfalls noch Intensität vorhanden, die um so schneller klein wird, je größer die Atomzahl ist. Außerdem aber reflektiert nicht nur der genau passend eingestellte Kristall, sondern auch in Nachbarlagen verdreht, gibt er immer noch merkliche Reflexionsintensität. Was wir beobachten, ist die Summe aller Wirkungen. Die Summation ergibt ein der Atomzahl selbst proportionales Resultat mit einem „Summationsfaktor“, der von Lorentz für die Lauesche Anordnung zu $\frac{1}{H^2}$ bestimmt wurde, der aber in unserem Falle den Wert

$$\frac{1}{H^2} \frac{1}{\cos \frac{\vartheta}{2}}$$

hat²⁾.

Indem wir noch den von der Wärmebewegung erzeugten Temperaturfaktor unter den

$$1) \quad \sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{\lambda}{2a} \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}$$

2) Die Angabe der Einzelrechnungen wird in einer ausführlichen Mitteilung erfolgen.

Zeichen C im Strukturfaktor aufgenommen denken, kommen wir also zum Resultat, daß die Intensität proportional ist der Größe

$$|S|^2 \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} \quad Z \frac{1}{H^2 \cos \frac{\vartheta}{2}}$$

Wir bezeichnen dieselbe mit RC^2 ; Zahlen für den Reduktionsfaktor R sind in Tabelle V in Spalte 6 eingetragen. Dividieren wir schließlich die ideale Intensität J/θ durch den Reduktionsfaktor R , dann bekommen wir die in Spalte 7 angegebenen Werte von

$$C^2 = \frac{J}{R\theta},$$

welche also proportional der vom Einzelatom zerstreuten Intensität sind.

Man bemerkt, wie diese Zahlen verhältnismäßig rasch mit zunehmendem Winkel abnehmen.

Läßt man die Überlegungen der Einleitung außer acht, dann kann für diese Abnahme nur die Temperaturbewegung des Atoms verantwortlich gemacht werden. Eine kurze Rechnung zeigt indessen sofort, daß dieser Ausweg nicht gangbar ist. Betrachtet man, wie in der ursprünglichen Einsteinschen Theorie der spezifischen Wärme das Atom als an eine Ruhelage quasi-elastisch gebunden, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Verschiebung desselben in ein durch die Koordinaten

$$\xi, \eta, \zeta, \xi + d\xi, \eta + d\eta, \zeta + d\zeta$$

charakterisiertes Raumelement stattgefunden hat, dargestellt durch die Formel

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{r^3} e^{-\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{2r^2}} d\xi d\eta d\zeta$$

wobei r ein Maß für die mittlere Verschiebung ist. Mit diesem Ansatz bekommt man für die im Strukturfaktor auftretende Größe C den Wert

$$C = C_0 e^{-\frac{4\pi^2 r^2}{a^2} H^2}, \quad (7)$$

wenn a die Gitterkonstante bedeutet und C_0 eine nur mehr für das Atom selbst charakteristische Größe ist. Ist weiter m die Masse des Atoms und ν seine Schwingungszahl im Einsteinschen Sinne und nimmt man an, daß keine Nullpunktsenergie existiert, dann wird bei $T = 290^\circ$ absolut

$$4\pi^2 r^2 = \frac{h}{m\nu} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = 7,55 \cdot 10^{-20}$$

Bei Anwesenheit einer Nullpunktsenergie wird

$$4\pi^2 r^2 = \frac{h}{m\nu} \left(\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} + \frac{1}{2} \right) = 562 \cdot 10^{-20}.$$

Die erste Annahme ergibt somit

$$\frac{4\pi^2 r^2}{a^2} = 0,60 \cdot 10^{-4},$$

die zweite

$$\frac{4\pi^2 r^2}{a^2} = 4,5 \cdot 10^{-3},$$

da bei Diamant

$$a = 3,54 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

ist.

Auch die zweite Annahme genügt also bei weitem nicht, den starken beobachteten Abfall von C^2 zu erklären, denn nach (7) erhielten wir:

$$C^2 = C_0^2 e^{-2 \frac{4\pi^2 r^2}{a^2}} = C_0^2 e^{-9,0 \cdot 10^{-3} H^2}.$$

Für die letzte Linie der Tabelle V wäre also infolge der Temperaturbewegung $C^2 = 102$ zu erwarten, wenn für die erste Linie $C^2 = 119$ ist; statt dessen ist $C^2 = 13$ beobachtet.

Die Temperaturbewegung spielt also hier eine untergeordnete Rolle. Es muß ein anderer inneratomischer Grund für den beobachteten Abfall vorhanden sein.

Als Grund vermuten wir nun die endliche Größe des zum Atom gehörigen Elektronensystems.

Es ist von vornherein klar, daß, wo die Streuung nur von den Elektronen erzeugt wird, die endliche Ausdehnung des Elektronensystems in ähnlicher Weise wirken wird, wie die Temperaturbewegung der Atome.

Auch die in der Einleitung erwähnten Überlegungen haben ja schon das Resultat ergeben, daß bei Wellenlängen von vergleichbarer Größenordnung mit den Elektronenabständen ein Abfall der Streuintensität mit zunehmendem Winkel eintreten muß.

Die Rechnung verläuft hier, wo es sich um die scharfen Interferenzlinien des Laueeffekts handelt, anders, als in der in der Einleitung zitierten Arbeit. Auch hängt das Resultat natürlich, aber immerhin für eine erste Orientierung nur unwesentlich von den besonderen Voraussetzungen ab, welche man über gegenseitige Lage und Bewegung der Elektronen im Atom machen kann. Es schien uns angebracht, als eine sehr einfache, den Kernpunkt treffende Annahme die zu machen, daß die zum Atom gehörigen Elektronen in beliebiger dauernd veränderlicher Weise im Innern einer Kugel vom Radius ρ enthalten sind, so daß jedes Volumenelement dieser Kugel gleich oft von jedem Elektron durchmessert wird.

Macht man diese Annahme, dann ergibt die Rechnung

$$C \approx 3 \frac{\sin \frac{2\pi\varrho}{a} H - \frac{2\pi\varrho}{a} H \cos \frac{2\pi\varrho}{a} H}{\left(\frac{2\pi\varrho}{a} H\right)^3}, \quad (8)$$

eine Funktion, welche, wie sofort ersichtlich, in ihrem anfänglichen Verlauf durch eine Exponentialkurve approximiert werden kann, wie sie bei Berücksichtigung der Wärmebewegung auftritt.

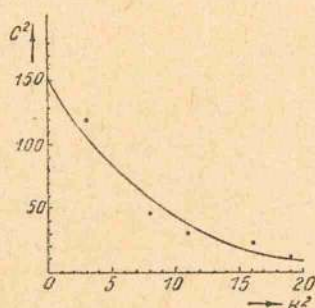


Fig. 3.

Wie Fig. 3 zeigt, kann man durch die beobachteten Werte von C^2 hindurch eine Kurve von dem durch (8) bestimmten Typus legen. Die in der Figur gezeichnete Kurve hat die Formel:

$$C^2 = 151,3 \left[3 \frac{\sin 0,761 H - 0,761 H \cos 0,761 H}{(0,761 H)^3} \right]^2$$

sie stellt die Beobachtungen innerhalb der zu erwartenden Genauigkeitsgrenzen dar, wie die eingetragenen beobachteten Punkte zeigen.

Aus der numerischen Darstellung folgt nun:

$$\frac{2\pi\varrho}{a} = 0,761,$$

d. h.

$$\frac{\varrho}{a} = 0,12 \text{ und } \varrho = 0,43 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

Diese Werte sind durchaus im Bereiche des möglichen. Der von den Elektronen eingenommene Raum, zu dem wir hier kommen, hat einen Radius, der nur 12 Proz. von der Gitterkonstante oder etwa $\frac{1}{4}$ des Abstandes der Atommittelpunkte ist. Ein nach Bohr gequantelter Ring von 4 Elektronen, kreisend um einen vierfach geladenen Kern, würde einen Radius von $0,17 \cdot 10^{-8}$ cm haben.

Somit hätten wir eine Methode, um die wirkliche Größe des zum Atom gehörigen aus Elektronen bestehenden Planetensystems zu bestimmen. Nicht unerwähnt wollen wir lassen, daß alle Überlegungen mit Hilfe der klassischen Grundlagen gemacht wurden.

Es ist uns noch keine Erfahrung bekannt,

welche in dem benutzten Wellenlängengebiet Zweifel an die Richtigkeit der auf jener Grundlage gezogenen Schlüsse hervorrufen könnte. Für wesentlich kleinere Wellenlängen allerdings, im Gebiete der γ -Strahlen, scheinen Absorptionsbeobachtungen auf neue Gesichtspunkte hinzuweisen.

Göttingen, Physikal. Institut, 8. Juli 1918.

(Eingegangen 11. Juli 1918.)

Über den Einfluß ultraroter Eigenfrequenzen auf den Brechungsexponenten im sichtbaren Spektralgebiet.

Von J. Wimmer.

Die Elektronentheorie der Dispersion liefert für durchsichtige Medien die Formel:

$$n^2 = 1 + \sum_k \frac{\mathcal{N}_k \vartheta_k}{1 - \frac{\lambda_k^2}{\lambda^2}},$$

wo λ_k die Wellenlänge der Eigenschwingung, $\mathcal{N}_k$ die Zahl der Elektronen bzw. der positiv geladenen Atome oder Atomgruppen der k^{ten} Gattung pro cm^3 ist und ϑ_k die sogenannte Beweglichkeit eines Elektrons bezeichnet. Durch Reihenentwicklung des Nenners folgt bekanntlich die Ketteler-Helmholtzsche Dispersionsformel

$$n^2 = 1 + \sum \mathcal{N}_e \vartheta_e + \sum \frac{\mathcal{N}_v \vartheta_v}{\lambda^2 - \lambda_v^2} \cdot \lambda^2 - k^2 \lambda^2,$$

Hierin berücksichtigt k den Einfluß der ultraroten Eigenfrequenzen, falls die Beobachtung nicht in unmittelbarer Nähe derselben angestellt wird, und $\mathcal{N}_e \vartheta_e$ die Einwirkung derjenigen Elektronen, deren Eigenwellenlängen so klein sind, daß für den beobachteten Spektralbereich $\sum \mathcal{N}_e \vartheta_e$ als konstant angenommen werden kann. Zur Vorausberechnung dieser Konstanten mittels bestimmter physikalisch-chemischer Konstanten der dispergierenden Substanz gewinnt D r u d e unter Annahme beliebig vieler ultraroter Eigenschwingungen die Beziehung:

$$(A) \quad k = \frac{0,296 \cdot 10^8}{\left(\frac{M}{d}\right)} \cdot \sum \frac{v_r^2 \cdot \rho_r^2}{M_r},$$

bzw. für $r=1$:

$$(B) \quad k = 0,296 \cdot 10^8 \cdot \frac{d}{\left(\frac{M}{v}\right)^2}.$$

In Weiterführung der Born- und v. Kármán'schen Theorie der Dispersion eines nach

Madelung aufgebauten Kristalls hat Dehlinger¹⁾ die Dispersion eines zweiatomigen Kristalls auf Grund gegenseitiger Bindung der Atome behandelt und gefunden, daß der Brechungsexponent eines solchen Körpers dargestellt wird durch eine Formel, welche identisch ist mit derjenigen, die Ketteler bzw. Lorentz abgeleitet haben unter Annahme einfach schwingender, voneinander unabhängiger Ladungen. Die von Dehlinger erhaltene Dispersionsformel soll nun zur theoretischen Feststellung des Einflusses der ultraroten Eigenfrequenzen auf den Brechungsexponenten im sichtbaren Spektralgebiet dienen und mittels der bisher in dieser Hinsicht experimentell behandelten Substanzen, deren Molekül aus zwei Atomen oder Atomgruppen besteht, geprüft werden. Ferner soll in formaler Analogie eine k -Formel aufgestellt und hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit erprobt werden an denjenigen organischen Flüssigkeiten, für die eine experimentelle Bestimmung des k -Wertes vorliegt. Es zeigt sich, daß im letzteren Falle schon durch die Näherungsformel eine recht befriedigende Übereinstimmung von Beobachtung und Rechnung da erzielt wird, wo die Drudesche Formel den tatsächlichen Einfluß ganz unrichtig darstellt.

§1. Aufstellung der k -Formel.

Dehlinger hat in seiner Arbeit für zweiatomige Kristalle die Dispersionsgleichung für das ultrarote Gebiet festgestellt. In Lorentz-scher Form lautet dieselbe:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 - 2} = \frac{A}{v_1^2 - v^2} + S,$$

worin n den optischen Brechungsindex und S den Einfluß der von den Elektronen herrührenden Glieder hoher Frequenz, somit eine für das ultrarote Gebiet konstante Größe bezeichnet. A ist das auf die ultraroten Schwingungen bezügliche Glied und berechnet sich nach der Theorie zu:

$$\frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{Ne^2}{3M},$$

wo M zu ersetzen ist durch

$$\frac{M_1 \cdot M_2}{M_1 + M_2},$$

M_1 und M_2 die Massen der Atome bzw. Atomgruppen bezeichnen.

Um aber den notwendigen Anschluß an die Drudesche Theorie zu erhalten, muß das letzterer fremde Lorentz'sche Zusatzglied fortgelassen werden. Man erhält dann nach Dehlinger:

$$\frac{n^2 - 1}{3} = \frac{A'}{v_1'^2 - v^2} + S'$$

oder

$$n^2 = 1 + \frac{3A'}{v_1'^2 - v^2} + 3S'.$$

Nach Einführung der Wellenlänge an Stelle der Schwingungszahl wird der auf das ultrarote Gebiet bezügliche Term:

$$\frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{Ne^2}{c^2 \cdot M}.$$

Identifiziert man diesen mit der dasselbe Spektralgebiet berücksichtigenden Drudeschen Konstanten k , so gewinnt man die Beziehung:

$$k = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{Ne^2}{c^2 \cdot M} \quad (C)$$

oder nach Einführung des elektrochemischen Äquivalents

$$E = 9654 \cdot 10^{10} g^{1/2} \cdot c^{3/2} \cdot \text{sec}^{-1},$$

der Atomgewichte G_1 und G_2 , der Dichte ρ sowie der Anzahl z der positiven Ladungen:

$$k = 0,297 \cdot 10^8 \cdot \frac{\rho \cdot z^2}{G_1 + G_2} \cdot \left\{ \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right\} \quad (D).$$

Man erkennt hierin Formel (A) für $r=2$; $v_1=v_2=z$; $p_r=1$. Inwieweit nun die Beziehung (D) k -Werte ergibt, welche mit den beobachteten in befriedigender Übereinstimmung stehen, zeigt folgende Tabelle.

Tabelle I.

Substanz	G_1	G_2	ρ	z	$k_{\text{beob.}}$	$k_{\text{ber. nach Drude}}$	$k_{\text{ber. nach (D)}}$
KCl	39,15	35,45	1,98	1	$0,53 \cdot 10^5$	$0,42 \cdot 10^5$	$0,423 \cdot 10^5$
NaCl	23,05	35,45	2,15	1	$0,90 \cdot 10^5$	$0,74 \cdot 10^5$	$0,781 \cdot 10^5$
CaF ₂	40,1	38,0	3,18	2	$3,22 \cdot 10^5$	$2,58 \cdot 10^5$	$2,48 \cdot 10^5$
SiO ₂	28,4	32,0	2,65	4	$11,06 \cdot 10^5$	$13,75 \cdot 10^5$	$13,84 \cdot 10^5$
H ₂ O	16	2	1	2	$13,83 \cdot 10^5$	$14,6 \cdot 10^5$	$37,8 \cdot 10^5$
CS ₂	12	64,12	1,26	4	$5,51 \cdot 10^5$	$4,14 \cdot 10^5$	$7,8 \cdot 10^5$

§2. Erweiterung der k -Relation.

Wie aus vorstehender Wertetabelle hervorgeht, stimmen die nach (D) berechneten k -Werte mit den beobachteten, durch über ein möglichst großes Spektralgebiet ausgedehnte Messungen ermittelten Werten gut überein, besonders für die zweiatomigen Kristalle NaCl und KC. Diese Übereinstimmung führt aber zu dem Schlusse, daß die ultraroten Eigenfrequenzen den Atomen bzw. Atomgruppen eines Moleküls zuzuschreiben sind, somit zu einer bekannten Tatsache. Nun haben Erfle¹⁾ und Seegert²⁾ durch ihre Dispersionsmessungen

1) H. Erfle, Dissertation. München 1907.

2) Br. Seegert, Dissertation. Berlin 1908.

1) Diese Zeitschr. 15, 276, 1914.

Tabelle II.

Substanz	G_1	G_2	G_3	q	z	$k_{\text{beob.}}$	$k_{\text{ber.}}$ nach Drude	$k_{\text{ber.}}$ nach (E)
CH_3OH	3	12	17	0,7953	4	$6,89 \cdot 10^5$	$22,8 \cdot 10^5$	$6,17 \cdot 10^5$
$\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$	5	24	17	0,80	6	$4,50 \cdot 10^5$	$28,3 \cdot 10^5$	$4,19 \cdot 10^5$
$\text{C}_3\text{H}_7\text{OH}$	7	36	17	0,8044	8	$4,24 \cdot 10^5$	$32,8 \cdot 10^5$	$3,56 \cdot 10^5$
$\text{C}_3\text{H}_5\text{NO}_3$	5	24	62,04	1,112	8	$3,37 \cdot 10^5$	$14,0 \cdot 10^5$	$2,87 \cdot 10^5$
$\text{C}_3\text{H}_6\text{O}$	6	36	16	0,792	6	$2,5 \cdot 10^5$	$28,7 \cdot 10^5$	$2,45 \cdot 10^5$
CH_3J	3	12	126,97	2,28	4	$2,0 \cdot 10^5$	$2,15 \cdot 10^5$	$2,37 \cdot 10^5$
C_6H_6	26	26	26	0,8834	6	$0,5 \cdot 10^5$	$38,52 \cdot 10^5$	$0,537 \cdot 10^5$
$\text{C}_{10}\text{H}_7\text{Br}$	24	183	—	1,489	8	$6,91 \cdot 10^5$	$23,66 \cdot 10^5$	$6,44 \cdot 10^5$

an organischen Flüssigkeiten zwecks Nachprüfung der Drudeschen Theorie gezeigt, daß die Drudesche k -Formel (B) für die untersuchten Substanzen viel zu große Werte liefert und damit eine diesbezügliche Vermutung Drudes bestätigt. Da bis jetzt, soweit dem Verfasser die einschlägige Literatur bekannt, die hierdurch entstandenen Schwierigkeiten in der theoretischen Bestimmung noch nicht behoben sind, so soll im folgenden unter Anwendung des gewonnenen Gesichtspunkts ein Ausgleich der Diskrepanz zwischen Theorie und Beobachtung versucht werden.

Analog zur Formel (D) wollen wir für solche Substanzen, bei denen drei schwingende Atomgruppen als Träger der ultraroten Eigenfrequenzen anzusehen sind, der erweiterten k -Relation die Form geben:

$$k = 0,297 \cdot 10^8 \cdot \frac{q \cdot z^2}{G_1 + G_2 + G_3} \cdot \left(\frac{1}{G_1 \cdot G_2} + \frac{1}{G_2 \cdot G_3} + \frac{1}{G_1 \cdot G_3} \right) \quad (\text{E})$$

Dieser Ansatz soll naturgemäß vorerst als Näherung aufgefaßt werden. Die Ermittlung der G_i sowie der Anzahl z der positiven Ladungen soll sich gründen auf die chemische Konstitution. Prüft man diese Formel an den von Seegert und Erfle untersuchten organischen Flüssigkeiten, so gewinnt man das aus obenstehender Tabelle II ersichtliche Ergebnis.

§3. Diskussion der Ergebnisse.

Für die bisher untersuchten festen kristallinen Körper ergibt sowohl Formel (B) wie auch Formel (D) befriedigende Übereinstimmung zwischen den berechneten und beobachteten Werten. Es ist dies insofern bemerkenswert als Formel (B) den Wert von k darstellt als Schwingungseffekt der positiven Ladung mit der gesamten Molekülmasse, während k nach Formel (D) betrachtet wird als Einfluß der Schwingungen zweier Atome oder Atomgruppen. Eine Übereinstimmung der beiden k -Werte ist nur dann zu erwarten, wenn

$$\frac{v}{z} = \frac{\sqrt{G_1 + G_2}}{\sqrt{G_1 \cdot G_2}}$$

ist. Schwingt die positive Ladung mit der ganzen Molekülmasse, so wird $v = z$. Letzteres ist nach Ausweis der Tabelle II der Fall für Wasser und Schwefelkohlenstoff, deren k -Werte nur durch Formel (B) befriedigend wiedergegeben werden. Dies berechtigt aber zur Folgerung, daß die ultraroten Eigenschwingungen des Wassers und Schwefelkohlenstoffes zunächst zurückzuführen sind auf Schwingungen der ganzen Molekülmasse. Hingegen sind die ultraroten Eigenfrequenzen der in Tabelle II aufgeführten organischen Flüssigkeiten lediglich den Schwingungen einzelner Atomgruppen zuzuschreiben. Während nämlich die nach Drude berechneten Werte auch nicht annähernd zu den beobachteten Werten passen — CH_3J ausgenommen — zeigen die aus der Näherungsformel (D) folgenden Werte eine auffallende Übereinstimmung mit der Beobachtung. Somit scheinen die beiden k -Relationen in Verbindung mit der Beobachtung über die Art der Schwingungsgebilde, welche die ultraroten Eigenfrequenzen hervorrufen, entscheiden zu können.

§4. Harmonisch gelagerte Eigenfrequenzen.

Die bisherigen Untersuchungen der ultraroten Absorptionsspektren organischer Flüssigkeiten haben in unzweideutiger Weise die Abhängigkeit der Lage der Absorptionsgebiete von der Struktur des Moleküls dargetan, also den ursächlichen Zusammenhang einzelner charakteristischer Absorptionslinien mit bestimmten Atomgruppen. Es zeigte sich nämlich, daß alle Verbindungen, die das C-Atom in direkter Verbindung mit H enthalten, Absorptionsgebiete aufweisen, deren Schwerpunkte bei den Wellenlängen $1,71 \mu$ und $3,40 \mu$ liegen. Diese „harmonisch“ genannte Lage der Eigenfrequenzen wurde von Julius, Puccianti und Ransohoff gefunden und von W. Cob-

lantz bestätigt. Die erwähnten harmonischen Eigenschwingungen treten auf bei den einwertigen Alkoholen. Es ist nun die Frage, welchen Atomgruppen des Moleküls dieselben zuzuschreiben sind. Legt man die drei aus Tabelle II ersichtlichen Atomgruppen zugrunde, so läßt sich unschwer die Frage lösen. Eingehende Bestimmungen des ultraroten Absorptionsspektrums der einwertigen Alkohole haben nämlich gezeigt, daß der *OH*-Gruppe die Absorptionsbanden bei $2,95\mu$ und $6,9\mu$ zuzuschreiben sind. Sonach ist zu vermuten, daß die beiden Atomgruppen C_n und H_{2n+1} Träger der harmonisch gelagerten Eigenfrequenzen sind. In der Tat scheint sich dies zu bestätigen, wie aus folgender Zusammenstellung hervorgeht:

Tabelle III.

Substanz	$\lambda_1 : \lambda_2$	$\sqrt{G_1} : \sqrt{G_2}$
CH_3OH	1 : 2	1,71 : 3,46 $\approx$ 1 : 2
C_2H_5OH	1 : 2	2,24 : 4,89 $\approx$ 1 : 2,18
C_3H_7OH	1 : 2	2,65 : 6 $\approx$ 1 : 2,27

Das Verhältnis der Wellenlängen ist also daselbe wie das der Quadratwurzeln aus den Massen der schwingenden Atomgruppen, somit

$$\lambda_1 : \lambda_2 = \sqrt{G_1} : \sqrt{G_2}.$$

Diese Gesetzmäßigkeit steht aber in Analogie zu dem von Dehlinger¹⁾ für zweiatomige Kristalle gefundenen Quadratwurzelgesetz sowie zur Haberschen²⁾ Beziehung zwischen ultraroter und ultravioletter Eigenfrequenz.

Hierzu sei noch bemerkt, daß die harmonische Lagerung der Absorptionsgebiete von H_2O und C_6H_6 sich obigem Gesetze nicht fügt, wenn die zur Berechnung von k maßgebende

Einteilung in Atomgruppen zugrunde gelegt wird. Es wäre somit noch die Frage zu entscheiden, ob für H_2O die harmonischen Eigenfrequenzen der Superposition der Schwingungen der ganzen Molekülmasse mit intramolekularen Schwingungen oder mit Rotationsfrequenzen der Molekülbestandteile zuzuschreiben sind, ob ferner für C_6H_6 jene als Resonanzerscheinung von Teilschwingungen innerhalb der einzelnen Atomgruppen zu betrachten sind.

Zum Schlusse seien die Hauptpunkte vorstehender Ausführungen nochmals zusammengefaßt:

1. Die aus der Drudeschen Theorie einerseits, aus der Dehlingerschen Dispersionsarbeit andererseits folgende Beziehung zur Berechnung des Einflusses der ultraroten Eigenfrequenzen auf den Brechungsexponenten im sichtbaren Gebiet gibt Aufschluß über die Art der Schwingungsgebilde, die als Träger der Eigenfrequenzen anzusehen sind.

2. Entsprechend der k -Relation für feste Körper mit zwei Atomen bzw. Atomgruppen im Molekül läßt sich durch Analogieschluß für flüssige Substanzen mit 3 Atomgruppen als Träger der ultraroten Eigenfrequenzen eine den k -Wert in befriedigender Übereinstimmung mit der Beobachtung darstellende Formel finden. Es ist zu erwarten, daß hierfür auch eine theoretische Begründung erbracht werden kann.

3. In Beschränkung auf die in Tabelle II enthaltenen einwertigen Alkohole wird gezeigt, daß in deren ultraroten Absorptionsspektren die Wellenlängen der auftretenden harmonisch gelagerten Absorptionsgebiete sich verhalten wie die Quadratwurzeln aus den Massen der schwingenden Atomgruppen.

Vielleicht bieten diese Ausführungen Anlaß zu diesbezüglichen experimentellen und theoretischen Untersuchungen.

(Eingegangen 16. Juli 1918.)

1) Dissertation. München 1914.

2) Verh. d. D. Phys. Ges. 13, 1117, 1911.

BESPRECHUNGEN.

E. Lecher, Lehrbuch der Physik, für Mediziner, Biologen und Psychologen. gr. 8. VIII u. 449 S. m. 515 Fig. II. verb. Aufl. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1917. M. 8.80, geb. M. 11.50.

Von einem Universitätslehrer auf Grund langjähriger Unterrichtserfahrung für die speziellen Bedürfnisse derjenigen seiner Hörer geschrieben, welche die Physik nur als wissenschaftliches Hilfsmittel verwenden wollen, erscheint Lechers Lehrbuch nach fünf Jahren (vgl. diese Zeitschr. 15, 421, 1914) in zweiter Auflage und beweist wohl schon dadurch,

daß es die ihm gestellte Aufgabe erfüllt hat. Der Referent möchte aber doch auch darauf hinweisen, daß die Fülle des Stoffes, die der Verf. auf knappstem Raume verarbeitet hat, und namentlich die zahlreichen Hinweise auf die physiologischen oder praktisch medizinischen Anwendungen das Buch auch für den der Physik näher stehenden Fachmann, z. B. den Lehrer an höheren Schulen, wertvoll machen; — das Buch ist trotz seines Untertitels ein Lehrbuch der gesamten Physik, aber unter besonderer Berücksichtigung der speziellen Bedürfnisse der genannten Spezialisten.

Wenn die gebotene Kürze der Darstellungsweise

hie und da an Stelle von Beweisen mehr ein Plausibelmachen theoretischer Folgerungen treten läßt, so mag dies als durchaus berechtigt erscheinen. Einige wohl als Folge davon untergelaufene Ungenauigkeiten des Ausdrucks bedürften allerdings in einer Neuauflage einer Verbesserung. Hoffentlich ist dann der Verlag auch wieder in der Lage, zu seiner altbewährten „friedensmäßigen“ Güte der äußeren Ausstattung zurückzukehren.

W. Kaufmann.

Zu der Besprechung: H. Usener, der Kreisel als Richtungsweiser usw. in Nr. 15 dieser Zeitschr. S. 343.

Herr Dr. Usener war so freundlich, mich zur persönlichen Aussprache über die in der Überschrift genannte Besprechung aufzusuchen. Es ergab sich dabei, daß ich folgende Punkte derselben berichtigen kann:

1. Die Konstruktionen von A. E. Sperry, von denen ich gesagt hatte, daß sie „auffallend hervor gehoben werden“, sind in dem Usenerschen Buche S. 68 bezüglich ihrer Dämpfungsanordnung kurz besprochen und dann nur gelegentlich erwähnt. Andere Stellen, die ich hierauf bezogen hatte, haben, wie ich jetzt erfahre, nichts mit dem Sperry-Kompaß zu tun. Ich kann also feststellen, daß diese Konstruktionen nicht mehr hervorgehoben werden, als in einer historischen Darstellung billig ist.

2. Herr Einstein, den ich bei den von mir herangezogenen Vergleichsversuchen der Marine zwischen Anschütz- und Sperry-Apparaten (übrigens ganz beiläufig) genannt hatte, hat nicht bei diesen, sondern bei einer vorangehenden Patentklage der Firma Anschütz gegen die Sperry-Compagny als gerichtlicher Sachverständiger mitgewirkt.

3. Ich habe Anschütz-Kaempfe den „bahnbrechenden Verwirklicher der vor ihm nebelhaften Kreiselkompaß-Idee“ genannt. Herr Usener wendet dagegen ein, daß nicht die Idee des Kreiselkompasses vor Anschütz nebelhaft gewesen sei, und daß z. B. Herr O. Martienssen im 7. Jahrgange dieser Zeitschr. die Grundzüge der Theorie des Meridiankreisels mathematisch richtig entwickelt habe. Dies entspricht durchaus meiner Meinung, wie sie auch in der „Theorie des Kreisels“, Heft IV § 7, zum Ausdruck gekommen ist. Andererseits stimmt Herr Usener dem von mir angeführten allgemeinen Urteil bei, daß Anschütz-Kaempfe der bahnbrechende Verwirklicher der Kreiselkompaß-Idee sei, während z. B. Herr Martienssen am Schlusse der genannten Arbeit zu dem Ergebnis kommt, daß „auf einem Fahrzeug ein derartiger Kompaß un verwendbar sei“. Der entscheidende Schritt zur Verwirklichung der Kreiselkompaß-Idee bestand neben der sonstigen präzisionsmechanischen Durchbildung des Apparates darin, daß Anschütz die unvermeidlichen Schwingungen des Kreisels um den Meridian, die von den Schiffsbewegungen angeregt werden, durch Erfindung einer wirksamen Dämpfungsanordnung und durch Wahl einer hohen Schwingungsdauer auf ein zulässiges Maß herabzudrücken verstand.

A. Sommerfeld.

Zu den vorstehenden Ausführungen von Herrn Professor Sommerfeld möchte ich noch folgendes ergänzend hinzufügen.

Unter dem „Van den Boos-Kreisel“ ist in dem besprochenen Buch ein Kreiselkompaß verstanden, welcher ganz oder nahezu ungedämpft um die Me-

ridianebene schwingt, ein Kreiselkompaß also, der, wie am Schluß des § 15 angedeutet und in § 21 näher ausgeführt wird, noch nicht für praktische Zwecke brauchbar ist. Da das Buch nach historischen Grundsätzen aufgebaut ist, ergibt sich von selbst, daß im Kap. IV lediglich von Van den Boos als dem Vorläufer von Anschütz, nicht aber von letzterem die Rede ist. Abgesehen von Kap. V, das dem Anschützschen Azimutkreisel gewidmet ist, erscheinen daher die Anschützschen Konstruktionen ausführlicher erst im Kap. V (Dämpfung) und VI (Schlingerfehler). Daß der „Van den Boos-Kreisel“ (dem ich diesen Namen aus rein historischen Gründen gegeben habe, wie in meinem Buch des näheren begründet ist), erst durch die Firma Anschütz & Co. ein praktisch brauchbarer Apparat wurde, kann wohl billig von niemand bestritten werden. Ich erblicke in Übereinstimmung mit Herrn Sommerfeld das erfinderische Verdienst von Anschütz im wesentlichen darin, daß seine Firma als erste einen Kreiselkompaß von genügend langer Schwingungsdauer (entsprechend den Ausführungen von Herrn Martienssen über den „Van den Boos-Kreisel“ im Jahrgang 1906 dieser Zeitschrift) baute und demselben eine gute und sinnreich erdachte Dämpfung (§ 29 meines Buches) hinzufügte.

Nachdem ich mein Buch, auf Grund der Rücksprache mit Herrn Sommerfeld, nochmals auf diesen Punkt hin durchgesehen habe, will ich gern einräumen, daß ich den letzterwähnten Standpunkt, vor allem mit Rücksicht auf solche Leser, welche wenig oder gar nicht mit der praktischen Seite der Angelegenheit vertraut sind, etwas schärfer hätte hervortreten lassen können. Daß mir aber jede tendenziöse Absicht, die Verdienste irgendeines der um die Entwicklung des Kreiselkompasses verdienten Männer herabzumindern, fern lag, ja daß ein solcher Versuch geradezu dem Plan meines Buches widersprochen haben würde, bedarf wohl keiner weiteren Worte.

Die von Herrn Sommerfeld in seinem Referat erwähnten Vergleichsversuche zwischen den Kreiseln von Anschütz und Sperry beziehen sich weniger auf die von mir auf S. 68 beschriebene Dämpfung, sondern in der Hauptsache auf das Verhalten auf schlingerndem Schiff. Diese Versuche, bei denen manche Zufälligkeiten mitgespielt haben mögen, können wohl kaum als Grundlage für ein abschließendes Urteil über die Güte der Sperryschen Konstruktion angesehen werden. Sicherlich können sie mir keine Veranlassung geben, das günstige Urteil über die Sperrysche Dämpfung an der erwähnten Stelle meines Buches abzuändern.

H. Usener.

E. Hinselmann, Unveränderlichkeit oder Veränderlichkeit der Lage der Erdachse?

Zur Richtigstellung und Rechtfertigung der Lehre des Kopernikus von der dritten Bewegung der Erde (Deklinationsbewegung).

8. 62 S. mit 12 Abbildungen und 2 Tafeln. Hannover, M. & H. Schaper. 1917. Geh. M. 4.15.

In seinem grundlegenden Werke *De revolutionibus orbium coelestium libri VI* (Norimbergae 1543) schreibt Kopernikus (Lib. I. Kap. XI) der Erde eine dreifache Bewegung zu: 1. Die tägliche Rotation um ihre Achse, 2. die jährliche Bewegung um die Sonne, die sich Kopernikus jedoch zunächst so denkt, daß dabei der Winkel zwischen der Erdachse und der Verbindungslinie Erde—Sonne unverändert bleibt, daß

also die Erdachse im Laufe eines Jahres einen Kegelmantel beschreiben würde. Da bei dieser Art der Bewegung kein Wechsel der Jahreszeiten eintreten, vielmehr die Deklination der Sonne unveränderlich sein würde, hebt Kopernikus jene, wie er glaubte naturgemäße, konische Bewegung der Erdachse dadurch wieder auf, daß er der Erde 3. eine Bewegung zuschreibt, die er die Deklinationsbewegung nennt und die jener konischen Achsenbewegung entgegengesetzt und nahezu gleich ist — nur nahezu, weil tatsächlich ein unter dem Namen der Präzession bekannter sehr geringer Betrag der konischen Achsenbewegung vorhanden ist.

An dieser dritten Bewegung hat der Verf. Anstoß genommen und er sucht im ersten, früher entstandenen Teile seiner Arbeit nachzuweisen, daß sich Kopernikus in einem Irrtum befunden habe, während er glaubt im letzten Teile die Kopernikanische Lehre als richtig erwiesen und wieder zu Ehren gebracht zu haben. Wenn man in einem die Bewegung der Erde um die Sonne veranschaulichenden Tellurium die Rotationsachse der Erde dem um die Sonne drehbaren Tragarme fest unter einem Winkel von 67° gegen jenen Tragarm einfügen würde, so erhielte die Erde die von Kopernikus als zweite aufgestellte Bewegungsart. Ganz entsprechend dessen dritter Bewegung pflegt man nun, um die Erdachse, wie es der Wirklichkeit entspricht, im Raume sich selbst parallel zu erhalten, die konische Bewegung der Erdachse dadurch aufzuheben, daß man sie nicht fest mit dem Tragarme verbindet, sondern ihr auf mechanischem Wege — etwa durch zwei gleich große Riemenscheiben, deren eine mit dem die Sonne tragenden Stativ fest verbunden ist während die zweite die Erdachse trägt, — eine gleich rasche entgegengesetzte Drehung erteilt. Man kann dem Verf. wohl zustimmen, wenn er meint, daß durch einen solchen Mechanismus der wahre Vorgang der Erdbewegung nicht richtig dargestellt würde. Noch viel weniger ist das jedoch bei dem vom Verf. konstruierten und durch Patent geschützten Apparate der Fall, vor dessen Benutzung geradezu gewarnt werden muß. Die Erde verdankt die sich selbst stets — abgesehen von der Präzession — parallele Achsenlage nur ihrer Rotation, und wenn man diese Tatsache am Tellurium veranschaulichen will, so kann es nur dadurch geschehen, daß man der Erdachse durch Cardanische Aufhängung vollständige Bewegungsfreiheit gibt. Läßt man die Erdkugel dann, während sie sich um die Sonne bewegt, rasch rotieren, so wird ihre Achse auch ohne alle Korrektionsmechanismen die richtige parallele Lage beibehalten.

Das Schriftchen bietet weniger Interesse für den Physiker als für den Pädagogen, den es auf gewisse Irrtümer und Schwierigkeiten des Verständnisses von Erscheinungen hinweist, die den meisten später ganz selbstverständlich erscheinen.

J. Hartmann.

A. Kowalewski, Newton, Cotes, Gauß, Jacobi. Vier grundlegende Abhandlungen über Interpolation und genäherte Quadratur (1711, 1722, 1814, 1826). Übersetzt bzw. herausgegeben und mit einem erläuternden Anhang versehen. 8. VII u. 104 S. mit 6 Textfiguren. Leipzig, Veit & Co. 1917. Geh. M. 4.80.

Es ist von besonderem Interesse und didakti-

chem Wert, die grundlegenden Arbeiten, deren Resultate längst in die allgemeinen Lehrbücher und Formelsammlungen übergegangen sind, im Original zu lesen. Die hier von dem Königsberger Psychologen Arnold Kowalewski zusammengefaßten vier Abhandlungen geben einen klaren Einblick in die Begründung der auch vom Physiker häufig angewandten Regeln für die Interpolation und numerische Integration. Die ursprünglich größtenteils lateinisch geschriebenen Arbeiten sind ins Deutsche übersetzt und mit erläuternden Anmerkungen versehen, durch die auch dem Fernerstehenden das Verständnis sehr erleichtert wird. Von besonderem Werte für den Physiker wird häufig die Gaußsche Untersuchung sein, aus der unter anderem hervorgeht, wie man die Abszissen, z. B. bei einer zeitlich veränderlichen Erscheinung die Beobachtungszeiten, zu wählen hat, um mit dem geringsten Arbeitsaufwand den Verlauf der veränderlichen Größe möglichst genau zu erfassen. Das Studium dieses kleinen Heftchen kann bestens empfohlen werden.

J. Hartmann.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der a. o. Professor an der Universität Innsbruck Dr. Karl Hopfgartner zum ord. Professor der Chemie an derselben Hochschule, der Privatdozent für physikalische Chemie und Elektrochemie an der Universität Lemberg Dr. Roman Negeuß zum a. o. Professor für Experimentalphysik an der gleichen Universität, der Abteilungsleiter am Kaiser-Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie in Berlin-Dahlem und Privatdozent an der Technischen Hochschule daselbst Dr. Gerhard Just zum Geheimen Kriegsrat und Vortragenden Rat im Preussischen Kriegsministerium.

Verliehen: Dem ord. Professor für Geometrie an der Technischen Hochschule Breslau Dr. Gerhard Henssenberg und dem Vertreter der Physik an der Akademie Posen Dr. Paul Spies der Titel Geh. Regierungsrat.

In den Ruhestand: Der ord. Honorarprofessor der mathematischen Physik an der Universität Marburg Geh. Regierungsrat Dr. Wilhelm Feußner und der Direktor der Elektrochemischen Abteilung der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt Geh. Regierungsrat Professor Dr. Ernst Hagen.

Gestorben: Der frühere ord. Professor der technischen Mechanik an der Technischen Hochschule Dresden Wirklicher Geheimer Rat Dr. Christian Otto Mohr, der Privatdozent für Mathematik an der Technischen Hochschule Zürich Dr. Johannes Keller, der badische Landesmeteorologe, Dozent für Meteorologie und Hydrographie an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Christoph Schultheiß, der Dozent für experimentelle Chemie an der Technischen Hochschule Aachen Dr. Oscar Scheen, der a. o. Professor für chemische Technologie des Erdöls und Erdwachses an der Technischen Hochschule Lemberg Regierungsrat Dr. Roman Zaloziński.

Gesuche.

Absolvierter Physiker

(Dr. phil. Universitätsassistent), praktisch begabt, guter Zeichner, sucht nach Kriegsende Anstellung in größerem techn. Betrieb. Anträge mit Bedingungen unter **G. H.** an den Verlag S. Hirzel, Leipzig, Königstr. 2.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 22.

15. November 1918.

Redaktionsschluß für No. 24 am 8. November 1918.

19. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

A. Müller, Untersuchungen am kontinuierlichen Röntgenspektrum. S. 489.

R. v. Mises, Über die „Ganzzahligkeit“ der Atomgewichte und verwandte Fragen. S. 490.

A. Landé, Über Koppelung von Elektronenringen und das optische Drehungsvermögen asymmetrischer Moleküle. S. 500.

A. Szarvassi, Über das Bohrsche Atommodell. S. 505.

Vorlesungsverzeichnis für das Wintersemester 1918/19. S. 508.

Personalien. S. 512.

Angebote. S. 512.

Gesuche. S. 512.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Untersuchungen am kontinuierlichen Röntgenspektrum.

Von Alex Müller.

Mit Tafel IX.

1. Einleitung.

In einer im Druck befindlichen, im Juliheft der „Archives des Sciences Physiques et Naturelles“ erscheinenden Arbeit werde ich einige Versuche über das kontinuierliche Röntgenspektrum beschreiben. Anlaß zu dieser Arbeit gaben die Unstimmigkeiten, die zwischen den Versuchsergebnissen von Rutherford, Barnes und Richardson¹⁾ und Ledoux-Lebard und Dauvillier²⁾ einerseits, und den Ergebnissen amerikanischer Forscher³⁾ andererseits bestehen. Inzwischen ist in dieser Zeitschrift die schöne Arbeit von Lilienfeld⁴⁾ erschienen, die Fragen behandelt, die auch ich mir gestellt habe. Ich glaube, daß eine kurze Zusammenstellung meiner Versuchsergebnisse⁵⁾ an dieser Stelle nicht überflüssig sein dürfte, um so mehr diese Resultate die quantitative Seite der Frage noch etwas mehr berühren.

2. Beschreibung der Versuche.

Die Fragestellung sei hier der Übersicht halber noch einmal wiederholt. Sie lautet:

1) Rutherford, Barnes und Richardson, Phil. Mag. 30, 339, 1915.

2) Ledoux-Lebard u. Dauvillier, C. R. 163, 754, 1916.

3) W. Duane u. F. L. Hunt, Phys. Rev. 6, 166, 1915; A. W. Hull, Phys. Rev. 7, 156, 1916; D. L. Webster, Phys. Rev. 7, 403, 1916; F. C. Blake u. W. Duane, Phys. Rev. 9, 568, und 10, 93, 1917.

4) J. E. Lilienfeld, diese Zeitschr. 19, 263, 1918.

5) Ich habe dieselben am 16. Mai d. J. in der Société de Physique in Genf vorgetragen.

Existiert im kontinuierlichen Röntgenspektrum eine Grenzwellenlänge λ , die, unabhängig vom Material der Antikathode durch die Einsteinsche Beziehung $e \cdot V = h \cdot c / \lambda$ gegeben ist. Ferner im speziellen: Existiert diese Grenze auch noch im Falle, wo das Potential größer ist als das charakteristische Potential der K-Strahlung.

Die Versuchsanordnung war die folgende: Eine geeignet konstruierte Röntgenröhre, die möglichst große Flächenenergie erzielen ließ, wurde mit einer 8 plattigen motorangetriebenen Influenzmaschine betrieben. Das Potential konnte mit Hilfe einer empfindlichen Vakuumregulierung auf ca. 1 bis 2 Proz. konstant gehalten werden. Die zur Prüfung der Einsteinschen Beziehung notwendige Messung der Spannung geschah mit einem absoluten elektrostatischen Voltmeter von Bichat und Blondlot. Die Grenzbandenköpfe wurden mittelst eines kleinen Röntgenspektroskops photographisch registriert, und ihre Lage relativ zu den auf die Platten photographierten Kupferlinien gemessen. (Die Antikathoden konnten mit Leichtigkeit gewechselt werden.) Zur Verwendung gelangten Antikathoden aus Kupfer, Silber und Blei. Zur Prüfung der Frage, ob eine Grenzbande auch jenseits des K-Strahlungspotentials existiere, wurde auf ein und dieselbe Platte eine Aufnahme mit einer Silber- und einer Kupferantikathode gemacht; in beiden Fällen bei gleichem Potential. Die beiden Banden wurden so aufgenommen, daß sie unmittelbar aneinander lagerten. Es zeigte sich, daß die beiden Bandenköpfe innerhalb der Fehlergrenzen die gleiche Lage hatten, und dem Einsteinschen Gesetz entsprachen.

3. Resultate.

Die Resultate sind in der umstehenden Tabelle zusammengestellt.

Nr.	AK	l_0	l	λ	V	h
1	Cu	5,561	1,32	0,421	28,1	$6,29 \cdot 10^{-27}$
2	Ag	4,903	2,49	0,862	14,6	6,69
3	Cu/Ag	4,890	1,96	0,693	18,1	6,67
4	Ag/Pb	4,893	1,98	0,700	18,1	6,74
5	Pb	4,887	1,93	0,683	18,1	6,58
6	Pb	4,914	1,73	0,592	20,7	6,50

AK = Antikathoden.

l_0 = Abstand der symmetrisch aufgenommenen Kupfer- K_α -Linien ($\lambda = 1,541$ Ångström) in cm (siehe Tafel).

l = Doppelter Abstand des Bandenkopfes von der Plattenmitte in cm.

λ = Wellenlänge des Bandenkopfes in Ångströmeinheiten.

V = Röhrenpotential in Kilovolts.

h = Plancksche Konstante berechnet nach der Gleichung:

$$h = \frac{e}{c} \lambda \cdot V = \frac{4,774 \cdot 10^{-10}}{3 \cdot 10^{10}} \cdot \frac{V}{0,3 \cdot 10^8} \cdot \frac{\lambda}{10^8} = 0,5308 \cdot 10^{-27} \cdot V \cdot \lambda.$$

Expositionszeiten: 120—270 Minuten.

Stromstärke: 0,4—0,5 Milliampères.

Zu der Tafel ist zu bemerken, daß auf der Platte Nr. 3 die schmalere und unschärfer begrenzte Bande der Kupferaufnahme entspricht. Der Kristall des Spektrometers (Kochsalz) wurde über einen Bereich von ca. 5° geschwenkt, und zwar so, daß der zu erwartende Bandenkopf ungefähr in die Mitte des Schwenkbereichs zu liegen kam.

Zusammenfassend dürfte zu bemerken sein, daß das Einsteinsche Gesetz in dem Intervall von 14 bis 28 Kilovolts mit einer Genauigkeit von einigen Prozenten durch die vorliegenden Versuche bestätigt wird. In Analogie mit den Lilienfeldschen Resultaten wurde auch beim Kupfer eine Grenzwellenlänge für ein Potential erhalten, das größer war als das charakteristische K -Potential. Die Plancksche Konstante, die im Mittel aus den vorliegenden Versuchen resultiert, ist:

$$h = 6,58 \cdot 10^{-27} \pm 0,07 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec.}$$

in genügender Übereinstimmung mit den bis dato bekannten Werten.

Nachtrag bei der Korrektur:

Es wurde inzwischen mit einem neu konstruierten Spektrometer von angenähert gleichen Dimensionen, und einem anderen Kochsalzkristall eine weitere Aufnahme mit einer Kupferantikathode gemacht. Bei einem Potential von 18,1 Kilovolts ergab sich für die Wellenlänge

des Bandenkopfes $\lambda = 0,682$ Å.-E. Die Plancksche Konstante ergibt sich daraus zu: $h = 6,57 \cdot 10^{-27}$ erg. sec.

Genf, 11. Juli 1918. Laboratoire de Physique de l'Université.

(Eingegangen 14. Juli 1918.)

Über die „Ganzzahligkeit“ der Atomgewichte und verwandte Fragen.

Von R. v. Mises.

Es ist eine in der modernen Physik wiederholt auftretende Fragestellung, ob man in den Beobachtungsergebnissen für eine bestimmte Gruppe von Größen (z. B. für die Atomgewichte der Elemente) einen nur durch gewisse „Fehlerstreuung“ überdeckte Reihe von ganzzahligen Vielfachen einer Einheit zu erblicken hat. Die Frage ist wohl am frühesten für die Atomgewichte selbst gestellt worden, die ein auffallend „ganzzahliges“ Verhalten aufweisen. So bemerkt z. B. J. Perrin¹⁾, daß unter den 24 ersten Elementen des periodischen Systems, d. h. unter den 24 kleinsten Atomgewichtszahlen (abgesehen vom Wasserstoff, der als Basis dient), sich nicht weniger als 20 finden, die um höchstens 0,1 von der nächsten ganzen Zahl abweichen. Wären die Atomgewichte, wie man sich in der Zahlentheorie ausdrückt, „modulo 1 gleichmäßig verteilt“, so dürften nur 4 bis 5 jene Eigenschaft haben. Hier ist zweifellos eine starke Tendenz zur „Ganzzahligkeit“ zu vermuten, aber ein sicheres, objektives Kriterium dafür besitzen wir nicht. In anderen Fällen, wie bei der Langevin-Weißschen Theorie der Magnetonen, für deren Zulässigkeit das Urteil über die „Ganzzahligkeit“ einer bestimmten Zahlenreihe geradezu entscheidend zu sein scheint²⁾, tritt das Bedürfnis nach einem objektiven, möglichst erschöpfenden Kriterium noch stärker auf, weil die Verhältnisse weniger prägnant sind.

Man hat bisher zur Behandlung dieses Problems lediglich Hilfsmittel herangezogen, die der bekannten Gaußschen Fehlertheorie entstammen, indem man die Abweichungen der Beobachtungswerte von den jeweils nächst benachbarten ganzen Zahlen als „Fehler“ ansah, die einfachen und quadratischen Mittel dieser Fehler bildete usw. Daß aber alle diese Begriffe

1) Die Atome, deutsch von Lottermoser, Dresden 1914, S. 23.

2) Vgl. A. Heydweiller, Verh. d. D. phys. Ges. 13, 1063, 1911 und R. Gans, ebda., 14, 367, 1912.

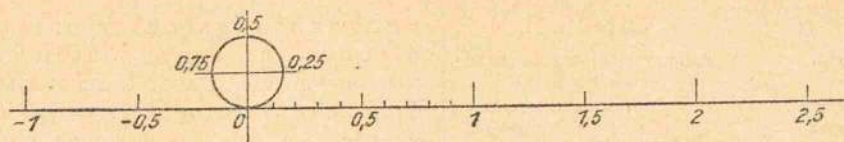


Fig. 1.

dem Problem der „Ganzzahligkeit“ nicht adäquat sind, erkennt man schon daran, daß beispielsweise bei den drei Elementen, deren Atomgewicht als in der Mitte zwischen zwei ganzen Zahlen liegend ermittelt wurde¹⁾, unklar bleibt, ob man $+0,5$ oder $-0,5$ als Fehler anzusehen hat. Man behält es dadurch noch in der Hand, das arithmetische Mittel der Fehler willkürlich mehr oder weniger der Null zu nähern. Aber auch wenn man sich auf die Betrachtung der Fehlerquadrate beschränkt, bleibt man von dieser Unsicherheit nicht frei. Denn es ist von vornherein nicht selbstverständlich, daß etwa beim Atomgewicht 35,46 (Cl) der Fehler $+0,46$ und nicht $-0,54$ beträgt: es könnte sehr wohl sein, daß man bei der zweiten Festsetzung bessere Übereinstimmung mit irgendwelchen Annahmen erzielt.

Im Folgenden werden die — im Grunde sehr einfachen — Elemente einer „zyklischen Fehlertheorie“ entwickelt, die der Gaußschen oder „linearen“ zur Seite tritt, und eine völlig eindeutige Behandlung des Problems der „Ganzzahligkeit“ sowie ähnlicher Fragen gestattet. Wir gelangen zu einem bestimmten Kriterium für die „Ganzzahligkeit“, d. h. zu einem Ausdruck für die auf Grund der Beobachtungen ermittelte Wahrscheinlichkeit dafür, daß der „wahre“ Wert der beobachteten Größen ganzzahlig ist. Um das Resultat zu verdeutlichen, erläutern wir es an dem Beispiel der Atomgewichte; eine Anwendung der Theorie auf eine moderne Frage der Elektrizitätstheorie wird demnächst von anderer Seite veröffentlicht werden.

1. Problemstellung.

Wenn man reelle Zahlen, oder was dasselbe ist, Punkte der reellen Zahlenlinie, nur daraufhin betrachtet, wie sie zu den ganzen Zahlen oder zu den Punkten der natürlichen Zahlenreihe liegen, so erscheint es zweckentsprechend, die Zahlenlinie auf der Peripherie eines Kreises vom Umfang 1 aufzurollen (Fig. 1). Hierbei gelangen alle ganzzahligen Punkte der Zahlenlinie in den 0-Punkt des Kreises und alle jene Punkte der Zahlenlinie, die in bezug auf die beiden nächstbenachbarten ganzen Zahlen gleich liegen, fallen nach der Aufrollung zusam-

men. Analytisch drückt sich das so aus, daß jeder reellen Zahl x ein Punkt mit den Cartesischen Koordinaten

$$\frac{1}{2\pi} \cos 2\pi x \text{ und } \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x \quad (1)$$

zugeordnet wird. Da aber die absolute Größe des Kreises weiterhin keine Rolle spielt, wollen wir, um kürzer zu schreiben, einen Kreis vom Radius 1, also vom Umfang 2π , benutzen und überdies ξ für $2\pi x$ setzen. Es wird dann der reellen Zahl x der Punkt mit den Koordinaten

$$\cos \xi \text{ und } \sin \xi, \quad (2)$$

oder, wie wir auch sagen können, die komplexe Größe

$$e^{2\pi x i} = e^{\xi i}$$

zugeordnet.

Irgendeine Reihe von n Zahlen wird stets durch n Punkte der Kreisperipherie dargestellt, wenn wir festsetzen, daß jeder Punkt so oft zu zählen ist, als er in der Reihe erscheint. Die Fig. 2 zeigt als Beispiel das Bild der

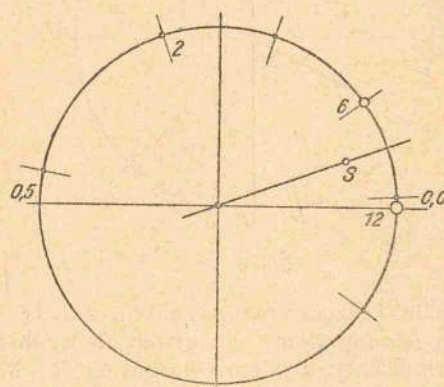


Fig. 2.

in Tabelle I¹⁾ angegebenen Konstanten, nämlich der spezifischen Gewichte von 21 Metallen. Die Vielfachheit der nicht einfachen Punkte ist jedesmal dem Punkte beigeschrieben, überdies entspricht auch die Größe der die Punkte markierenden kleinen Kreise annähernd der Vielfachheit. In Fig. 3 sind in gleicher Weise die

¹⁾ Dy 162,5, Nb 93,5 und Ge 72,5 nach Landolt-Börnstein, 1912.

¹⁾ Entnommen der Tafel VIb des Logarithmenbuches von Greve, 1897.

Tabelle I.

Spez. Gewicht von
21 Metallen.

Bezeichnung	spez. Gewicht
Aluminium	2,5
Antimon	6,71
Blei	11,35
Eisen	7,79
Gold	19,32
Iridium	18,60
Kalium	0,86
Kanonengut	8,83
Kobalt	8,51
Kupfer	8,88
Lithium	0,56
Messing	8,39
Natrium	0,97
Nickel	8,28
Platin	21,53
Silber	10,51
Stahl	7,82
Tellur	6,11
Wismut	9,82
Zink	7,19
Zinn	7,29

Tabelle II.

Atomgewicht der 24 leichtesten Elemente.

Bezeichnung	Atomgew. bez. a. H.
He	4,0
Li	7,00
Be	9,1
B	11,0
C	12,00
N	14,01
O	16,00
F	19,0
Ne	20,0
Na	23,00
Mg	24,3
Al	27,1
Si	28,3
P	31,0
S	32,0
Cl	35,47
A	39,9
K	39,1
Ca	40,1
Sc	44
Ti	48,1
V	51,2
Cr	52,1
Mn	55,0

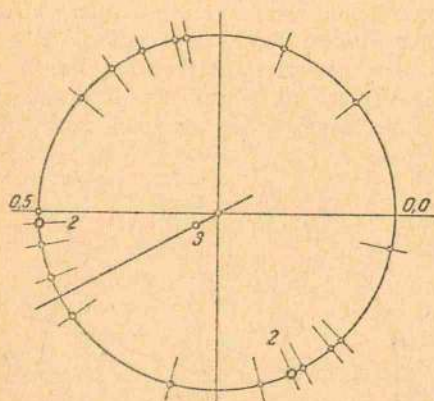


Fig. 3.

in Tabelle II zusammengestellten, auf H bezogenen Atomgewichte der ersten 24 Elemente des periodischen Systems dargestellt¹⁾. Man sieht, daß während die Punkte in Fig. 2 einigermaßen gleichförmig über den Umfang zerstreut sind, sie sich in Fig. 3 auffallend beim 0-Punkt häufen.

Wenn in einem bestimmten Falle die eingangs dieser Arbeit ausgesprochene Vermutung auftritt, so wird sie sich unserer geometrischen Darstellung gegenüber zunächst in der Frage äußern, ob die den Beobachtungsergebnissen entsprechenden Kreispunkte in ihrer Anordnung den Charakter einer durch zufällige

Beobachtungsfehler entstandenen Streuung um einen festen Punktherum aufweisen. Dabei braucht der physische Grund der Streuung keineswegs in Beobachtungsfehlern im gewöhnlichen Sinne zu bestehen. Er kann beispielsweise, wie bei den Atomgewichten, darin liegen, — oder gesucht werden — daß die empirisch gegebenen chemischen Elemente durch das zufällige Auftreten einzelner negativ geladener Elektronen in der Atomstruktur gegenüber gewissen „idealen“ Elementen abweichen. Auf diese physikalischen Fragen brauchen wir aber in keiner Weise einzugehen, da es sich für uns nur darum handelt, ob das vorliegende Zahlenmaterial zu einer derartigen Theorie überhaupt Anlaß gibt. Um das entscheiden zu können, müssen wir, kurz gesagt, die Fehlertheorie für die Beobachtung der Lage eines Punktes auf einer Kreislinie entwickeln. Die Frage ist: Welchem Fehlergesetz genügen Beobachtungen auf einer Kreislinie und wie läßt sich die Wahrscheinlichkeit der Annahme, daß der unbekannte Punkt seine „wahre“ Lage an einer bestimmten Stelle hat, berechnen?

Es könnte vielleicht zweifelhaft scheinen, ob es hier überhaupt einer neuen Theorie bedarf und ob die klassische Fehlertheorie von Gauß nicht ohne weiteres anwendbar ist. Hierzu mag Folgendes bemerkt werden.

Die Gaußsche Fehlertheorie behandelt, wie bekannt, das Gesetz der Fehler, die bei der Bestimmung eines reellen Zahlenwertes schlechthin, also eines Punktes auf der Zahlenlinie entstehen. Als die wahrscheinlichste Lage des gesuchten Punktes erscheint stets der Schwerpunkt der Beobachtungsergebnisse, der durch das arithmetische Mittel der beobachteten Zahlenwerte bestimmt wird. In unserm Falle können wir das arithmetische Mittel der Bogenlängen ξ überhaupt nicht eindeutig bilden, weil jedes einzelne ξ nur bis auf ganze Vielfache von 2π bestimmt ist. Den Schwerpunkt der den Beobachtungsergebnissen zugeordneten Punkte können wir wohl aufsuchen, er liegt aber im allgemeinen nicht auf der Kreislinie, sondern in ihrem Innern, entspricht also gar keinem Werte der gesuchten Größe: Es ist somit unerläßlich, für unsern Fall eine neue Theorie aufzustellen.

2. Ableitung des zyklischen Fehlergesetzes.

Wir nehmen zunächst an, wie es auch in der Gaußschen Theorie üblich ist, daß der Fehler ξ einer Beobachtung ξ nur gewisser

¹⁾ Nach den Angaben von Perrin, a. a. O. S. 23.

diskreter Werte fähig sei. Wenn beispielsweise alle Messungen auf zwei Dezimalstellen genau sind, so kommen für ξ nur die ganzen Vielfachen von $\frac{2\pi}{100}$ in Betracht. Die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler von der Größe ξ zu machen, sei durch die Funktion $\psi(\xi)$ dargestellt, die wir als stetig und differenzierbar voraussetzen. Die Summe der $\psi(\xi)$, über die möglichen Werte von ξ erstreckt, muß 1 sein. Bezeichnet α den wahren Wert der gesuchten Größe, so wird die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die erste Beobachtung den Wert ξ_1 , die zweite den Wert ξ_2 , ..., die n te den Wert ξ_n ergibt, gleich

$$\psi(\xi_1 - \alpha) \cdot \psi(\xi_2 - \alpha) \cdot \dots \cdot \psi(\xi_n - \alpha). \quad (3)$$

In Worten heißt das: Wenn man eine unendliche Folge von Versuchsserien, die jede aus n Einzelversuchen besteht, verfolgt, so wird das Beobachtungsergebnis $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ mit der relativen Häufigkeit (3) auftreten. Dabei handelt es sich immer um die Beobachtung derselben Größe α .

Erweitern wir nun unsere Betrachtung, indem wir auch solche n -fache Versuchsserien einbeziehen, die zur Beobachtung einer anderen Größe α angestellt wurden! Die relative Häufigkeit der Versuche für ein bestimmtes α sei durch $f(\alpha)$ gegeben. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Versuchsserie sowohl die Ergebnisse $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ liefert, als auch einem bestimmten α entspricht, proportional dem Ausdruck

$$\psi(\xi_1 - \alpha) \cdot \psi(\xi_2 - \alpha) \cdot \dots \cdot \psi(\xi_n - \alpha) \cdot f(\alpha). \quad (4)$$

Dabei ist wieder vorausgesetzt, daß auch α nur gewisse diskrete Werte annehmen kann; die Summe der $f(\alpha)$, über alle diese Werte des Argumentes erstreckt, muß 1 sein. Setzt man in (4) die $\xi_1, \dots, \xi_n$ konstant, so stellt (4) als Funktion von α , bis auf einen konstanten Faktor, die Wahrscheinlichkeit dafür dar, daß der wahre Wert einer Größe, für welche die Beobachtungen $\xi_1, \dots, \xi_n$ gemacht wurden, α beträgt.

In der üblichen Fehlertheorie sind $\xi_1, \dots, \xi_n$ und α durch Punkte der reellen Zahlenlinie darstellbar. Bekanntlich hat Gauß die Fehlerfunktion aus der Forderung bestimmt, daß (4) bei $f = \text{konst.}$, für beliebige feste $\xi_1, \dots, \xi_n$ als Funktion von α betrachtet, für jenes α ein Maximum wird, welches dem Schwerpunkt der den $\xi_1, \dots, \xi_n$ zugeordneten Punkte entspricht. In unserm Falle sind die ξ und α Bogenlängen, die auf dem Kreisumfang von einem Nullpunkt aus aufgetragen werden, derart, daß jedem Wert ein bestimmter Punkt der Kreislinie entspricht. Wir stellen nun im Sinne

der in Abschnitt 1 erörterten Notwendigkeit einer neuen Hypothese folgende Forderung an die „zyklische Fehlerfunktion“ ψ :

Der Ausdruck (4) soll bei $f = \text{konst.}$, für beliebige feste $\xi_1, \dots, \xi_n$ sein Maximum für jene Werte von α erreichen, deren zugeordneter Peripheriepunkt dem Schwerpunkt der den $\xi_1, \dots, \xi_n$ entsprechenden Punkte zunächst liegt.

Diese Festsetzung ist eindeutig, sofern der Schwerpunkt nicht gerade in den Kreismittelpunkt fällt; auf diesen Grenzfall kommen wir noch zurück. Im allgemeinen Fall ist der Punkt α jener Kreispunkt, der mit dem Schwerpunkt auf demselben Kreismittelpunkt liegt.

Die Ermittlung von ψ ist nun sehr einfach. Soll (4) ein Extremum werden, so gilt das auch für den log des Ausdrucks. Dabei kann man den konstanten Faktor f weglassen. Man erhält so

$$\sum_{x=1}^n \log \psi(\xi_x - \alpha) = \text{extr.}, \quad \sum_{x=1}^n \frac{\psi'(\xi_x - \alpha)}{\psi(\xi_x - \alpha)} = 0. \quad (5)$$

Andrerseits gilt, wenn a, α die Polarkoordinaten des Schwerpunkts der Punkte $(\cos \xi_x, \sin \xi_x)$ sind:

$$\frac{1}{n} \sum_{x=1}^n \cos(\xi_x - \alpha) = a, \quad \sum_{x=1}^n \sin(\xi_x - \alpha) = 0. \quad (6)$$

Damit die zweite Gleichung (5) und die zweite Gleichung (6) bei ganz beliebigen $\xi_1, \dots, \xi_n$ nebeneinander bestehen, müssen die einzelnen Summanden einander proportional sein, also:

$$\frac{\psi'(\xi)}{\psi(\xi)} = k \cdot \sin \xi, \quad (7)$$

und integriert:

$$\psi(\xi) = C e^{k \cos \xi}. \quad (8)$$

Hierin muß $k > 0$ gewählt werden, damit $\psi''(0) < 0$ wird, wie es die Bedingung des Maximums fordert.

Diese Gleichung (8) tritt in unserm Falle an die Stelle der Gaußschen Fehlerfunktion

$$\varphi(z) = C e^{-h^2 z^2}. \quad (9)$$

Man sieht, daß wenn die ξ klein gegen den Kreismittelpunkt sind, der gleich 1 gewählt wurde, Gl. (8) in Gl. (9) übergeht.

Die Konstante C ist aus der oben erwähnten Bedingung zu bestimmen, daß die Summe der ψ für alle ξ -Werte, die überhaupt möglich sind, gleich 1 wird. So entspricht beispielsweise der Annahme, daß

$$\xi = \frac{2\pi}{100}, 2 \cdot \frac{2\pi}{100}, \dots, 2\pi$$

werden kann, ein ganz bestimmtes C für jedes k . Je enger die möglichen ξ -Werte liegen,

um so kleiner wird natürlich C . In der Regel betrachtet man nur den Grenzfall, in dem ζ stetig alle Werte zwischen null und 2π durchläuft, wobei man dem $\psi(\zeta)$ eine etwas veränderte Bedeutung beilegen muß, da sonst C einfach null würde. Es soll jetzt $\psi(\zeta)d\zeta$ die Wahrscheinlichkeit dafür bezeichnen, daß der Fehler in den Grenzen $\zeta, \zeta + d\zeta$ liegt. Dann lautet die Bedingung für C :

$$C \int_0^{2\pi} e^{k \cos x} dx = 1. \quad (10)$$

Das hier auftretende bestimmte Integral führt, wie bekannt, auf die Besselsche Funktion nullter Ordnung des komplexen Argumentes ki ¹⁾:

$$\int_0^{2\pi} e^{k \cos x} dx = 2\pi J_0(ki). \quad (11)$$

Schreiben wir, da C von k abhängt, $C(k)$ an Stelle von C , so haben wir endgültig die „Zyklische Fehlerfunktion“

$$\psi(\zeta) = C(k) e^{k \cos \zeta} \text{ mit } C(k) = \frac{1}{2\pi J_0(ki)}. \quad (12)$$

Die untenstehende Tabelle III gibt die Werte von $C(k)$ für $k=0$ bis 6 nach Jahnke-Emde,

Tabelle III.

Präzisionsmaß, Fehlerkonstante und Schwerpunktsabstand.

Präzisionsmaß k	Fehlerkonstante C	Schwerpunktsabstand a	Produkt ka
0	0,15915	0,0000	0,0000
1	0,12571	0,4464	0,4464
2	0,06982	0,6978	1,3955
3	0,03261	0,8100	2,4299
4	0,01408	0,8635	3,4540
5	0,005843	0,8934	4,4668
6	0,002367	0,9123	5,4740

Funktionentafeln, S. 159. Für große k kann annähernd gesetzt werden²⁾:

$$C(k) \sim e^{-k} \sqrt{\frac{k}{2\pi}},$$

also:

$$\psi(\zeta) \sim \sqrt{\frac{k}{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(\cos \zeta - 1)}. \quad (13)$$

In Fig. 4 ist der Verlauf von $C(k)$ graphisch dargestellt.

1) Vgl. etwa Jahnke-Emde, Funktionentafeln, Leipzig 1909, S. 169.

2) Jahnke-Emde, ebda., S. 100.

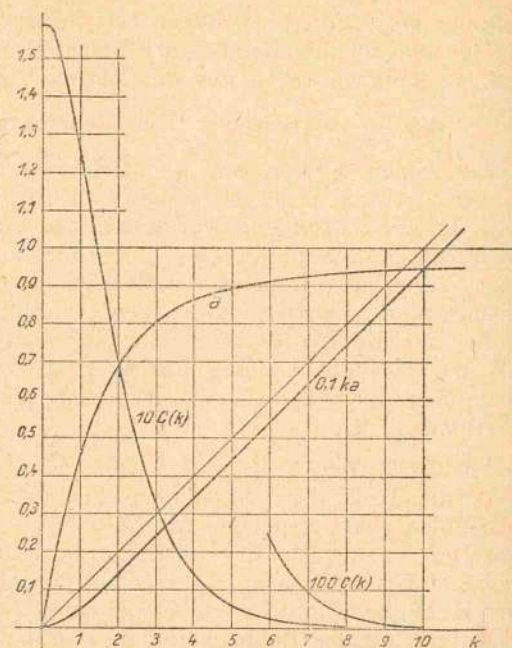


Fig. 4.

3. Präzisionsmaß, Streuung, Schwerpunkt.

Die Konstante k in (8) oder (12), von der wir schon wissen, daß sie positiv sein muß, hat die Bedeutung eines Präzisionsmaßes der Beobachtungen. Denn je größer k , desto stärker häufen sich die Fehler in der Nähe von $\zeta=0$, wie man am besten in Fig. 5 erkennt.

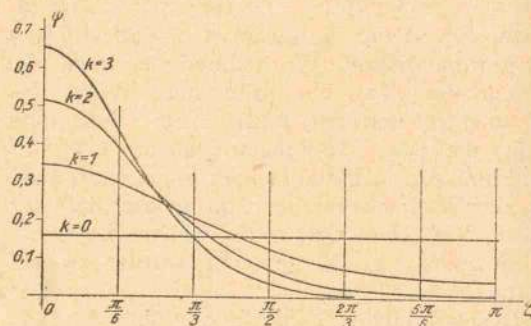


Fig. 5.

Hier sind die Fehlerkurven für $k=1, 2$ und 3 eingezeichnet. Für $k=0$ erhält man naturgemäß eine Parallele zur Abszissenachse im Abstand $\frac{1}{2\pi} = 0,15915$.

Das Präzisionsmaß steht in engem Zusammenhang mit der Lage des Schwerpunktes der durch $\psi(\zeta)$ bestimmten Verteilung. Aus Symmetriegründen ist natürlich das Winkel-

argument a des Schwerpunktes dieser Verteilung null. Der Abstand a des Schwerpunktes vom Kreismittelpunkt ist, analog der ersten Gleichung (6) durch

$$a = \int_0^{2\pi} \psi(x) \cdot \cos x \, dx = C(k) \int_0^{2\pi} \cos x \cdot e^{k \cos x} \, dx \quad (14)$$

gegeben. Das rechts stehende bestimmte Integral ist leicht auf das oben behandelte (11) zurückzuführen:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos x \cdot e^{k \cos x} \, dx &= \frac{d}{dk} \int_0^{2\pi} e^{k \cos x} \, dx = \\ &= 2\pi \frac{dJ_0(ki)}{dk}. \end{aligned} \quad (15)$$

Nach einer bekannten Formel über Besselsche Funktionen ist $J_0' = -J_1$, so daß mit Rücksicht auf den Wert von $C(k)$:

$$a = -\frac{iJ_1(ki)}{J_0(ki)} \quad (16)$$

wird. Für größere k folgt aus der asymptotischen Darstellung der Besselschen Funktionen, etwa für $k > 6$ hinreichend genau:

$$a \sim 1 - \frac{1}{2k} - \frac{11}{64k^2} \quad (16')$$

und daraus

$$k \sim \frac{1}{2(1-a)} + \frac{11}{32}. \quad (16'')$$

In Fig. 4 ist a als Funktion von k eingezeichnet und überdies auch das — später zur Verwendung kommende — Produkt ka . Zahlenwerte für $k=0$ bis 6 gibt die obenstehende Tabelle III. Für große k nähert sich a dem Wert 1, für $k=0$ ist $a=0$. Man sieht, wie in diesem letzten Falle die oben erwähnte Unbestimmtheit zutage tritt. Der Schwerpunkt fällt in den Kreismittelpunkt und ψ wird konstant, erfüllt also an allen Stellen die analytische Bedingung des Maximums, $\psi' = 0$. Damit erledigt sich der erwähnte Ausartungsfall unserer Definition von Abschnitt 2.

In der Gaußschen Fehlertheorie besteht, wie bekannt, ein enger Zusammenhang zwischen dem Präzisionsmaß und der sog. Streuung oder dem Fehlerquadrat. Je größer das Präzisionsmaß, desto kleiner die Streuung und umgekehrt. In unserm Falle spielt, wie wir eben gesehen haben, der Abstand des Schwerpunktes der Beobachtungen von der Kreisperipherie eine ähnliche Rolle, wie die Streuung beim linearen Fehler. Man kann geradezu die Größe $1-a$ als ein Maß der Streuung bezeichnen; nur wenn alle Beobachtungen in einem Punkt des Kreises konzentriert sind, wird $1-a=0$. Auch aus der Gleichung:

$$1-a = \int_0^{2\pi} (1-\cos x) \psi(x) \, dx, \quad (17)$$

die unmittelbar aus (14) folgt, ersieht man, daß für kleine x (im Verhältnis zum Kreismittelpunkt)

wegen $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ der Ausdruck (17) bis auf

den Faktor $\frac{1}{2}$ in das Fehlerquadrat übergeht. Schließlich ist für hinreichend große k nach (16') $1-a$ der reziproke Wert von $2k$, wie in der Gaußschen Theorie Streuung und doppeltes Präzisionsmaß reziprok sind. Im Gegensatz zur linearen Fehlertheorie läßt also hier der Begriff der Streuung eine geometrisch anschauliche Deutung zu.

Ist eine beliebige, stetige oder diskrete, Verteilung von Punkten auf dem Kreise gegeben, so kann man immer ihren Schwerpunkt mit den Polarkoordinaten a, α nach bekannten Regeln bestimmen. Durch a wird dann der wahrscheinlichste Wert der gesuchten Größe festgelegt, durch $1-a$ die Streuung, aus der man nach Gl. (16) das Präzisionsmaß des zugehörigen Fehlergesetzes rechnen kann. Es knüpfen sich hieran noch weitere Beziehungen, die die Darstellung willkürlicher Verteilungsfunktionen betreffen, auf die aber an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden soll.

4. Kriterium der Ganzzahligkeit.

Es sei eine Reihe willkürlicher Punkte auf dem Kreisumfang durch die Bogenlängen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ gegeben. Die Cartesischen Koordinaten x, y des Schwerpunktes sind durch

$$x = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \cos \xi_\nu, \quad y = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \sin \xi_\nu, \quad (18)$$

die Polarkoordinaten a, α durch

$$a = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{a}, \quad \sin \alpha = \frac{y}{a} \quad (19)$$

bestimmt. Zu dem gefundenen Werte von a kann man das nach Gl. (16) zugeordnete Präzisionsmaß k aufsuchen, praktisch am einfachsten, indem man Fig. 4 benutzt oder in der oben wiedergegebenen Zahlentafel III interpoliert.

Die Frage, die wir zunächst beantworten wollen, ist die nach der Wahrscheinlichkeit irgendeiner Lage ξ des wahren Wertes der Beobachtungen. Nach Gl. (4) ist diese Wahrscheinlichkeit proportional

$$\psi(\xi_1 - \xi) \cdot \psi(\xi_2 - \xi) \cdot \dots \cdot \psi(\xi_n - \xi) \cdot f(\xi).$$

Da wir $f(\xi) = \text{konst.}$ setzen, d. h. die „a priori“-Wahrscheinlichkeit jeder Lage als gleich annehmen, wird daraus nach Einführung von (12):

$$\text{konst. } e^k \sum_{x=1}^n \cos(\xi_x - \xi). \quad (20)$$

Hier wäre es freilich von vornherein noch unbestimmt, welcher Wert in einem gegebenen Falle für k zu setzen ist. Wir folgen aber dem bereits am Schlusse von Abschnitt 3 erwähnten, in der Gaußschen Fehlertheorie üblichen Vorgang, indem wir das Präzisionsmaß k gleich jenem Wert wählen, der sich aus der tatsächlichen Streuung der Beobachtungen, also in unserm Fall aus der Schwerpunktsentfernung a , nach (16) bzw. (16') rechnet.

Wenn wir, wie schon oben in Abschnitt 2 geschehen ist, zu stetig verteilten ξ -Werten übergehen, ist in (20) ein Ausdruck für die Wahrscheinlichkeitsdichte an der Stelle ξ zu erblicken, d. h. der Ausdruck gibt, mit $d\xi$ multipliziert, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die gesuchte Größe in das Intervall $\xi, \xi + d\xi$ fällt.

Mit Berücksichtigung von (18) und (19) erhält man:

$$\sum \cos(\xi_x - \xi) = \cos \xi \cdot \sum \cos \xi_x + \sin \xi \cdot \sum \sin \xi_x = n(x \cos \xi + y \sin \xi) = na \cos(\xi - \alpha). \quad (21)$$

Demnach wird aus (20):

$$\text{konst. } e^{kna \cos(\xi - \alpha)}, \quad (22)$$

und da zur Bestimmung der Konstanten die Bedingung heranzuziehen ist, daß das über den ganzen Kreisumfang erstreckte Integral von (22) gleich 1 wird, so ist die Konstante nichts anderes als $C(kna)$ im Sinne der Definition in Gl. (12). Wir haben somit das Ergebnis: Der Ausdruck

$$C(kna) e^{kna \cos(\xi - \alpha)} d\xi \quad (23)$$

stellt die Wahrscheinlichkeit dafür dar, daß der wahre Wert der Bogenlänge, für welche die Beobachtungsergebnisse $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ vorliegen, zwischen ξ und $\xi + d\xi$ liegt.

Es bedarf nun nur noch der einfachen Spezialisierung für $\xi = 0$, um das Kriterium der „Ganzzahligkeit“ zu erhalten. Bedenkt man, daß bei Gleichverteilung der Punkte über den

Kreisumfang die Dichte an jeder Stelle $\frac{1}{2\pi}$ ist, so sieht man, daß der Ausdruck K

$$K = 2\pi C(kna) e^{kna \cos \alpha} \quad (24)$$

ein Kriterium dafür bildet, in welchem Maße die Annahme, der „wahre“ Wert der Beobachtungsgroße sei ganzzahlig, berechtigt ist. Ist der Ausdruck wesentlich größer als 1, so hat die Annahme viel für sich, ist er kleiner als 1, so ist sie zu verwerfen. Hat der Aus-

druck gerade den Wert 1, so besagt das, daß die Annahme durchschnittlich gleichberechtigt ist jeder andern Annahme über die Lage des gesuchten Punktes auf dem Kreise.

Wenn n oder wenigstens nk eine große Zahl ist, so geht (24) über in

$$K \sim \sqrt{2\pi kna} e^{kna(\cos \alpha - 1)}. \quad (25)$$

In (24) und (25) bedeuten, um es nochmals zusammenzufassen: a, α die Polarkoordinaten des Schwerpunktes der Beobachtungen, k das aus a nach (16) gerechnete Präzisionsmaß, n die Anzahl der Beobachtungen.

Der Ausdruck (24) oder (25) wächst, wie es sein muß, bei festem n und a mit abnehmendem α . Sind a und α , also die Schwerpunktskoordinaten fest, so nimmt K — falls überhaupt α von Null verschieden ist — mit wachsendem n stark ab. Dies rührt daher, daß bei einer sehr großen Zahl von Versuchen schließlich kein anderer Wert als der durch α bestimmte „wahrscheinlichste“ irgendeine Wahrscheinlichkeit besitzt. Es wird daher unter Umständen einen besseren Einblick in das Verhalten hinsichtlich der „Ganzzahligkeit“ gewähren, statt des Ausdruckes K den verhältnismäßigen Wert des Fehlerintegrals für einen kleinen, den Nullpunkt einschließenden Bereich:

$$K' = \frac{\pi}{2\xi_0} C(kna) \int_{-\xi_0}^{\xi_0} e^{kna \cos(\xi - \alpha)} d\xi \quad (26)$$

zu betrachten. Bezeichnet man mit $\Psi(x)$ das doppelt genommene Integral von ψ , mit den Grenzen 0 und x (vgl. den am Schlusse der Arbeit beigefügten Zusatz), so ist

$$K' = \frac{\pi}{2\xi_0} [\Psi(\xi_0 - \alpha, kna) - \Psi(-\xi_0 - \alpha, kna)]. \quad (27)$$

Für große kna kann (vgl. den Zusatz) statt Ψ das Gaußsche Fehlerintegral Φ gesetzt werden:

$$K' \sim \frac{\pi}{2\xi_0} \left[\Phi\left(\sqrt{\frac{kna}{2}}(\xi_0 - \alpha)\right) - \Phi\left(\sqrt{\frac{kna}{2}}(-\xi_0 - \alpha)\right) \right]. \quad (28)$$

Schließlich können auch noch die Extremwerte von (23) in ihrem Verhältnis zu $\frac{1}{2\pi}$ zur Beurteilung der „Ganzzahligkeit“ mit herangezogen werden. Je näher die beiden Verhältniszahlen zu 1 liegen, umso größer ist die „Gleichverteilung“ der Beobachtungen. Man kann als Maß der „Gleichverteilung“ die beiden Zahlen

$$2\pi C(kna) e^{\pm kna} \quad (29)$$

oder bei großem kna :

$$\sqrt{2\pi kna} \text{ und } \sqrt{2\pi kna} e^{-2kna} \quad (30)$$

ansetzen. Die im folgenden dargelegten Anwendungen werden das noch näher beleuchten.

5. Anwendungen.

Wir wollen zunächst, um einen Anhaltspunkt zu gewinnen, die beiden oben in Tabelle I und II zusammengestellten Zahlenreihen auf ihre „Ganzzahligkeit“ und „Gleichverteilung“ untersuchen. Für die spezifischen Gewichte der 21 Metalle ergibt sich die folgende Tabelle IV,

Tabelle IV.

Ganzzahligkeits-Elemente der spez. Gewichte nach Tabelle I.

x_k	n	ξ_k	$n \cos \xi_k$		$n \sin \xi_k$	
			pos.	neg.	pos.	neg.
0,11	1	39° 36'	0,770513	—	0,637424	—
0,19	1	68° 24'	0,368125	—	0,929777	—
0,28	1	100° 48'	—	0,187381	0,982287	—
0,29	1	104° 24'	—	0,248690	0,968583	—
0,32	1	115° 12'	—	0,425779	0,904827	—
0,35	1	126°	—	0,587785	0,809017	—
0,39	1	140° 24'	—	0,770513	0,637424	—
0,50	1	180°	—	1,000000	—	—
0,51	2	183° 36'	—	1,996054	—	0,125582
0,53	1	190° 48'	—	0,982287	—	0,187381
0,56	1	201° 36'	—	0,929777	—	0,368125
0,60	1	216°	—	0,809017	—	0,587785
0,71	1	255° 36'	—	0,248690	—	0,968583
0,79	1	284° 24'	0,248690	—	—	0,968583
0,82	2	295° 12'	0,851558	—	—	1,809654
0,83	1	298° 48'	0,481754	—	—	0,876307
0,86	1	300° 36'	0,637424	—	—	0,770513
0,88	1	316° 48'	0,728969	—	—	0,684547
0,97	1	349° 12'	0,982287	—	—	0,187381
21			5,06932	8,18597 5,06932	5,86934	7,53444 5,86934
				—3,1166		—1,6651

in der die erste Spalte die Größe x_k (und zwar der Einfachheit halber nach Fortlassung der in ihr enthaltenen größten ganzen Zahl), die zweite die Vielfachheit ihres Vorkommens, die dritte den zugehörigen Winkel ξ_k , endlich die vierte und fünfte die mit der Vielfachheit multiplizierten Koordinaten $\cos \xi_k$ und $\sin \xi_k$ angibt. Aus den algebraischen Summen der letzteren findet man die Schwerpunktskoordinaten:

$$x = -\frac{3,1166}{21} = -0,1484,$$

$$y = -\frac{1,6651}{21} = -0,0793.$$

Daraus weiter:

$$a = \sqrt{x^2 + y^2} = 0,1684$$

und

$$\alpha = \arctg \frac{y}{x} = 108^\circ 10'.$$

Das zu $a=0,168$ gehörige Präzisionsmaß entnimmt man durch Interpolation der Tabelle III oder der Fig. 4, oder besser, — mit Rücksicht auf die Kleinheit von k — indem man die Reihenentwicklung für J_0 und J_1 auf Gl. (16) anwendet:

$$a \sim \frac{k}{2} \frac{1 + \frac{k^2}{8}}{1 + \frac{k^2}{4}} \sim \frac{k}{2} \left(1 - \frac{k^2}{8}\right), \quad k \sim 2a \left(1 + \frac{a}{2}\right),$$

demnach $k=0,36$. Um das Kriterium K zu erhalten, rechnen wir $kna=0,36 \cdot 21 \cdot 0,1684=1,275$, entnehmen der Fig. 4 das zugehörige $C(1,275)=0,11$ und erhalten mit $\cos \alpha=0,882$

$$K = 2\pi \cdot 0,11 \cdot e^{-1,125} = 0,228.$$

Die Wahrscheinlichkeit der Ganzzahligkeit liegt also hier weit unter dem Durchschnittswert. Das Maß der Gleichverteilung liefert nach (29) die beiden Zahlen

$$2\pi \cdot 0,11 \cdot e^{\pm 1,275},$$

d. i. 2,46 und 0,19. Gegenüber dem, was wir am Beispiel der Atomzahlen sofort sehen werden, muß dies als eine verhältnismäßig starke Gleichförmigkeit bezeichnet werden.

Für die 24 kleinsten Atomgewichte nach Tabelle II zeigt die untenstehende Tabelle V die analoge Zusammenstellung wie Tabelle IV. Hier ergeben sich für den Schwerpunkt:

$$x = \frac{17,3698}{24} = 0,724, \quad y = \frac{6,0423}{24} = 0,252$$

und daraus die Polarkoordinaten:

$$a = 0,765, \quad \alpha = 19^\circ 9'.$$

Tabelle V.

Ganzzahligkeits-Elemente der Atomgewichte nach Tabelle II.

x_k	n	ξ_k	$n \cos \xi_k$		$n \sin \xi_k$	
			pos.	neg.	pos.	neg.
0,00	12	0°	12,000000	—	—	—
0,01	1	3° 36'	0,998027	—	0,062791	—
0,10	6	36°	4,854102	—	3,526710	—
0,20	1	72°	0,309017	—	0,951057	—
0,30	2	108°	—	0,618034	1,902114	—
0,47	1	169° 12'	—	0,982287	0,187381	—
0,90	1	324°	0,809017	—	—	0,587785
24			18,970163 1,600321	1,600321	6,630053 0,587785	0,587785
			+17,36984		+6,04227	

Tabelle VI.
Ganzzahligkeits-Elemente der vollständigen Atomgewichtstafeln von 1911.

x_z	Bezeichnung	n	ξ_z	$n \cos \xi_z$		$n \sin \xi_z$	
				pos.	neg.	pos.	neg.
0,00	B, Bi, C, Cr, F, La, Mo, Na	8	0°	8,000000	—	0,000000	—
0,008	H	1	2° 52' 48"	0,998737	—	0,050242	—
0,01	N	1	3° 36'	0,998027	—	—	—
0,04	P	1	14° 24'	—	—	0,248690	—
0,06	V	1	21° 36'	0,929777	—	—	—
0,07	S	1	25° 12'	—	—	—	—
0,09	Ca	1	32° 24'	0,844328	—	0,535827	—
0,10	Al, Be, K, Pb, Ti . . .	5	36°	3,236068	—	2,938925	—
0,20	Au, Ne, Pt, Se . . .	4	72°	0,309017	—	3,804228	—
0,25	Ce	1	90°	—	—	1,000000	—
0,30	Si	1	108°	—	—	0,951057	—
0,32	Mg	1	115° 12'	—	0,425779	—	—
0,37	Ba, Zn	2	133° 12'	—	1,369094	1,457938	—
0,40	Cd	1	144°	—	—	0,587785	—
0,45	Rb	1	162°	—	0,951057	0,309017	—
0,46	Cl	1	165° 36'	—	—	—	—
0,57	Cu	1	205° 12'	—	—	—	—
0,63	Sr	1	226° 48'	—	0,684547	—	0,728969
0,68	Ni	1	244° 48'	—	0,425779	—	—
0,70	Pd, Ru	2	252°	—	—	—	1,902114
0,81	Cs	1	291° 36'	0,368125	—	—	0,929777
0,85	Fe	1	306°	0,587785	—	—	0,809017
0,88	Ag, Ar	2	316° 48'	1,457938	—	—	1,369094
0,90	Kr, Rh	2	324°	1,618034	—	—	1,175570
0,92	Br, J	2	331° 12'	1,752614	—	—	0,963508
0,93	Mn	1	334° 48'	0,904827	—	—	0,425779
0,94	Li	1	338° 24'	0,929777	—	—	—
0,96	As	1	345° 36'	0,968583	—	—	—
0,97	Co	1	349° 12'	0,982287	—	—	0,187381
0,99	He	1	356° 24'	0,998027	—	—	—
		49		25,88395 3,85626	3,85626	11,88371 8,49121	8,49121
				+ 22,0277		+ 3,3925	

Das Präzisionsmaß k ist zufolge Fig. 4 etwa gleich 2,56, das Produkt $ka=1,96$, daher $kna=47,04$. Dieser Wert ist groß genug, um die Anwendung der asymptotischen Formel (25) zu rechtfertigen. Wir erhalten somit

$$K = \sqrt{2\pi \cdot 47,04} \cdot e^{-47,04 \cdot 0,0536} = \frac{17,19}{13,46} = 1,28.$$

Es fällt also das Kriterium K hier größer als 1 aus, aber viel unbedeutender, als man wohl nach dem Aussehen der Zahlenreihe und der Fig. 2 vermuten würde. Die Erklärung finden wir, indem wir die beiden Extrema der Wahrscheinlichkeitsdichte nach (30) berechnen: Sie betragen hier 17,2 und $17,2e^{-94}$. Man sieht, daß eine außerordentlich starke Abweichung von der Gleichverteilung vorliegt, und daß der verhältnismäßig kleine Wert von K nur daher rührt, daß der wahrscheinlichste Punkt immerhin schon 19° vom Nullpunkt entfernt liegt. Fragen wir daher nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß der „wahre“ Wert etwa zwischen $\pm 0,06$ gelegen

ist, so erhalten wir nach (28) mit $\xi^0 = 2\pi \cdot 0,06 = 0,3769$.

$$K' = \frac{1}{0,24} [\Phi(4,85 \cdot 0,0427) - \Phi(-4,85 \cdot 0,7111)] = \frac{1}{0,12} \cdot \frac{1}{2} [0,230 + 1,000] = 8,33 \cdot 0,615 = 5,12,$$

d. h. mit rund 61 Proz. Wahrscheinlichkeit ist anzunehmen, daß die Abweichung einer Atomgewichtszahl von der nächsten ganzen Zahl höchstens gleich 0,06 ist. Da aber auf den Bereich $\pm 0,06$ im Durchschnitt nur rund 12 Proz. Wahrscheinlichkeit entfallen sollte, so wird der Durchschnittswert hier um das Fünffache übertroffen.

Um endlich die Frage der Atomgewichtszahlen noch etwas genauer zu verfolgen, haben wir aus der vollständigen Zusammenstellung der Atomgewichte von 1911¹⁾ jene ausgewählt, deren Fehlergrenze mit nicht mehr als $\pm 0,1$ angegeben erscheint. Es bleiben so im ganzen 49 Zahlen (von insgesamt 81), deren „Ganzzah-

1) Landolt-Börnstein, 1912.

Nach bekannten Sätzen der Analysis ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x \cos^n x dx = \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \quad \text{für } 0 < x < \pi,$$

$$= 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{,, } x=0, \\ \text{,, } x=\pi \text{ bei gerad. } n, \end{array} \right. \quad (3)$$

$$= 2\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \quad \text{,, } x=\pi \text{ bei ungeradem } n.$$

Hieraus erhält man leicht eine Abschätzung des Restgliedes in (2). Analoge Betrachtungen wie die zu (3) führenden zeigen auch, daß bei festgehaltenem u :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{P}\left(\sqrt{\frac{2}{k}} u, k\right) = \Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-u^2} du. \quad (4)$$

Die Annäherung an die Grenzwerte in (3) und (4) erfolgt sehr rasch, so daß man namentlich (4) zu einer näherungsweisen Berechnung von $\mathcal{P}$ für große k verwenden kann, wovon auch oben in Abschnitt 5 Gebrauch gemacht wurde.

(Eingegangen 14. Juli 1918.)

Über Koppelung von Elektronenringen und das optische Drehungsvermögen asymmetrischer Moleküle.

Von A. Landé.

§ 1. Über die Drehung der Polarisationssebene in organischen Verbindungen liegt ein umfangreiches experimentelles Material vor¹⁾. Einigermassen allgemeingültige Gesetzmäßigkeiten für die Größe des Drehungswinkels bei verschiedenen Substanzen sind jedoch nicht bekannt, abgesehen von wenigen nicht einmal ausnahmslos geltenden empirischen Regeln von beschränktem Umfang, welche für manche homologe Reihen asymmetrischer Kohlenstoffverbindungen eine Zunahme der optischen Aktivität bei Ersetzung einer Atomgruppe durch gewisse andere feststellen. So haben P. A. Guye und C. Brown (1890), durch theoretische Überlegungen geleitet, die Regel aufgestellt²⁾: Die drehende Kraft eines asymmetrischen Tetraeders ist, abgesehen von einem konstanten Faktor, proportional dem „Asymmetrieprodukt“

$$P = \frac{(m_1 - m_2)(m_1 - m_3) \dots (m_3 - m_4)}{(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)^6}$$

aus den Massen m_1 bis m_4 der Atomgruppen in den Tetraederecken. Doch fanden sich Ausnahmen von dieser Regel in solcher Anzahl,

daß Guye schließlich die Überzeugung gewann „nicht nur die Massen der vier Gruppen, sondern auch ihre gegenseitige Lage, die Wirkungen, welche sie aufeinander ausüben, ihre Konfiguration und endlich die Natur der Elemente seien auf die Größe und den Sinn der Drehung von Einfluß“. Landolt (l. c.) setzt hinzu: „Wegen dieser Kompliziertheit des Phänomens dürfte es auch auf andern Wegen nicht möglich sein, die numerische Relation zwischen Drehung und atomistischem Bau der Moleküle jemals aufzudecken.“

Während die angeführten Regeln sich ausschließlich auf Parallelitäten zwischen den Drehungen homologer Reihen beziehen, fehlen theoretische Aussagen über die absolute Größe des Effekts gänzlich. Eine Abschätzung der Größenordnung ohne Eingehen auf die unbekannte Einzelstruktur spezieller organischer Flüssigkeiten ist aber möglich, wenn nur bestimmte Grundvorstellungen über den Mechanismus der optischen Aktivität vorliegen. Nun hat Herr Born die allgemeine Elektronentheorie der optisch aktiven Kristalle, isotropen und anisotropen Flüssigkeiten¹⁾ gegeben: Die quasielastisch an Gewichtslagen gebundenen Dispersionselektronen sollen außer von den Feldstärken des durchgehenden Lichtes noch von gegenseitigen Koppelungskräften angegriffen werden, über deren Natur zunächst nichts ausgesagt wird. Die Anwendung der Bornschen Formeln auf einfache mechanische Modelle führt aber zu äußerst verwickelten Abhängigkeiten der Drehungsgröße von der Art der gegenseitigen Koppelung und der Konfiguration der Elektronen im Molekül, die auch durch Näherungen nicht wesentlich vereinfacht werden können. Das naheliegendste Modell einer asymmetrischen Kohlenstoffverbindung, ein Tetraeder, welches geometrisch regulär ist und in dessen 4 Ecken Dispersionselektronen mit 4 verschiedenen quasielastisch isotropen Bindungen sitzen, gibt z. B. die Drehung Null wenn man nicht mindestens Größen 7. Ordnung in dem Verhältnis „wechselseitige Koppelungskraft zu Einzelbindungskraft“ berücksichtigt²⁾. Schwache Koppelungen führen dagegen bereits in 1. Näherung zu einer merklichen optischen Aktivität, wenn durch Einführung von anisotropen Bindungen oder nichtzentralen Koppelungskräften dem Modell ein besonders starker Schraubungssinn erteilt wird. Jedoch fehlt dann wieder die Möglichkeit, die Größe dieser Asymmetrieelemente aus bekannten Molekulareigenschaften

1) Landolt, Das optische Drehungsvermögen. Braunschweig 1898.

2) Literatur dazu Landolt § 86.

1) M. Born, Dynamik der Kristallgitter. Leipzig 1915. Diese Zeitschr. 16, 251, 1915; Ann. d. Phys. 55, 177, 1918.

2) A. Landé, Ann. d. Phys. 56, 225, § 6, 1918.

ten abzuleiten oder sie mit andern optischen Beobachtungen in Zusammenhang zu bringen, um ein Maß für die zu erwartenden Drehungen zu erhalten. Nur in der neueren Theorie der Atomstruktur von Bohr, Debye, Sommerfeld u. a. treten anisotrope Bindungen ohne Einführung neuer Konstanten auf, welche im folgenden zu einer Abschätzung der Größenordnung des Dreheffekts verwendet werden sollen.

Ein kreisendes Bohrsches Elektron verhält sich dispersionstheoretisch wie ein anisotrop gebundenes Elektron, von dessen drei Haupteigenfrequenzen zwei zusammenfallen. Bereits bei der sehr schwachen elektrostatischen gegenseitigen Beeinflussung ihrer Schwingungen stellen nun zwei solche anisotrop gebundene Elektronen einen optisch aktiven Mechanismus dar; der Drehungswinkel wird proportional der Breite der beiden aus den Haupteigenfrequenzen gebildeten Duplets und hängt noch von der etwas schief anzunehmenden gegenseitigen Orientierung der anisotropen Hauptrichtungen ab. Die gesamte Aktivität des Moleküls setzt sich dann additiv aus den Beiträgen zusammen, welche die Kombinationen von je 2 seiner Elektronenringe liefern. Zwar können diese Beiträge der einzelnen Paare bald positives, bald negatives Vorzeichen haben. Trotzdem genügen aber die aus der Dispersion bekannten Anisotropien, um wenigstens zu einer Abschätzung für die Größenordnung der optischen Aktivität zu gelangen. Es zeigt sich gute Übereinstimmung mit der Erfahrung. Zu diesem Resultat führt außer der Vorstellung von Elektronenringen wieder die allgemeine Theorie, welche Born zur Ableitung der optischen Aktivität aufstellte, speziell 1. die Kleinheit aber Endlichkeit der Moleküldimensionen im Vergleich zur Wellenlänge des auffallenden Lichtes, 2. die Wechselwirkung zwischen den Partikeln ein und desselben Moleküls; letztere werden wir auf elektrostatische Kräfte der Elektronen zurückführen können. Unter dem Einfluß der Lichtfeldstärken erhält dann jeder Elektronenring ein periodisches Moment, dessen Größe noch von seiner Orientierung gegen die im Raum feste Lichtschwingungsrichtung abhängt. Durch Mittelung über alle möglichen Orientierungen des Moleküls, bei denen aber die relative Lage der verschiedenen Ringe gegeneinander erhalten bleibt, wird eine lineare Beziehung zwischen Feldstärke und Moment der Volumeneinheit abgeleitet, deren Koeffizienten für die Brechung und Dispersion und für die Drehung der Polarisationssebene bestimmend sind.

§ 2. Jede Atomgruppe in den Ecken des Moleküls werde dispersionstheoretisch dargestellt durch einen Elektronenring, welcher mit quan-

tenhaft festgelegter Umlauffrequenz um eine im Molekül feste Achse rotiert. Ein Ring (*) habe als Rotationsachse den Einheitsvektor $\mathfrak{z}$ und die Umlauffrequenz ω , er bestehe aus μ Elektronen der Masse m und Ladung e . Die Verbindung r vom Mittelpunkt des Ringes (*) zu einem Ringe (') falle in Richtung des Einheitsvektors $\mathfrak{R}$. Unter dem Einfluß einer mit der Frequenz s periodischen elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$, am Orte des Ringes (*) zu nehmen, wird der Ring (*) verschoben und verzerrt; im Mittel über alle zufälligen Anfangsphasen der Kreisbahn stellt der Ring (*) ein periodisches Moment $\mathfrak{p}$ dar mit den Komponenten in einem $x y z$ -System (z -Achse $\parallel \mathfrak{z}$)

$$\begin{aligned} p_x &= -\frac{e^2 \mu}{m \omega^2} \left\{ \mathfrak{R}_x \frac{f_+ + f_-}{2} + i \mathfrak{R}_y \frac{f_+ - f_-}{2} \right\} \\ p_y &= -\frac{e^2 \mu}{m \omega^2} \left\{ -i \mathfrak{R}_x \frac{f_+ - f_-}{2} + \mathfrak{R}_y \frac{f_+ + f_-}{2} \right\} \\ p_z &= -\frac{e^2 \mu}{m \omega^2} \cdot \mathfrak{R}_z \varphi \end{aligned} \quad (1)$$

worin $f_+ = f\left(+\frac{s}{\omega}\right)$, $f_- = f\left(-\frac{s}{\omega}\right)$ und $\varphi = \varphi\left(\frac{s}{\omega}\right)$

bekannte Funktionen von $\frac{s}{\omega}$ und μ sind, deren explizite Form bei Debye, Sommerfeld u. a.¹⁾ benutzt wird. Uns interessiert im folgenden nur die optische Aktivität für kleine Lichtfrequenzen $s \ll \omega$, für welche die imaginären Glieder in (1) verschwindende Koeffizienten bekommen. Übrig bleibt also mit der Abkürzung

$$\begin{aligned} a &= -\frac{e^2 \mu}{m \omega^2} f(0), \quad b = -\frac{e^2 \mu}{m \omega^2} \varphi(0), \\ p_x &= a \mathfrak{R}_x, \quad p_y = a \mathfrak{R}_y, \quad p_z = b \mathfrak{R}_z. \end{aligned} \quad (2)$$

Setzt man den Vektor $\mathfrak{R}$ aus einem Vektor in der $\mathfrak{z}$ -Richtung $\mathfrak{z} \cdot (\mathfrak{R}, \mathfrak{z})$ und einem darauf senkrechten Vektor $\mathfrak{R} - \mathfrak{z} \cdot (\mathfrak{R}, \mathfrak{z}) = [\mathfrak{z} [\mathfrak{R}, \mathfrak{z}]]$ zusammen und den Vektor $\mathfrak{p}$ aus entsprechenden zwei Vektoren, so wird aus (2) in vektorieller Schreibweise:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} - \mathfrak{z} (\mathfrak{p}, \mathfrak{z}) &= a (\mathfrak{R} - \mathfrak{z} (\mathfrak{R}, \mathfrak{z})), \\ \mathfrak{z} (\mathfrak{p}, \mathfrak{z}) &= b \cdot \mathfrak{z} (\mathfrak{R}, \mathfrak{z}) \end{aligned}$$

oder addiert

$$\mathfrak{p} = a \mathfrak{R} + (b - a) \mathfrak{z} (\mathfrak{R}, \mathfrak{z}). \quad (2')$$

Die Kraft $\mathfrak{R}$ setzt sich hier zusammen aus der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ des einfallenden Lichtes und aus Zusatzkräften $\mathfrak{E}'$, herrührend von den übrigen Ringen (') des Moleküls. Letztere besitzen nämlich ein periodisches Moment

$$\mathfrak{p}' = a' \mathfrak{R}' + (b' - a') \mathfrak{z}' (\mathfrak{R}', \mathfrak{z}'), \quad (3)$$

wirken also auf den Ring (*) mit der Kraft

$$\mathfrak{E}' = \frac{1}{r^3} [\mathfrak{R} [\mathfrak{p}', \mathfrak{R}]] = \frac{1}{r^3} \left\{ \mathfrak{p}' - \mathfrak{R} (\mathfrak{p}', \mathfrak{R}) \right\}. \quad (4)$$

¹⁾ P. Debye, Münchner Akademieberichte 1915, S. 1; A. Sommerfeld, Festschrift Elster und Geitel. Derselbe Ann. d. Phys. 53, 497, § 2, 1917.

Sind diese Zusatzkräfte $\mathfrak{F}_{(i)}$ schwach gegen $\mathfrak{E}$, so wird man bei ihrer Berechnung nach (4) $\mathfrak{p}'$ nicht aus (3), sondern aus

$$\mathfrak{p}' = a' \mathfrak{E}' + (b' - a') \mathfrak{Z}' (\mathfrak{E}' \mathfrak{Z}')$$

entnehmen dürfen, worin $\mathfrak{E}'$ die an der Stelle (') auftretende Feldstärke ohne Zusatz ist. Diese hängt mit der Feldstärke $\mathfrak{E}$ zusammen durch

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} e^{\frac{2i\pi}{\lambda} r(\mathfrak{s} \mathfrak{R})} = \mathfrak{E} \left(1 + \frac{2i\pi}{\lambda} r(\mathfrak{s} \mathfrak{R}) + \dots \right),$$

wenn $\mathfrak{s}$ die Wellennormale und λ die Wellenlänge der Wellen in der Substanz bedeuten. Im Gebiet der optischen Wellen kann man sich auf die beiden hingeschriebenen Glieder der Reihe nach $\frac{r}{\lambda}$ beschränken, und erhält dann aus (4)

$$\mathfrak{F}_{(i)} = \frac{1}{r^3} \left(1 + \frac{2i\pi}{\lambda} r(\mathfrak{s} \mathfrak{R}) \right) \times \left\{ a' \mathfrak{E} + (b' - a') \mathfrak{Z}' (\mathfrak{E} \mathfrak{Z}') - \mathfrak{R} (\mathfrak{R}, a' \mathfrak{E} + (b' - a') \mathfrak{Z}' (\mathfrak{E} \mathfrak{Z}')) \right\} \quad (4')$$

als die von (') herrührende, auf (*) wirkende Zusatzkraft. Im ganzen ist also aus (4')

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E} + \sum \mathfrak{F}_{(i)} = \mathfrak{E} + \sum \frac{1}{r^3} \left\{ \dots \right\} + \frac{2i\pi}{\lambda} \sum \frac{1}{r^2} (\mathfrak{s} \mathfrak{R}) \left\{ \dots \right\}$$

in (2') einzuführen. Dann zerfällt auch $\mathfrak{p}$ in einen von λ freien und in einen mit $\frac{2i\pi}{\lambda}$ proportionalen Teil. Während der erstere die Brechung und Dispersion gibt, führt der letztere zur optischen Aktivität, die uns hier allein interessiert. Der mit $\frac{2i\pi}{\lambda}$ proportionale Teil von $\mathfrak{p}$ zerfällt, wie $\sum \mathfrak{F}_{(i)}$, weiter in Einzelbeiträge der einzelnen Ringe ('), welche wir $\mathfrak{p}_{(i)}$ nennen wollen. Es wird dann im ganzen

$$\mathfrak{p} = \left\{ \text{von } \lambda \right\} + \sum \mathfrak{p}_{(i)} \quad (5)$$

mit

$$\mathfrak{p}_{(i)} = \frac{2i\pi}{\lambda} \frac{1}{r^2} (\mathfrak{s} \mathfrak{R}) \times \quad (5')$$

$$\begin{aligned} & a \left\{ a' \mathfrak{E} + (b' - a') \mathfrak{Z}' (\mathfrak{E} \mathfrak{Z}') - \mathfrak{R} \cdot (\mathfrak{R}, a' \mathfrak{E} + (b' - a') \mathfrak{Z}' (\mathfrak{E} \mathfrak{Z}')) \right\} \\ & + (b - a) \mathfrak{Z} \left(\mathfrak{Z}, a' \mathfrak{E} + (b' - a') \mathfrak{Z}' (\mathfrak{E} \mathfrak{Z}') - \mathfrak{R} (\mathfrak{R}, a' \mathfrak{E} + (b' - a') \mathfrak{Z}' (\mathfrak{E} \mathfrak{Z}')) \right) \end{aligned}$$

$\mathfrak{p}$ ist damit ausgedrückt als Funktion der an der Stelle (*) herrschenden Feldstärke $\mathfrak{E}$.

§ 3. Ebenso kann man für einen anderen

Ring das Moment $\mathfrak{p}^*$ als lineare Vektorfunktion der an seinem Ort herrschenden Feldstärke $\mathfrak{E}^*$ darstellen. Tut man dies für alle Ringe der N Moleküle pro Volumeinheit, so erhält man als Moment der Volumeinheit aus (5)

$$\mathfrak{P} = \left\{ \text{von } \lambda \right\} + N \sum \mathfrak{p}_{(i)}^*, \quad (6)$$

wenn man noch über alle Orientierungen der N Moleküle gegen die im Raum festen Richtungen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{s}$ mittelt. Statt des zweiten, mit $\frac{2i\pi}{\lambda}$ proportionalen Teils von $\mathfrak{P}$ kann man auch schreiben

$$\frac{N}{2} \sum \mathfrak{p}_{(i)}^* (\mathfrak{p}_{(i)}^* + \mathfrak{p}'_{(i)})$$

und es handelt sich darum, die angeführte Mittelung auf $(\mathfrak{p}_{(i)}^* + \mathfrak{p}'_{(i)})$ anzuwenden. Aus (5') folgt wegen $\mathfrak{R}_* = -\mathfrak{R}$, wenn man noch umordnet, als Beitrag des Ringpaares (*')

$$\begin{aligned} (\mathfrak{p}_{(i)}^* + \mathfrak{p}'_{(i)}) &= i \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{1}{r^2} (\mathfrak{s} \mathfrak{R}) \times \\ & a a' \left\{ \mathfrak{E} - \mathfrak{R} (\mathfrak{R} \mathfrak{E}) - \mathfrak{E} + \mathfrak{R} (\mathfrak{R} \mathfrak{E}) \right\} + \\ & a (b' - a') \left\{ \mathfrak{Z}' (\mathfrak{E} \mathfrak{Z}') - \mathfrak{R} (\mathfrak{R} \mathfrak{Z}') (\mathfrak{E} \mathfrak{Z}') - \right. \\ & \quad \left. - \mathfrak{Z}' (\mathfrak{E} \mathfrak{Z}') + \mathfrak{Z}' (\mathfrak{R} \mathfrak{Z}') (\mathfrak{R} \mathfrak{E}) \right\} + \\ & a' (b - a) \left\{ \mathfrak{Z} (\mathfrak{E} \mathfrak{Z}) - \mathfrak{Z} (\mathfrak{R} \mathfrak{Z}) (\mathfrak{E} \mathfrak{R}) - \mathfrak{Z} (\mathfrak{E} \mathfrak{Z}) + \right. \\ & \quad \left. + \mathfrak{R} (\mathfrak{R} \mathfrak{Z}) (\mathfrak{E} \mathfrak{Z}) \right\} + \\ & (b - a) (b' - a') \left\{ \mathfrak{Z} (\mathfrak{R} \mathfrak{Z}') (\mathfrak{E} \mathfrak{Z}') - \mathfrak{Z} (\mathfrak{R} \mathfrak{Z}') (\mathfrak{R} \mathfrak{Z}') (\mathfrak{E} \mathfrak{Z}') - \right. \\ & \quad \left. - \mathfrak{Z}' (\mathfrak{R} \mathfrak{Z}') (\mathfrak{E} \mathfrak{Z}) + \mathfrak{Z}' (\mathfrak{R} \mathfrak{Z}') (\mathfrak{R} \mathfrak{Z}) (\mathfrak{E} \mathfrak{Z}) \right\}. \end{aligned}$$

Hierin heben sich die Glieder des Faktors von aa' sofort gegenseitig weg, ebenso in den Faktoren von $a(b' - a')$ und $a'(b - a)$ das erste gegen das dritte Glied. Den Rest kann man so schreiben

$$\begin{aligned} (\mathfrak{p}_{(i)}^* + \mathfrak{p}'_{(i)}) &= i \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{1}{r^2} \times \\ & a (b' - a') \left\{ (\mathfrak{s} \mathfrak{R}) (\mathfrak{R} \mathfrak{Z}') [\mathfrak{E} [\mathfrak{Z}' \mathfrak{R}]] \right\} + \\ & + a' (b - a) \left\{ (\mathfrak{s} \mathfrak{R}) (\mathfrak{R} \mathfrak{Z}) [\mathfrak{E} [\mathfrak{R} \mathfrak{Z}]] \right\} \\ & + (b - a) (b' - a') \left\{ (\mathfrak{Z} \mathfrak{Z}') - (\mathfrak{R} \mathfrak{Z}) (\mathfrak{R} \mathfrak{Z}') \right\} \quad (7) \\ & \times (\mathfrak{s} \mathfrak{R}) [\mathfrak{E} [\mathfrak{Z} \mathfrak{Z}']]. \end{aligned}$$

Bei der Mittelung wird $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{E}$ im Raume festgehalten, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}'$ unter Wahrung ihrer rela-

tiven Richtungen im Raume gedreht. Da zu jeder Lage von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{B}'$ eine entgegengesetzte Lage $-\mathfrak{R}$, $-\mathfrak{B}'$ gehört, kehrt in dem Faktor von $a(b'-a')$ bei dieser Umkehrung ($\mathfrak{B} \mathfrak{R}$) sein Vorzeichen um, während ($\mathfrak{R} \mathfrak{B}'$) und ($\mathfrak{B}' \mathfrak{R}$) unverändert bleiben; daher ist im Mittel der Faktor von $a(b'-a')$ gleich Null, ebenso auch der Faktor von $a'(b-a)$. Der bei Drehung des Moleküls im Raum veränderliche Faktor von $(b-a)(b'-a')$ ist ($\mathfrak{B} \mathfrak{R}$) [$\mathfrak{E} \mathfrak{B} \mathfrak{B}'$] mit der x -Komponente

$$(\mathfrak{s}_x \mathfrak{R}_x + \mathfrak{s}_y \mathfrak{R}_y + \mathfrak{s}_z \mathfrak{R}_z) (\mathfrak{E}_y \mathfrak{U}_x - \mathfrak{E}_x \mathfrak{U}_y) \quad (7'')$$

($\mathfrak{U} = [\mathfrak{B} \mathfrak{B}']$ gesetzt).

Führt man eine solche Drehung des Moleküls aus, daß $\mathfrak{R}$ in $-\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{U}$ in $-\mathfrak{U}$ umschlägt, so kehren alle Produkte $\mathfrak{R}_x \mathfrak{U}_x$, $\mathfrak{R}_y \mathfrak{U}_y$, $\mathfrak{R}_z \mathfrak{U}_z$ ihr Vorzeichen um außer $\mathfrak{R}_x \mathfrak{U}_x$, $\mathfrak{R}_y \mathfrak{U}_y$, $\mathfrak{R}_z \mathfrak{U}_z$.

Letztere drei Produkte haben aber den gleichen Mittelwert

$$\overline{\mathfrak{R}_x \mathfrak{U}_x} = \frac{1}{3} (\overline{\mathfrak{R}_x \mathfrak{U}_x} + \overline{\mathfrak{R}_y \mathfrak{U}_y} + \overline{\mathfrak{R}_z \mathfrak{U}_z}) = \frac{1}{3} (\mathfrak{R} \mathfrak{U}).$$

Obige x -Komponente ($7''$) hat also als Mittelwert

$$(-\mathfrak{s}_y \mathfrak{E}_x + \mathfrak{s}_x \mathfrak{E}_y) \frac{1}{3} (\mathfrak{R} \mathfrak{U}) = [\mathfrak{E}, \mathfrak{s}]_x \frac{1}{3} (\mathfrak{R} [\mathfrak{B} \mathfrak{B}'])$$

und der Mittelwert von (7) reduziert sich auf

$$p^*(\gamma) + p^*(\epsilon) = i [\mathfrak{E} \mathfrak{s}] \frac{2 \pi}{3 \lambda} \frac{1}{r^2} (b-a)(b'-a') \quad (8)$$

$$\times \left\{ (\mathfrak{B} \mathfrak{B}') - (\mathfrak{R} \mathfrak{B}) (\mathfrak{R} \mathfrak{B}') \right\} (\mathfrak{R}, [\mathfrak{B} \mathfrak{B}']).$$

Nach (6) wird dann die Polarisation der Volumeneinheit

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{P} = \left\{ \begin{array}{l} \text{von } \lambda \\ \text{freier Teil} \end{array} \right\} + i [\mathfrak{E} \mathfrak{s}] \psi \quad \text{mit} \\ \psi = \Sigma^* \Sigma' \psi_* = \frac{2 \pi N}{3 \lambda} \Sigma^* \Sigma' \frac{1}{r^2} \end{array} \right. \quad (9)$$

$$(b-a)(b'-a') ([\mathfrak{R} \mathfrak{B}] [\mathfrak{R} \mathfrak{B}']) \cdot (\mathfrak{R}, [\mathfrak{B} \mathfrak{B}']).$$

Während der von λ freie Teil, welcher proportional $\mathfrak{E}$ ist, die Brechung und Dispersion gibt, ist ψ der Parameter der optischen Aktivität¹⁾. Der Drehungswinkel θ der Polarisationssebene pro Längeneinheit der Substanz ist gegeben durch

$$\theta = \frac{2 \pi}{\lambda} \left(\frac{n_0^2 + 2}{3} \right)^2 \cdot \psi \quad (10)$$

(n_0 = Brechungsindex für lange Wellen).

ψ setzt sich — eine Folge unsrer Annahme schwacher gegenseitiger Störungen — aus den Beiträgen ψ_* je zweier Elektronenringe (*) und (') additiv zusammen.

Da aber die Beiträge ψ_* je nach der Orientierung der Kreiselachsen (*) und (') im Molekül bald positiv, bald negativ ausfallen, können

sich die ψ_* teils gegenseitig verstärken, teils schwächen, und der gesamte Drehungseffekt wird in komplizierter Weise von den Orientierungen der verschiedenen Kreiselachsen gegeneinander abhängen.

Zwei Achsen z und z' werden sich im allgemeinen nicht in einem Punkt treffen, sondern windschief in einer gewissen Entfernung l aneinander vorbeiziehen; eine einfache geometrische Überlegung zeigt, daß

$$r \cdot (\mathfrak{R} [\mathfrak{B} \mathfrak{B}']) = l \cdot \sin (\mathfrak{B} \mathfrak{B}') \quad (10')$$

ist. Die Projektionen $\mathfrak{B}_N$ und $\mathfrak{B}'_N$ auf die zu $\mathfrak{R}$ normale Ebene N bilden in dieser Ebene einen Winkel $\angle \zeta$, und es ist

$$([\mathfrak{R} \mathfrak{B}] \cdot [\mathfrak{R} \mathfrak{B}']) = \mathfrak{B}_N \cdot \mathfrak{B}'_N \cos \zeta.$$

Mit Benutzung von (2) wird also der dimensionslose Parameter ψ der optischen Aktivität für lange Wellen λ

$$\psi = \Sigma^* \Sigma' \psi_* = \frac{2 \pi N}{3 \lambda} \Sigma \Sigma' \frac{1}{r^2} \frac{\epsilon^2 \mu}{m \omega_k^2} (f_0 - \varphi_0) \cdot \frac{\epsilon^2 \mu'}{m \omega_k'^2} (f'_0 - \varphi'_0) \cdot W_* \quad (11)$$

worin die Winkelfunktion W_* gegeben ist durch

$$W_* = \mathfrak{B}_N \mathfrak{B}'_N \cos \zeta \cdot \frac{l}{r} \sin (\mathfrak{B} \mathfrak{B}'). \quad (12)$$

W_* und ψ_* werden also gleich Null, 1. wenn die beiden Achsen z und z' durch einen Punkt gehen, 2. wenn die beiden Achsenrichtungen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ parallel zeigen, 3. wenn eine der Achsen oder beide parallel zu $\mathfrak{R}$ zeigen, 4. wenn die durch $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{B}$ gelegte Ebene senkrecht auf der durch $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{B}'$ gelegten Ebene steht.

§ 4. Wir wollen nun wenigstens die Größenordnung der Einzelbeiträge $\psi_{kk'}$ abschätzen. Der in (9) nicht ausgeschriebene von λ freie Teil hat die Form $\mathfrak{E} \cdot \Phi = \mathfrak{E} \cdot \Sigma \Phi_k$, worin (bei vernachlässigter gegenseitiger Störung der Elektronenringe gegenüber ihren ungestörten Dispersionsschwingungen) Φ_k gegeben ist¹⁾ durch

$$\Phi_k = -\frac{N}{3} \frac{\epsilon^2 \mu_k}{m \omega_k^2} \left\{ 2 f_0^{(k)} + \varphi_0^{(k)} \right\} \quad (13)$$

Φ hängt mit dem Brechungsindex n für lange Wellen und der „molekularen Refraktion“ $\Xi^{(2)}$ zusammen durch

$$\Phi = (n^2 - 1) \cdot \frac{3}{n^2 + 2}, \quad \Xi = \frac{\Phi}{3} \times \frac{\text{Molekulargewicht}}{\text{Dichte}} = \frac{\Phi M}{3 D} \quad (14)$$

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 53, 498, Gl. (7), 1917.

2) Vgl. Goldhammer, Dispersion und Absorption. Leipzig 1913, § 27.

1) M. Born, diese Zeitschr. 16, 251, Gl. (24), 1915.

Nach einer von F. Martens geprüften Regel ist aber die molekulare Refraktion Ξ die Summe der „Atomrefraktionen“ ξ_k , welche mit Φ_k analog (14) zusammenhängen durch

$$\Phi_k = (n_k^2 - 1) \frac{3}{n_k^2 + 2}, \quad (14')$$

$$\xi_k = \frac{\Phi_k}{3} \times \frac{\text{Atomgewicht}}{\text{Dichte}(k)} = \frac{\Phi_k \cdot A_k}{3 \cdot D_k}.$$

Faßt man unter k im Beispiel einer organischen Verbindung eine ganze Atomgruppe zusammen, welche dispersionstheoretisch durch den Elektronenring (k) repräsentiert sein soll, so wird nach (13) (14')

$$-\varepsilon^2 \mu_k = \frac{3 \Phi_k}{N} \frac{1}{2 f_0 + \varphi_0} = \frac{9 \xi_k D_k}{N A_k} \frac{1}{2 f_0 + \varphi_0}.$$

Dies in (11) eingesetzt, gibt

$$\psi_{kk'} = \frac{2 \pi N}{3 \lambda} \frac{1}{r^2} \frac{81}{N^2} \frac{\xi_k D_k}{A_k} \frac{\xi_{k'} D_{k'}}{A_{k'}} \cdot \frac{f_0 - 1}{\varphi_0} \times \frac{f_0' - 1}{\varphi_0'} \cdot W_{(kk')} \quad (15)$$

Nach Sommerfeld¹⁾ ist nun

$$\frac{f_0}{\varphi_0} = \frac{18,34 - 6 \cdot \ln \mu}{(3,06 \ln \mu + 11,7) 0,98}$$

eine mit der Zahl μ der Ringelektronen nur langsam veränderliche Zahl. Aus ihr folgt z. B. für $\mu = 1$ bzw. $\mu = 4$ der Faktor

$$\frac{f_0}{\varphi_0} = \begin{cases} \frac{1}{7} & \text{für } \mu = 1 \\ -\frac{1}{6,2} & \text{für } \mu = 4 \end{cases}$$

als Maß für die relative Breite der aus den beiden anisotropen Hauptfrequenzen gebildeten Duplets für 1 bzw. 4 Ringelektronen. Wir nehmen für beide Ringe k und k' den Wert rund

$$\pm \frac{1}{7}. \quad \text{Ferner hat man}$$

$$N = \frac{6,2 \cdot 10^{23}}{M}, \quad r_{kk'} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ cm},$$

$$\lambda_{Na} = 5,89 \cdot 10^{-5} \text{ cm}.$$

Für die Dichten

$$D_k = D \times \frac{\text{Atomgruppen-Gewicht}}{\text{Molekülgewicht}}$$

nehmen wir rund $\frac{1}{4}$, weil die Dichten D der aktiven Substanzen selbst in der Nähe des Wertes 1 liegen. Für die Quotienten $\xi_k : A_k$ besteht

1) A. Sommerfeld, l. c. § 4, S. 512.

der Durchschnittswert $1/6$; bei einer großen Zahl von Substanzen mit wenigen Ausnahmen weicht er nur wenig von $1/6$ ab¹⁾.

Daher wird aus (15) (10)

$$\psi = \sum \sum \psi_{kk'} = + \frac{2 \pi}{3 \cdot 5,89 \cdot 10^{-5}} \cdot \frac{1}{4 \cdot 10^{-16}} \cdot \frac{81 M}{6,2 \cdot 10^{23}} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{49} \cdot \sum \sum W_{kk'}$$

$$\psi = 0,04 \cdot 10^{-5} M \sum \sum W_{kk'}$$

$$\Theta = \sum \sum \Theta_{kk'} = \frac{M}{50} \sum \sum W_{kk'} \quad (16)$$

mit der noch unbekannten Winkelfunktion $W_{kk'}$. Nun zeigt die Erfahrung, daß erst vier verschiedene zu einem asymmetrischen Tetraeder zusammentretende Atomgruppen oder noch kompliziertere Moleküle optisches Drehungsvermögen besitzen. Nach der Vorstellung der kreisenden Elektronenringe müßten aber bereits Moleküle aus 2 oder 3 solchen Gruppen optisch aktive Substanzen liefern, ebenso auch 4 Atomgruppen, welche nicht alle verschieden sind. Daß solche Verbindungen aber tatsächlich inaktiv sind, kann nach unsrer Vorstellung nur daher kommen, daß entweder sämtliche Summanden $\psi_{kk'}$ einzeln verschwinden oder sich paarweise aufheben. Das erstere wird der Fall sein bei 2 oder 3 Atomgruppen im Molekül; die 2 bzw. 3 Kreiselachsen werden sich aus Symmetriegründen in einer einzigen Ebene einstellen, so daß sich je zwei Achsen in einem Punkt schneiden und die Größe $l_{kk'}$ aus (10') verschwindet, daher $W_{kk'} = 0$. (12) Bei 4 Atomgruppen, I II III IV, von denen etwa I und II identisch sein mögen, wird die durch III, IV und die Mitte von I II gelegte Ebene Symmetrieebene des Moleküls sein, also $l_{I II} = 0$,

$l_{III IV} = 0$, dazu $\sin \begin{pmatrix} I & III \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = - \sin \begin{pmatrix} II & III \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ und $\sin \begin{pmatrix} I & IV \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = - \sin \begin{pmatrix} II & IV \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Wird jetzt die Gruppe II durch eine von allen andern verschiedene Gruppe ersetzt, so werden die Kanten $r_{kk'}$ des dadurch entstehenden asymmetrischen Tetraeders, verglichen mit denen im Symmetriefall, in ihrer Länge verändert und in ihrer gegenseitigen Orientierung um gewisse Winkelbeträge verdreht sein. Um Winkelbeträge derselben Größenordnung müssen sich dann auch die Kreiselachsen verdrehen, um unter den neuen Verhältnissen stabile Lagen einzunehmen. Nun ist auch die Windschiefe l/r (10') gleich einem Verdrehungswinkel, nämlich gleich dem im Symmetriefall verschwindenden Winkel (genauer dessen Sinus) zwischen der Richtung $[3 3']$ und

1) Vgl. die Tabellen bei Goldhammer, l. c. § 27-

der auf $\mathfrak{R}$ normalen Ebene N . Die andern Faktoren von $W_{kk'}$ (12), nämlich $\mathfrak{Z}'_N \mathfrak{Z}_N \cos(\zeta_{kk'}) \sin(\mathfrak{Z} \mathfrak{Z}')$ sind von der Größenordnung 1 auch im Asymmetriefall. Daher kann man $W_{kk'}$ vergleichsweise im Maß eines Winkels $W_{kk'}$ angeben, der von derselben Größenordnung ist, wie die Verdrehungswinkel der Kanten $\tau_{kk'}$ bei der Umwandlung eines symmetrischen in ein asymmetrisches Molekül; es wird sich um Winkel von etwa 5 bis 15 Grad handeln. Daher hat man in (16) für $W_{kk'}$ Winkel von etwa 5–15 Grad einzusetzen, deren genaue Werte von Fall zu Fall anders ausfallen. θ ist dann im selben Winkelmaß wie $W_{kk'}$ gegeben. Die so abgeschätzte Größenordnung für die Drehung der Polarisationssebene pro cm stimmt gut mit den in weiten Grenzen schwankenden tatsächlichen Werten bei optisch aktiven organischen Verbindungen überein. Man findet, bei Molekulargewichten M der Größenordnung 100, Drehungswinkel von durchschnittlich 50° , zuweilen kleinere von 5° bis zu größeren von 200° , die durch die verschiedenartigsten Umstände bei der gegenseitigen Orientierung der Atomgruppen und der dadurch bedingten Verstärkung oder Schwächung der einzelnen Summanden des Drehungsparameters $\psi = \sum \sum \psi_{kk'}$ zustande kommen.

(Eingegangen 26. Juli 1918.)

Über das Bohrsche Atommodell.

Von Arthur Szarvassi.

Das wahre Wesen des Bohrschen Atommodells ist uns bis heute unbekannt. Wir verstehen nicht, daß das Elektron in seinen „stabilen“ Bahnen keine Strahlung aussenden soll; man sieht nicht ein, wieso diese Bahnen wirklich stabil sind; es ist unverständlich, daß der Übergang von einer „stabilen“ Bahn zu einer andern mit einer homogenen Strahlung verbunden ist; und es ist vollends unklar, warum die Energieänderung bei diesem Übergange dem Produkte aus dem Planckschen Wirkungsquantum h und der Schwingungszahl ν der emittierten Strahlung gleich sein soll. Sicher sind nur die Resultate, und da wohl niemand die Berechnung der Rydbergschen Konstante aus molekularen Daten und die Darstellung von ν durch die Balmersche Formel für einen bloßen Zufall halten wird, stehen wir vor der Aufgabe, die schöne Entdeckung Bohrs richtig zu deuten. Man ahnt aber, daß die bisherige Darstellung, die soviel Unverständliches enthält, nur ein Bild, der wirkliche Sachverhalt aber rein statistischer

Natur ist. Diese Ahnung täuscht nicht: was eine rätselhafte Eigenschaft eines Bohrschen Atoms schien, ist in Wahrheit eine statistische, durch das Zusammenwirken vieler Atome bewirkte Erscheinung. Ich glaube, im folgenden die richtige Darstellung des Sachverhaltes geben zu können.

I.

Wir betrachten eine große Zahl Bohrscher Atome von der bekannten Konstitution: ein Elektron mit der Ladung $-e$ umlaufend um einen Kern mit der Ladung $+e$. Ist die Masse des Kernes, wie wir annehmen wollen, groß gegen die Masse m des Elektrons, so beschreibt das letztere eine Keplersche Ellipse um den Kern. Die Energie eines solchen Systems ist, ausgedrückt in Polarkoordinaten r, φ :

$$W = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{e^2}{r} + V_0,$$

indem bei der potentiellen Energie noch ein konstanter Summand V_0 willkürlich wählbar ist. Soll nun die Verteilung der Systeme auf die möglichen Werte der Zustandsveränderlichen statistisch untersucht werden, so sind nach den Gesetzen der statistischen Mechanik als Phasenvariable zu wählen $r, \varphi, p_r = m\dot{r}$ und $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$. Die Verteilung in diesem vierdimensionalen Phasenraum hat Sommerfeld¹⁾ ersetzt durch die Verteilungen in den beiden zweidimensionalen Räumen: dem $r \cdot p_r$ -Raum und dem $\varphi \cdot p_\varphi$ -Raum. Man erhält für die Energie der Systeme, welche in der n_1 ten Zelle des $r \cdot p_r$ -Raumes und in der n_2 ten Zelle des $\varphi \cdot p_\varphi$ -Raumes liegen, den Wert

$$W_{n_1, n_2} = - \frac{Nh}{(n_1 + n_2)^2} + V_0,$$

indem man

$$\frac{2\pi^2 me^4}{h^3} = N \quad (\text{Rydbergsche Konstante})$$

setzt und mit h wie gewöhnlich die Plancksche Konstante bezeichnet. Bohr und Sommerfeld haben $V_0 = 0$ gesetzt. Diese Wahl ist aber aus einem gewichtigen Grunde nicht angängig: es stellt nämlich die Summe aller W_{n_1, n_2} , genommen über alle Atome, die beobachtbare innere Energie des Körpers vor, aus welcher die Strahlung der Atome her stammt, also z. B. die Energie des Wasserstoffs in einer Vakuumröhre, welche sich in die Strahlungsenergie der Balmerschen Serie umsetzt. Diese Energie ist aber wesentlich positiv, und es ist daher unmöglich, daß sie durch Summierung von lauter negativen Gliedern gebildet wird. Deshalb muß V_0 von 0

1) A. Sommerfeld, Zur Theorie der Balmerschen Serie. Sitzungsber. d. bayr. Akad. 1915, S. 425.

verschieden, und zwar positiv sein. Durch die Wahl dieser Größe hat man es in der Hand, die Energie einer Zelle willkürlich zu bestimmen, was auch sachlich gerechtfertigt ist. Setzt man z. B. $W_{1,1} = 0$, so ist

$$V_0 = \frac{Nh}{4}$$

und allgemein

$$W_{n_1, n_2} = Nh \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(n_1 + n_2)^2} \right).$$

Jetzt sind also die Energien aller Atome positiv, die Energie wächst mit wachsender Ordnungszahl und nähert sich für sehr große Ordnungszahlen dem Werte V_0 . Führen wir noch die Abkürzung

$$n_1 + n_2 = n$$

ein, so erhalten wir

$$W_n = Nh \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right). \quad n = 1, 2, 3 \dots (1)$$

2.

Wenn eine gewisse Menge Wasserstoff die ihm eigentümliche Strahlung frei aussendet, so bedeutet dies einen beständigen Verlust an Energie. Soll also der Zustand stationär sein, so muß dieser Verlust durch Energiezufuhr von irgendeiner Quelle her fortwährend ersetzt werden. Die Energie des Wasserstoffs bleibt dann erhalten, und dieser spielt nur die Rolle eines Überträgers der Energie von der Energiequelle in Form von Strahlung an die Außenwelt. Beispielsweise kann man sich den Vorgang so denken, daß die Elektronen der Bohrschen Atome zwar durch Ausstrahlung an Bewegungsenergie einbüßen, daß aber dafür durch ein äußeres elektrisches Feld neue Bewegungsenergie im selben Betrage geschaffen wird. Man kann sich dann ein idealisiertes und vereinfachtes Bild der Erscheinung in der Weise konstruieren, daß man die beiden Vorgänge der Ausstrahlung und der Energiezufuhr, welche einander — statistisch, nicht am einzelnen Atom — aufheben, ganz wegläßt, und die Atome als energetisch abgeschlossene Systeme behandelt. Dies ist nun der Standpunkt bei der Bohrschen Behandlungsweise des Problems, und unter dieser Voraussetzung ist die Gleichung (1) abgeleitet. Daraus folgt, daß man aus den Eigenschaften des Atoms nicht unmittelbar auf die Eigenschaften der ausgesandten Strahlung schließen kann, sondern dies auf einem Umweg versuchen muß.

Die Bewegung des Elektrons in einem Bohrschen Atom ist periodisch, und die Periode τ der Bewegung findet man aus der Gleichung

$$\dot{\varphi} = \frac{me^4}{p^3} (1 + \varepsilon \cos \varphi)^2,$$

d. h.

$$\tau = \frac{p^3}{me^4} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2};$$

dabei ist die bei der Bewegung konstante Größe p_φ mit p und die Exzentrizität mit ε bezeichnet worden. Das Integral der rechten Seite läßt sich durch Einführung der „exzentrischen Anomalie“ u mit Hilfe der Gleichung

$$\cos \varphi = \frac{\cos u - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos u}$$

berechnen:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} &= (1 - \varepsilon^2)^{-3/2} \int_0^{2\pi} (1 - \varepsilon \cos u) du \\ &= 2\pi (1 - \varepsilon^2)^{-3/2}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\tau = \frac{2\pi p^3}{me^4 (1 - \varepsilon^2)^{3/2}}.$$

Da aber die Energie den Wert

$$\begin{aligned} W &= -\frac{me^4}{2p^2} (1 - \varepsilon^2) + V_0 = \\ &= -\left(\frac{\pi^2 me^4}{2} \right)^{1/2} \tau^{-1/2} + V_0 = \\ &= \frac{Nh}{4} \left(1 - \left[\frac{N\tau}{4} \right]^{-1/2} \right) \end{aligned}$$

hat, so entspricht einem konstanten Wert der Energie auch ein konstanter Wert der Periode. Insbesondere entspricht jedem Atom, dessen Phasenpunkt in einer Zelle mit der Ordnungszahl n gelegen ist, eine und dieselbe Periode τ_n . Wie immer nun auch die von einem Bohrschen Atom emittierte Strahlung beschaffen sein mag, wir werden annehmen dürfen, daß sie periodisch ist, soweit es die Bewegung des Elektrons im Atom ist, und daß ihre Periode durch diejenige der Elektronenbewegung irgendwie bestimmt wird. Also entspricht allen Atomen, welche einer Zelle mit derselben Ordnungszahl n zugehören, auch dieselbe Schwingungsperiode der emittierten Strahlung. Das von der Gesamtheit der Bohrschen Atome emittierte Spektrum wird also aus Linien bestehen, und jede Linie gehört zu einer Zelle mit einer anderen Ordnungszahl.

3.

Um die Energie W_n als Funktion der Schwingungszahl der emittierten Strahlung zu bestimmen, denken wir uns die Atomgesamtheit in einen Hohlraum mit vollständig reflektierender Wandung eingeschlossen. Hierbei setzen sich die Atome ins thermodynamische Gleichgewicht mit der Strahlung, bis sich der stationäre Zu-

stand des Maximums der Entropie eingestellt hat. Wie immer dies nun auch geschehen mag, es ist sicher, daß sich ein solcher Strahlungszustand ausbilden muß, wie er durch das Plancksche Strahlungsgesetz gefordert wird. Folglich müssen sich dann die Atome verhalten wie ein Komplex Hertzscher Resonatoren, deren statistisches Gleichgewicht bekanntlich zur Aufstellung jenes Gesetzes führt. Es wäre aber nicht sachgemäß, diese Forderung an die ganze Menge der Atome zu stellen, weil sich ja unter diesen alle möglichen Schwingungszahlen vorfinden, die Gesamtheit Hertzscher Resonatoren aber nur eine bestimmte Schwingungszahl ν aufweist. Vielmehr kann mit der letzteren Gesamtheit nur jene Teilmenge von Atomen verglichen werden, deren Phasenpunkte alle in einer bestimmten Zelle mit der Ordnungszahl n sich befinden, und welche daher alle dieselbe Schwingungszahl besitzen.

Rufen wir uns für einen Augenblick die Voraussetzungen ins Gedächtnis zurück, welche nötig sind, um das Plancksche Strahlungsgesetz oder vielmehr — da es hier nicht auf die Eigenschaften des Strahlungsfeldes, sondern auf jene der Resonatoren Gesamtheit ankommt — das Gesetz für die mittlere Energie $\bar{E}$ der Resonatoren als Funktion der Schwingungszahl ν und der Temperatur T

$$\bar{E} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

zu erhalten. Man gewinnt diese Gleichung, indem man die den Resonatoren entsprechenden Phasenpunkte im zweidimensionalen Phasenraume, dessen Koordinaten die beiden Zustandsvariablen eines Resonators sind, in folgender Weise verteilt:

1. Die Zellen des Phasenraumes werden so angeordnet, daß der λ ten Zelle die durchschnittliche Energie

$$E_\lambda = \lambda h\nu \quad (2)$$

zugehört.

2. Man sucht die wahrscheinlichste Verteilung der Phasenpunkte im Phasenraume unter der Voraussetzung konstanter Gesamtenergie aller Resonatoren und findet für die Verteilungszahlen w_λ (w_λ ist der Bruchteil aller Phasenpunkte, der in die λ te Zelle fällt)

$$w_\lambda = a e^{-\mu E_\lambda}$$

mit den Nebenbedingungen für die Konstanten a und μ

$$\sum w_\lambda E_\lambda = E$$

$$\sum w_\lambda = 1.$$

Die Summen sind über alle Zellen des Phasenraumes zu erstrecken.

3. Man fügt das Boltzmannsche Entropieprinzip und damit die Gleichung

$$\mu = \frac{1}{kT}$$

hinzu.

Die für unsere Zwecke fundamentale Frage ist nun, in welcher Beziehung die Energie eines Bohrschen Atoms zu der eines Hertzschen Resonators stehen muß, damit sich die Atome für den Fall des Strahlungsgleichgewichts durch die Resonatoren ersetzen lassen. Es haben aber die in Betracht kommenden Atome, da ihre Phasenpunkte in einer und derselben Zelle liegen, alle dieselbe Energie W_n . Hingegen müssen die Resonatoren, damit das Plancksche Gesetz resultiere, eine bestimmte Energieverteilung aufweisen, welche durch das Gesetz 2 reguliert wird; nach diesem ist die Energie eines Resonators ein Vielfaches von $h\nu$ mit einer ganzen Zahl λ , welche für jede Zelle des Resonatoren-Phasenraumes eine andere ist. Diese beiden Tatsachen lassen sich nur in der Weise miteinander vereinigen, daß die Energie eines Atoms den kleinsten Wert aufweist, der sich bei einem der Resonatoren vorfindet, d. i. den Wert $h\nu$, so daß man, um die nötige Energieverteilung im Phasenraume der Resonatoren herzustellen, je λ Atome durch einen Resonator mit der Energie E_λ ersetzt¹⁾. So gelangen wir zu dem Schluß, daß

$$W_n = h\nu,$$

und erhalten nach Gleichung (1) die Balmer'sche Formel

$$\nu = N \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Es ist klar, daß man an Stelle der Balmer'schen Serie auch jede andere erhalten kann,

1) Wählt man an Stelle des im Text angenommenen Gesetzes für die mittlere Energie eines Hertzschen Resonators das Gesetz

$$E = h\nu \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \right),$$

nimmt also eine „Nullpunktsenergie“ an, so muß man anstatt Gl. (2) setzen

$$E_\lambda = \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) h\nu.$$

Aus dieser läßt sich aber der obige Schluß nicht mehr ziehen, weil $\lambda + \frac{1}{2}$ keine ganze Zahl ist. Dies spricht gegen die Annahme einer „Nullpunktsenergie“ von der Größe $\frac{1}{2} h\nu$; in der Tat konnte ich in einer jetzt in den Denkschriften der Wiener Akademie erscheinenden Arbeit „Über die Grundlagen der statistischen Mechanik“ zeigen, daß man mit Hilfe der im Text formulierten Voraussetzungen das Plancksche Strahlungsgesetz einwandfrei erhalten kann.

wenn man die entsprechende Verfügung über die den Nullpunkt der Atomenergie bestimmende Konstante V_0 trifft. So z. B. erhält man aus $W_{01} = 0$ — wenn man also die Energie der Zelle mit den niedrigsten Ordnungszahlen null setzt ($W_{10} = 0$ ist ausgeschlossen) — d. h. aus $V_0 = N\hbar$ die Hauptserie im Ultravioletten. Da nun einem und demselben Atom nicht gleichzeitig verschiedene Werte der Energie zukommen können, so folgt, daß die von derselben Wasserstoffmenge gleichzeitig emittierten Serien von verschiedenen Atomgruppen ausgehen; für jede von diesen gilt entsprechend den verschiedenen Werten von V_0 eine andere Energieverteilung im Phasenraum. Natürlich wird aber ein Atom nicht dauernd einer Gruppe angehören, sondern zu verschiedenen Zeiten an der Emission verschiedener Serien beteiligt sein. Diese Auffassung ist eine Folge des Umstandes, daß die Spektrallinie nicht einem einzelnen Atom zugehört, sondern das statistische Ergebnis des Zusammenwirkens einer großen Zahl von Atomen ist; und sie hängt aufs innigste zusammen mit einer Formulierung der Quantentheorie, welche ich in der oben zitierten Arbeit ausgeführt habe.

Brünn, Physikalisches Institut der k. k. Deutschen Technischen Hochschule.

(Eingegangen 28. Juli 1918.)

Vorlesungsverzeichnis für das Wintersemester 1918/19¹⁾.

Technische Hochschule Aachen. **Starke:** Experimentalphysik I, 4; Übungen im physikalischen Laboratorium a) Praktikum, 6, b) Anleitung zu selbständigen physikalischen Untersuchungen, tägl., c) Physikalisches Handfertigkeitspraktikum, 2. — **Seitz:** Mechanische Wärmetheorie, 2; Theoretische Physik, 2; Experimentalphysik enzyklopädischer Kurs, 2. — **Steubing:** Photographie I und II, 1, Übungen, 3; Drahtlose Telegraphie, 1. — **Hopf:** Relativitäts- und Gravitationstheorie, 1; Mechanik des Schiffes, 1. — **Polis:** Allgemeine Meteorologie, 2; Ausgewählte Kapitel der Meteorologie, 1. —

Universität Basel. **Hagenbach:** Experimentalphysik II: Optik, Wärme und Elektrizität, 6; Physikalisches Praktikum für Vorgerücktere, ganztägig, für Anfänger (mit Veillon und Zickendraht), 8; Physikalisches Kolloquium, 14 tägl., 2 g. — **Bernoulli:** Optische Methoden des Chemikers, 1, Übungen, 2; Quantentheorie und Elektronentheorie der Materie, 1; Physikalisch-chemisches Praktikum für Anfänger, 4; Physikalisch-chemisches Vollpraktikum, tägl.; Chemisches Kolloquium (mit Rupe und Fichter), 1 g. — **Matthies:** Einführung in die theoretische Physik, 5, Übungen, 1 g; Optik: Elektromagnetische Lichttheorie, 4, Übungen, 1 g; Mathematisch-physikalisches Seminar: Moderne Gravitationstheorie, 2 g. — **Veillon:** Interferenz des unpolarisierten Lichtes, 2. — **Zickendraht:** Angewandte Elektrizitätslehre, 2; Aerodynamik und Luftfahrt, 2. —

¹⁾ Infolge der kriegsgesetzlichen Bestimmungen über Papierersparnis auf die Physiker beschränkt.

Universität Berlin. **Rubens:** Experimentalphysik II: Elektrizitätslehre und Optik, 5; Mathematische Ergänzung, 1 g; Physikalisches Kolloquium, 1½ g; Arbeiten im Physikalisches Laboratorium für Geübtere (mit Wehnelt), tägl. — **Planck:** Allgemeine Mechanik, 4; Mathematisch-physikalische Übungen, 1 g. — **Wehnelt:** Praktische Übungen für Anfänger I und II (mit Blasius), 7; Physikalisches Praktikum für Pharmazeuten, 3; Praktikum zur Erlangung von Handfertigkeit für das physikalische Arbeiten, 3; Mathematische Ergänzungen zum physikalischen Praktikum, 1 g. — **Einstein:** Relativitätstheorie, 1½. — **Hergesell:** Temperaturverteilung in der Atmosphäre, 1. — **Schmidt:** Oszillierende Funktionen mit geophysikalischen Anwendungen, 2; Luftelektrizität, 1 g. — **Warburg:** Wechselströme und elektromagnetische Wellen, 2. — **Blasius:** Praktische Übungen für Anfänger, (mit Wehnelt) I: Mechanik, Schall, Wärme und Licht, 7, Übungen, 1 g. — **Born:** Atomistik, 1 g; Dynamik der Kristallgitter, 3. — **Neesen:** Elektrische Schwingungen, drahtlose Telegraphie, 2. — **Fock:** Einleitung in die Physik und Chemie, 1; Elemente der Kristallographie, 1. — **Hahn:** Radioaktivität, 1. — **Henning:** Probleme der Wärmelehre, 1. — **Hertz:** Die wichtigsten Grundbegriffe und Gesetze der Elektrizitätslehre, 1. — **Krigar-Menzel:** Theorie der Wärme, 4. — **Lea:** Praktische Witterungskunde, 2. — **Reiche:** Potentialtheorie mit Anwendungen in verschiedenen Gebieten der Physik, 2½. —

Technische Hochschule Berlin. **Kurlbaum:** Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Elektrizität, 4, für Architekten, 2; Physikalisches Praktikum, 16. — **Grunmach:** Magnetische und elektrische Maßeinheiten und Meßmethoden, 2; Physikalisches Maßbestimmungen und Meßinstrumente (Physikalische Übungen), 10. — **Kalischer:** Die physikalischen Grundlagen der Elektrotechnik II, 2; Grundzüge der Potentialtheorie und ihre Anwendungen in der Elektrizitätslehre, 2; Elektrische Schwingungen und drahtlose Telegraphie, 1. — **Korn:** Ausgewählte Kapitel der Potentialtheorie, 2. — **Krigar-Menzel:** Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 4; Theorie der Wärme: Thermodynamik, 2. — **Berndt:** Radioaktivität, 1. — **Felgentraeger:** Maß- und Gewichtswesen I, 2; Die Konstruktion der Spiegel- und Linseninstrumente, 2. — **Gehlhoff:** Physikalisches Grundlagen der Beleuchtungstechnik, 1. — **Kaerner:** Wetterkunde für Techniker mit Beispielen aus der Praxis, 1. — **Kock:** Hochspannungserscheinungen und Messungen, 2; Drahtlose Telegraphie und Hochfrequenztechnik, 3. — **Möller:** Schwingungsprobleme, 2. — **Petzoldt:** Raum, Zeit, Bewegung, Äther, 1 g. — **Pirani:** Anwendungen der graphischen Darstellung und des graphischen Rechnens auf physikalische Fragen, 1. — **Günther:** Anwendung der Photographie zum Messen in der Technik: Photogrammetrie, mit Lichtbildern und Demonstrationen, 2. —

Universität Bern. **Forster:** Experimentalphysik II: Magnetismus, Elektrizität, Wärme, 6; Theoretische Optik, 1 g; Repetitorium der Physik, 2; Physikalisches Praktikum, 6¾; Wissenschaftliche Photographie: Mikrophotographie, Spektrographie, Röntgenographie, astronomische und meteorologische Photographie, 2; Arbeiten im physikalischen Institut für Vorgerückte, nach Verabredung. — **Gruner:** Elektromagnetische Lichttheorie, 3; Molekulare Wärmetheorie, 2; Einleitung in die theoretische Physik, 1; Seminar für theoretische Physik, nach Verabredung. — **Blattner:** Elektrizitätswerke und elektrische Bahnen, 1; Theorie der Wechselströme, 1. — **Luterbacher:** Überführung von der Experimentalphysik in die mathematische Physik, 2. — **Koestler:** Elektromagnetische Schwingungen, 1—2; Wissenschaftliche Grundlagen der Elektrotechnik, 2; Hochspannungs-Elektrotechnik II, 1—2; Elastizität und Festigkeit, 1—2. —

Universität Bonn. **Kayser:** Experimentalphysik II: Magnetismus, Elektrizität, Optik, 5; Laboratorium für Anfänger, 8; für Vorgeschr. tägl. — **Eversheim:**

Angewandte Elektrizitätslehre, 2; Physikalisches Praktikum für Mediziner, 2; Grundzüge der Elektrotechnik, 1 g. — **Pfäuger**: Theorie der Elektrizität, 4; Übungen, 1 g. — **Bucherer**: Neuere Elektrizitätslehre, 1. —

Technische Hochschule Braunschweig. Dieselhorst: Experimentalphysik: Elektrizität und Magnetismus, 4; Theorie des Elektromagnetismus, 3, Übungen, 1; Physikalisches Praktikum I: Einfache experimentelle Aufgaben aus allen Teilen der Physik, II: Anleitung zu selbständigen Arbeiten im Laboratorium; Physikalisches Kolloquium, 14-tägig, 2 g. — **Weber**: Potentialtheorie mit Anwendungen auf die Elektrostatik, 2. — **Bergwitz**: Atmosphärische Elektrizität, 1; Radioaktivität, 1. — **Witte**: Theorie des Elektromagnetismus, 4. — **Micheler**: Einführung in die Photographie, 1; Die Photographie in natürlichen Farben, 1; Spezielle Photographie, 2; Photographische Übungen, für Anfänger und Fortgeschrittene, 3. —

Universität Breslau. Lummer: Experimentalphysik II: Elektrizität, Magnetismus, Optik, 5; Physikalisches Praktikum für Geübtere (mit Schaefer und Waetzmann), tägl., für Anfänger (mit Waetzmann und Ladenburg), 9. — **Schaefer**: Theorie der Wärme: Wärmeleitung, Thermodynamik, kinetische Theorie der Materie, 5, Übungen, 1½ g; Hydrodynamik reibender Flüssigkeiten, 1; Theoretisch-physikalisches Kolloquium: Hydrodynamische Grundlagen der Flugtechnik, 2 g. — **Buchwald**: Vektorrechnung mit physikalischen Anwendungen, 2; Polarisation und Doppelbrechung, mit Vorführungen, 1. — **Riesenfeld**: Photographisches Praktikum, 2; Die Photographie und ihre Technik, 1 g. —

Technische Hochschule Breslau. Lummer: Experimentalphysik: Magnetismus, Elektrizität, Optik, 5; Physikalisches Praktikum, 3. — **von dem Borne**: Die wissenschaftlichen Grundlagen der Luftschiffahrt: Theorie der Luftschiffahrt, 2. —

Technische Hochschule Brünn. Jaumann: Allgemeine und technische Physik, 3½; Theoretische Physik, 1½; Physikalisches Praktikum für Chemiker und Maschinenbauer (mit Lohr), 3, für Bauingenieure (mit Szarvassi), 3. — **Szarvassi**: Elektrische Strahlen, 2. — **Lohr**: Elektromagnetische Theorien für bewegte Körper (Fortsetzung), 1. —

Technische Hochschule Danzig. Krüger: Experimentalphysik I, 4; Kleines physikalisches Praktikum, 4; Großes physikalisches Praktikum, tägl. — **Kälähne** (vertreten durch Federlin): Einführung in das physikalische Praktikum, 1; Theoretische Ergänzungen zur Experimentalphysik, 2; Photographie und photographische Reproduktionsverfahren, 1, Übungen, 3; Anleitung zu selbständigen Arbeiten im photographischen Laboratorium, tägl. —

Technische Hochschule Darmstadt. Schering: Allgemeine Physik mit Versuchen: Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper, Wärme, Geometrische Optik, Wellenlehre des Lichtes, Akustik, 5; Physikalische Übungen (mit Zeissig), 4 Nachmittage; Selbständige Arbeiten aus dem Gebiete der Physik (mit Zeissig), nach Verabredung; Mechanische Wärmetheorie, 2; Besprechung neuerer physikalischer Arbeiten (mit Zeissig), für Fortgeschrittene, 1 g. — **Zeissig**: Allgemeine Physik mit Versuchen: Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper, Wärme, Akustik, Optik, 4; Physikalische Meß- und Instrumentenkunde, 1 g; Seismometrie und Anwendungen, 1 g; Ausgewählte Kapitel aus der allgemeinen Physik, für Pharmazeuten, 1. —

Technische Hochschule Dresden. Hallwachs: Experimentalphysik I, 5; Physikalisches Praktikum I, 6 oder 3, II, einschließlich Laboratoriumstechnik, für Fortgeschrittene, 9; Praktikum für größere physikalische Arbeiten, 20; Physikalisches Kolloquium, Referate

über neue Arbeiten (mit Helm und Toepler), 1 g. — **Toepler**: Theoretische Physik IV: Optik, 4; Ausgewählte Abschnitte aus Elektrizität und Magnetismus, 1. —

Universität Erlangen. Wiedemann: Experimentalphysik, 5; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 2; Physikalisches Halb- und Vollpraktikum, tägl. außer Sonnabend. — **Reiger**: Theoretische Physik, 4, Übungen, 1 g; Physikalisches Kolloquium (mit Hauser), 1 g. — **Hauser**: Maschinenkunde für Chemiker und Physiker, 1. —

Universität Frankfurt a. Main. Wachsmuth: Experimentalphysik II: Magnetismus, Elektrizität, Optik, 5; Die Interferenzerscheinungen des Lichtes, 1 g; Kleines physikalisches Praktikum, für Anfänger, 6; Physikalisches Praktikum für Mediziner, 3; Großes physikalisches Praktikum, für Fortgeschrittene, tägl.; Selbständige wissenschaftliche Arbeiten, tägl. — **v. Laue**: Kinetische Theorie der Gase, 2. — **Seddig**: Repetitorium der Experimentalphysik, besonders für Kriegsteilnehmer, 2; Wissenschaftliche Photographie, Leitung selbständiger Arbeiten, ganz- oder halbtägig. — **Déguisne**: Der elektrische Gleichstrom (Experimental-Vorlesung), 2; Gleichstrom-Messungen, 1; Hochfrequenzströme, 1 g; Kolloquium über neuere Literatur der angewandten Physik, 14-tägig, 2 g; Kleines elektrotechnisches Praktikum I, Meßtechnik, Photometrie, 3, II, Maschinen, Motore, 3; Großes elektrotechnisches Praktikum, halb- oder ganztägig; Wissenschaftliche Arbeiten, ganztägig. —

Universität Freiburg i. Br. Himstedt: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Übungen aus der theoretischen Physik, 1 g; Physikalisches Praktikum, für Mediziner und Pharmazeuten, 3, für Naturwissenschaftler, 6; Physikalisches Kolloquium, 2; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Koenigsberger**: Mathematische Physik, mit Übungen: Schwingungs- und Strömungsgleichungen, 2 bis 3; Quantentheorie, 1; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Gaede**: Anleitung zu selbständigen Arbeiten im technisch-physikalischen Institut, tägl. — **Meyer**: Elektrochemie, 2; Photographie mit praktischen Übungen und Demonstrationen, 2; Mechanische Wärmetheorie, 2; Physikalisch-chemisches Übungspraktikum, 2; Selbständige physikalisch-chemische Arbeiten, tägl. — **Friedrich**: Ausgewählte Kapitel aus der Optik, 1; Physikalisches Seminar, 1; Einführung in die Elektrotechnik für Mediziner, 1; Anleitung zu selbständigen Arbeiten aus dem Gebiete der Experimentalphysik, tägl. —

Universität Freiburg (Schweiz). Gockel: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Physik der Atmosphäre, 2; Physikalisches Kolloquium, 1; Physikalisches Praktikum für Mediziner, 6; Physikalische Arbeiten im Laboratorium, tägl. — **Joye**: Allgemeine Physik: Elektrizität, 4; Praktische Übungen für Anfänger und Chemiker, 8; Physikalisches Laboratorium, für Vorgerücktere, tägl. außer Montag; Arbeiten im Laboratorium, tägl.; Physikalisches Seminar, 1. — **v. Hauer**: Radioaktivität, 2; Theorie der Aggregatzustandsänderungen, 2. —

Universität Gießen. König: Experimentalphysik II: Elektrizität und Optik, 5; Physikalisches Praktikum für Mathematiker und Naturwissenschaftler, 6, für Vorgeschriftene, nach Verabredung, für Chemiker, Mediziner, Pharmazeuten und Landwirte, 3; Leitung selbständiger physikalischer Arbeiten, tägl.; Physikalisches Seminar für Lehramtskandidaten: Übungen in Demonstrationsversuchen und Behandlung einfacher theoretischer Hausaufgaben (mit Cermak), 14-tägig, 2 g; Physikalisches Kolloquium (mit Fromme), 14-tägig, 2. — **Cermak**: Handfertigkeitpraktikum, 3; Kinetische Gastheorie und Elektronenlehre, 1. — **Uller**: Einführung in die elektrische Gleich- und Wechselstromtechnik, 1. — **Fromme**: Elektromagnetische Lichttheorie, 4; Theoretisch-physika-

lische Übungen, 1. — **Jentzsch**: Elektrische Schwingungen, 1; Ausgewählte Kapitel aus der physiologischen Optik, 1. — **Peppler**: Grundzüge der Wettervoraussage mit Berücksichtigung der dynamischen Prognose, 2. —

Universität Göttingen. **Debye**: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärme, mit besonderer Berücksichtigung der Physiker und Mathematiker, 4; Physikalische Praktikum (mit Simon), 4; Wissenschaftliche Arbeiten im Physikalischen Institut, tägl.; Kolloquium über neuere physikalische Literatur (mit Voigt), 2 g; Struktur von Spektrallinien, 2. — **Voigt**: Optik, 4, Übungen, 2 g; Einführung in die Mechanik der Kontinua: Hydrodynamik, Elastizität, 2 g. — **Wiechert**: Grundlagen der Theorie der Elektrizität, 2; Erdbeben, Ebbe und Flut und verwandte Erscheinungen in ihren Beziehungen zur Beschaffenheit des Erdkörpers, 2; Erdbeben, 1 g; Geophysikalisches Praktikum, nach Verabredung g. — **Simon**: liest nicht wegen Erkrankung. — **Pohl**: Experimentalphysik II, für Naturwissenschaftler und Mediziner, 4. — **N. N.**: Radioaktivität, 2 g Kinetische Theorie der Materie, 2. —

Universität Graz. **N. N.**: Experimentalphysik I, für Mediziner, zugleich Einführung in die Physik für Lehramtskandidaten, 4; Physikalische Übungen I für Chemiker und Naturhistoriker, 6 g, II für Mathematiker und Physiker, 6 g; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten für Vorgeschr. tägl. außer Sonnabend g. — **Streintz**: Schwingungslehre und Akustik, 2. — **Rosenberg**: Übungen in der Anstellung physikalischer Schulversuche, 3 g. — **Waßmuth**: Über Jourdain's Prinzip der Mechanik und dessen Anwendung auf physikalische Fragen, 1 g. — **Radakovic**: Seminar für theoretische Physik, 2 g; Besprechung physikalischer Fragen, 1 g. —

Technische Hochschule Graz. **v. Ettingshausen**: Physik, 5; Elektrotechnik, 3 1/2, Übungen: Praktische Messungen, 8; Enzyklopädie der Elektrotechnik, 2. — **Streintz**: Physik: Mechanik, Optik und Wärmelehre, 5, für Geodäten: Mechanik und geometrische Optik, 5. —

Universität Greifswald. **Stark**: Experimentalphysik II: Elektrodynamik, Atomdynamik, Optik, Thermodynamik, 5; Physikalische Praktikum für Naturwissenschaftler, 6, für Mediziner und Pharmazeuten, 2; Anleitung zu selbständigen physikalischen Untersuchungen, tägl.; Besprechung neuer physikalischer Arbeiten, 14tägl., 2 g. — **Seeliger**: Theoretische Physik, 3. —

Universität Halle. **Mie**: Experimentalphysik II: Elektrizität und Optik, 5; Physikalische Übungen für Naturwissenschaftler, 6, Erläuterungen, 2 g; Kleines physikalisches Praktikum für Mediziner, Pharmazeuten und Landwirte, 3; Leitung selbständiger Arbeiten, tägl. — **Schmidt**: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 4; Übungspraktikum für angewandte Physik, 4; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl.; Physikalisches Kolloquium, 14tägl., 2 g. — **Herweg**: Spektroskopie, mit Experimenten, unter Berücksichtigung der neueren Anschauungen, insbesondere der Quantentheorie, 2. — **Wigand**: Elektronen und Ionen, 1. — **Thiem**: Photographischer Kursus, 2. —

Technische Hochschule Hannover. **Precht**: Experimentalphysik, 4; Arbeiten im Laboratorium der Physik (mit Leithäuser), 4. — **Leithäuser**: Grundzüge der Physik, 3; Praktische Physik, 2; Photographie, 4. —

Universität Heidelberg. **Lenard**: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärmelehre, 4; Physikalisches Praktikum (mit Becker), 6; Physikalisches Seminar und Kolloquium, 1 g; Wissenschaftliche Arbeiten Fortgeschrittener im physikalischen und radiologischen Institut (mit Becker), tägl. außer Sonnabend. — **Becker**: Theoretische Mechanik, 4; Kinetische Gastheorie, 1; Theoretisch-physikalische Übungen, 1 g. — **Schmidt**: Photographische Kurse für Anfänger und Vorgeschr. tägl., 2. —

Universität Innsbruck. **v. Schweidler**: Experimentalphysik I, 4; Einführung in die messende Physik, 1; Physikalisches Praktikum für Lehramtskandidaten, 6, für Mediziner, 3; Wissenschaftliche Arbeiten für Vorgeschr. tägl. g. — **Tumlirz**: Theoretische Mechanik, 5; Übungen im mathematisch-physikalischen Seminar, 2 g. — **March**: Theorie der Strahlung und der Quanten, 1. — **v. Lorch**: Physik für Pharmazeuten, 5. — **Hammerl**: Elektrische Energieverteilung: Licht und Kraft, Niederspannungs- und Hochspannungsanlagen, 2 g. —

Universität Jena. **Wien**: Experimentalphysik II: Elektrizität, Magnetismus, Optik, 4, IV: Elektrizität, Magnetismus, Optik, für Fortgeschrittene, 2; Physikalisches Kolloquium; Physikalisches Praktikum (mit Pauli): a) für Mathematiker und Physiker, 6, b) für Chemiker, Pharmazeuten und Mediziner, 3; Leitung physikalischer Spezialuntersuchungen (mit Straubel und Pauli), tägl. — **Auerbach**: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 4; Grundzüge der Wetterkunde, 2; Anleitung zu Demonstrationen und Experimenten, 2. — **Straubel**: Abbildungstheorie, 1. —

Technische Hochschule Karlsruhe. **Lehmann**: Physik, 4, Ergänzungen, 2; Physikalisches Laboratorium (mit Schachenmeier), 6; Seminar für Experimentalphysik (mit Schachenmeier), 2 g. — **N. N.**: Mathematische Physik, 3; Repetitorium der Physik, 2. — **Schachenmeier**: Optik mit besonderer Berücksichtigung der Elektronentheorie, 2. — **Schmidt**: Photographische Kurse, mit Vorträgen über die Theorie der photographischen Vorgänge, für Anfänger und Vorgeschr. tägl., 2. — **N. N.**: Meteorologie: Klimatologie, 1. —

Universität Kiel. **Dieterici**: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Physikalisches Anfänger-Praktikum, a) für Mathematiker und Naturwissenschaftler, 8, b) für Mediziner und Pharmazeuten, 4; Physikalisches Praktikum für Doktoranden, tägl.; Repetitorium für Oberlehrer-Kandidaten (Kriegsteilnehmer), 2 g; Physikalisches Kolloquium, 2 g. — **Weber**: Einleitung in die theoretische Physik und analytische Mechanik, 4; Absolutes Maßsystem, 1; Theorie physikalischer Messungsapparate, mit Übungen, 1; Ausgewählte physikalische Untersuchungen, tägl. außer Sonnabend. — **Martienssen**: Physikalische Grundlagen der Flugtechnik, 1. —

Universität Königsberg. **Kaufmann**: Allgemeine Physik II: Elektrizität, Licht, 5; Seminaristische Übungen zur Geschichte der Experimentalphysik (mit Hoffmann), 2 g; Physikalische Übungen, 6; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. g. — **Volkmann**: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 4; Mathematisch-physikalisches Seminar: Physikalisch-theoretische Übungen und Arbeiten, Vorträge und Besprechungen im Anschluß an die Vorlesungen und an die höhere Literatur, 1 g; Mathematisch-physikalisches Laboratorium: Physikalisch-praktische Übungen und Arbeiten für Anfänger und Vorgerückte, 6. — **Hoffmann**: Technische Mechanik und Thermodynamik, 1. — **Schroeder**: Einführung in die Maschinenkunde II, 2; Besichtigung industrieller Anlagen, g. —

Universität Leipzig. **Wiener**: Experimentalphysik II: Licht, Magnetismus, Elektrizität, 5; Selbständige physikalische Arbeiten für Vorgeschr. (mit Scholl), tägl.; Physikalische Übungen (mit Scholl), 6, für Mediziner und Pharmazeuten, 3; Physikalisches Kolloquium (mit Des Coudres), 2 g. — **Des Coudres**: Thermodynamik, 4; Selbständige physikalische Arbeiten für Vorgeschr. (mit Fredenhagen), tägl. — **v. Oettingen**: Das duale Harmoniesystem, 1 g. — **Scholl**: Entwicklung der Elektrotechnik und ihrer Anwendungsgebiete, mit Berücksichtigung wirtschaftlicher Fragen, 2. — **Wenger**: Dynamische Meteorologie, 2; Arbeiten im Geophysikalischen Institut, tägl.; Geophysikalisches Kolloquium, 2 g. — **Marx**: Entladungen in

Gasen: Kathoden und Röntgenstrahlen, 1; Struktur der Kristalle, 1. — **Haas**: Geschichte der Physik von Galilei bis zum Ende des 18. Jahrhunderts, 1 g; Die kinetische Theorie der Materie, 1; Selbständige geschichtlich-physikalische Arbeiten für Vorgeschr. nach Verabredung, g. — **Lilienfeld**: Erzeugung und Anwendung tiefer Temperaturen, 1 g. —

Universität Marburg. Richarz: Experimentalphysik: Wärme, Magnetismus, Elektrizität, 5; Übersicht über die Experimentalphysik als Wiederholung für Kriegsteilnehmer, 1 g; Physikalisches Kolloquium, 2; Physikalisches Praktikum (mit Schulze), 6; Leitung eigener Untersuchungen, tägl. — **N. N.**: Theoretische Physik: Wärmetheorie, 4; Theoretisch-physikalisches Seminar, 2 g. — **N. N.**: Geschichte der Physik, 2; Astronomische Zeit- und Ortsbestimmungen, 1, Übungen, 2; Seminarische Übungen über theoretische Physik, mit schriftlichen Arbeiten, 2. — **Schulze**: Relativitätstheorie, 2; Übersicht über die theoretische Physik, als Wiederholung für Kriegsteilnehmer, 1 g. — **Take**: Interferenz, Beugung, Polarisation und Kristalloptik, mit Versuchen, 2. — **Wegener**: Allgemeine Meteorologie, 2. —

Universität München. Röntgen: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Optik, 5; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl.; Praktische Übungen im physikalischen Laboratorium (mit Koch und Wagner), 4. — **Sommerfeld**: Thermodynamik einschließlich kinetischer Gastheorie, 4, Übungen, 1 g; Atombau und Spektrallinien, 1; Quantentheorie, 1. — **Graetz**: Experimentalphysik I: Einleitung, Wärme, Elektrizität, 5; Physikalisches Praktikum: a) Übungen in physikalischen Messungen, b) Übungen in physikalischen Demonstrationen, 4; Einleitung in die theoretische Physik, 3; Anleitung zu selbständigen Arbeiten aus der Physik, nach Verabredung g. — **Koch**: Die lichtelektrischen Erscheinungen, mit Demonstrationen, 1. — **Wagner**: Neuere Forschungen auf dem Gebiete der Röntgenstrahlen, 1. — **Donle**: Einführung in die elektromagnetische Theorie des Lichtes, 2. — **Ewald**: Vektoranalysis, als Einführung in die theoretische Physik, 3. —

Technische Hochschule München. Zenneck: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, Optik, 6; Physikalisches Praktikum, 4 oder 8; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der Physik, 12 bis 30. — **Fischer**: Grundzüge der Physik I: Mechanik, Akustik, Wärmelehre, 3; Praktisch-physikalische Übungen: Aufbau und Handhabung von Apparaten, 4; Elektrizität und Magnetismus in mathematischer Behandlung, 4; Einführung in die wissenschaftlichen Arbeitsmethoden der Physik: Anleitung zu selbständigen Untersuchungen, 8 bis 30. — **Knoblauch**: Anwendungen der Thermodynamik auf physikalisch-chemische Erscheinungen, 2; Technisch-physikalisches Praktikum, 4; Anleitung zur Ausführung wissenschaftlicher Arbeiten auf dem Gebiete der technischen Physik, nach Verabredung. — **Emden**: Meteorologie und Klimatologie, 2; Kugelfunktionen, mit besonderer Berücksichtigung physikalischer und geophysikalischer Probleme, 2. — **Dieckmann**: Ausgewählte Kapitel der Telegraphen- und Sendezwecke, 2, Übungen, 3; Elektronenröhren für Verstärkungs- und Sendezwecke, 1; Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen aus dem Gebiete der angewandten Physik, nach Verabredung. — **von und zu Aufseß**: Populäre Astrophysik I, 2. — **Schröter**: Mechanische Wärmetheorie, 2, Übungen, 1. — **Urban**: Unterrichtskurse in praktischer Photographie (Vorträge und Übungen), 1, Praktische Übungen, 3. —

Universität Münster. Schmidt: Experimentalphysik, 5; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 3 oder 6, für Fortgeschrittene (mit Koenen), tägl. — **Koenen**: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 4; Seminar für theoretische Physik, 2 g. —

Akademie Posen. Spies: Über Röntgenstrahlen, ihre Theorie und Anwendung, 4. —

Universität Prag. Lampa: Experimentalphysik I, 5; Physikalisches Praktikum I, 6 bzw. 3; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten für Vorgeschr., tägl. g. — **Frank**: Theoretische Optik, 3; Allgemeine Relativitätstheorie, 2; Besprechung neuerer Arbeiten über Röntgenstrahlen, 2. — **Spitaler**: Allgemeine Meteorologie, 4; Meteorologisches Praktikum, 1. —

Technische Hochschule Prag. Tuma: Experimentalphysik, 5, für Kulturingenieure und Geodäten, 3; Physikalisches Praktikum, für Chemiker, 6, für Maschinenbauer und Elektrotechniker, 3, für Lehramtskandidaten, 6. —

Universität Rostock. Heydweiller: Experimentalphysik: Optik, Magnetismus, Elektrizität, 5; Physikalische Übungen, 4; Physikalisches Seminar, nach Verabredung. — **Weber**: Einführung in die theoretische Physik, 3; Thermodynamik, 2; Übungen zur theoretischen Physik, 1; Vektoranalysis, 1. —

Universität Straßburg. N. N.: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Physikalische Übungen, 5 oder 10; Übersichtskursus für Mediziner, 3; Wissenschaftliche physikalische Arbeiten, tägl. außer Sonnabend. — **Cohn**: Einleitung in die theoretische Physik, 3; Wissenschaftliche physikalische Arbeiten. — **Rohmann**: Der Kreisler, Theorie und Anwendungen, 2. — **Hecker**: Erdmagnetismus, 1; Ausgewählte Kapitel aus der Geophysik, 1. —

Technische Hochschule Stuttgart. v. Koch: Experimentalphysik, 4; Theoretische Physik (als Einleitung: Mathematische Ergänzung zur Experimentalphysik), 2; Physikalisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend; Handfertigkeitspraktikum in Physik, 2—3; Physikalisches Kolloquium, 2; Meteorologie, 1. —

Universität Tübingen. Paschen: Experimentalphysik: Akustik, Wärme, Magnetismus, Elektrizität, 5. — **Rosenberg**: Populäre Astronomie, 2 g. —

Universität Wien. Lecher: Experimentalphysik für Lehramtskandidaten und Mediziner I, 5; Anleitung für wissenschaftliche Arbeiten, tägl. — **Franz Exner**: Experimentalphysik, 5; Physikalisches Praktikum für Lehramtskandidaten, 6; Wissenschaftliche Arbeiten Vorgeschr., tägl. — **Jäger**: Mechanik, 5. — **Meyer**: Radioaktivität, 3; Besprechung neuerer Arbeiten (mit Jäger und Ehrenhaft), 1 g. — **Ehrenhaft**: Grundzüge der neueren Elektrizitätstheorie, 5. — **Haschek**: Optik, 3. — **Hess**: Besprechung der neuesten Arbeiten aus dem Gebiete der Radioaktivität, 1. — **Kohlrausch**: Physikalisches Praktikum für Lehramtskandidaten, 6. — **Schrödinger**: Anleitung zu theoretisch-physikalischen Arbeiten, 1 g. — **Thirring**: Röntgeninterferenzen und Kristallstruktur, 2. — **Flamm**: Statistische Probleme der Physik, 2. — **Kottler**: Elastizitätstheorie und Anwendungen, 1. — **Felix v. Exner**: Ausgewählte Kapitel aus der Geophysik, 3. — **Defant**: Beobachtungstatsachen und Theorien der Gezeitenerscheinungen, 1. — **Schmidt**: Versuche zur Meteorologie, 1. — **Hinterberger**: Photographisches Praktikum, 12; Praktischer Kurs über Mikrophotographie, 20. —

Technische Hochschule Wien. N. N.: Physik für Bauingenieure, 3; Ausgewählte Kapitel der Physik, 2; Optik, für Geodäten, 2. — **Mache**: Physik für Maschinenbauer und technische Chemiker, 5. — **Flamm**: Die Feinstruktur der Materie, 1. — **Aigner**: Die Physik der elektrischen Meßapparate und ihre praktische Anwendung, 1. — **Liznar**: Meteorologie und die wichtigsten Lehren der Klimatologie für Ingenieure, 2. —

Universität Würzburg. **Wien:** Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, Magnetismus, Elektrostatik, 5; Praktische Übungen, 4 u. 8; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl.; Praktische Übungen für Pharmazeuten, Mediziner und Zahnärzte, 4. — **Harms:** Wärmelehre, 4. —

Universität Zürich. **Meyer:** Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärme, 4; Ausgewählte Kapitel der Physik, 1; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 3 1/2, für Vorgerücktere, halbtägig, tägl. außer Sonnabend; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl. außer Sonnabend; Physikalisches Kolloquium, 2 g. — **Greinacher:** Radiologie III: Kathoden-, Kanal-, Anoden-, Röntgenstrahlen, mit Experimenten, 1; Radiologisches Praktikum für Naturwissenschaftler und Mediziner, 3 1/2. — **Ratnowsky:** Theorie der Wärme: Thermodynamik, 4, Übungen, 1; Kinetische Theorie der Gase, 2. — **Wolfke:** Maxwell'sche Gleichungen der Elektrodynamik, 2. —

Technische Hochschule Zürich. **Weiss:** Physik, 4, Repetitorium, 1; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Schweitzer), 4 und 8; Wissenschaftliche Arbeiten im physikalischen Institut, 8, 12, 24. — **Brentano:** Elektronentheorie auf optischem und elektrischem Gebiet, 2 g. — **Piccard:** Physik und Chemie der Radioelemente, 2 g. — **de Quervain:** Ausgewählte Kapitel der Wetterkunde, mit Übungen, 1. — **Schweitzer:** Physik I, 3, Repetitorium, 1; Optik, 2; Experimentalphysik II, 4, Repetitorium, 1. — **Treadwell:** Ausgewählte Kapitel der neueren Atomistik II, 1. — **Weyl:** Theorie des elektromagnetischen Feldes, 4; Integralgleichungen, 2; Determinanten, 1. — **Wolfke:** Einführung in die kinetische Theorie der Gase, 2 g. — **Barbieri:** Photographie I, 2 g; Photographisches Praktikum, 2. —

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Würzburg Dr. Siegfried Skrap für Chemie.

Eraannt: Dr. T. Bonnesen zum Professor der darstellenden Geometrie an der Technischen Hochschule Kopenhagen, der a. o. Professor an der Technischen Hochschule Brünn Dr. A. Leon zum ord. Professor der technischen Mechanik an der Technischen Hochschule Graz, der a. o. Professor an der Universität Marburg Dr. Oskar Keller zum ord. Professor der Pharmazie und Nahrungsmittelchemie an der Universität Jena, der a. o. Professor an der Deutschen Universität Prag Dr. Viktor Rothmund zum ord. Professor für physikalische und Elektrochemie ebendasselbst.

Verliehen: Dem ord. Professor der Mathematik i. R. an der Technischen Hochschule Darmstadt Dr. Friedrich Graefe der Titel Geh. Hofrat, dem Dozenten für Photographie an der Technischen Hochschule Aachen, Dr. Walter Steubing der Titel Professor.

Ehrungen: Der „Alfred-Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis zur Förderung der mathematischen Wissenschaften“ ist dem Ordinarius der Mathematik an der

Universität Göttingen Prof. Dr. Ludwig Prandtl für seine Arbeit über „Den Luftwiderstand von Kugeln“ zuerkannt worden.

Gestorben: Der ehemalige Professor der Mathematik an der Universität Helsingfors Dr. E. R. Neovius, der a. o. Professor der Chemie an der Universität Lemberg Dr. Stanislaus Opolski, der a. o. Professor für Mathematik an der Universität Wien Dr. Wilhelm Groß, der Professor für Chemie an der Medical School der Northwestern University Chicago John Harper Long.

Angebote.

Für die wissenschaftliche und technische Bearbeitung von Fragen aus dem Gebiete der Schwachstromkabeltechnik

1—2 Physiker

oder

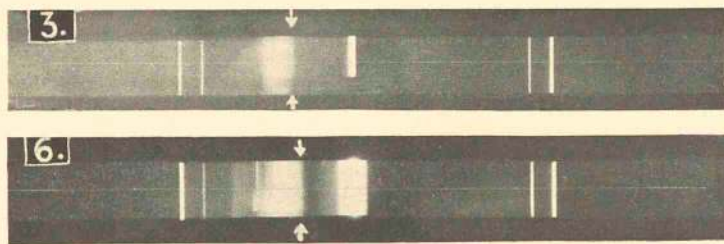
diplom. Ingenieure

sofort gesucht. Angebote mit Angabe der Gehaltsansprüche, der bisherigen Tätigkeit und des Militärverhältnisses erbeten unter **S. H. 530** an den Verlag dieser Zeitschr. S. Hirzel, Leipzig, Königstraße 2.

Gesuche.

Absolvierter Physiker

(Dr. phil. Universitätsassistent), praktisch begabt, guter Zeichner, sucht nach Kriegsende Anstellung in größerem techn. Betrieb. Anträge mit Bedingungen unter **G. H.** an den Verlag S. Hirzel, Leipzig, Königstr. 2.



Staats- u. Universitäts-
Bibliothek Hamburg

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 23.

1. Dezember 1918.

Redaktionsschluß für No. 1 am 1. Dezember 1918.

19. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

- J. Narbutt, Eine empirische Formel zur Berechnung der spezifischen Wärme des Wassers. S. 513.
J. E. Lilienfeld, Ergänzende Mitteilung zu der Arbeit: Untersuchungen über das kontinuierliche Röntgenspektrum. (Die Unabhängigkeit vom Antikathodenmetall.) S. 514.
Ph. Frank, Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Diffusion. S. 516.
J. Plotnikow, Das Erweichen und Biegen eines Kohlenstabes bei sehr

hohen Temperaturen. (Vorlesungsversuch.) S. 520.

O. Meißner, Temperatur- und Regenveränderlichkeit in Berlin. S. 521.

E. Madelung, Das elektrische Feld in Systemen von regelmäßig angeordneten Punktladungen. S. 524.

K. Fehle, Über die Berechnung des Ortes der chemischen Elemente im periodischen System aus dem Atomgewicht und der Dichte. S. 532.

Besprechungen:

H. Börner, Lehrbuch der Physik. S. 533.

G. Mohrmann, Physikalische Aufgabensammlung. S. 533.

E. Großmann, Untersuchungen über die astronomische Refraktion. S. 534.

F. Krauß, Die Grundgesetze der Wärmeleitung und ihre Anwendung auf plattenförmige Körper. S. 534.

F. Auerbach, Ernst Abbe. S. 534.
W. Ramsay u. G. Rudorf, Die Edelgase. S. 535.

Berichtigung. S. 535.

Personalien. S. 535.

Angebote. S. 536.

Gesuche. S. 536.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Eine empirische Formel zur Berechnung der spezifischen Wärme des Wassers.

Von J. Narbutt.

Im Verlauf einer größeren kalorimetrischen Untersuchung verwandte ich unter anderem Wasser zum Eichen des Nernstschen Kupferkalorimeters, wobei ich die verhältnismäßig geringe Übereinstimmung der von verschiedenen Beobachtern herrührenden Daten für die spezifische Wärme bei höheren Temperaturen recht störend empfand. Es waren nun aber gerade in den letzten Jahren (die Formel leitete ich im Sommer 1914 her, aber kann sie erst jetzt in einer deutschen Zeitschrift veröffentlichen¹⁾) mehrere schöne experimentelle Untersuchungen über die spezifische Wärme des Wassers publiziert worden, welche ein gutes Material für die Herleitung einer empirischen Formel für die mittlere spezifische Wärme von 0° bis etwa 100° zu versprechen schienen.

Von diesen Arbeiten bevorzugte ich die von Lüdins²⁾, Dieterici³⁾, Bousfield⁴⁾, Callendar⁵⁾ und Barnes und Cooke⁶⁾ nicht allein deshalb, weil sie mit großer Sorgfalt ausgeführt worden, sondern auch deshalb, weil die Beobachtungen nach sehr verschiedenen Methoden

angestellt worden waren. Den Daten und Formeln der genannten Forscher entnahm ich die mittleren spezifischen Wärmen (c_{15} gleich 1 gesetzt) zwischen 0° und 10°, 20° usw. bis 100° und bildete aus den erhaltenen Zahlen, denen ich gleiche Genauigkeit zuschrieb, Mittelwerte, aus welchen dann die vierkonstantige Formel (3) unter Zuhilfenahme der Methode der kleinsten Quadrate hergeleitet wurde. Der Anschluß der Formel an die Mittelwerte ist ein völlig befriedigender, wie aus der Tabelle I zu ersehen ist.

Zur nachstehenden Tabelle I ist noch folgendes kurz zu bemerken:

Der in der Kolumne „Callendar“ mit einem Sterne bezeichnete Wert ist von Barnes und Cooke (l. c.) experimentell bestimmt, die übrigen Werte sind nach einer von Callendar (l. c.) gegebenen und von mir ein wenig geänderten Formel (1) (Callendar hatte bei seinen Rechnungen $c_{20} = 1$ gesetzt), berechnet worden:

$$c_0^t = 0,9988 \left[0,98536 + \frac{1,1605}{t} \log \frac{t+20}{20} + 0,0442t + 0,063t^2 \right] \quad (1)$$

Die Werte in der Kolumne „Bousfield“ sind von mir nach der Formel (2) berechnet worden, welche aus einer von Bousfield (l. c.) hergeleiteten erhalten wurde. Die 15°-Kalorie setzte ich dabei gleich 4,184 Joule. Die beiden letzten Werte in dieser Kolumne sind durch Sterne gekennzeichnet, weil die Versuche der beiden Bousfield bis 80° reichten.

$$c_0^t = 1,00588 - 0,033611t + 0,056241t^2 - 0,072928t^3 \quad (2)$$

In der Kolumne „Dieterici“ stehen die der Dietericischen Tabelle entnommenen Werte,

1) Vgl. meine Abhandl., Schriften d. Naturforschergesellschaft bei der kaiserl. Universität Jurjew XXIII, 35, 1916.

2) E. Lüdins, Fortschr. d. Phys. 56 (II), 304, 1900.

3) C. Dieterici, Ann. d. Phys. [4] 16, 610, 1905.

4) W. R. und W. E. Bousfield, Phil. Transact. II, 236, 1911.

5) H. Callendar, Proc. Roy. Soc. Ser. A. 86, 257, 1912.

6) H. T. Barnes und H. L. Cooke, Phys. Rev. 15, 71, 1902.

die alle um 0,0020 vergrößert wurden. Dieterici hatte bei seinen Rechnungen die Bunsensche Kalorie gleich eins gesetzt und ferner experimentell gefunden, daß eine Bunsensche Kalorie 4,1925 Joule äquivalent ist und daß bei der Abgabe einer solchen Wärmemenge in seinem Eiskalorimeter 15,491 mg Quecksilber eingesogen wurden. Nach Barnes¹⁾ ist die 15⁰-Kalorie 4,184 Joule äquivalent, und nach Behn²⁾ werden bei ihrer Abgabe im Eiskalorimeter 15,460 mg Quecksilber eingesogen. Hieraus folgt, daß Dietericis Zahlen mit 1,0020 zu multiplizieren oder einfacher um 0,0020 zu erhöhen sind. — Schließlich mag noch darauf hingewiesen werden, daß der von Dieterici errechnete Wert c_0 mit dem von Barnes und Cooke experimentell gefundenen zusammenfällt.

Die Zahlen in der Kolumne „Lüdin“ entstammen der Lüdenschen Arbeit³⁾ (l. c.).

Tabelle I.

Die mittlere spezifische Wärme des Wassers von 0° bis t^0 ($c_{15} = 1$).

t^0	Callendar	Bousfield	Dieterici	Lüdin	Mittel	Nach Form. (3) ber.
0	1,0094*	1,0059	1,0095	1,0051	1,0075	1,0073
10	1,0051	1,0029	1,0060	1,0029	1,0042	1,0042
20	1,0026	1,0006	1,0030	1,0014	1,0019	1,0020
30	1,0011	0,9996	1,0004	1,0008	1,0005	1,0006
40	1,0002	0,9993	0,9993	1,0006	0,9999	1,0000
50	0,9996	0,9998	0,9994	1,0010	1,0000	0,9998
60	0,9994	1,0003	0,9996	1,0017	1,0003	1,0001
70	0,9994	1,0011	1,0000	1,0026	1,0008	1,0007
80	0,9996	1,0019	1,0005	1,0035	1,0014	1,0014
90	0,9999	1,0026*	1,0012	1,0045	1,0021	1,0021
100	1,0004	1,0029*	1,0020	1,0052	1,0026	1,0025

$$c_0^t = 1,00733 - 0,033708 t + 0,055615 t^2 - 0,072388 t^3 \quad (3)$$

$$c_t = 1,00733 - 0,037416 t + 0,0416845 t^2 - 0,079552 t^3 \quad (3a)$$

Nach der Formel (3a) liegt das Minimum der wahren spezifischen Wärme zwischen 29° und 30°.

Früher hatte ich (l. c.) die Genauigkeit der nach (3) berechneten mittleren spezifischen

1) H. T. Barnes, Proc. Roy. Soc. Ser. A. 82, 390, 1909.

2) U. Behn, Ann. d. Phys. [4] 16, 663, 1905.

3) Dieterici (l. c. 618) findet, daß Lüdens Kurve für die wahre spezifische Wärme zwischen 0° und 30° sehr beträchtlich niedriger als seine liegt. Wenn man aber berücksichtigt, daß Dieterici irrtümlicherweise die Kolumne der spezifischen Wärmen von Lüdin mit $c_0 = 1$ anstatt $c_{15} = 1$ zum Vergleich heranzieht, so findet man, selbst nach Anbringung einer geringen Korrektur an den Dietericischen Werten (weil der in die Kurve eingetragene Wert von c_{15} 0,9987 beträgt), welche die letzteren noch etwas mehr erhöht, eine beträchtlich bessere Übereinstimmung.

Wärmen von 0° bis 80° auf ca. ein Promille und weiter bis 100° auf ca. zwei Promille geschätzt. Daß die damalige Schätzung nicht zu hoch ausgefallen ist, dürfte nun aus den von Jaeger und v. Steinwehr¹⁾ ausgeführten sorgfältigen und genauen Messungen der wahren spezifischen Wärme des Wassers hervorgehen. In folgender Tabelle II habe ich einige von Jaeger und v. Steinwehr, nach denen die 15⁰-Kalorie gleich 4,1842 Joule ist, gemessene Werte mit aus (3a) berechneten zusammengestellt, und es ist deutlich zu sehen, daß meine Formel sich der Erfahrung gut anschließt.

Tabelle II.

Die wahre spezifische Wärme des Wassers ($c_{15} = 1$).

t^0	Von Jaeger und v. Steinwehr beob.	Nach Form. (3a) ber.	Diff.
10	1,00135	1,0015	- 0,0001
20	0,9990	0,9985	+ 0,0005
30	0,9979	0,9977	+ 0,0002
40	0,99815	0,9985	- 0,0003
50	0,9996	1,0004	- 0,0008

Nach Jaeger und v. Steinwehr liegt das Minimum bei 33,5°.

Es erscheint also nunmehr die Möglichkeit wohl gegeben, die mittlere spezifische Wärme bis 100° mit einer größeren Sicherheit als bisher zu berechnen.

1) W. Jaeger und H. v. Steinwehr, Sitzber. d. königl. preuß. Akad. d. Wiss. 1915, 424. — Infolge des Krieges habe ich nur ein Referat einsehen können, welches mir erst im Jahre 1917 zugänglich wurde.

Dorpat, im Juli 1918.

(Eingegangen 28. Juli 1918.)

Ergänzende Mitteilung zu der Arbeit¹⁾: Untersuchungen über das kontinuierliche Röntgenspektrum. (Die Unabhängigkeit vom Antikathodenmetall.)

Von J. E. Lilienfeld.

Mit Tafel X.

Die Fassung der Ergebnisse der im Titel angeführten Arbeit ist in doppelter Hinsicht zunächst unbestimmt gelassen worden.

Erstens wurde beim Vergleiche des unter Benutzung einer Platin-Iridium-Antikathode erzeugten kontinuierlichen Spektrums mit demjenigen am Molybdän erzeugten behauptet, die

1) Diese Zeitschr. 19, 263—269, 1918.

Intensitätsverteilung in beiden Spektren wäre die gleiche. Hingegen wurde über die Beträge der Schwärzungen gleicher Wellenlängengebiete in beiden Spektren lediglich angegeben, sie wären von der gleichen Größenordnung. Ich bin gegenwärtig in der Lage, über ein umfangreicheres Material von Aufnahmen zu verfügen. Eine Anzahl davon ist unter tunlicher Einhaltung gleicher photographischer Bedingungen hergestellt worden. Angesichts der Wichtigkeit der Frage seien hier nochmals zwei Vergleichsaufnahmen wiedergegeben, die bei gleicher Belastung und in der gleichen Expositionszeit von 15 Minuten gewonnen wurden. Ein Unterschied in der Schwärzung fällt in keinem Bereiche der beiden Spektren auf. Selbst dicht in der Umgebung der Platin-Iridium- K -Strahlung weichen sie voneinander nicht merklich ab. Es kann aus den Aufnahmen entgegen den von Rutherford, Barnes und Richardson, auch von anderen, neuerdings von Webster, vertretenen Ansichten ersehen werden, daß sehr wohl ein kontinuierliches Spektrum erzeugt werden kann, welches sich mit der Eigenstrahlung des Antikathodenmetalls nicht nur der Intensitätsverteilung, sondern auch der absoluten Intensität nach nicht merklich ändert.

Derartig übereinstimmende Spektrogramme an verschiedenen Antikathodenmetallen ergeben sich stets, wenn Aufnahmen mit großen Strahlenintensitäten (bedeutenden Elektronendichten im Brennfleck), also in kurzen Expositionszeiten, gemacht werden. Ferner ist für die Entstehung gut übereinstimmender kontinuierlicher Spektren allem Anscheine nach von Wert, daß der Entladungsvorgang in der Röhre von einem möglichst steil verlaufenden Anstieg und Abfall in der Kurve des den Entladungsvorgang erzeugenden pulsierenden Gleichstroms begleitet sei. Hingegen scheinen Aufnahmen, die mit geringen Intensitäten oder mit erheblich flacherer Kurvenform der an die Röhre angelegten Spannung gemacht sind, hinsichtlich der absoluten Intensität gleicher Wellenbereiche nicht übereinzustimmen. Vielleicht ist das auf nebensächliche Beeinflussungen verschiedener Art zurückzuführen, möglicherweise aber aus den andersartigen Entladungsbedingungen zu erklären. Deshalb möchte ich es vorläufig dahingestellt sein lassen, ob unter von den obigen abweichenden Entladungsbedingungen nicht doch erheblichere Unterschiede in der absoluten Intensität der Spektralbereiche beobachtet werden können. Die Intensitätsverteilung hängt aber beim gesamten, bisher vorliegenden Plattenmaterial in keiner merklichen Weise mit der Eigenstrahlung der Antikathode zusammen.

Die zweite Unbestimmtheit meiner ursprünglichen Arbeit betraf die Frage, ob der Schwärzungssprung, der aus den Aufnahmen 1, 2, 3, (Tafel VI) zu erkennen ist, den Spektren selbst wesentlich anhaftet oder ob er durch irgendeinen Nebenvorgang in die Spektrogramme hereingebracht wurde. Ich sah ursprünglich von der Erörterung dieser Frage ab, indem ich es als Zweck meines Aufsatzes betonte, auf die Unabhängigkeit der Bremsstrahlung vom Antikathodenmetall aufmerksam zu machen. Inzwischen ist die Frage nach der Ursache dieses Schwärzungssprunges aber durch eine Mitteilung, die Herr Manne Siegbahn mir zukommen ließ, geklärt worden. Der scheinbare Intensitätssprung ist in der Tat auf eine sekundäre Ursache zurückzuführen, und zwar auf die selektive Absorption der Wolframschneiden, welche den Spalt bei der Seemannschen Lochkamera-Methode bilden in derjenigen Ausführung, in welcher mir der Apparat geliefert wurde.

Die photographische Untersuchung des kurzwelligsten Teiles des Spektrums ist in der Tat noch nicht so durchgearbeitet gewesen, daß eine derartige Entstellung der Intensitätsverteilung hätte vorausgesehen werden können. Bekanntlich bewegen sich die meisten bisherigen Arbeiten vorwiegend in einem verhältnismäßig langwelligen Gebiet. Selbst wenn man sich die Ergebnisse der Arbeit über die Absorption der Röntgenstrahlen von Hull und Rice eingehend überlegt hat, wird man durchaus davon überrascht, daß durch die Absorption im Metalle die Intensitätsverteilung auf eine Entfernung von weit mehr als einer Oktave von der Eigenfrequenz so außerordentlich beeinflusst werden kann. Die diesmal wiedergegebenen Aufnahmen sind mit einem hinreichend erweiterten Spalt gemacht worden. Der Absorptionsfehler in den Wolfram-Spalträndern kommt dann beinahe gar nicht mehr in Frage und man sieht, daß derjenige Teil des Spektrums, welcher kurzwelliger ist als die Platin-Iridium- K -Strahlung, hier eine Schwärzung hervorgerufen hat, welche durchaus von der gleichen Größenordnung ist wie die Schwärzung der unmittelbar angrenzenden langwelligen Teile des Spektrums. Sicherlich ist auch die in meiner gemeinsam mit Herrn Seemann veröffentlichten Arbeit Fig. 1 und auf der Tafel VII dargestellte Intensitätsverteilung (diese Zeitschr. 19, 269—271, 1918) nur unter Berücksichtigung der Absorption in den Wolfram-Spalträndern richtig zu deuten.

Die Tatsache, daß die Schwermetalle denjenigen Teil des Spektrums, der kurzwelliger ist als ihre Eigenstrahlung, so sehr viel mehr

schwächen als den unmittelbar angrenzenden langwelligen Teil des Spektrums, ist auch dafür verantwortlich gewesen, daß Rutherford, Barnes und Richardson ein Anwachsen der Strahlenhärte mit der Spannung nur bis zu einer verhältnismäßig niedrigen Grenze (140 Kilovolt) beobachtet haben. Diese Autoren benutzten zum großen Teile das Kriterium der Absorption in verhältnismäßig starken Bleischichten, um die Strahlung zu beurteilen. Man kann sich aber, wenn man eine Spektralaufnahme unter Vorschaltung eines Bleifilters macht, mit Leichtigkeit überzeugen, daß dieses Bleifilter so gut wie gar keine Wellenlängen hindurchläßt, welche kürzer sind als die Blei- K -Strahlung. Durch ein Bleifilter tritt vielmehr nur die der Eigenstrahlung des Bleies entsprechende, sowie die K -Strahlung des Antikathoden-Schwermetalls (Pt , Ir , W) mit merklicher Intensität hindurch. Wird also unter Vorschaltung verschiedener Bleifilterdicken der Absorptionsexponent im Aluminium gemessen, wie das die genannten Autoren taten, so kommt dabei ein Ergebnis heraus, welches einer Bande entspricht, die zwischen der Blei- K -Strahlung, und der W - K -Strahlung liegt. Das ergibt aber einen Absorptionsexponenten, der sich durchaus mit demjenigen deckt, welcher in der erwähnten englischen Arbeit als der kleinste mit einer Wolfram-Antikathode erreichbare angegeben wird. Dabei ist aber nicht das Antikathodenmaterial schuld an dem mangelnden Anstiege der Härte, sondern das angewandte Bleifilter.

(Eingegangen 31. Juli 1918.)

Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Diffusion.

Von Philipp Frank.

Man sagt gewöhnlich, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Diffusion sei im Gegensatz zur endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elastischen und elektrischen Störungen unendlich groß. Darunter versteht man das folgende: Wenn die Konzentration einer diffundierenden Substanz zur Zeit Null nur in einem begrenzten Raumteil von Null verschieden (z. B. konstant), sonst aber im ganzen Raum Null ist, so wird nach jeder noch so kurzen Zeit in jedem noch so weit entfernten Raumpunkt die Konzentration bereits einen von Null verschiedenen Wert haben. Dieser mathematischen Folgerung aus der Diffusionsgleichung steht gegenüber, daß erfahrungsgemäß die Diffusion sogar sehr langsam erfolgt, was sich einfach dadurch erklärt,

daß die Konzentration zwar sofort überall von Null verschieden ist, es aber doch sehr lange dauern kann, bis sie einen experimentell nachweisbaren Betrag erreicht.

Diese ganze Theorie hat natürlich nur einen Sinn, wenn man sich auf den Standpunkt der stetigen Verteilung der Materie im Raum stellt. Wenn die diffundierende Substanz aber aus einer endlichen Anzahl von Molekülen besteht, kann ihre Konzentration nicht sofort überall von Null verschieden sein, sondern es muß eine ganz bestimmte Zeit vergehen, bis das erste Molekül in die betreffende Gegend des Raumes kommt. Es muß also eine endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit bestehen; diese muß sich auch experimentell feststellen lassen, da wir ja nach der heutigen Auffassung in Teilchen, die in Brownscher Bewegung begriffen sind, ein makroskopisches Bild der molekularen Diffusion vor uns haben.

Im folgenden soll also zunächst die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Diffusion in diesem Sinne untersucht werden, also die Geschwindigkeit, mit der sich der „Kopf“ eines Teilchenschwarmes fortbewegt, wobei sich verfolgen läßt, wie diese Geschwindigkeit mit wachsender Teilchenzahl unbegrenzt wächst und sich so dem Werte ∞ nähert, den sie bei Annahme stetiger Raumerfüllung in der klassischen Diffusionstheorie hat.

Anhangsweise soll dann noch kurz die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Diffusion in einem anderen Sinne behandelt werden, nämlich als Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Konzentrationsmaximums, worauf schon Fourier bei der Wärmeleitung hingewiesen hat; auch diese Betrachtung wird auf die Brownsche Bewegung angewendet.

§ 1.

Wir wollen uns auf die Diffusion in einer bestimmten Richtung, die wir zur x Richtung wählen, beschränken, weil sich in diesem Falle schon alles grundsätzlich Wichtige besprechen läßt. Die Diffusionstheorie sagt unter der Annahme stetiger Raumerfüllung bekanntlich folgendes aus: Bezeichnen wir mit $w(x, t)$ die Konzentration zur Zeit t an der Stelle x , d. h. befindet sich zu dieser Zeit die Substanzmenge $w(x, t) dx$ in der Schicht zwischen den Ebenen mit den Abszissen x und $x + dx$, so genügt diese Funktion der Differentialgleichung

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1)$$

wo D die Diffusionskonstante ist. Dabei muß, um das Problem eindeutig zu machen, zur Zeit $t = 0$ noch die Konzentration w als Funktion des Ortes x gegeben sein.

An Stelle dieser Theorie tritt nach Einstein und Smoluchowski, wenn man die diffundierende Substanz als molekular aufgebaut ansieht, die folgende Grundlage:

Wenn wir von einer bestimmten Anfangsverteilung der Teilchen ausgehen und beobachten, was aus dieser Verteilung nach Ablauf der Zeit t geworden ist, so wird nicht immer dieselbe Endverteilung entstehen. Betrachten wir aber das arithmetische Mittel aus der Anzahl der Teilchen, die sich bei sehr vielen Versuchen mit derselben Anfangsverteilung nach der Zeit t zwischen x und $x + dx$ befinden und nennen diese Zahl wieder $w(x, t)dx$, so genügt diese mittlere Anzahl wieder der Differentialgleichung (1).

Wir wollen nun von dem einfachsten Fall ausgehen, daß sich zur Zeit $t = 0$ alle Teilchen, N an der Zahl, in der Ebene $x = 0$ befinden mögen. Die dieser Anfangsbedingung angepaßte Lösung der Gl. (1) lautet bekanntlich:

$$w(x, t) = \frac{N}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}, \quad (2)$$

Wollen wir das Gesetz für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit aufsuchen, so müssen wir fragen, wieviele Teilchen sich zur Zeit t im Mittel bereits um eine Strecke, die größer als ζ ist, von der Anfangslage entfernt haben; diese Anzahl nennen wir $W(\zeta)$; es ist offenbar

$$W(\zeta) = 2 \int_{\zeta}^{\infty} w(x, t) dx. \quad (3)$$

Wir führen nun das Gaußsche Fehlerintegral $\Phi(x)$ ein:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$$

und die daraus abgeleitete Funktion $\Psi(x)$

$$\Psi(x) = 1 - \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-x^2} dx, \quad (4)$$

dann ergibt sich aus (3) durch Einsetzen von (2)

$$W(\zeta) = N \Psi\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{Dt}}\right). \quad (5)$$

Es fragt sich nun, wo sich zur Zeit t die Grenze zwischen dem von Teilchen erfüllten und dem von Teilchen noch leeren Raum befindet. Da wegen der molekularen Zusammensetzung der diffundierenden Substanz diese Grenze nicht bei jedem Versuch genau dieselbe Lage hat, so kann man nur fragen, welches im Mittel die Abszisse dieser Grenze ist. Man legt sie wohl am einfachsten so fest, daß man fragt, außerhalb welchen Gebietes zur Zeit t sich gerade erst im Mittel ein einziges Teilchen befindet; die Grenz-

abszisse ζ ist dann einfach durch die Gleichung

$$W(\zeta) = 1 \quad (6)$$

bestimmt, d. h. aber nach Gl. (5)

$$\Psi\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{Dt}}\right) = \frac{1}{N}. \quad (7)$$

Wenn wir die Gleichung

$$\Psi(x) = \frac{1}{N} \quad (8)$$

nach x auflösen, erhalten wir eine Funktion

$$x = f(N), \quad (9)$$

die offenbar, wenn N von 1 bis ∞ wächst, monoton von 0 bis ∞ wächst. Ihre Werte lassen sich leicht mit Hilfe der Tabellen des Gaußschen Fehlerintegrals berechnen.

Das Gesetz, nach dem sich die Grenze des von Teilchen erfüllten Gebietes fortschiebt, ist dann durch

$$\zeta = 2f(N)\sqrt{Dt} \quad (10)$$

gegeben. Da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit keine konstante ist, aber hier wie im folgenden immer dieselbe zeitliche Abhängigkeit zeigt, nämlich die der mittleren Verschiebung eines in Brownscher Bewegung begriffenen Teilchens, so wollen wir als Maß für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einfach den in der ersten Sekunde zurückgelegten Weg γ ansehen, den wir dann eben als die Geschwindigkeit des „Kopfes“ des Teilchenschwarmes bezeichnen können

$$\gamma = 2f(N)\sqrt{D}. \quad (11)$$

Wenn N ins Unendliche wächst, wird auch γ unendlich und wir haben dann wieder den Fall der klassischen Diffusionstheorie vor uns, die sich also hier als Grenzfall einordnet. Zur Diskussion der Formel (11) empfiehlt es sich vielleicht, die Werte der Funktion $f(N)$ für einige kleinere Werte des Arguments zusammenzustellen.

Tabelle I.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(N)$	0	0,48	0,68	0,81	0,91	0,98	1,04	1,09	1,13

N	10	100	1000
$f(N)$	1,16	1,83	2,32

Für sehr große Werte des Arguments kann man eine Näherungsformel angeben, wenn man von der folgenden bekannten semikonvergenten Entwicklung von $\Psi(x)$ ausgeht¹⁾:

$$\Psi(x) = \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \dots \right). \quad (12)$$

¹⁾ Siehe z. B. Jahnke und Emde, Funktionentafeln, IX, S. 31.

Wenden wir nun die erste Näherung an, so erhalten wir nach Gl. (8) die Funktion $f(N)$ durch Auflösung der Gleichung

$$\frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} = \frac{1}{N}.$$

Diese Näherung ist für sehr große N anwendbar, da ja $f(N)$ mit N ins Unendliche wächst, also einem großen N auch ein großes x entspricht. Bilden wir auf beiden Seiten den natürlichen Logarithmus und vernachlässigen $\log x$ gegenüber x , so ergibt sich

$$x = \sqrt{\lg N},$$

also für unsere gesuchte Funktion der Näherungswert

$$f(N) = \sqrt{\lg N}. \quad (13)$$

Es ist zu beachten, daß diese Formel nur gültig ist, wenn $\lg N$ schon groß gegen $\lg \lg N$ ist.

Um eine Vorstellung vom zahlenmäßigen Betrage dieser Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu gewinnen, wollen wir etwa einen Wert von D zugrunde legen, wie er bei der Brownschen Bewegung von Quecksilberteilchen in Wasser vorkommt. Bei der von R. Fürth¹⁾ beobachteten Quecksilberemulsion ist ungefähr:

$$D = 10^{-8} \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}.$$

Dann ist nach Gl. (11)

$$\gamma = 2 \times 10^{-4} \cdot f(N) \text{ cm.}$$

Für $N=6$ hat die Funktion f nach unserer Tabelle I etwa den Wert 1 und es ist

$$\gamma = 2 \times 10^{-4} \text{ cm.}$$

Aber auch für tausend Teilchen hat nach derselben Tabelle der Weg, den der Kopf des Teilchenschwarmes in der ersten Sekunde zurücklegt, erst den Wert

$$\gamma = 4,6 \times 10^{-4} \text{ cm.}$$

Wenn wir für N eine Zahl von der Größenordnung der Loschmidtschen Zahl nehmen, also etwa $\lg N = 25$ setzen, können wir für f schon die Näherungsformel (13) anwenden, aber auch da erhalten wir erst

$$\gamma = 10^{-3} \text{ cm.}$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wächst also wohl mit wachsender Teilchenzahl ins Unendliche, aber, wie man sieht, äußerst langsam.

Das hier behandelte Problem läßt sich auch anders formulieren: Es seien N Teilchen in Brownscher Bewegung begriffen. Man betrachte ihre Verschiebungen in einer Zeit t und merke sich die Verschiebung desjenigen Teilchens, das in dieser Zeit die größte Verschiebung erleidet. Man wiederhole dann diesen Ver-

such mit N Teilchen sehr oft und bilde das arithmetische Mittel aus den so beobachteten Maximalverschiebungen. Dafür muß sich offenbar auch die durch Gl. (10) gegebene Größe ζ ergeben¹⁾. Anstatt N Teilchen zu beobachten, kann man natürlich auch ein Teilchen in N Zeitabschnitten, von denen jeder die Länge t hat, beobachten. Auch hier ist die mittlere Maximalverschiebung durch Gl. (10) gegeben.

Diese Gleichung ist aber überhaupt eigentlich nur eine mathematische Formel der Wahrscheinlichkeitstheorie. Wenn wir das mittlere Verschiebungsquadrat einführen:

$$\overline{A^2} = 2 D t \quad (14)$$

läßt sich Gl. (10) schreiben:

$$\zeta = \sqrt{2 f(N) \overline{A^2}}. \quad (15)$$

Wenn ich als Ergebnis von N Versuchen eine Reihe von Zahlen erhalte, die sich nach dem Gaußschen Fehlergesetz mit dem mittleren Fehlerquadrat $\overline{A^2}$ verteilen, und ich zahlreiche solcher Serien von N Versuchen, immer mit demselben Präzisionsmaß mache, und ich bei jeder Serie das am weitesten vom Mittelwert abweichende Messungsgebiet aussuche und aus allen diesen Maximalabweichungen das Mittel nehme, so ist dieses Mittel offenbar immer durch Gl. (15) gegeben.

Auf ganz anderen wahrscheinlichkeitstheoretischen Sätzen beruht die Untersuchung von Smoluchowski²⁾ über die mittlere maximale Abweichung eines Brownschen Teilchens aus seiner Ruhelage. Hier wird nämlich nicht die größte in einer dieser N Zeitstrecken erlittene Verschiebung genommen, sondern die größte innerhalb der N Zeitstrecken erreichte Entfernung aus der Anfangslage.

§ 2.

Etwas verwickelter wird das Gesetz für die Fortpflanzung des Kopfes eines Teilchenschwarmes, wenn man sich zur Zeit $t=0$ nicht alle Teilchen in einer Ebene versammelt denkt. Wir wollen den Fall behandeln, daß zur Zeit $t=0$ die Teilchen den ganzen Halbraum $x < 0$ mit konstanter Dichte erfüllen, während der Halbraum $x > 0$ frei von Teilchen ist. Es wird wieder gefragt, nach welchem Gesetz sich die Lage des von Teilchen erfüllten Raumteils verschiebt. Im

1) Diesen Versuch hat K. Przibram angestellt (diese Ztschr. 15, 766, 1914). Er gibt dort auch eine von F. Hasenöhl ihm mitgeteilte theoretische Ableitung an, die für diese mittlere Maximalverschiebung eine Formel ergibt, die für sehr große N mit unsrer Formel (10) übereinstimmt. Für kleinere N ist sie, wie die Ableitung überhaupt, wesentlich komplizierter.

2) v. Smoluchowski, Wiener Ber. 124, 263, 1915.

1) R. Fürth, Ann. d. Phys. 53, 195, 1917.

Halbraum $x < 0$ möge am Anfang auf eine Schichte von der Dicke dx die Anzahl $n dx$ Teilchen kommen.

Dann ist Gl. (1) unter den Anfangsbedingungen zu lösen, daß

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= n \quad \text{für } x < 0 \\ w(x, 0) &= 0 \quad \text{für } x > 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Nun lautet die allgemeine Lösung, wenn $w(x, 0) = \varphi(x)$, eine willkürlich gegebene Funktion ist, bekanntlich¹⁾:

$$w(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha) e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4Dt}} d\alpha. \quad (17)$$

Daraus ergibt sich für die Anfangsbedingungen (16)

$$w(x, t) = \frac{n}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4Dt}} d\alpha. \quad (18)$$

Bezeichnen wir mit $W(\xi)$ die Anzahl der Teilchen, die zur Zeit t um mehr als ξ von der ursprünglichen Grenzfläche $x=0$ entfernt sind, so ist jetzt, weil nur Stellen mit positiver Abszisse in Betracht zu ziehen sind,

$$W(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} w(x, t) dx \quad (19)$$

also nach (18)

$$W(\xi) = \frac{n}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{\xi}^{\infty} dx \int_{-\infty}^0 d\alpha \cdot e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4Dt}} \quad (20)$$

Das läßt sich mit Hilfe der in Gl. (4) definierten Funktion schreiben:

$$W(\xi) = n \sqrt{Dt} \int_{\frac{\xi}{\sqrt{Dt}}}^{\infty} \Psi(x) dx. \quad (21)$$

Führen wir die Hilfsfunktion $X(x)$ ein:

$$X(x) = \int_x^{\infty} \Psi(\alpha) d\alpha, \quad (22)$$

so läßt sie sich durch partielle Integration auf $\Psi(x)$ zurückführen; es ist nämlich

$$X(x) = -x \Psi(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}. \quad (23)$$

Diese Funktion X hat im allgemeinen denselben Charakter wie Ψ . Wenn x von 0 bis ∞ wächst, nimmt $X(x)$ monoton von $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ bis 0 ab.

Die Lage der Grenzabszisse ξ zur Zeit t wird wieder einfach durch Gl. (6) bestimmt. Diese lautet aber hier wegen Gl. (21) und (22)

$$X\left(\frac{\xi}{2\sqrt{Dt}}\right) = \frac{1}{n\sqrt{Dt}} \quad (24)$$

Wir bezeichnen die Auflösung von

$$X(x) = \frac{1}{y} \quad (25)$$

nach x , mit

$$x = F(y). \quad (26)$$

Wenn y von $\sqrt{\pi}$ bis ∞ wächst, so wächst auch $F(y)$ monoton von 0 bis ∞ . Die Abszisse ξ für den Kopf unseres Teilchenschwarmes lautet dann nach Gl. (24)

$$\xi = 2F(n\sqrt{Dt})\sqrt{Dt}. \quad (27)$$

Dieses Gesetz ist schon ein recht kompliziertes. Wenn wir wieder den in der ersten Sekunde zurückgelegten Weg als Maß für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ansehen, so sieht man jedenfalls, daß sie ins Unendliche wächst, wenn die auf die Schichtdicke 1 im Anfang entfallende Teilchenzahl ins Unendliche wächst. Mit Hilfe von Gl. (23) ließe sich für die Funktion F eine Tabelle aus der Tafel des Gaußschen Fehlerintegrals herleiten. Wir wollen uns an dieser Stelle aber begnügen, eine Näherungsformel für große Werte des Arguments anzugeben.

Wenn wir für $\Psi(x)$ die schon einmal angewendete Näherungsformel (12) benutzen und uns wieder nur mit dem ersten Gliede begnügen, ergibt sich nach Gl. (23) für X der Näherungswert Null. Wir müssen also in Formel (12) auch das zweite Glied berücksichtigen; dann erhalten wir

$$X(x) = \frac{1}{2x^2\sqrt{\pi}} e^{-x^2}. \quad (28)$$

Daraus ist nun der Näherungswert für F herzuleiten. Wir nehmen wieder auf beiden Seiten von Gl. (25) den natürlichen Logarithmus, dann ist wegen (28)

$$\lg(2x^2) + \lg\sqrt{\pi} + x^2 = \lg y. \quad (29)$$

Daraus ergibt sich für sehr große x wieder

$$F(y) = x = \sqrt{\lg y}. \quad (30)$$

Für sehr großes Argument ist also F mit der durch Gl. (8) und (9) definierten Funktion f identisch. Die Strecke ξ , die der Kopf des Teilchenschwarms in der Zeit t zurücklegt, ist also in unserem Fall durch dieselbe Formel gegeben, wie wenn zur Zeit 0 alle N Teilchen in einer Ebene versammelt gewesen wären. Es muß dabei nur das Argument von F in Gl. (27) sehr groß sein, d. h. die Anzahl der Teilchen, die auf eine Schichte von der Dicke $\sqrt{Dt}$ entfallen, muß sehr groß sein. Die Verschiebung des „Kopfes“ ist dann zur Zeit t so groß, als wären am An-

1) Vgl. Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen der mathem. Physik. 5. Aufl. Bd. II, § 37.

fang alle diese $n\sqrt{Dt}$ Teilchen in der Ebene $x=0$ versammelt gewesen.

§ 3.

Der hier behandelte Begriff der Fortpflanzungsgeschwindigkeit hat nur bei Annahme molekularer Zusammensetzung der Materie einen Sinn. Wir wollen nun noch kurz darauf hinweisen, daß man von Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Diffusion auch noch in einem anderen Sinne sprechen kann, der auch bei Annahme stetiger Raumerfüllung bestehen bleibt. Wir knüpfen dabei an eine Betrachtung, die Fourier¹⁾ für die Wärmeleitung angestellt hat, an.

Wir betrachten wieder den Fall, daß zur Zeit $t=0$ alle N Teilchen sich in der Ebene $x=0$ befinden. Wir fassen die Schichte von der Abszisse x und der Dicke dx ins Auge und fragen uns, zu welcher Zeit t sich die meisten Teilchen in dieser Schichte befinden. Dadurch erhalten wir eine Beziehung zwischen x und t , die wir als das Gesetz für die Fortpflanzung des Konzentrationsmaximums bezeichnen können. Die gesuchte Beziehung lautet offenbar

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0,$$

wo w der durch Gl. (2) gegebene Ausdruck ist. Wegen Gl. (1) kann an Stelle dieser Beziehung auch

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (31)$$

gesetzt werden. Nun ist nach Gl. (2)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{N}{4\sqrt{\pi(Dt)^3}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \left(\frac{x^2}{2Dt} - 1 \right). \quad (32)$$

Daher lautet das gesuchte Gesetz:

$$x^2 = 2Dt, \quad (33)$$

d. h. das Maximum der Konzentration pflanzt sich nach demselben Gesetz fort wie ein einzelnes Teilchen sich im Mittel verschiebt, wenn man als Maß dafür die Wurzel aus dem mittleren Verschiebungsquadrat ansieht.

Auf diese Formel läßt sich vielleicht auch eine neue experimentelle Bestimmung des Diffusionskoeffizienten und daher der Loschmidtschen Zahl aus der Brownschen Bewegung gründen. Man denkt sich zur Zeit $t=0$ alle Teilchen in der Ebene $x=0$. Das läßt sich experimentell, wie Herr R. Fürth mich aufmerksam gemacht hat, am besten dadurch verwirklichen, daß man sie an eine in dieser Ebene befindliche feste Wand anpreßt. Dadurch wird allerdings die Bewegung nach der einen Seite

verhindert, was aber nur zur Folge hat, daß die Konzentration überall zweimal so groß wird als in Gl. (2) angegeben ist, während das Gesetz (33) für die Fortpflanzung des Maximums unverändert bleibt. Man zählt dann einfach in einer Schichte von der Abszisse x in kurzen aufeinanderfolgenden Zeitintervallen die darin befindliche Anzahl der Teilchen, und sucht denjenigen Zeitpunkt heraus, wo die meisten Teilchen angetroffen werden. In dieser Methode kommt unmittelbar gar keine Mittelwertbildung vor.

Man kann vielleicht, wenn wir wie üblich die Mittelwertbildung durch Querstriche bezeichnen, unsere Fouriersche Formel (33) den anderen ganz ähnlich gebauten gegenüberstellen, die zur Bestimmung des Diffusionskoeffizienten dienen.

$$\overline{x^2} \frac{1}{t} = 2D. \quad (\text{Fourier})$$

Hier ist t die Zeit, die das Konzentrationsmaximum zum Durchlaufen der Strecke x braucht.

$$\overline{x^2} \frac{1}{t} = 2D. \quad (\text{Einstein})$$

Hier wird der Mittelwert über die verschiedenen x^2 gebildet, die während gleich langer Zeiten t zurückgelegt werden.

$$x^2 \left(\frac{1}{t} \right) = 2D. \quad (\text{Schrödinger}^1)$$

Hier ist der Mittelwert über die verschiedenen „einseitigen“ Erstpassagezeiten gebildet, die bei verschiedenem Durchlaufen derselben Strecke x gebraucht werden.

$$x^2 \frac{1}{t} = 2D. \quad (\text{Fürth}^2)$$

Wenn statt der „einseitigen“ Erstpassagezeiten die „doppelseitigen“ genommen werden, tritt an Stelle der Schrödingerschen Formel die Fürthsche.

1) Schrödinger, diese Ztschr. 18, 289, 1915. Siehe auch v. Smoluchowski im selben Band S. 318, und D. Konstantinowsky im selben Band S. 369.

2) R. Fürth, a. a. O.

(Eingegangen 5. August 1918.)

Das Erweichen und Biegen eines Kohlenstabes bei sehr hohen Temperaturen (Vorlesungsversuch)¹⁾.

Von Joh. Plotnikow.

Im Herbst 1914, während der Vorbereitung der Moissanschen Versuche für die Vor-

1) Fourier, Théorie analytique de la chaleur, Chap. IX, Sect. III, Art. 387.

1) Kurzer Auszug aus dem Ber. der Petersburger Akademie vom Jahre 1917 (Seite 883).

lesung, hatte ich beobachtet, daß ein Kohlenstab von 5 mm Durchmesser und etwa 20 cm Länge bei dem Durchlassen eines Stromes von etwa 100 Ampère bei 110 Volt unter der Einwirkung der Schwere sich ein wenig einbiegt. Diese Erscheinung konnte auf die Weise gedeutet werden, daß bei dieser Temperatur eine schwache Erweichung der Kohle stattfindet. Einen stärkeren Strom konnte ich nicht durchschicken, weil mir kein entsprechendes Rheostat zur Verfügung stand. Erst im Herbst 1916 wurde ein solcher nach meinen Angaben konstruiert und ich konnte meine Versuche bei günstigeren Bedingungen wiederholen. Die Versuchsanordnung war eine sehr einfache. Ein Kohlenstab von etwa 50 mm Durchmesser war am Stativ befestigt, den anderen hielt ich in der Hand. Zwischen den beiden wurde ein Kohlenstab von 5 mm Durchmesser und von der Länge 10 bis 30 cm, wie es in der Fig. 1

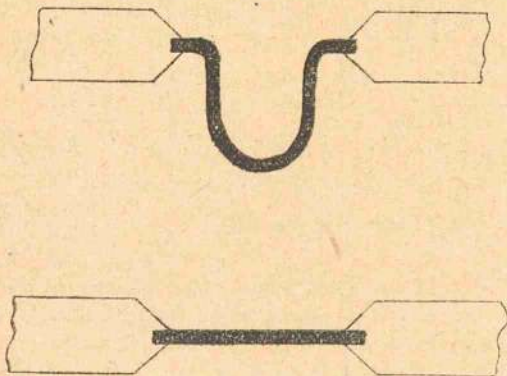


Fig. 1.

angegeben ist, eingestellt. Alsdann wurde der Strom durchgelassen. Bei 150 Ampère fühlte man deutlich das Weichwerden des Stabes; bei 200 Ampère ist es noch größer. Beim vorsichtigen Drücken mit der Hand, in der sich der freie Kohlenstab befand, konnte man den dünnen weißglühenden Kohlenstab zu einem Bogen biegen. In der Fig. 2 ist eine Anzahl von mir gebogener Kohlenstäbe abgebildet.

Im Februar 1917 hatte ich die Gelegenheit gehabt, in der Hauptstation für elektrische Straßenbeleuchtung diese Versuche mit Strömen bis zu 800 Ampère zu wiederholen und konnte eine Biegung von Stäben von 15 mm Durchmesser erzielen. Die Versuche erfordern eine gewisse Übung, damit sie gut gelingen, sonst brechen die Kohlenstäbe sehr leicht. Außerdem sind diese Versuche auch gefährlich, aber sehr effektiv. Zu dieser Zeit erhielt ich auf Umwegen die interessante Monographie von Lummer über die Verflüssigung

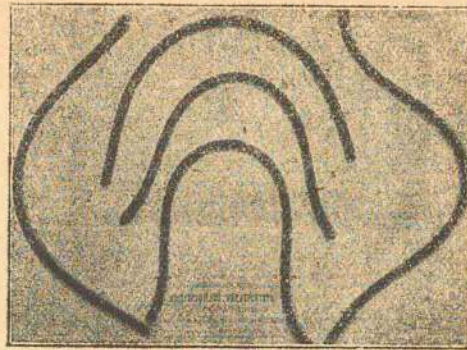


Fig. 2.

der Kohle. Beim Vergleich meiner Versuche mit den seinigen kam ich unwillkürlich auf den Gedanken, ob die Verflüssigung nicht besser gelingen wird, falls sie mit dieser Methode des Erhitzens von Kohlenstaub (selbstverständlich bei entsprechend veränderten Versuchsbedingungen) erzielt wird.

Moskau, den 1. August 1918.

(Eingegangen 19. August 1918.)

Temperatur- und Regenveränderlichkeit in Berlin.

Von Otto Meißner.

§ 1. Einleitung. In seinem Werke über das Klima von Berlin gibt Hellmann¹⁾ auch Werte für die „mittlere Abweichung“ der Monatsmittel für Temperatur (1848—1907) und Niederschlagshöhe oder Regenmenge (aus 1848—1890) an. Der von Dove eingeführte Ausdruck „mittlere“ Abweichung²⁾ sollte aber jetzt, wo sich erfreulicherweise Ausgleichsrechnung und Kollektivmaßlehre auch in der Meteorologie immer mehr einzubürgern beginnt, durch den sachgemäßen: „durchschnittliche“ Abweichung ersetzt werden, denn es handelt sich hier tatsächlich³⁾ um die einfache Summierung der Abweichungen der Einzeljahrgänge vom Mittel und Division durch die Anzahl der Beobachtungsjahre.

Andererseits ist es natürlich auch von großem Interesse, die „mittlere“ Abweichung im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate zu berechnen sowie beide zu vergleichen. Schließlich habe ich außerdem noch die mittlere Veränderlichkeit, d. h. die Differenzen der Monatsmittel eines

1) Das Klima von Berlin. I. Teil. Niederschläge, Gewitter. S. 109 [35]. II. Teil. Lufttemperatur. S. 63.

2) Vgl. z. B. Supan, Physische Erdkunde, 3. Aufl. S. 101.

3) Wie die Ausrechnung, die sicherheitsshalber vorgenommen wurde, gleichfalls lehrte.

Tabelle I.

	Temperatur (1848—1907)						Niederschlag (1848—1890)					
	D. A.	M. A.	M. V.	M. A. D. A.	M. V. M. A.	1000 K	D. A.	M. A.	M. V.	M. A. D. A.	M. V. M. A.	1000 K
Januar	2 ⁰ ,31	2 ⁰ ,97	4 ⁰ ,00	1,29	1,34	+ 382	39,5	48,5	72,0	1,23	1,48	+ 104
Februar	2,22	2,82	3,94	1,27	1,40	+ 110	56,4	68,1	93,0	1,21	1,36	+ 198
März	1,69	2,07	2,95	1,22	1,43	+ 636	44,5	62,0	88,7	1,39	1,43	+ 95
April	1,30	1,55	2,48	1,19	1,60	+ 207	46,5	59,7	79,7	1,28	1,33	+ 35
Mai	1,46	1,92	2,86	1,31	1,49	+ 120	41,1	56,7	80,6	1,38	1,42	— 234
Juni	1,05	1,43	2,08	1,36	1,45	— 55	39,5	51,2	62,0	1,29	1,21	— 56
Juli	1,22	1,41	1,97	1,16	1,39	— 13	43,1	63,0	94,1	1,46	1,50	— 46
August	1,08	1,32	1,90	1,22	1,44	+ 244	43,6	53,1	73,6	1,21	1,38	+ 108
September	0,99	1,20	1,61	1,21	1,34	+ 386	43,0	52,9	76,7	1,23	1,45	+ 182
Oktober	1,26	1,57	2,21	1,25	1,40	+ 114	46,9	62,2	87,6	1,32	1,41	— 184
November	1,39	1,72	2,40	1,24	1,39	— 193	45,9	57,1	81,1	1,24	1,42	— 59
Dezember	1,87	2,37	3,72	1,26	1,57	+ 353	43,7	56,1	76,4	1,27	1,36	0
c_0 (Mittel)	1,49	1,86	2,76	1,25	1,44	+ 191	44,5	57,5	80,5	1,29	1,40	+ 12
c_1	0,54	0,70	1,00	.	.	115	.	.	.	.	.	53
φ_1	30 ⁰	31 ⁰	35 ⁰	.	.	41 ⁰	.	.	.	.	.	18 ⁰
c_2	0,22	0,30	0,67	.	.	167	.	.	.	.	.	120
φ_2	37 ⁰	30 ⁰	332 ⁰	.	.	114 ⁰	.	.	.	.	.	93 ⁰
c_4	0,09	0,10	0,11	.	.	150	.	.	.	.	.	46
φ_4	108 ⁰	129 ⁰	130 ⁰	.	.	131 ⁰	.	.	.	.	.	3 ⁰
$Q = \frac{2A}{B}$	3,38	3,57	3,44	1,13	1,01	1,03	0,84	0,76	0,74	0,83	0,67	1,26

Jahrgangs und des vorhergehenden, berechnet. Dabei haben sich interessante Resultate ergeben.

§ 2. Die neue Berliner Reihe. Tabelle I (s. u.) gibt zunächst für die „neue“ Berliner Reihe, d. h. seit Beginn der amtlichen Beobachtungen, für Temperatur und Regen die durchschnittliche Abweichung (D. A.) mittlere (M. A.) Veränderlichkeit (M. V.), ferner die Verhältnisse, deren theoretische Werte:

$$\frac{M. A.}{D. A.} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sim 1,25$$

$$\frac{M. V.}{M. A.} = \sqrt{2} \sim 1,41$$

sind, dann die Anfangsglieder der Cosinusreihe für die Konstanten, die eine jährliche Periode aufweisen (konst. = $c_0 + c_1 \cos(30m - \varphi_1) + \dots$, $m = \frac{1}{2}$ für Januar usw.). K bzw. 1000 K endlich

ist der Korrelationsfaktor¹⁾ für die Beziehung zwischen den Abweichungen der Werte zweier unmittelbar aufeinanderfolgender Monate, und zwar bezieht sich K für Januar auf Dez./Jan. usw. $Q = \frac{2A}{B}$, worin A die Quadratsumme der

1) Dieser ist bekanntlich, wenn x_v und y_v zusammengehörige Abweichungen zweier Größen xy von Mittel $\bar{x}$ $\bar{y}$ sind, durch

$$K = \frac{\sum x_v y_v}{\sqrt{\sum x_v^2 \sum y_v^2}}$$

definiert.

Abweichungen, B die Summe der Quadrate der Abweichungsdifferenzen $\varepsilon_{v+1} - \varepsilon_v$ ist. Der mittlere Fehler von Q ist durchweg $\frac{1}{\sqrt{12-1}} = \pm 0,30$.

§ 3. Die Temperaturveränderlichkeit der neuen Reihe. Die Diskussion der Temperaturveränderlichkeit der neuen Berliner Reihe auf Grund von Tab. I liefert folgende Ergebnisse:

Das Verhältnis M. A. : D. A. und M. V. : M. A. zeigt keine Jahresperiode und ist auch normal. Daß M. V. : M. A. fast genau den theoretischen Wert ergibt, ist sehr bedeutsam, denn es zeigt, daß in der 60jährigen Berliner Temperaturreihe von 1848—1907 keine Periodizität von erheblicher Größe aufgetreten ist (sonst müßte das Verhältnis kleiner sein¹⁾). Wir werden später sehen, daß dies nicht zu allen Zeiten der Fall gewesen ist.

D. A., M. A. und M. V. zeigen übereinstimmend eine ausgesprochene, sich auch in dem hohen Werte von Q zeigende, jährliche Periode von „verkehrt-thermischem Charakter“ d. h. Maximum im Winter (hier Ende Januar). Auch die kleine $\frac{1}{2}$ - und die noch kleinere $\frac{1}{4}$ -jährliche Periode, jedenfalls durch die „zu kleinen“ Werte

1) Ich habe allerdings auch in der neuen Berliner Temperaturreihe die Sonnenfleckenperiode gefunden, aber sie ist im Vergleich zu den aus anderen Ursachen stammenden Unregelmäßigkeiten zu gering, um sich in Q geltend machen zu können. (Astr. Nachr. 204, Nr. 4885, Mai 1917.)

für April und September hervorgerufen, stimmen in den Phasen nicht schlecht überein, und auch die Amplitudenquotienten $\frac{c_2}{c_1}$ und $\frac{c_4}{c_1}$ sind ziemlich gleich.

Der Gang von K ist groß, aber, wie der fast normale Wert von Q zeigt, nicht verbürgt. Am ausgesprochensten ist eine Neigung zu gleichsinniger Temperaturabweichung im Spätwinter (Februar-März) vorhanden. Auch das Mittel zeigt diese Neigung noch. Im Sommer ist sie nicht vorhanden. Die Werte von K haben eine gewisse prognostische Bedeutung, auf die ich aber an dieser Stelle nicht eingehen will.

§ 4. Die Regenveränderlichkeit der neuen Reihe. Hier beziehen sich die abgeleiteten Konstanten nicht auf die absoluten Werte der Regenmenge, vielmehr hat Hellmann in durchaus sachgemäßer Weise die Abweichungen in Prozenten des Mittelwerts angegeben. Infolgedessen existiert hier keine jährliche Periode mehr, da, wie ich auch an anderer Stelle zu zeigen gedenke, die Veränderlichkeit der Niederschlagshöhe mit dieser selbst fast genau proportional wächst. Auch die Werte von K sind hier kleiner und schwanken, so daß man aus der Regenhöhe eines Monats nur sehr unsichere Schlüsse auf die des nächsten ziehen kann.

Daß Q durchweg kleiner als 1 ist, bedeutet eigentlich, daß sich die Abweichungen vom Mittel „zu rasch“, d. h. schneller als bei reiner Zufallsverteilung, ausgleichen. Doch darf man auf diesen Umstand kein besonderes Gewicht legen.

§ 5. Die Temperaturveränderlichkeit der Kirchschen Reihe. Der Astronom Kirch (J. G.) hat schon 1719 in Berlin mit Temperaturbeobachtungen begonnen, die von ihm und Sohn und Tochter, freilich mit einer großen Lücke in den 20er Jahren, bis 1751 fortgeführt sind. Obwohl Hellmann diese Beobachtungen¹⁾ für nicht vollwertig hält, schien mir doch die Berechnung von D. A., M. A. und M. V. auch für diese Reihe angebracht, weil man ja gerade dadurch eventuell auch erwarten konnte, etwaige Inhomogenitäten zu finden. Das Ergebnis ist in Tabelle II zu finden, wo nur noch q aufgenommen ist, das die gleiche Bedeutung wie Q hat, und sich auf die Abweichungen der Einzeljahrgänge von Mittel (wie Q auf die der Monats- vom Jahresmittel) bezieht²⁾; q' ist das Mittel je dreier aufeinanderfolgender Werte.

Tabelle II.

	D. A.	M. A.	M. V.	M. A. D. A.	M. V. M. V.	q	q'
Januar	2,001	2,063	3,68	1,31	1,40	1,11	0,95
Februar	2,04	2,67	4,18	1,30	1,57	0,88	1,13
März	1,88	2,31	2,86	1,23	1,24	1,41	1,16
April	1,62	1,93	2,62	1,20	1,36	1,18	1,41
Mai	1,37	1,81	2,10	1,32	1,16	1,65	1,60
Juni	1,52	1,82	1,95	1,19	1,07	1,97	1,91
Juli	1,19	1,51	1,57	1,27	1,04	2,10	2,29
August	1,20	1,58	1,42	1,22	0,90	2,71	2,07
September	0,78	1,04	1,36	1,33	1,31	1,39	1,70
Oktober	1,15	1,68	2,36	1,46	1,41	1,00	1,43
November	1,77	2,34	2,58	1,32	1,10	1,89	1,25
Dezember	1,45	2,03	3,30	1,39	1,63	0,85	1,28
c_0 (Mittel)	1,50	1,95	2,50	1,29	1,27	1,51	1,51
c_1	0,45	0,57	1,15	.	.	.	0,53
φ_1	49 ⁰	38 ⁰	31 ⁰	.	.	.	196 ⁰
c_2	0,11	0,15	0,21	.	.	.	0,12
φ_2	15 ⁰	53 ⁰	25 ⁰	.	.	.	120 ⁰
c_3	0,13	0,15	0,19	.	.	.	0,09
φ_3	193 ⁰	182 ⁰	124 ⁰	.	.	.	256 ⁰
$Q = 2A:B$	2,41	2,56	4,18	1,34	1,28	1,34	4,77

Zunächst seien die Mittelwerte für die Kirchsche und die neue Reihe zusammengestellt:

	D. A.	M. A.	M. V.	M. A. D. A.	M. V. M. A.
Kirch	1,50	1,95	2,50	1,29	1,27
neue Reihe	1,49	1,86	2,76	1,25	1,41

Diese Werte stimmen bis auf das letzte Paar so gut überein, und auch φ_1 ist so für beide Reihen im Mittel nur um 8⁰, φ_2 um 15⁰ — beides etwa einer Woche entsprechend — verschieden, daß man hiernach jedenfalls die Kirchschen Beobachtungen als den neueren gleichwertig ansehen kann, während der kleine Wert für das Verhältnis M. V.: M. A. auf eine Temperaturschwankung von längerer Periode deutet und einer gesonderten Untersuchung bedarf.

§ 6. Die Brücknersche Periode in der Kirchschen Reihe. Um diese Periodizität genauer zu untersuchen, sind die Werte von q berechnet. Die ausgeglichenen Werte q' zeigen eine, bei den q nur durch das Herausfallen des Novemberwertes verwischte, starke jährliche Periodizität, und zwar sind die q' von November bis März, also in der kalten Jahreszeit, ziemlich normal (nahe bei 1), von Mai bis September aber viel zu groß, d. h.

„es ist in den Kirchschen Temperaturbeobachtungen von 1730—1751 eine langjährige „Schwankung vorhanden, die aber nur im „Sommer scharf hervortritt, im Winter jedoch „völlig verwischt ist.“

Ich habe schon wiederholt gezeigt¹⁾, daß Perio-

1) Wie ich an anderer Stelle nachzuweisen beabsichtige, mit Unrecht.

2) Und nur auf die lückenlose Beobachtungsperiode 1730—1751.

1) Astr. Nachr. 204, Nr. 4885. Annalen der Hydrographie usw. 45, 186.

dizitäten je nach den Jahreszeiten verschieden deutlich hervortreten, z. T. in der Phase derart verschieden, daß man bei der üblichen Benutzung lediglich der Jahresmittel überhaupt so gut wie nichts mehr erhält!

Es ist nun noch die Frage, um was für eine Periode es sich handelt. Man sieht es schon den Einzelwerten an, daß es nur die Brückner-Periode sein kann. Ich habe dies jedoch noch genauer gezeigt mit Hilfe des erweiterten Abbe-Helmertschen Zufallskriteriums¹⁾. Bildet man nämlich für eine Reihe außer der Fehlerquadratsumme

$$\bar{S}_1 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2$$

nacheinander die Summen

$$\begin{aligned}\bar{S}_2 &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 + \dots + (\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n)^2 \\ \bar{S}_3 &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)^2 + \dots \\ &\quad + (\varepsilon_{n-2} + \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n)^2,\end{aligned}$$

so muß theoretisch

$$\bar{S}_\nu = \frac{\nu(n-\nu)(n-\nu+1)}{n(n-1)} \bar{S}_1$$

sein. Aus dem Werte des Quotienten $\bar{S}_\nu$ (beob.): $\bar{S}_\nu$ (ber.) kann man über die systematischen Einflüsse bzw. vorhandene Periodizitäten Rückschlüsse ziehen. Ist nämlich eine sich über 2ν Reihenglieder erstreckende Periode vorhanden, so haben die Werte des Quotienten bei ν ein Maximum, bei 2ν ein Minimum.

Statt $\bar{S}_\nu$ kann man auch die leichter zu berechnenden Größen

Tabelle III.

ν	S_ν^*			$\bar{S}_\nu$		
	beob.	ber.	Qu.	beob.	ber.	Qu.
1	5362	5362	1,00	5362	5362	1,00
2	8302	5118	1,63	13179	1,82 S_1	1,35
3	10338	4814	2,12	29540	2,47 "	2,00
4	16834	4630	3,64	36816	2,97 "	2,31
5	11404	4386	2,60	43209	3,32 "	2,42
6	19914	4142	4,82	50767	3,53	2,69
7	12572	3838	3,22	57284	3,64	2,68
8	20310	3654	5,56	64427	3,64	3,30
9	21186	3210	6,59	69618	3,54	3,68
10	9446	2966	3,19	71133	3,39	3,93
11	16936	2722	6,22	72401	3,14	4,29
12	19216	2478	7,78	72957	2,86	4,77
13	26000	2234	11,7	65301	2,53	4,83
14	24208	1990	12,2	62500	2,19	5,32
15	27386	1746	15,6	55904	1,83	5,69
16	26458	1502	17,6	44949	1,45	5,77
17	38808	1258	30,9	34183	1,11	5,77
18	27456	1014	27,0	22483	0,78	5,38
19	11456	770	14,9	10378	0,49	3,96
20	5490	516	10,4	4553	0,26	3,27
21	3370	282	(12,0)	2817	0,09	(5,8)

1) Zeitschr. f. Vermessungswesen 46, 169 ff.

$$S_\nu^* = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_\nu)^2 + (\varepsilon_{\nu+1} + \varepsilon_{\nu+2} + \dots + \varepsilon_{2\nu})^2 + \dots$$

und ihre Quotienten — theoretisch ist angenähert:

$$S_\nu^* \sim \frac{n-\nu+1}{n} S_1^* -$$

benutzen. Diese bequemere Methode ist dafür natürlich entsprechend ungenauer. Beides ist für die Augustmonate (1730—1751) in Tabelle III ausgeführt.

Auf beide Arten erhält man für den Quotienten bei $\nu=17$ ein Maximum, und zwar mit großer Schärfe. Das bedeutet also, daß eine Periode von $2 \times 17 = 34$ Jahren vorliegt, d. h. eben die Brücknersche.

§ 7. Zusammenfassung. Wir haben demnach folgende Ergebnisse:

1. Die Temperatur- und Regenveränderlichkeit der neuen Berliner Reihe (seit 1848) ist völlig normal.

2. Die Brückner- und Sonnenfleckperiode ist in dieser Zeit so gering im Vergleich zu den unregelmäßigen Schwankungen kürzerer Dauer, daß sie zu ihrer Ermittlung besonderer Methoden bedürfen.

3. Es liegt kein Grund vor, die alte Kirchsche Temperatur-Reihe als inhomogen anzusehen.

4. In der Zeit von 1730—1750 ist in den Sommermonaten die Brücknerperiode sehr deutlich erkennbar. Im Winter wird sie auch hier durch die zufälligen Änderungen völlig verwischt.

Potsdam, 27. August 1918.

(Eingegangen 29. August 1918.)

Das elektrische Feld in Systemen von regelmäßig angeordneten Punktladungen.

Von E. Madelung.

Die Berechnung des elektrischen Feldes im Innern von Atomgittern, deren Bestandteile elektrische Ladungen tragen, bietet große Schwierigkeiten, wenn man versucht, dasselbe durch direkte Summation zu ermitteln. Es ist nämlich, wie man bei einem praktischen Versuch sofort sieht, eine ungeheuer große Anzahl von Punkten zu berücksichtigen, wenn man eine einigermaßen hinreichende Genauigkeit erreichen will. Andererseits muß diese Berechnung von Bedeutung sein, sobald wir etwas Genaueres über die Art und Größe der zwischen den Atomen wirkenden „molekularen“ Kräfte wissen und auf Grund dieses Kenntnis versuchen werden, die Bedingungen des atomistischen Aufbaues der Kristalle rechnerisch zu verfolgen. Denn wenn auch wohl die molekularen Kräfte praktisch nur

zwischen nächsten Nachbarn wirken und daher relativ einfach in die Rechnung eingehen, fallen die elektrischen Kräfte nur nach einer schwachen Potenz der Entfernung ab, so daß eine Beschränkung auf die nächsten Nachbarn durchaus unzulässig ist.

Ich beabsichtige, im folgenden Formeln zu entwickeln, die die Berechnung des elektrischen Feldes außerordentlich erleichtern. Methoden hierfür sind bisher wohl nur von Ewald¹⁾ und Born²⁾ gegeben worden. Beide entwickeln das Feld im Elementarparallelepiped des Kristalls nach 3 parametrischen Fourierschen Reihen. Abgesehen von der schwächeren Konvergenz dieser Formeln im Verhältnis zu den meinigen bleibt bei diesen Ansätzen die Berechnung in der Nähe der Gitterpunkte oder in ihnen selbst unmöglich. Eine von Ewald gegebene Methode, dies letztere auch zu erreichen, ist nur für rechtwinklige Dipolgitter durchgeführt. Sie scheint mir nicht entfernt die Anpassungsfähigkeit meiner Methode zu besitzen; tatsächlich ist Ewalds Ziel auch nicht dasselbe wie meines, da er sich nur mit dynamischen Feldern befaßt, während ich ausschließlich statische behandeln will.

Als Grundproblem betrachte ich die Berechnung des Feldes einer äquidistant mit gleichen Ladungen belegten Geraden. Dies Problem ist deshalb von Bedeutung, weil solche Punktreihen als die Bausteine aller überhaupt möglichen Kristalle betrachtet werden können. Daran schließt sich die Berechnung des Feldes, eines ebenen Liniengitters, eines rechtwinkligen und eines schiefwinkligen ebenen Punktgitters und der entsprechenden Raumgitter. Hieraus folgen die Formeln für gemischte Gitter, d. h. solcher, die aus positiven und negativen Ladungen bestehen. Jede Symmetrie ergibt natürlich eine Vereinfachung.

Durch geeignete Tabellen ist eine weitere Erleichterung zu erreichen. Solche Tabellen gedenke ich an anderer Stelle zu veröffentlichen.

Ich beabsichtige auch, nach derselben Methode andre für die Gittertheorie wichtige Summationen später zu behandeln.

1. Das Feld einer geraden Punktreihe.

Die Punkte liegen auf einer Geraden in Abständen a und tragen die Ladung E . Die Koordinaten seien: x parallel zur Geraden und r senkrecht dazu. Der Nullpunkt sei ein Punkt der Reihe.

Ich setze das Potential an in der Form:

$$V = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(r) \cos 2\pi \frac{lx}{a}$$

als Summe von Einzelpotentialen V_l und fordere, daß für jedes $\Delta V_l = 0$ sei, also

$$\frac{\partial^2 V_l}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_l}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_l}{\partial x^2} = 0;$$

das ergibt

$$\frac{d^2 f_l(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{df_l(r)}{dr} - \frac{4\pi^2 l^2}{a^2} f_l(r) = 0.$$

Diese Gleichung führt auf Zylinderfunktionen. Es ist nun evident, daß der periodische Teil des Gesamtpotentials V im Unendlichen verschwinden muß. Deshalb kommen als Lösung nur die Hankelschen Funktionen K_0 in Frage. Es wird daher:

$$f_l(r) = C_l \cdot K_0\left(\frac{2\pi l r}{a}\right),$$

wo die Konstanten C_l noch zu bestimmen sind.

(Die Funktion $K_0(x)$ hat folgende Eigenschaften: Sie wird für große x gleich

$$e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

und für kleine x gleich $\ln\left(\frac{2}{\gamma x}\right)$; wo $\ln \gamma = 0,5772$

die Eulersche Konstante ist. Eine Tabelle für $K_0(x)$ und die nötigen Formeln findet man in der Tabellensammlung von Jahnke und Emde¹⁾). Wir finden also

$$V_l = C_l \cdot K_0\left(\frac{2\pi l r}{a}\right) \cos \frac{2\pi l x}{a}$$

und in unmittelbarer Nähe der Geraden

$$\lim_{r \rightarrow 0} V_l = -C_l \cdot \ln(r) \cdot \cos \frac{2\pi l x}{a};$$

Dies Einzelpotential kann also nur bestehen, wenn auf der Geraden eine Ladungsdichte q_l

$$q_l = \frac{C_l}{2} \cdot \cos \frac{2\pi l x}{a}$$

sich befindet.

Die im Problem gegebene Ladungsdichte stellen wir in Fourierscher Reihe dar:

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot \cos \frac{2\pi n x}{a}$$

Sie soll so sein, daß nur in den Punkten $x = na$ die Ladung E liege. Dies führt nach bekannter Methode auf die Form:

1) Jahnke u. Emde, Funktionentafeln. Leipzig 1909, S. 135. (Dort ist $K_0(x)$ bezeichnet mit $\frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(ix)$.)

1) Ewald, Dissertation. München 1912.

2) Born, Dynamik der Kristallgitter. 1915.

$$\varrho(x) = \frac{E}{a} + \frac{2E}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi n x}{a}.$$

Die Konstanten C_l sind also anzusetzen:

$$C_l = \frac{4E}{a}; \quad C_0 = \frac{2E}{a},$$

so daß die Form

$$V = \frac{4E}{a} \sum_{l=1}^{\infty} K_0\left(\frac{2\pi l r}{a}\right) \cdot \cos \frac{2\pi l x}{a} + \frac{2E}{a} \ln\left(\frac{2a}{r}\right) + K_1 \quad (1)$$

die Lösung der gestellten Aufgabe darstellt.

K_1 ist eine Konstante, die ∞ wird, wenn das Potential im Unendlichen verschwinden soll.

(Anmerkung: Daß die Fouriersche Reihe für $\varrho(x)$ divergent ist, stellt nur einen Schönheitsfehler dar, da die gefundene Reihe für V konvergiert. Man kann aber leicht auch eine konvergente Reihe für $\varrho(x)$ erhalten, wenn man fordert, daß bei jedem Punkt $x = na$ die Ladungsdichte

$$\bar{\varrho}(x) = E \cdot \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\beta^2 (na)^2} \text{ sei.}$$

Dies ergibt eine Entwicklung:

$$\bar{\varrho}(x) = \frac{E}{a} + \frac{2E}{a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\beta^2 a^2}} \cdot \cos \frac{2\pi n x}{a}.$$

Läßt man β beliebig wachsen, so entspricht diese Ladungsverteilung einer von punktförmigen Ladungen beliebig gut, und die Reihe für $\varrho(x)$ kommt der obigen beliebig nahe, ohne ihre Konvergenz zu verlieren.)

Weiter findet man die Kräfte

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{und} \quad R = -\frac{\partial V}{\partial r},$$

wenn man beachtet, daß

$$\frac{d}{dx} K_0(x) = K_1(x) \text{ ist.}$$

$$X = + \frac{8\pi E}{a^2} \sum_{l=1}^{\infty} l \cdot K_0\left(\frac{2\pi l r}{a}\right) \sin \frac{2\pi l x}{a} \quad (1a)$$

$$R = - \frac{8\pi E}{a^2} \sum_{l=1}^{\infty} l K_1\left(\frac{2\pi l r}{a}\right) \cos \frac{2\pi l x}{a} + \frac{2E}{ar} \quad (1b)$$

Die Reihenentwicklungen sind vorzüglich konvergent. Für $r > 0,8a$ genügt allein das erste Glied, um in (1) eine Genauigkeit von $1/1000$ zu erreichen.

Um das Feld in der Achse der Punktreihe oder in deren Nähe zu berechnen, sind die obigen Formeln ungeeignet. Hier führt eine andre Form zum Ziel.

Es ist in der Achse selbst

$$V(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[E \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} + \dots + \frac{1}{x+aN} + \frac{1}{a-x} + \frac{1}{(a-x)+a} + \dots + \frac{1}{(a-x)+aN} \right) \right]$$

$$= \frac{E}{a} \sum_{l=0}^N \left(\frac{1}{\frac{x}{a} + l} + \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{a}\right) + l} \right).$$

$\lim_{N \rightarrow \infty}$

Man benutzt die Funktion¹⁾

$$\Psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x); \quad \Gamma(x)$$

dann wird

$$V(x) = -\frac{E}{a} \left(\Psi\left(\frac{x}{a}\right) + \Psi\left(1 - \frac{x}{a}\right) - \lim_{N \rightarrow \infty} 2 \ln N \right),$$

und

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = + \frac{E}{a^2} \left(\Psi'\left(\frac{x}{a}\right) - \Psi'\left(1 - \frac{x}{a}\right) \right).$$

Die Funktion Ψ wird nur im Intervall zwischen 0 und 1 gebraucht. Tabuliert ist sie aber meist zwischen 1 und 2. Man benutzt die Beziehung

$$\Psi(x) = -\frac{1}{x} + \Psi(x+1);$$

$$\Psi'(x) = +\frac{1}{x^2} + \Psi'(x+1)$$

usw. und findet:

$$V(x) = -\frac{E}{a} \left(\Psi\left(\frac{x}{a} + 1\right) + \Psi\left(2 - \frac{x}{a}\right) - \frac{a}{x} - \frac{a}{a-x} \right) + K_1', \quad (2)$$

wo

$$K_1' = \frac{2E}{a} \lim_{N \rightarrow \infty} \ln N,$$

$$X(x) = + \frac{E}{a^2} \left(\Psi'\left(\frac{x}{a} + 1\right) - \Psi'\left(2 - \frac{x}{a}\right) + \frac{a^2}{x^2} - \frac{a^2}{(a-x)^2} \right) \quad (2a)$$

In der Nähe der Punktreihe wird:

$$V = \frac{E}{a} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a} + l\right)^2}} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \left(1 - \frac{x}{a} + l\right)^2}} \right)$$

1) Jahne und Emde S. 27.

$$\begin{aligned}
&= \frac{E}{a} \left(\sum_0^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{a} + l\right)} + \sum_0^{\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{a} + l\right)} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{r^2}{2a^2} \left(\sum_0^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{a} + l\right)^3} + \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{a} + l\right)^3} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3r^4}{8a^4} \sum (5) \right) + \dots \\
&= -\frac{E}{a} \left(\psi\left(\frac{x}{a}\right) + \psi\left(1 - \frac{x}{a}\right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{r^2}{4a^2} \left(\psi''\left(\frac{x}{a}\right) + \psi''\left(1 - \frac{x}{a}\right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{r^4}{64a^4} (\psi^{IV}) + \dots + K_1' \right) \right.
\end{aligned}$$

Oder auch:

$$\begin{aligned}
V &= E \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + r^2}} + \frac{1}{\sqrt{(a-x)^2 + r^2}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{a} \left(\psi\left(\frac{x}{a} + 1\right) + \psi\left(2 - \frac{x}{a}\right) - \frac{r^2}{4a^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left(\psi''\left(\frac{x}{a} + 1\right) + \psi''\left(2 - \frac{x}{a}\right) \right) + \dots + K_1' \right) \right. \quad (3) \\
X &= E \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} - \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2 + r^2}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{a^2} \left(\psi'\left(\frac{x}{a} + 1\right) - \psi'\left(2 - \frac{x}{a}\right) - \frac{r^2}{4a^2} (\psi''') \dots \right) \right. \quad (3a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R &= Er \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + r^2}} + \frac{1}{\sqrt{(1-x)^2 + r^2}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2a^2} \left(\psi''\left(\frac{x}{a} + 1\right) + \psi''\left(2 - \frac{x}{a}\right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{r^2}{16a^4} (\psi^{IV} \dots) \right) \right) \quad (3b)
\end{aligned}$$

d. h. man nimmt die nächsten Nachbarn heraus und berücksichtigt deren Potential und Kräfte gesondert. Dann ist die Entwicklung bis über die Grenzen $x=0$ und $x=a$ brauchbar. Sie konvergiert für beliebiges r ,

Man kann auch einen Punkt, z. B. $x=0$, weglassen und das Potential in ihm und in seiner Umgebung berechnen. Es wird dann für $x=0$

$$V = -\frac{2E}{a} (\psi(1) + \text{konst.})$$

Der Wert des Potentials ist naturgemäß nur bis auf die Konstante K_1 bzw. K_1' zu ermitteln, die ∞ wird, wenn im Unendlichen $V=0$ sein soll.

Diese Konstante fällt heraus, wenn das Po-

tential zweier entgegengesetzt geladener Punktreihen gesucht wird und für beide Reihen Formel (1) oder (2) bzw. (3) benutzt werden kann. Muß nun für die eine Reihe Formel (1), für die andere (2) oder (3) benutzt werden, so muß die Differenz $K_1 - K_1'$ bekannt sein.

Dieselbe Konstante K_1 wie in (1) tritt auf, wenn ich das Potential einer homogen mit der Dichte $\frac{E}{a}$ geladenen Geraden betrachte, die von $x=Na$ bis $x=-Na$ sich erstreckt

$$\begin{aligned}
V &= \frac{2E}{a} \int_0^{Na} \frac{dx}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \\
&= \frac{2E}{a} \ln \left(\frac{Na + \sqrt{r^2 + (Na)^2}}{r} \right)
\end{aligned}$$

und N unendlich wachsen lasse.

$$\begin{aligned}
V &= \frac{2E}{a} \left| \ln \frac{2Na}{r} = \frac{2E}{a} \cdot \ln \frac{2a}{r} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2E}{a} \left| \ln N = \frac{2E}{a} \ln 2a + K_1 \right. \right. \\
&\quad \left. \lim_{N \rightarrow \infty} \right.
\end{aligned}$$

Durch Vergleich bemerkt man, daß für K_1' genau die gleiche Form gefunden wurde. Also ist $K_1 = K_1'$.

Man ersieht hieraus, weshalb in Formel (1) $\ln \frac{2a}{r}$ statt $\ln \frac{a}{r}$ geschrieben wurde.

2. Das Feld eines ebenen Liniengitters.

Das Gitter bestehe aus geraden parallelen Linien, die in Abständen a in einer Ebene liegen und die Ladungsdichte λ tragen. Die Koordinaten seien: x in der Ebene, senkrecht zu den Linien, z senkrecht zur Ebene.

Ich setze das Potential an in der Form:

$$V = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(z) \cdot \cos \frac{2\pi l x}{a} = \sum V_l$$

$$\Delta V_l = 0 = \frac{\partial^2 V_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_l}{\partial z^2}$$

ergibt:

$$\frac{d^2 f_l(z)}{dz^2} - \frac{4\pi^2 l^2}{a^2} f_l(z) = 0,$$

$$f_l(z) = C_l \cdot e^{-\frac{2\pi l}{a} \cdot z}$$

Dies fordert eine Ladung q_l in der Ebene:

$$q_l = -\frac{C_l \cdot l}{a} \cdot \cos \frac{2\pi l x}{a}$$

Die Konstanten C_l ergeben sich (wie oben)

$$C_l = \frac{2\lambda}{l}; \quad C_0 = \frac{\lambda}{l},$$

$$Y = -\frac{\partial V}{\partial y} \text{ entsprechend } X$$

$$Z = -\frac{\partial V}{\partial z} = +\frac{8\pi E}{ab} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-k_{lm} \cdot z} \cdot \cos \frac{2\pi l x}{a} \cos \frac{2\pi m y}{b} +$$

$$+ \frac{4\pi E}{ab} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\frac{2\pi l}{a} z} \cos \frac{2\pi l x}{a} +$$

$$+ \frac{4\pi E}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{2\pi m}{b} z} \cos \frac{2\pi m y}{b} +$$

$$+ \frac{2\pi E}{ab} \quad (7b)$$

Die scheinbare Kompliziertheit dieser Formeln ist dadurch verursacht, daß die Glieder, für welche l bzw. $m=0$ werden, den Zahlenfaktor 2 statt 4 haben. Die Reihen konvergieren sehr schnell für nicht zu kleines z .

Die einfachen Summen lassen sich wieder in geschlossener Form schreiben; doch ist diese Umformung ohne Wert, da sie nur für verschwindendes z von Vorteil ist und die Doppelsumme sich nicht so behandeln läßt. Für die Berechnung bei kleinem oder verschwindendem z , d. h. in der Ebene oder deren Nähe, empfiehlt sich die Summation der Felder der einzelnen Punktreihen, die hier auch mit wenigen Gliedern zum Ziel führt, soweit nicht der nicht periodische Anteil in Formel (1) in Frage kommt. Diesen behandelt man wie die Wirkung eines Liniengitters (5) und findet somit für kleine z geeignet:

$$V = \frac{4E}{a} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} K_0 \left(\frac{2\pi l}{a} \sqrt{(y+mb)^2 + z^2} \right) \cdot \cos \frac{2\pi l x}{a}$$

$$+ \frac{4E}{a} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} K_0 \left(\frac{2\pi l}{a} \sqrt{(-y+mb)^2 + z^2} \right) \cos \frac{2\pi l x}{a}$$

$$- \frac{E}{a} \ln \left(1 - 2e^{-\frac{2\pi z}{b}} \cos \frac{2\pi y}{b} + e^{-\frac{4\pi z}{b}} \right)$$

$$- \frac{2\pi E z}{ab} + K_2. \quad (8)$$

Ist sowohl y wie z sehr klein, so sondert man aus der ersten Doppelsumme das Glied mit $m=0$ aus und behandelt die Wirkung der Punktreihe $m=0$ auf einen ihr benachbarten Punkt nach Formel (3).

4. Das Feld des ebenen schiefwinkligen Punktgitters.

Die Punkte liegen auf den Schnittpunkten zweier Parallelliniensysteme, welche miteinander

Parallelogramme, mit den Seiten a und b und dem Winkel φ bilden. Sie tragen die Ladung E .

Die Koordinaten sind:

x in der Richtung der Seiten a ,
 y senkrecht dazu in der Ebene,
 z senkrecht zur Ebene.

Ein Ansatz wie für das rechtwinklige Gitter führt hier nicht zum Ziel. Man ersetzt hier das Produkt der beiden $\cos$ durch eine Summe von zwei $\cos$. Ich setze an:

$$V = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ f_{lm}(z \cos 2\pi \left(\frac{lx}{a} - \frac{y}{\sin \varphi} \left(\frac{l}{a} \cos \varphi - \frac{m}{b} \right) \right) \right.$$

$$\left. + g_{lm}(z) \cos 2\pi \left(\frac{lx}{a} - \frac{y}{\sin \varphi} \left(\frac{l}{a} \cos \varphi + \frac{m}{b} \right) \right) \right\}.$$

$\Delta V_{lm} = 0$ wird befriedigt, wenn

$$\frac{d^2 f_{lm}(z)}{dz^2} - f_{lm}(z) \cdot 4\pi^2 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left(\frac{l}{a} \cos \varphi - \frac{m}{b} \right)^2 \right) = 0$$

und

$$\frac{d^2 g_{lm}(z)}{dz^2} - g_{lm}(z) \cdot 4\pi^2 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left(\frac{l}{a} \cos \varphi + \frac{m}{b} \right)^2 \right) = 0$$

gilt, d. h. wenn

$$f_{lm}(z) = C_{lm}^{(-)} e^{-2\pi k_{lm}^{(-)} \cdot z}$$

und

$$g_{lm}(z) = C_{lm}^{(+)} e^{-2\pi k_{lm}^{(+)} \cdot z},$$

wo

$$k_{lm}^{(-)} = \frac{1}{\sin \varphi} \sqrt{\frac{l^2}{b^2} + \frac{m^2}{b^2} - \frac{2lm}{ab} \cos \varphi}$$

und

$$k_{lm}^{(+)} = \frac{1}{\sin \varphi} \sqrt{\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{2lm}{ab} \cos \varphi}$$

bedeutet.

Das V_{lm} fordert eine Ladungsdichte in der Ebene:

$$\rho_{lm} = + C_{lm}^{(-)} k_{lm}^{(-)} \cos 2\pi \left(\frac{lx}{a} - \frac{y}{\sin \varphi} \left(\frac{l}{a} \cos \varphi - \frac{m}{b} \right) \right)$$

$$- C_{lm}^{(+)} \dots$$

Die im Problem gegebene Ladungsverteilung stellt sich dar in der Form:

$$\rho(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_{lm} \cos \frac{2\pi l}{a} (x - y \operatorname{tg} \varphi)$$

$$\cos \frac{2\pi m}{b} \cdot \frac{y}{\sin \varphi},$$

wo

$$b_{lm} = \frac{4E}{ab \cos \varphi}; \quad b_{l0} = \frac{2E}{ab \cos \varphi} = b_{0m};$$

$$b_{00} = \frac{E}{ab \cos \varphi}.$$

1) Die Zeichen $(-)$ und $(+)$ sind Indizes, die auf die betreffenden Zeichen in den zugehörigen Ausdrücken hinweisen sollen.

Es muß also sein

$$C_{lm}^{(-)} \cdot k_{lm}^{(-)} = C_{lm}^{(+)} k_{lm}^{(+)} = \frac{2E}{ab \cos \varphi},$$

so daß wir finden:

$$\begin{aligned} V = & + \frac{2E}{ab \cos \varphi} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-2\pi k_{lm}^{(-)} \cdot z}}{k_{lm}^{(-)}} \cos 2\pi \left(\frac{lx}{a} \right. \right. \\ & - \left. \frac{y}{\sin \varphi} \left(\frac{l}{a} \cos \varphi - \frac{m}{b} \right) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{e^{-2\pi k_{lm}^{(+)} \cdot z}}{k_{lm}^{(+)}} \cos 2\pi (\dots (+)) \right\} \\ & + \frac{2E}{b} \operatorname{tg} \varphi \cdot \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\frac{2\pi l}{a \sin \varphi} \cdot z} \cdot \cos 2\pi \cdot \frac{l(x - y \operatorname{ctg} \varphi)}{a} \\ & + \frac{2E}{a} \operatorname{tg} \varphi \cdot \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{2\pi m}{b \sin \varphi} \cdot z} \cdot \cos 2\pi \cdot \frac{my}{b \sin \varphi} \\ & - \frac{2\pi E}{ab \cos \varphi} \cdot z + K_2. \quad (9) \end{aligned}$$

Auch diese Formel konvergiert schnell wegen der e -Funktionen. Es ist aber fraglich, ob es rationeller ist, sie zu benutzen oder das Feld aus der Summation der das Gitter bildenden Punktreihen zu berechnen. Jedenfalls ist bei der starken Konvergenz der Formel (1) letzterer Weg nicht wesentlich umständlicher, zumal wenn nur das Potential gesucht wird.

5. Das Feld eines räumlichen rechtwinkligen Punktgitters.

Die Punkte liegen in den Schnittpunkten dreier äquidistanter, sich rechtwinklig schneidender Parallelebensysteme, welche Parallelogramme mit den Kanten a , b und c bilden.

Die Koordinaten seien:

$$\begin{aligned} x & \text{ parallel zu } a, \\ y & \text{ „ „ } b, \\ z & \text{ „ „ } c. \end{aligned}$$

Das Potential ergibt sich durch Summation aus dem des ebenen Punktgitters.

$$\begin{aligned} V = & \frac{4E}{ab} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-k_{lm}(z+nc)}}{k_{lm}} \cdot \cos \dots \cos \dots \right. \\ & \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-k_{lm}(c-z+nc)}}{k_{lm}} \cdot \cos \dots \cos \dots + \dots \right) \end{aligned}$$

Die Summation über n ist eine geometrische Reihe. Es ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nc} = \frac{1}{1 - e^{-c}},$$

so daß wir finden:

$$\begin{aligned} V = & \frac{4E}{ab} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-k_{lm}z}}{k_{lm}} \cdot \frac{1}{1 - e^{-k_{lm}c}} \right. \\ & \left. + \frac{e^{-k_{lm}(c-z)}}{k_{lm}} \cdot \frac{1}{1 - e^{-k_{lm}c}} \right) \cos \dots \cos \dots + \dots \\ = & \frac{4E}{ab} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k_{lm}} \frac{\operatorname{Coj} \left(k_{lm} \left(z - \frac{c}{2} \right) \right)}{\operatorname{Sin} \left(\frac{k_{lm}c}{2} \right)} \\ & \cos \frac{2\pi l(x)}{a} \cos \frac{2\pi my}{b} + \dots + \dots + K_3. \quad (10) \end{aligned}$$

Obgleich die Möglichkeit, durch diese unsymmetrische Behandlung der z -Koordinate die 3fache Summation zu umgehen, einen theoretischen Vorteil bedeutet, halte ich praktisch diese Formel (10) für unwichtig. Der periodische Anteil der Potentiale der ebenen Gitter wird nämlich mit wachsendem z so schnell verschwindend klein, daß die direkte Summation etwa ebenso schnell durchzuführen ist wie die Rechnung nach obiger Formel. Man übersieht dann auch leichter die Genauigkeit des Resultats.

Aus demselben Grunde habe ich darauf verzichtet, analoge Formeln für das schiefwinklige räumliche Gitter zu geben.

Es ist auch hier wieder für einen Punkt in der Nähe einer Gitterfläche der systematische Aufbau des Feldes wie oben anzuwenden.

6. Das Feld einer gemischten Punktreihe.

Zwischen den Punkten im Abstand a liegen entgegengesetzt geladene an den Stellen

$$x = \left(\frac{1}{2} + l \right) a.$$

Es wird

$$V = V(r, x) - V\left(r, x + \frac{a}{2}\right)$$

also nach Formel (1),

$$\begin{aligned} V = & \frac{4E}{a} \sum_{l=1}^{\infty} K_0 \left(\frac{2\pi lr}{a} \right) \left(\cos \frac{2\pi lx}{a} \right. \\ & \left. - \cos \frac{2\pi l \left(x + \frac{a}{2} \right)}{a} \right) \end{aligned}$$

oder

$$V = \frac{8E}{a} \sum_{l=1}^{\infty} K_0 \left(\frac{2\pi(2l-1)r}{a} \right) \cos \frac{2\pi(2l-1)x}{a},$$

d. h. es bleiben nur die ungeraden Glieder bestehen. Das nichtperiodische Glied verschwindet und ebenso die unbestimmte Konstante K_1 . Die Konvergenz ist noch wesentlich besser als bei der einfachen Reihe.

Einfacher schreibt sich die Formel:

$$V = \frac{8E}{a} \sum_{l=1}^{\infty} (\text{ungerade}) K_0 \left(\frac{2\pi l r}{a} \right) \cos \frac{2\pi l x}{a}. \quad (10)$$

In der Reihe selbst wird aus Formel (2):

$$V = -\frac{E}{a} \left(\psi \left(\frac{x}{a} + 1 \right) + \psi \left(2 - \frac{x}{a} \right) - \psi \left(\frac{x}{a} + \frac{3}{2} \right) - \psi \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{a} \right) + \frac{E}{a} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{(a-x)^2} - \frac{1}{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{a}{2} - x\right)^2} \right) \right) \quad (11)$$

und in der Nähe der Reihe entsprechend der Formel (3).

Das Potential in einem (fortgelassenen) Gitterpunkt wird

$$V = -\frac{2E}{a} \left(\psi(1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right) = \frac{4E}{a} \ln 2. \quad (12)$$

Für die nächste Umgebung verwendet man Formel (11) unter Fortlassung des Gliedes $\frac{E}{x}$,

bzw. die Erweiterung der Formel (3) unter Fortlassung des Gliedes $\frac{E}{\sqrt{x^2 + r^2}}$.

7. Das Feld eines gemischten ebenen Liniengitters.

Die Linien liegen im Abstand $\frac{a}{2}$ und tragen abwechselnd positive und negative Ladung.

Es wird hier entsprechend (10):

$$V = 4\lambda \sum_{l=1}^{\infty} (\text{ungerade}) \frac{1}{l} \cdot e^{-\frac{2\pi l y}{a}} \cdot \cos \frac{2\pi l x}{a} \quad (13)$$

oder auch geeignet für kleines oder verschwindendes z

$$V = -\lambda \ln \left(\frac{1 - 2e^{-\frac{2\pi z}{a}} \cdot \cos \frac{2\pi x}{a} + e^{-\frac{4\pi z}{a}}}{1 + 2e^{-\frac{2\pi z}{a}} \cdot \cos \frac{2\pi x}{a} + e^{-\frac{4\pi z}{a}}} \right) = -\lambda \ln \left(1 - \frac{4e^{-2\pi z} \cdot \cos \frac{2\pi x}{a}}{1 + 2e^{-\frac{2\pi z}{a}} \cdot \cos \frac{2\pi x}{a} + e^{-\frac{4\pi z}{a}}} \right).$$

(Fortsetzung siehe nächste Seite.)

Rechenschema und Beispiel.

Zum Schluß gebe ich noch ein Rechenschema und als Beispiel die Berechnung des Potentials eines kubischen flächenzentrierten Gitters auf einen Gitterpunkt.

$$a = b = c; \quad x = y = z = 0.$$

Formel	Gegenstand	x	$y(r)$	z	l	m	$V: \frac{E}{a}$		
(12)	Reihe durch den Punkt	0	0	0	—	—	$+4 \ln 2$	+ 2,767	+ 2,767
(10)	1. Nachbarreihe (rechts)	0	$\frac{a}{2}$	—	1	—	$+8 K_0(\pi)$	+ 0,236	+ 0,228 (6)
	" "	"	"	—	3	—	$+8 K_0(3\pi)$	+ 0,000 (3)	
	2. " "	"	a	—	1	—	$-8 K_0(2\pi)$	- 0,008	
	3. " "	"	$\frac{3}{2}a$	—	1	—	$+8 K_0(3\pi)$	+ 0,000 (3)	+ 0,228 (6)
	Dasselbe links								
(15)	1. Nachbarebene (oben)	0	0	$\frac{a}{2}$	1	1	$\frac{16}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\pi\sqrt{2}}$	+ 0,133	0,131 (7)
	" "	"	"	"	1	3	$\frac{16}{\sqrt{10}} \cdot e^{-\pi\sqrt{10}}$	0,000 (2)	
	" "	"	"	"	3	1	"	0,000 (2)	
	2. " "	"	"	a	1	1	$\frac{16}{\sqrt{2}} \cdot e^{-2\pi\sqrt{2}}$	- 0,001 (7)	
	Dasselbe unten								0,131 (7)
								$V = \frac{E}{a} \cdot 3,487 (6)$	

Man erkennt aus diesem Beispiel, wie schnell die Reihen konvergieren und wie einfach sich die Rechnung gestalten kann.

Für $z=0$ wird

$$V = -\lambda \ln \left(4 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{a} \right).$$

8. Das Feld eines gemischten (flächenzentrierten) rechtwinkligen ebenen Punktgitters.

$$V = \frac{16E}{ab} \sum_{l=1}^{\infty} (\text{ungerade}) \sum_{m=1}^{\infty} (\text{ungerade}) \frac{e^{-2\pi z k_{lm}}}{k_{lm}} \cdot \cos \frac{2\pi l x}{a} \cdot \cos \frac{2\pi m y}{b}. \quad (15)$$

9. Das Feld eines kubischen flächenzentrierten Raumgitters.

$$V = \frac{16E}{ab} \sum_{l=1}^{\infty} (\text{unger.}) \sum_{m=1}^{\infty} (\text{unger.}) \frac{\operatorname{Coj} \left(2\pi \left(z - \frac{c}{4} \right) k_{lm} \right)}{k_{lm} \cdot \operatorname{Coj} \left(\frac{\pi c}{2} \cdot k_{lm} \right)} \cdot \cos \frac{2\pi l x}{a} \cdot \cos \frac{2\pi m y}{b}. \quad (16)$$

(Eingegangen 5. September 1918.)

Über die Berechnung des Ortes der chemischen Elemente im periodischen System aus dem Atomgewicht und der Dichte.

Von Karl Fehrle.

Durch die Gleichung

$$\sqrt[3]{\frac{A^4 \cdot 0,076}{s \cdot 1,008^4}} = \left(\frac{\theta \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}} + 1}{2\pi \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}} + 1} \right)^3, \quad (1)$$

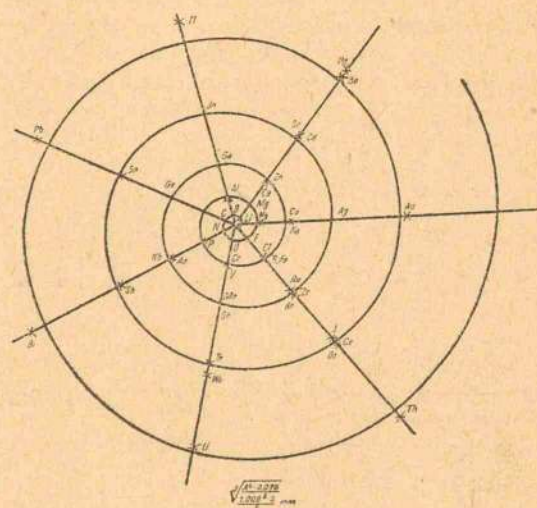
wo A das Atomgewicht und s das spezifische Gewicht eines Elements im festen Zustande, womöglich in der Nähe des absoluten 0-Punktes, bedeutet, wird jedem Wert von

$$\sqrt[3]{\frac{A^4 \cdot 0,076}{s \cdot 1,008^4}} = r \quad (2)$$

ein Wert von θ zugeordnet, welche zusammen, wenn r und θ als Polarkoordinaten aufgefaßt werden, Punkte auf der Spirale

$$r = \left(\frac{\theta \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}} + 1}{2\pi \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}} + 1} \right)^3$$

festlegen. Der Ausdruck der linken Seite von (1) ist, im Bilde der Molekel in meiner früheren Abhandlung¹⁾, der Bewegungsgröße der Atome bei gleicher Winkelgeschwindigkeit proportional. Führt man diese Bestimmung für alle Elemente durch, so findet man im allgemeinen, daß die Punkte auf Radienvektoren liegen, die um 0 oder ganzzahlige Vielfache von $\frac{2\pi}{7}$ gegeneinander gedreht sind, sowie daß die auf demselben Radiusvektor liegenden Werte im allgemeinen Elementen zugehören, die eine der Vertikalreihen im periodischen System bilden. Die den einzelnen Elementen derselben Vertikalreihe



zugehörigen Werte von θ unterscheiden sich also um ganzzahlige Vielfache von 2π . Sie werden daher aus der Reihe, die man erhält, wenn man den Ausdruck der rechten Seite von (1) der Reihe nach für alle

$$\theta = n \cdot \frac{2\pi}{7} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

bildet, durch Sprünge um je 7 ausgesondert. Beginnt man die Sprünge z. B. mit dem 7. Gliede, so erhält man die Wasserstoffreihe. Nahezu dieselben Werte ergeben sich, wenn man

$$\sum_{n=1}^{n=a} (2n-1)^2, \quad (3)$$

wo a der Reihe nach gleich 1, 2, 3, zu setzen ist, bildet und jedes Glied durch

1) Diese Zeitschr. 10, 231, 1918.

$$4 \sum_{n=1}^7 n^2 \quad (4)$$

dividiert. Durch Sprünge um je 7, gleichviel wo man beginnt, wird aus Reihe (3) ($a = 1, 2, 3 \dots$) eine neue arithmetische Reihe 3. Ordnung ausgesondert, deren konstante Differenz 2744 ist.

	Reihe: H	$2H + He$	$3H + 4He$	$4H + 10He$	$5H + 20He$
1. Diff.	$H + He$	$H + 3He$	$H + 6He$	$H + 10He$	
2. "		$2He$	$3He$	$4He$	$5He$
3. "			He	He	He

Die oberste Reihe gibt, wenn für H und He die Ausdrücke der linken Seite von (1) eingesetzt werden, der Reihe nach diese Ausdrücke für H, Li, Na, K und Cu, Ag, Au , also die 1. Gruppe des periodischen Systems, mit Ausnahme von Rb und Cs . Die Figur gibt über den erreichten Grad der Übereinstimmung Auskunft. Unter den Zeichen Fe, Ru und Os sind jeweils

Diese, durch (4) dividiert, gibt 4,9, also nahezu den Ausdruck der linken Seite von (1), gebildet für Helium. Daraus ergibt sich für die Wasserstoffreihe des periodischen Systems, wenn statt der Ausdrücke der linken Seite von (1) gleich die Atomzeichen gesetzt werden, folgendes Schema:

die Mittelwerte der Ausdrücke (1) für die betreffenden Triaden zu verstehen. Bemerkenswert ist, daß bei meiner Darstellungsweise die Gruppe der Triaden bildenden Elemente mit der siebenten Gruppe zusammenfällt.

Freiburg i. B., August 1918.

(Eingegangen 18. August 1918.)

BESPRECHUNGEN.

H. Börner, Lehrbuch der Physik für die oberen Klassen der Realgymnasien und Oberrealschulen sowie zur Einführung in das Studium der neueren Physik. 7. Aufl. Bearbeitet unter Mitwirkung von G. Mohrmann. gr. 8. XV u. 504 S. mit 382 Abbildungen. Berlin, Weidmannsche Buchhandlung. 1917. Geb. M. 6.40.

G. Mohrmann, Physikalische Aufgabensammlung im Anschluß an die 7. Aufl. von H. Börners Lehrbuch der Physik. gr. 8. 32 S. Berlin, Weidmannsche Buchhandlung. 1917. Geh. M. —.80.

Für die neue Auflage des Börnerschen Lehrbuches, dessen vorige in Bd. 13, 1227, 1912 dieser Zeitschrift besprochen ist, hat der um den physikalischen Unterricht sehr verdiente Verf. noch vor seinem Tode mit seinem Mitarbeiter die wichtigsten Änderungen vorbereiten können. Sie betreffen Zusätze in allen Abschnitten, die durch die Fortschritte der Methodik, der Wissenschaft und deren Anwendungen in der Technik, auch der Kriegstechnik, geboten waren und für die durch Kürzungen an anderen Stellen Raum geschaffen wurde, ferner eine weitgehende Änderung der Darstellung der Elektrizitätslehre durch die Elektronentheorie, die möglichst früh eingeführt wird, um dadurch dem Schüler ein einheitliches und anschauliches Bild der Wirkungen der Elektrizität und ihres Zusammenhangs mit den andern Gebieten der Physik zu geben. Dann ist noch eine zusammenhängende Darstellung der Himmels- und Erdkunde zugefügt. Alle diese Änderungen sind für den Unterricht wertvoll

und erhöhen die Brauchbarkeit des bewährten Lehrbuches.

An einer Stelle sind allerdings die Verf. über die Grenzen, die der Schule gesteckt sind, hinausgegangen. Statt der experimentellen Ableitung der Gesetze der Induktionsströme, die eins der besten Beispiele bildet, um dem Schüler zu zeigen, wie physikalische Gesetze und wissenschaftliche Erkenntnis überhaupt gewonnen werden, wird hier nur gesagt, daß „offenbar“ aus der Einwirkung eines Magnetfeldes auf die im Leiter sich bewegenden Elektronen die Induktionsströme, ihre Richtung und ihre EMK. sich ergeben. Dabei finden sich noch manche Unklarheiten, die den Schüler zu ganz falschen Schlüssen veranlassen könnten, z. B. der Vergleich mit der Einwirkung des Magnetfeldes auf die Molekularmagnete des Eisens und die Ableitung der Induktionsströme aus dem Widerstande, den das Kupfer dem Eindringen der Kraftlinien entgegensetzt, „da Kupfer ein diamagnetischer Körper ist“. Dieser Abschnitt bedarf also einer gründlichen Umarbeitung. Dann würde im letzten Abschnitte, der Himmelskunde, auch viel mehr die Forderung der neueren Methodik berücksichtigt werden müssen, daß man hier immer von der wirklichen Beobachtung des Himmels ausgehen muß.

Die kleine Aufgabensammlung enthält, geordnet nach den Abschnitten des Lehrbuches, viele recht brauchbare Aufgaben, die besonders an die Schülerübungen anknüpfen, das so gewonnene Zahlenmaterial benutzen und deshalb sehr geeignet sind, diese Übungen zu vertiefen und zu beleben.

Götting.

Ernst Großmann, Untersuchungen über die astronomische Refraktion. (Aus: Abhandlungen der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Mathem.-physik. Klasse. XXVIII. Bd., 9. Abhandlung.) 4. 72 S. München. 1917. M. 3.—.

In der vorliegenden Schrift gibt der Verf. eine zweite Bearbeitung einer Beobachtungsreihe von Stern-Deklinationen, die er in den Jahren 1896—98 an dem Merid. Kreis der v. Kuffnerschen Sternwarte in Ottakring b. Wien zum Zwecke der Bestimmung der Konstanten der astronomischen Strahlenbrechung angestellt hat. Es sind in den letzten Dezennien eine Anzahl solcher Beobachtungsreihen teils neu unternommen, z. T. sind ältere Reihen mit besonderer Rücksicht auf die Wirkung der Refraktion neu bearbeitet worden. Die Vergleichung der Sterndeklinationen, die aus diesen Reihen erhalten wurden, untereinander sowohl als auch mit den Orten der sog. Fundamental-Kataloge von Auwers, Newcomb und L. Boos hatten für die aus der Großmannschen Reihe abgeleiteten Deklinationen gewisse Abweichungen ergeben, die ihn veranlaßten eine Neuberechnung vorzunehmen. Diese ist auch in physikalischer Beziehung von Interesse, da der Verf. eine sehr eingehende Diskussion des Einflusses der Temperatur der das Instrument umgebenden Luft, ihrer Schichtung und ihres Wasserdampfgehaltes vornimmt mit Beziehung auf die optische und physikalische Dichte der Luft. Auf Grund der Zenitdistanzmessungen leitet er den Ausdehnungskoeffizienten der Luft zu 0,003673 ab, der mit dem physikalisch ermittelten bis auf 5 Einheiten der 6. Dezimale übereinstimmt, obgleich aus den verschiedenen anderen Reihen, die zum Vergleich herangezogen werden, z. T. stärker abweichende Werte resultieren. Auch die sog. Konstante der Refraktion wird einer sehr eingehenden Betrachtung unterworfen, und zwar mit Bezug auf ihren Wert in verschiedenen Zenitdistanzen, bei verschiedenen hellen und verschieden gefärbten Sternen (d. h. bei Sternen mit lang- und kurzwelligem Spektrum). Das Resultat ist, daß der Besselsche Wert, der auch in den neueren Refraktionstabellen v. Radau benutzt ist, von 60."445 auf 60."244 vermindert werden mußte. — Das Schlußresultat der Neubearbeitung, welches im übrigen vornehmlich astronomisches Interesse besitzt, gipfelt darin, daß sich Fehler in der früheren Bearbeitung nicht finden lassen, daß die gefundenen Abweichungen vielmehr nicht erheblicher sind, als sie sich bei scharfer Diskussion auch bei anderen Deklinations-Bestimmungen dieser Art vorfinden und daß in gewisser Hinsicht die Genauigkeit der sog. Fundamental-Kat. etwas überschätzt wird, was zum erheblichen Teil der für die Reduktion auf ein gemeinsames Äquinoktium benutzten Eigenbewegungen der Gestirne zugeschrieben werden dürfte, da diese noch nicht mit der genügenden Genauigkeit bekannt sind.

L. Ambronn.

F. Krauß, Die Grundgesetze der Wärmeleitung und ihre Anwendung auf plattenförmige Körper. gr. 8. VI u. 100 S. mit 37 Textfiguren. Berlin, Julius Springer. 1917. M. 2.80.

Die ursprünglich in der Zeitschrift der Dampfkesseluntersuchungs- und Versicherungsgesellschaft (1916) erschienene Schrift kann als Beispielsamm-

lung zur Theorie der eindimensionalen Fourierschen Wärmeleitungsgleichung

$$a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial s^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

bezeichnet werden. Sie beschränkt sich demgemäß auf den Durchgang der Wärme durch ebene, unendlich ausgedehnte Platten unter den verschiedensten Grenzbedingungen, wobei auf den Wärmeübergang zwischen der Platte und dem umgebenden Medium besondere Aufmerksamkeit verwendet wird. Die Darstellung ist in allen Teilen klar und ausführlich und daher auch für den Leser verständlich, dem die Theorie der partiellen Differentialgleichungen noch fremd ist. Die durchgerechneten Beispiele sind sämtlich durch Zahlen und Figuren veranschaulicht und betreffen im einzelnen solche Fälle, die vorzugsweise der Feuerungstechnik angehören. Trotzdem ist die Schrift auch dem Physiker wegen der Sorgfalt, mit welcher der Verf. jede Unsauberkeit in der physikalischen Begründung seiner Schlüsse vermeidet, warm zu empfehlen.

R. Grammel.

Felix Auerbach, Ernst Abbe. Eine Lebensbeschreibung. gr. 8. XV u. 512 S. Mit einer Gravüre, 115 Textabbildungen und der Wiedergabe zweier Originalschriftstücke. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. 1918. Geh. M. 18.—, geb. M. 21.—.

Das als V. Band von Wilh. Ostwalds Sammelwerk: Große Männer, Studien zur Biologie des Genies erschienene Buch ist als eine umfassende Sammlung der Lebensdaten des berühmten Jenenser Gelehrten, Reformators der physikalischen Optik und zugleich auf sozialem Gebiet bedeutsamen Mannes umso verdienstlicher, als es gerade Abbe verstanden hat seine Persönlichkeit jederzeit zurücktreten zu lassen, so daß er nur verhältnismäßig Wenigen menschlich näher getreten ist, abgesehen da, wo er mit Rat und Tat zu helfen und zu fördern vermochte. — Diese fast übertriebene Bescheidenheit und ein steter Reichtum an neuen Ideen ist auch wohl der Grund gewesen, daß er nur selten dazu gekommen ist, außer seinen ersten Arbeiten Abschließendes zu veröffentlichen. Erst nach seinem Tode sind in zwei Bänden Sammlungen seiner überall zerstreut erschienenen Aufsätze und Vorträge herausgegeben worden, die ein anschauliches Bild der überaus vielseitigen Tätigkeit Abbes geben.

Das vorliegende Werk hat sich nun zur Aufgabe gestellt das Leben dieses eigenartigen Mannes einem weiteren Kreise vor Augen zu führen. Viele Daten, namentlich aus der Jugend Abbes, seiner Studienzeit und seiner Frankfurter Tätigkeit werden den meisten Lesern Neues erzählen. Die Jenenser Arbeiten und seine Beziehungen zur Zeißschen Werkstätte und schließlich die Gründung der „Carl-Zeiß-Stiftung“ sind überall bekannt geworden. Bietet so das Auerbachsche Buch viel des Interessanten und für Wissenschaft und Technik auch für alle Zukunft Wichtigen, so muß sachlich doch bemerkt werden, daß der Verf. in mancher Hinsicht die einem Manne wie Abbe und seiner Familie gegenüber gebotene Zurückhaltung vermissen läßt; viele persönliche Dinge haben einen ihnen nicht gebührenden Platz gefunden. Aber auch sonst hätte man von einem biographisch tätigen Verf. größere Sorgfalt erwarten müssen. Die Darstellung der Abbeschen Theorie der mikroskopischen Abbildung soll auf S. 194 ff. mit Bezug auf eine Figur, die aus Dippel, „Das

Mikroskop“, stammt erläutert werden. Text und Figur passen in keiner Weise zueinander! Die Angaben auf S. 184 über die Eintritts- und Austrittspapille und die daran geknüpften Erörterungen sind für jeden, der nicht genau Bescheid weiß, unverständlich. Das ist durch die wenig zweckmäßig herausgegriffenen Darstellungen noch an mancher anderen Stelle des Buches der Fall. Der Jenenser Geologe hat sich Schmid nicht Schmidt, der Philosoph Herbart nicht Herbarth, der Zoologe Gegenbaur nicht Gegenbauer geschrieben. Solche Dinge, von denen noch mehr vorkommen, sollten in einer wissenschaftlichen Biographie nicht zu finden sein, sie schädigen das Vertrauen zum übrigen Inhalt.

L. Ambronn.

Sir William Ramsay und Georg Rudorf, Die Edelgase. 8. VIII u. 416 S. Handbuch der allgemeinen Chemie, herausgegeben von Wilhelm Ostwald und Carl Drucker. Bd. II. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. 1918. Geh. M. 26.—, geb. M. 28.—

Das vorliegende Werk ist nach Art chemischer Lehrbücher geschrieben, da aber die darin behandelten Elemente keinerlei chemische, sondern nur physikalische Eigenschaften aufweisen, so enthält dieses Chemiebuch keine Chemie im eigentlichen Sinne, sondern „physikalische Chemie“. Als Ziel haben sich die Verfasser gesteckt, alle in der Literatur vorhandenen Angaben über die Eigenschaften der Edelgase möglichst vollständig zusammen zu fassen, und sie haben dieses weit gesteckte Ziel, soweit es der Referent bei schneller Durchsicht und einigen genaueren Stichproben beurteilen kann, erreicht. Dabei sind sie kritisch zu Werke gegangen, so daß man nicht, wie in manchen andern chemischen Handbüchern, eine Aneinanderreihung einander widersprechender, sondern eine sehr zweckmäßige Zusammenstellung der zuverlässigsten Daten findet. Widersprüche werden nicht verschwiegen, sondern mit Hinweis auf die voraussichtlich begangenen Beobachtungsfehler angeführt. Daß trotz des ungeheuren Tatsachenmaterials — es ist aus etwa 2000 Abhandlungen entnommen, die am Schlusse der Kapitel angeführt sind — ein leicht lesbares Werk entstanden ist, muß den Verfassern besonders hoch angerechnet werden. Die geschickte und übersichtliche Gruppierung der Tatsachen, die klare und flüssige Darstellung tragen vor allem hierzu bei. — Das Buch zerfällt in zwei Teile, einen allgemeinen und einen speziellen. Im allgemeinen Teil werden alle diejenigen Eigenschaften besprochen, die allen Edelgasen gemeinsam sind, wodurch unnötige Wiederholungen vermieden werden. Es würde zu weit führen, wollten wir jedes einzelne Kapitel anführen. Nur die wichtigsten Kapitelüberschriften seien genannt, um eine Vorstellung vom Inhalte des Werkes zu geben: Geschichtliches; die chemische und physikalische Natur der Edelgase; ihre Valenz; ihre Stellung im periodischen System; ihr irdisches und außerirdisches Vorkommen; die Edelgase und die kinetische Gastheorie, die Zustandsgleichung und die Dampfdruckformel; die physikalischen Eigenschaften der Edelgase. Jedes Kapitel bildet ein wohldurchgearbeitetes, zusammenhängendes Ganze. Am Beispiel „die Edelgase und die kinetische Gastheorie“ sei dies gezeigt. Es wird ausgegangen von den bekannten Formeln, für

deren Ableitung auf die Abhandlungen von Clausius, Maxwell, van der Waals usw. verwiesen wird, und dargelegt, wie weit die Edelgase diesen Formeln gehorchen und, wo sich außerhalb der Versuchsfehlergrenzen liegende Abweichungen finden, wie diese zu erklären sind oder wo Erklärungsversuche bisher versagen. — Diesem allgemeinen folgt ein spezieller Teil, in dem jedes der Gase einzeln abgehandelt wird. Im ersten Kapitel wird die Frage besprochen, ob es ein Edelgas gibt, das leichter als Helium ist, dann kommen der Reihe nach Helium, Neon, Argon, Metargon, Krypton und Xenon. Die Schlußkapitel sind den radioaktiven Emanationen: dem Niton (Radiumemanation), der Thor- und Aktinium-Emanation gewidmet. Jeder einzelne dieser Abschnitte hat im wesentlichen die gleiche Unterteilung. Er beginnt mit einem geschichtlichen Kapitel, die Entdeckung des Elementes abhandelnd. Die folgenden Kapitel enthalten das Vorkommen, die Darstellung und die physikalischen Eigenschaften. Auch diese Abschnitte geben mehr als eine bloße Aneinanderreihung von Beobachtungsdaten. Es wird jeweils die Methode beschrieben, nach der die Zahlen gewonnen sind, die Abweichungen der nach verschiedenen Methoden erhaltenen Ergebnisse werden kritisch besprochen und schließlich wird diskutiert, wie weit die experimentell gewonnenen Zahlen mit den theoretisch zu erwartenden übereinstimmen. Bei der Besprechung der optischen Eigenschaften ist außer beim Helium auf Vollständigkeit insofern verzichtet, als nicht die Wellenlängen sämtlicher Linien der Spektren gegeben sind, da man diese leicht dem Kayser'schen Handbuch oder den Watt'schen Tabellen entnehmen kann. In die Behandlung der elektrischen Eigenschaften ist die Bohrsche Theorie schon eingeschlossen. Die neueren atom-theoretischen Arbeiten konnten freilich noch nicht aufgenommen werden, da das Manuskript des Buches — beide Herausgeber sind Engländer — vermutlich vor August 1914 nach Deutschland gekommen ist. Bis zu diesem Zeitpunkt aber sind wohl alle Untersuchungen, die mit einem der Edelgase irgendeine Beziehung haben, verwertet. Daher kann dieses Werk allen Physikern aufs wärmste empfohlen werden und sollte in keiner physikalischen Bibliothek fehlen.

Riesenfeld.

Berichtigung

zu meiner Veröffentlichung „Über den Einfluß ultraroter Eigenfrequenzen usw.“ (diese Zeitschr. 19, 483, 1918).

Von J. Wimmer.

Die Formel des § 3 (S. 485), betreffend das Verhältnis der Valenzzahl zur Zahl der positiven Ladungen, muß lauten:

$$\frac{v}{z} = \frac{G_1 + G_2}{\sqrt{G_1 \cdot G_2}}$$

(Eingegangen 3. November 1918.)

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der Leiter der wissenschaftlichen Laboratorien bei den Farbenfabriken in Elberfeld Dr. Fritz Hofmann zum Direktor des Instituts für Kohlenforschung in Breslau, der a. o. Professor an der Universität Breslau Dr. Julius v. Braun zum ord. Professor der Chemie an

der Landwirtschaftlichen Hochschule Berlin, der Privatdozent an der Universität Münster Dr. Aloys Timpe zum ord. Professor der Mathematik an der Landwirtschaftlichen Hochschule Berlin, der Privatdozent an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Heinrich Faßbender zum stellvertretenden a. o. Professor für Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Riga, der ord. Professor der darstellenden Geometrie und der Mathematik an der Technischen Hochschule München Dr. Sebastian Finsterwalder zum ord. Professor der Geodäsie an der Universität Berlin und Direktor des Geodätischen Instituts auf dem Telegraphenberg bei Potsdam.

Nobelpreise: Der Nobelpreis der Physik für 1917 wurde dem ord. Professor der Physik (natural philosophy) an der Universität Edinburgh Dr. Charles Glover Barkla verliehen.

Gestorben: Der ord. Professor für pharmazeutische Chemie und Toxikologie an der Universität Turin Dr. Icilio Guareschi, der ord. Professor für Theorie und Anwendungen des elektromagnetischen Feldes an der Universität Utrecht Dr. H. du Bois, der Privatdozent für Geophysik und Geologie an der Universität Breslau und Leiter der Erdbebenwarte und des geophysikalischen Laboratoriums daselbst Professor Dr. Georg von dem Borne, der ord. Professor für Elektrotechnik an der Universität La Plata, frühere Privatdozent an der Technischen Hochschule Danzig Dr. Konrad Simons.

Angebote.

Für die wissenschaftliche und technische Bearbeitung von Fragen aus dem Gebiete der Schwachstromkabeltechnik

1—2 Physiker

oder

diplom. Ingenieure

sofort gesucht. Angebote mit Angabe der Gehaltsansprüche, der bisherigen Tätigkeit und des Militärverhältnisses erbeten unter **S. H. 530** an den Verlag dieser Zeitschr. S. Hirzel, Leipzig, Königstraße 2.

Gesuche.

Physiker

mit abgeschlossener Hochschulbildung, mit guten Kenntnissen auf den Gebieten der Radioaktivität,

Elektronik und Elektrotechnik sucht Stellung an einem Forschungslaboratorium eines größeren industriellen Unternehmens. (Invalide, linke Unterschenkelprothese.)

Anschrift: **Dr. Rudolf Thaller, Gmunden O. Ö.**

Physiker,

absolviert, mit Doktorat aus Mathematik, militärfrei, Laboratoriumspraxis, sucht Anstellung. Angebote unter **S. H. 531** an den Verlag der Physik. Zeitschrift (S. Hirzel), Leipzig, Königstr. 2.

Physiker (promoviert),

bisher auf akustischem und ballistischem Gebiet gearbeitet, sucht Stellung an größerem industriellen oder wissenschaftlichen Institut. Angebote unter **S. H. 533** mit Gehaltsangabe an den Verlag der Physikal. Zeitschrift (S. Hirzel), Leipzig, Königstraße 2.

Promovierter Physiker,

mehrfährige Tätigkeit als Hochschulassistent und im Marinebetrieb, sucht neuen Wirkungskreis zur Bearbeitung physikalisch-technischer Aufgaben in der Privatindustrie. Ausführliche Angebote erbeten unter **S. H. 534** an die Physikalische Zeitschrift (S. Hirzel), Leipzig, Königstraße 2.

Absolvierter Physiker

(Dr. phil. Universitätsassistent), praktisch begabt, guter Zeichner, sucht nach Kriegsende Anstellung in größerem techn. Betrieb. Anträge mit Bedingungen unter **G. H.** an den Verlag S. Hirzel, Leipzig, Königstr. 2.



Staats- u. Universitäts-
Bibliothek Hamburg

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 24.

15. Dezember 1918.

Redaktionsschluß für No. 2 am 15. Dezember 1918.

19. Jahrgang.

INHALT:

Ferdinand Braun †. S. 537.

Originalmitteilungen:

M. Born, Über die ultraroten Eigen-

schwingungen zweiatomiger Kristalle. S. 539.

R. Holm, Zur Theorie des Glimmstroms. VII. S. 548.

Berichtigung. S. 556.

Personalien. S. 556.

Gesuche. S. 556.

Angebote. S. 556.

Ferdinand Braun †.

Aus Amerika traf im Mai die kurze Nachricht ein, daß am 20. April 1918 Ferdinand Braun in New York gestorben ist.

Ihn hatte das Gefühl, auch an seinem Teile mithelfen zu müssen in dem großen Kampfe, im Dezember 1914 dorthin geführt; ein von Marconi gegen das Braunsche Senderpatent erhobener Prozeß, der auf die Schließung der deutschen Funkenstation abzielte, war der Anlaß zur Reise. Es zeigte sich bald, daß das Opfer umsonst gebracht war und Braun hat mehr als drei Jahre dort zugebracht in tiefer Sehnsucht nach der Rückkehr, in Sorgen um die Heimat und schließlich in quälender Krankheit. Auch dem todkranken Manne blieb die Heimkehr verwehrt.

Carl Ferdinand Braun war geboren am 6. Juni 1850 in Fulda als Sohn des Aktuars Braun. Früh trat naturwissenschaftliche Neigung bei ihm zutage. 1865 verfaßte er ein Lehrbuch der Kristallographie, dessen Druck nur deshalb unterblieben sein soll, weil kein Verleger den Fünfzehnjährigen als Autor gelten lassen wollte. Er studierte zunächst in Marburg, dann in Berlin, wo er 1870 Quinckes Assistent an der Kgl. Gewerbeakademie wurde. Nach seiner Promotion im März 1872 folgte er Quincke bei dessen Berufung nach Würzburg und blieb dort zwei Jahre als Assistent.

Er selbst hat diese Zeiten mit dem ihm

eigenen Humor geschildert in der Festschrift zum 70. Geburtstage seines Lehrers.

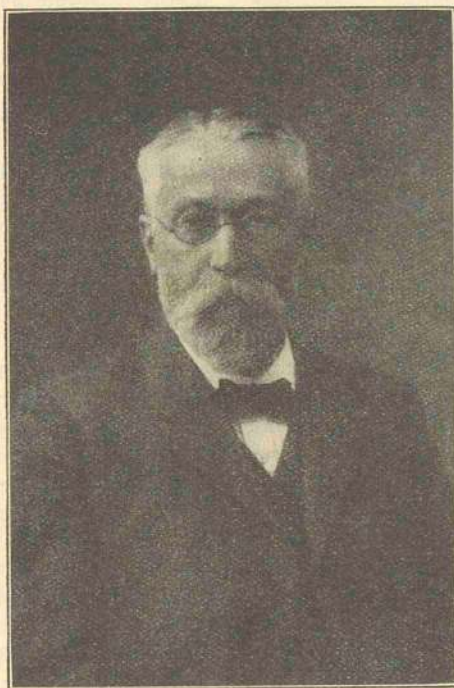
1874 ging er als Oberlehrer an die Thomaschule in Leipzig. Neben seiner Lehrertätigkeit hat er in den zwei Jahren hier eifrig physikalisch gearbeitet.

1875 entdeckte er die unipolare Stromleitung der Schwefelmetalle, eine Erscheinung, deren Natur trotz vieler mühevoller Arbeiten von ihm und andern noch immer rätselhaft geblieben ist. Nach vielen Jahren hat er ihr eine wichtige technische Anwendung in dem Kristalldetektor der drahtlosen Telegraphie gegeben.

In der Leipziger Zeit hat er auch ein Werk verfaßt, das an Seitenzahl sein umfangreichstes geblieben ist und das unter den Schriften des Gelehrten seltsam genug und doch sehr erfreulich anmutet: „Der junge Mathematiker und Naturforscher, Einführung in die Geheimnisse der Zahl und Wunder der Rechenkunst etc.“ (Leipzig, O. Spamer 1876), ein Kompendium, geschrieben für Jungens, untermischt

mit Scherz und Scherzaufgaben, wie es die frohe Art dieses Lehrers auch in späten Jahren blieb.

1876 wurde er als a. o. Professor für theoretische Physik nach Marburg berufen. Von experimentellen Untersuchungen der Elektrizitätsleitung durch Flammen und geschmolzene Salze her kam er 1878 zur Erkenntnis, daß die



F. Braun

W. Thomsonsche Berechnung der elektromotorischen Kraft von galvanischen Elementen aus der Wärmetönung der chemischen Prozesse falsch sei. In eigentümlichen Spekulationen fand er, daß den chemischen Prozessen dabei verschiedene elektromotorische Nutzeffekte bzw. Arbeitsfähigkeiten beizulegen seien, die er für gewisse Fälle experimentell bestimmen konnte. Das Problem wurde 1882 von Helmholtz unter Einführung des Begriffes der freien Energie in der bekannten Art behandelt.

Untersuchungen und Messungen über diese Fragen beschäftigten Braun neben andern elektrischen Arbeiten noch in Straßburg, wo er 1880—83 a. o. Professor war, und in Karlsruhe 1883—84.

1884 wurde er als Ordinarius nach Tübingen berufen. Bau und Einrichtung eines neuen Instituts haben ihn dort zwar stark in Anspruch genommen und ihm für alle Zeiten den Geschmack an solcher Arbeit verleidet, doch blieb ihm die Tübinger Zeit stets in lieber Erinnerung und er hat eine große Reihe der verschiedenartigsten Arbeiten dort ausgeführt.

Aus theoretischen Überlegungen zieht er den Schluß, daß gesättigte Salmiaklösung durch Drucksteigerung teilweise ausgefällt wird, und bestätigt das Resultat experimentell. Das führt ihn weiter zu einem „Allgemeinen qualitativen Satz über Zustandsänderungen“, dem Braun-Le Chatelierschen Prinzip (dessen Gültigkeitsbereich er allerdings später einschränken mußte).

In einer Arbeit über die Dielektrizitätskonstante des Steinsalzes für verschiedene kristallographische Richtungen ist das Braunsche Elektrometer zuerst beschrieben; ein Beispiel für den praktischen Sinn des Experimentators, der auch ein diffiziles Instrument in zuverlässige und handliche Form zu bringen wußte.

Arbeiten über Volumänderungen beim Mischen von Gasen, über Tropfelektroden, „Deformationsströme“ und Studien über verschiedene Erscheinungen folgten, darunter Untersuchungen über die merkwürdige „Stenolyse“ (Metallabscheidung bei der Elektrolyse gewisser Metallsalzlösungen durch feine Spalten hindurch).

1895 folgte Braun wieder einem Ruf nach Straßburg, jetzt als Institutsdirektor; von dort wieder wegzugehen hat er sich trotz manchen Versuchungen nicht entschließen können.

Hier entstand 1897 die Braunsche Röhre; mit sicherem Griff hatte er die praktische Bedeutung und Verwendbarkeit einer Erscheinung erfaßt, die ihrem Wesen nach noch fraglich war.

Im gleichen Jahr begannen Brauns Arbei-

ten über drahtlose Telegraphie, die grundlegend wurden für ein Gebiet der Technik und die auch für die Physik den Anstoß gaben zu neuer Arbeit. Im gekoppelten Kondensatorkreis ersah Braun das Mittel, das der jungen drahtlosen Telegraphie die Energie zuführen konnte, die sie brauchte, um Technik zu werden.

Man hat die Priorität an seiner Erfindung bestritten, andere als geschäftliche Gründe lagen dafür nicht vor. Trotzdem hat es ihm große Freude bereitet, als durch die Verleihung des Nobelpreises 1909 jeder Streit darüber entschieden zu sein schien. Leider hat ihm dieser Streit nun die letzten Lebensjahre noch grausam vergällt.

Im Straßburger Institut wurden in den arbeitsreichen Jahren damals die elektrischen Schwingungen heimisch, die Kenntnis des Gebietes wurde in einer großen Anzahl von Arbeiten erweitert, Arbeitsmethoden und Instrumente wurden geschaffen sowohl für die rein wissenschaftliche wie auch für die technische Seite.

Bald trat auch Braun wieder an andere Aufgaben heran. 1904 entdeckte er in den Metallbeschlägen, die beim Zerstäuben dünner Drähte durch Entladung von Kondensatorbatterien entstehen, submikroskopische Strukturen: Hertzsche Gitter für Lichtwellen. Mit feinsten Experimentierkunst hat er es verstanden, die merkwürdige Tatsache zu stützen und weiter zu benutzen zur Untersuchung ähnlicher Strukturen in organischen Gebilden.

Für das Jahr 1905 war Braun zum Rektor gewählt; in seiner Antrittsrede meinte er, jeder Rektor gäbe da eine Übersicht über seine Tätigkeit, weil er für ein Jahr von ihr scheide. Ihn warf dann aber eine schwere Erkrankung nieder, die nur durch eine Operation behoben werden konnte.

Langsam erholte er sich von den Folgen, beglückt von dem Gefühl, doch wieder wirken und arbeiten zu können und mit mannigfachen Entwürfen beschäftigt, die aber nicht zur Ausführung gediehen.

In seinen letzten Arbeiten hat er sich wieder der drahtlosen Telegraphie zugewandt und die praktische Verwendbarkeit der geschlossenen Antennen gesichert; eine letzte Frucht dieser Arbeiten war die absolute Messung des von der Station Eiffelturm ausgestrahlten Feldes.

Als Mensch war Braun von seltener Natürlichkeit, alles Steife und Förmliche war ihm fremd. Sein sonniges Wesen, sein frohes Lachen gewannen ihm die Herzen. Ihm selbst half heitere Lebensbejahung auch über herben Kummer hinweg, der ihm reichlich zuteil ward und der doch keine Verbitterung hinterließ.

Zu dem Manne mit den gütigen, klugen Zügen, dem ein so feines Empfinden und Verstehen eigen war, faßte man unwillkürlich Zutrauen, das nicht enttäuscht wurde. Mit Rat und Tat half er, wo er helfen konnte.

Im Institut hat er jeder Individualität und jeder Neigung freie Bahn gelassen; nicht eben erbaut von allzu großem Praktikantenzustrom, aber denjenigen, den er als tüchtig befand, mit freundlichstem Interesse und dauernder Teilnahme fördernd.

Seine Fähigkeit, auch komplizierte Dinge einfach zu sehen, auf der seine großen Erfolge beruhen, gab auch seinem Vortrag das Gepräge und machte sein Kolleg, das er selten ohne Scherzwort ließ, zu einem Genuß.

Für seine Person war er anspruchslos; das Arbeitszimmer, das er benutzte, war aus den primitivsten Institutsmöbeln zusammengestellt. In seiner Abneigung gegen „überflüssigen Luxus“ verschmähte er das elektrische Licht in Privaträumen und den Telephonegebrauch. Das Institut besaß nur eine kurze Telefonleitung, die er zur Schonung seines Mechanikers legen ließ.

Mehr Wert legte er auf einen gut gepflegten Weinkeller, es war ihm ein schweres Opfer, als er solchem Genuß auf ärztliches Anraten entsagen mußte. Die Zigarre verließ ihn selten, und das Straßburger Kolloquium war vor andern dadurch ausgezeichnet, daß es stets vom Professor durch Herumreichen einer Zigarrenkiste eröffnet wurde.

Auf seinen regelmäßigen Spaziergang nach dem Kolleg hielt er; wie er oft versicherte, fielen ihm dabei seine besten Gedanken ein. In den letzten Jahren war ein großer Leontiner sein steter Begleiter; dem „Leo“ widmete er eine rührende Zuneigung und noch von Amerika aus sorgte er sich um sein Wohlergehen.

In freien Stunden trieb Braun mit Vorliebe Aquarellmalerei und von seinen Ferienreisen brachte er stets Skizzen in großer Zahl heim, die ihm viel Freude bereiteten.

Ein echter deutscher Gelehrter ist mit Ferdinand Braun von uns geschieden. Erfüllt von tiefer Liebe für seine Wissenschaft, lebte er nur für Institut und Forschung; lebenswürdig, bescheiden und freundlich in seinem Auftreten war er seinen Schülern und Assistenten mehr ein väterlicher Freund als ein Vorgesetzter.

Er gehörte zu den auserwählten Naturforschern, die die innern Zusammenhänge in der Natur vorausahnen, ehe sie sie im einzelnen erkennen oder gar in Formeln kleiden können und die besonders geeignet sind, ihrer Wissenschaft neue Pfade zu weisen. So hat Braun auf vielen Gebieten der Physik Neues, Wertvolles, oft Überraschendes zutage gefördert und in der drahtlosen Telegraphie die Grundlage geschaffen, auf der ihre schnelle und glanzvolle Entwicklung beruht.

H. R.

(Eingegangen 16. Oktober 1918.)

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die ultraroten Eigenschwingungen zweiatomiger Kristalle.

Von M. Born.

Einleitung.

In einer kürzlich erschienenen Mitteilung¹⁾ habe ich gezeigt, daß die Frequenz der langwelligen ultraroten Eigenschwingungen zweiatomiger Kristalle mit Hilfe der Gittertheorie berechnet werden kann und der Größenordnung nach richtig herauskommt, wenn man die Ladung des einwertigen Ions im Kristall ebenso groß ansetzt wie im Elektrolyten.

Herr Debye hat mich freundlicherweise darauf aufmerksam gemacht, daß sein Schüler, Herr W. Dehlinger²⁾, bereits im Jahre 1914

zu demselben Ergebnis gelangt ist, was mir leider entgangen war. Doch glaube ich, daß meine Ableitung nicht überflüssig ist. Denn Herr Dehlinger knüpft an die speziellen Ansätze an, die v. Kármán und ich¹⁾ zur Berechnung der Gitterschwingungen aufgestellt haben und bei denen nur die Wechselwirkungen zwischen Nachbaratomen berücksichtigt werden; aus meiner Darstellung geht hervor, daß die Dehlingersche Formel aus ganz allgemeinen Sätzen der Gittertheorie ohne besondere Annahmen und fast ohne Rechnung folgt.

Die numerischen Rechnungen von Dehlinger und mir haben übereinstimmend ergeben, daß zwar die Größenordnung der berechneten Frequenzen richtig herauskommt, aber beträchtliche Differenzen übrig bleiben.

¹⁾ M. Born, Sitzungsber. d. kgl. Preuß. Akad. d. Wiss., 13. Juni 1918, S. 604.

²⁾ W. Dehlinger, diese Zeitschr. 15, 276, 1914.

¹⁾ M. Born und Th. v. Kármán, diese Zeitschr. 13, 297, 1912.

Dabei besteht bei Dehlinger eine Unsicherheit in der anzuwendenden Formel; das hängt mit der Frage zusammen, ob bei der Berechnung der auf ein Atom wirkenden elektrischen Kraft die Lorentzsche Kraft $\frac{1}{3}e\mathfrak{P}$ zu berücksichtigen ist oder nicht. Ich möchte die Gelegenheit benutzen, um auf diese prinzipielle Frage einzugehen (§ 1); es wird sich zeigen, daß bei den ultraroten Frequenzen der Kristalle diese Lorentzsche Kraft fortzulassen ist, wie ich das in der oben zit. Arbeit getan habe.

Die Frequenzen ergeben sich stets etwas zu groß. Der Grund hierfür kann nicht, wie Herr Dehlinger vermutet (l. c. § 5 und Schluß von § 6), der Ansatz für die Molekularkräfte sein, da diese in das Ergebnis gar nicht eingehen. Ich glaube, daß die Abweichungen davon herrühren, daß die Anzahl der Freiheitsgrade, welche bei der Rechnung berücksichtigt werden, zu klein ist. Die Atome werden nämlich als Massenpunkte behandelt, denen je 3 Freiheitsgrade zukommen. In Wirklichkeit sind sie aber sicherlich komplizierte Gebilde, aus einem Kern und einer Anzahl Elektronen bestehend; ein elektrisches Feld wird daher nicht nur die Atome als ganze verschieben, sondern sie auch drehen und deformieren. Vielleicht kann man, wie W. Voigt¹⁾ es vorschlägt, die Atome näherungsweise als starre Körper behandeln; dann können jedenfalls Drehungen im elektrischen Felde auftreten. Zur Erläuterung meiner Ansicht, daß die Anzahl der Freiheitsgrade wesentlich ist, will ich zeigen (§ 2), daß die Annahme, die Atome könnten als Massenpunkte behandelt werden, bei zweiatomigen regulären Gittern noch eine andere Relation zur Folge haben würde, die zwar eine richtige Größenordnungsbeziehung ausdrückt, tatsächlich aber nicht zahlenmäßig erfüllt ist. Schließlich werde ich auf die Vorstellung, die Atome seien von einer Elektronenwolke umgebene Kerne, näher eingehen und nachweisen, daß dann Abweichungen von der Dehlingerschen Formel zu erwarten sind.

§ 1. Über die Lorentzsche Kraft $\frac{1}{3}e\mathfrak{P}$.

Um ein Urteil über die Frage der Lorentzschen Kraft $\frac{1}{3}e\mathfrak{P}$ zu gewinnen, genügt es, das einfachste Modell der Dispersionstheorie, ein quasielastisch, ungedämpft schwingendes Elektron, zu betrachten. Wir schreiben die Schwingungsgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} (\mathfrak{E} + \frac{1}{3} \mathfrak{P}), \quad (1)$$

¹⁾ W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik (Leipzig, B. G. Teubner, 1910), VII. Kap., II. Abschn. § 292–303, S. 596–616.

wobei $\mathfrak{E}$ die äußere elektrische Feldstärke und $\frac{1}{3}\mathfrak{P}$ die von den Nachbaratomen herrührende elektrische Beeinflussung (nach Lorentz) ist; $\mathfrak{P}$ ist das elektrische Moment der Volumeneinheit, definiert durch

$$\mathfrak{P} = Ne\bar{x}. \quad (2)$$

Man kann nun bei der Lösung von (1) zwei verschiedene Wege einschlagen, die im Ergebnis natürlich völlig übereinstimmen.

1. Weg. Man setzt den Wert (2) auf der rechten Seite von (1) ein und schreibt

$$\ddot{x} + \left(\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3m} \right) x = \frac{e}{m} \mathfrak{E}.$$

Setzt man

$$\omega_*^2 = \omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3m}, \quad (3)$$

so hat man die einfache Schwingungsgleichung

$$\ddot{x} + \omega_*^2 x = \frac{e}{m} \mathfrak{E}$$

mit der Eigenfrequenz ω_* . Ihre Lösung, die einer Lichtwelle der Frequenz ω entspricht, ist

$$x = \frac{\frac{e}{m}}{\omega_*^2 - \omega^2} \mathfrak{E}.$$

Der Brechungsindex n , der durch die Relation

$$\mathfrak{P} = (n^2 - 1) \mathfrak{E} \quad (4)$$

definiert ist, ergibt sich nun mit Hilfe von (2) zu

$$n^2 - 1 = \frac{\frac{Ne^2}{m}}{\omega_*^2 - \omega^2} \quad (5)$$

2. Weg. Man löst die Gleichung (1) unmittelbar für eine Schwingung der Frequenz ω auf, und erhält die Lösung

$$x = \frac{\frac{e}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2} (\mathfrak{E} + \frac{1}{3} \mathfrak{P}).$$

Hieraus folgt nach (2)

$$\mathfrak{P} = \frac{\frac{Ne^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2} (\mathfrak{E} + \frac{1}{3} \mathfrak{P}),$$

oder nach (4):

$$n^2 - 1 = \frac{\frac{Ne^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(1 + \frac{n^2 - 1}{3} \right).$$

Daraus ergibt sich

$$3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{\frac{Ne^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (6)$$

Es handelt sich nun um den Vergleich der beiden Formeln (5) und (6).

Beide sind natürlich mathematisch völlig äquivalent; denn ersetzt man etwa in (5) ω_* nach (3) durch ω_0 , so erhält man nach einfacher Umrechnung die Formel (6).

(5) hat das Aussehen der bekannten einfachen Dispersionsformel für verdünnte Gase, wo die Wechselwirkung der Moleküle vernachlässigt wird; tatsächlich ist diese aber nicht vernachlässigt, sondern steckt in der Frequenz ω_* , die gegen die ursprüngliche ω_0 verschoben ist.

(6) hat das Aussehen der Lorentz-Lorenzschen Formel, aus der man den Schluß zieht, daß der Ausdruck $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{1}{N}$ von der Dichte unabhängig ist.

Wenn wir nun untersuchen wollen, welche der beiden Formeln (5) und (6) im Falle der ultraroten Frequenzen der Kristalle anzuwenden ist, so läuft die Frage offenbar darauf hinaus, ob dabei ω_0 oder ω_* als Eigenfrequenz des Gitters zu gelten hat.

ω_0 ist offenbar eine Atomkonstante. Es leuchtet ein, daß bei Gasen und Flüssigkeiten die Formel (6) eine adäquate Beschreibung des Dispersionsprozesses ist, da jedes Atom unabhängig von den andern mit der Eigenfrequenz ω_0 auf das Licht reagiert. Dasselbe gilt auch noch für die Dispersion der Kristalle im optischen Spektrum, wo es sich um dieselben Eigenfrequenzen der in den Atomen sitzenden Elektronen handelt, die auch im Gaszustande wirksam sind. Dann wird der Einfluß der vergrößerten Dichte in vernünftiger Weise genähert durch die Lorentz-Lorenzsche Form (6) der Dispersionsformel dargestellt.

Anders aber ist es im Falle der langwelligen ultraroten Eigenfrequenzen der Kristalle. Dabei handelt es sich nicht um intraatomische Schwingungen, sondern um Schwingungen der ganzen Atome gegeneinander. Wenn man den Gitterverband der Atome löst, so bleibt in diesem Frequenzbereich gar keine Schwingung übrig. Ein dem Atom eigentümliches ω_0 ist gar nicht vorhanden, sondern ω_0 ist selbst eine Folge der Wechselwirkungen der Atome; zu diesen Wechselwirkungen gehört aber auch die Lorentzsche Zusatzkraft $\frac{1}{3} e \mathfrak{P}$, ja sie läßt sich von den übrigen Molekularkräften gar nicht trennen. Besonders, wenn man daran glaubt, daß im Grunde alle Molekularkräfte elektromagnetischen Ursprungs sind, leuchtet ein, daß die Lorentzsche Kraft keine Sonderrechte hat. Daraus folgt, daß die durch (3) definierte Frequenz ω_* als eine dem Gitter (nicht dem Atom) eigentümliche Konstante aufzufassen ist; die Trennung von ω_* in zwei

Teile ω_0^2 und $-\frac{N e^2}{3m}$ nach (3) entspricht nicht den tatsächlichen Verhältnissen.

In diesem Falle ist also die Formel (5) die einzig richtige Form des Dispersionsgesetzes. Man kann das aber auch so ausdrücken, daß an Stelle der ursprünglichen Schwingungsgleichung (1) die einfache Gleichung

$$\ddot{x} + \omega_*^2 x = \frac{e}{m} \mathfrak{E}$$

ohne Lorentzsche Kraft zu treten hat, wo ω_* eine dem Gitter eigentümliche Frequenz bedeutet¹⁾.

§2. Über Beziehungen zwischen den Konstanten zweiatomiger, regulärer Gitter.

Die von Dehlinger und mir zur Berechnung der ultraroten Eigenfrequenzen benutzte Beziehung kann hinsichtlich ihres Gültigkeitsbereichs nur beurteilt werden, wenn man sie als besonderen Fall der von der Gittertheorie²⁾ gelieferten Aussagen ansieht. Diese lassen sich sämtlich zurückführen auf die Berechnung der Dichte der potentiellen Energie für homogene Verzerrungen; darunter sind solche Deformationen zu verstehen, bei denen jedes einzelne einfache, aus gleichen Atomen bestehende Gitter gleichförmig deformiert wird und zugleich die einzelnen einfachen Gitter als ganze gegeneinander verschoben werden.

Die gleichförmige Deformation der einfachen Gitter wird durch die 6 Deformationskomponenten $x_x, y_y, z_z, y_x, z_x, x_y$ beschrieben, die Verschiebungen der einfachen Gitter werden durch die Verrückungskomponenten $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, \dots$ gemessen. Ersetzt man das Gitter durch einen kontinuierlichen Kristall und bezeichnet die Verrückungskomponenten eines Volumenelements mit u, v, w , die als stetige Funktionen von x, y, z angesehen werden, so hat man zwischen diesen und den Deformationskomponenten die bekannten Relationen

$$x_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \quad y_z = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \dots \quad (7)$$

anzusetzen.

Für einen regulären, zweiatomigen Kristall, dessen Atome als Massenpunkte wirken, ergibt die Gittertheorie folgenden Ausdruck der Dichte der potentiellen Energie³⁾.

1) Eine ausführlichere Begründung dieses Satzes, die aber gedanklich mit der hier skizzierten übereinstimmt, findet sich in meinem Buche *Dynamik der Kristallgitter*, Leipzig, B. G. Teubner, 1915.

2) Vgl. M. Born, *Dynamik der Kristallgitter*, I. c.

3) Vgl. M. Born, *Kristallgitter*, I. c.; man spezialisire die Formeln (31), (32), (37), (41) für den Fall zweier Atome und regulärer Symmetrie.

$$\Phi = \frac{1}{2} A (x_x^2 + y_y^2 + z_z^2) + \frac{1}{2} B \{ 2(y_y z_z + z_z x_x + x_x y_y) + y_y^2 + z_z^2 + x_x^2 \} + C \{ (u_1 - u_2) y_z + (v_1 - v_2) z_x + (w_1 - w_2) x_y \} + \frac{1}{2} D \{ (u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 + (w_1 - w_2)^2 \}. \quad (8)$$

Wenn man hier die Glieder mit $u_1, \dots, u_2, \dots$ wegläßt, bleibt die bekannte Formel für die Energie, welche die phänomenologische Elastizitätstheorie benützt, nur dadurch spezialisiert, daß zwischen den 3 Konstanten dieser Theorie eine Relation besteht, welche sie auf 2, A und B , reduziert (Rarikonstantentheorie¹⁾. Die Zusatzglieder mit $u_1, \dots, u_2, \dots$ beziehen sich auf Erscheinungen, bei denen relative Verschiebungen der beiden Atomarten eintreten, wie Piezoelektrizität, dielektrische Erregung usw.; außerdem fällt ihnen auch noch die Aufgabe zu, die beiden Elastizitätskonstanten A, B durch eine dritte zu ergänzen (und damit die Multikonstantentheorie wieder herzustellen).

Sobald der Ausdruck der Energiedichte aufgestellt ist, sind keine weiteren molekulartheoretischen Betrachtungen mehr nötig, sondern man kann die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung nach den Regeln der Mechanik der Kontinua aufstellen.

Man wird daher zunächst die Spannungskomponenten

$$\left. \begin{aligned} -X_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_x} = A x_x + B(y_y + z_z), \dots \\ -Y_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial y_z} = B y_z + C(u_1 - u_2), \dots \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

und die Komponenten der auf die Volumeneinheit der einzelnen, als starr gedachten Atomgitter wirkenden Kraft

$$\left. \begin{aligned} -X_1 &= \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} = C y_z + D(u_1 - u_2), \dots \\ -X_2 &= \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} = -C y_z - D(u_1 - u_2), \dots \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

bilden.

Ist $\mathfrak{E}$ ein elektrisches Feld, dem der Kristall ausgesetzt ist, so lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} &= \rho_e \mathfrak{E}_x, \dots \\ m_1 \frac{d^2 u_1}{dt^2} - X_1 V &= e \mathfrak{E}_x, \dots \\ m_2 \frac{d^2 u_2}{dt^2} - X_2 V &= -e \mathfrak{E}_x, \dots \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Dabei ist ρ die Massendichte, die mit den Atommassen m_1, m_2 und dem Volumen V des Elementar-Parallelepipeds durch die Beziehung

¹⁾ Vgl. Enzyklopädie d. math. Wiss. IV, 23. Art. von C. H. Müller und A. Timpe; s. insbesondere 4c, S. 37 ff.

$$\rho V = m_1 + m_2 \quad (12)$$

verknüpft ist. $e, -e$ sind die Ladungen der beiden Atome und ρ_e die Dichte der freien elektrischen Ladung; diese hängt mit dem elektrischen Momente der Volumeneinheit

$$\mathfrak{P} = \frac{e(u_1 - u_2)}{V} \quad (13)$$

mittels der Formel

$$\operatorname{div} \mathfrak{P} = -\rho_e \quad (14)$$

zusammen und verschwindet im Falle homogener Zustände. Schließlich ist das Moment $\mathfrak{P}$ mit der Feldstärke $\mathfrak{E}$ durch die aus den Maxwell'schen Gleichungen folgende Relation

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{E} \quad (15)$$

verbunden. Zu den Gleichungen (11) treten noch Randbedingungen; wir wollen nur den Fall ins Auge fassen, daß die Spannungskomponenten am Rande gegebene Werte haben.

Der Gültigkeitsbereich dieser Gesetze, die zu gleicher Zeit die elastischen, piezoelektrischen, dielektrischen und die langwelligen optischen Vorgänge umfassen, wird durch die Bedingung abgegrenzt, daß die Zustandsgrößen innerhalb von Gebieten, die nur wenige Elementar-Parallelepipede des Gitters enthalten, merklich konstant sein müssen.

Hinsichtlich der Abhängigkeit von der Zeit sind zwei Fälle zu unterscheiden: 1. statische Zustände und unendlich langsame Vorgänge; 2. ultrarote Schwingungen.

1. Statische Zustände. Wir heben zwei ausgezeichnete Fälle hervor, wobei einmal das elektrische Feld, das andere Mal die elastischen Oberflächenkräfte fehlen.

a) Verschwindendes elektrisches Feld, $\mathfrak{E} = 0$. Hier handelt es sich um rein elastische Deformationen. Aus der zweiten oder dritten Gleichung (11) folgt $X_1 = X_2 = 0$, also nach (10)

$$u_2 - u_1 = \frac{C}{D} y_z. \quad (16)$$

Setzt man dies in (9) ein, so kann man schreiben:

$$\left. \begin{aligned} -X_x &= c_{11} x_x + c_{12} (y_y + z_z), \dots \\ -Y_z &= c_{44} y_z, \dots \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

dabei sind c_{11}, c_{12}, c_{44} die Elastizitätskonstanten in der Voigt'schen Bezeichnung, und es gilt

$$c_{11} = A, \quad c_{12} = B, \quad c_{44} = B - \frac{C^2}{D} \quad (18)$$

Setzt man ferner (16) in (13) ein, erhält man

$$\mathfrak{P}_x = e_{14} y_z, \dots \quad (19)$$

wo

$$e_{14} = -\frac{e}{V} \frac{C}{D} \quad (20)$$

gesetzt ist. $\mathfrak{P}$ ist das piezoelektrische Moment und e_{14} die zugehörige Konstante in der Voigt'schen Bezeichnung.

b) Verschwindende Randspannungen. Wir können das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ und damit auch die Polarisation $\mathfrak{P}$ als räumlich konstant annehmen, so daß nach (14) $q_x = 0$ ist.

Dann folgt wegen $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ aus der ersten Gleichung (11) und den Randbedingungen, daß alle Spannungskomponenten verschwinden. Insbesondere folgt aus $Y_z = 0$ nach (9)

$$y_z = \frac{C}{B} (u_2 - u_1). \quad (21)$$

Setzt man das in (10) ein, so kommt

$$-X_1 = X_2 = \left(D - \frac{C^2}{B}\right) (u_1 - u_2)$$

und die zweite oder dritte Gleichung (11) gibt wegen $\frac{d^2 u_1}{dt^2} = \frac{d^2 u_2}{dt^2} = 0$:

$$V \left(D - \frac{C^2}{B}\right) (u_1 - u_2) = e \mathfrak{E}_x. \quad (22)$$

Daher entsteht nach (13) das Moment

$$\mathfrak{P} = \frac{e^2}{V^2 \left(D - \frac{C^2}{B}\right)} \mathfrak{E}. \quad (23)$$

Das ist derjenige Anteil der dielektrischen Erregung, der von der Verschiebung der Ionen gitter herrührt. Ist ϵ die Dielektrizitätskonstante und ϵ_0 der Anteil, den die in den Atomen sitzenden Elektronen beisteuern, so gilt

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{e^2}{V^2 \left(D - \frac{C^2}{B}\right)}. \quad (24)$$

Setzt man andererseits den aus (22) folgenden Wert von $u_1 - u_2$ in (21) ein, so erhält man

$$y_z = \frac{-e \frac{C}{B}}{V \left(D - \frac{C^2}{B}\right)} \mathfrak{E}_x, \dots \quad (25)$$

Das ist die zum piezoelektrischen Effekt reziproke Erscheinung. Die Konstante hat nach (18) und (20) den Wert

$$\frac{-e \frac{C}{B}}{V \left(D - \frac{C^2}{B}\right)} = \frac{-e \frac{C}{D}}{V \left(B - \frac{C^2}{D}\right)} = \frac{e_{14}}{c_{44}}, \quad (26)$$

so daß man die Gleichungen (25) in der Form $e_{14} \mathfrak{E}_x = c_{44} y_z = -Y'_z, \dots$

schreiben kann, wo $Y'_z, \dots$ diejenigen Spannungen

sind, die dieselbe Verzerrung hervorrufen würden wie das Feld $\mathfrak{E}$. Dieser Effekt hängt also von den bereits eingeführten Konstanten ab.

2. Ultrarote Schwingungen. Wir betrachten nun Schwingungen, bei denen die Abhängigkeit der Zustandsgrößen von der Zeit durch den Faktor $e^{i\omega t}$ dargestellt wird, wobei die der Frequenz ω entsprechende Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$$

von der Größenordnung der Reststrahlen, etwa $10\mu = 10^{-3}$ cm, also ω von der Ordnung 10^{14} sec $^{-1}$ sein soll. Während nun in der elektrodynamischen Gleichung (15) die zweiten

Ableitungen nach der Zeit den Faktor $\frac{1}{c^2}$ haben,

ist das bei der elastischen (ersten) Gleichung (11) nicht der Fall; daraus folgt, daß, wenn das Glied rot rot $\mathfrak{E}$ in (15) mit den beiden ersten von gleicher Größenordnung ist, wie es bei einer elektrischen Welle sein muß, die 3 Glieder der Gleichung (11) nur dann von gleicher Größenordnung sein können, wenn die Amplituden von u, v, w verschwindend klein (von der Ordnung $\frac{1}{c^2}$) sind.

Dann folgt aber aus (7), daß die Deformationskomponenten sämtlich verschwindend klein sind. Während also die Berechnung der statischen Dielektrizitätskonstante nach 1, b) mit verschwindenden Spannungen erfolgen muß, ist bei ultraroten Schwingungen mit verschwindenden Deformationen zu rechnen. In diesem Falle haben infolge der Massenträgheit die Spannungen nicht Zeit, sich auszugleichen. Dieses Verhalten ist ganz analog der bekannten Tatsache, daß man bei der Fortpflanzung akustischer Wellen in Gasen mit der adiabatischen, nicht der isothermen Beziehung zwischen Druck und Volumen rechnen muß.

Für $y_z = 0$ folgt aus (10)

$$-X_1 = X_2 = D(u_1 - u_2), \quad (27)$$

und die zweite und dritte Gleichung (11) werden:

$$m_1 \frac{d^2 u_1}{dt^2} + DV(u_1 - u_2) = e \mathfrak{E}_x,$$

$$m_2 \frac{d^2 u_2}{dt^2} + DV(u_2 - u_1) = -e \mathfrak{E}_x,$$

und daraus folgt für Schwingungen der Frequenz ω :

$$(u_1 - u_2) \left\{ -\omega^2 + DV \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \right\} = \left\{ \begin{aligned} &= e \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathfrak{E}_x. \end{aligned} \right. \quad (28)$$

Das elektrische Moment ist also nach (13)

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P} &= \frac{e^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}{DV \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) - \omega^2} \mathfrak{E} \\ &= \frac{e^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}{\omega_0^2 - \omega^2} \mathfrak{E}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Die Formel zeigt, daß für die Frequenz

$$\omega_0 = \sqrt{DV \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)} \quad (30)$$

Resonanz eintritt; diese Frequenz muß also, bis auf den kleinen, durch Vernachlässigung der Absorption entstehenden Fehler, die des Reststrahls sein.

Geht man in (29) zur Grenze $\omega=0$ über, so erhält man nicht den Beitrag der Gitterschwingungen zur statischen Dielektrizitätskonstante, wie er durch (23) definiert ist, sondern

$$\mathfrak{P} = \frac{e^2}{V^2 D} \mathfrak{E}. \quad (31)$$

In der Tat ist dieser Grenzübergang nicht erlaubt, weil sich bei abnehmendem ω der Übergang des deformationsfreien in den spannungsfreien Prozeß vollzieht.

Berechnen wir der Vollständigkeit halber noch die Größe der elastischen Spannungen, die die elektrische Welle begleiten, so finden wir aus (9) und (28):

$$\left. \begin{aligned} X_x &= 0, \dots \\ -Y_z &= \frac{eC \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}{\omega_0^2 - \omega^2} \mathfrak{E}_x, \dots \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Damit sind die durch unseren Ansatz (8) dargestellten Erscheinungen erschöpft.

Überblicken wir die Ausbeute, so finden wir 6 meßbare Konstanten, die wir hier noch einmal zusammenstellen:

$$c_{11} = A, \quad c_{12} = B, \quad c_{44} = B - \frac{C^2}{D}, \quad (18)$$

$$e_{14} = -\frac{eC}{VD}, \quad (20)$$

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{e^2}{V^2 \left(D - \frac{C^2}{B} \right)}, \quad (21)$$

$$\omega_0 = \sqrt{DV \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}. \quad (22)$$

Hinsichtlich der Meßbarkeit von $\varepsilon - \varepsilon_0$ ist noch zu sagen, daß ε_0 als der Wert des Quadrats des Brechungsindex erscheint, den dieser im Ultraroten annimmt, bevor der Einfluß der Reststrahlfrequenz sich bemerkbar macht¹⁾.

1) Ich habe daher in meiner zit. Arbeit ε_0 mit n_0^2 bezeichnet.

Diese 6 meßbaren Konstanten drücken sich durch e, m_1, m_2, V und durch die 4 Konstanten A, B, C, D aus. Folglich lassen sich zwei von A, B, C, D freie Beziehungen zwischen ihnen aufstellen, und zwar kann man diese so einrichten, daß sie an Stelle der Größen e, m_1, m_2, V nur die durch (12) definierte Massendichte ρ , die Atomgewichte $\mu_1 = N m_1$, $\mu_2 = N m_2$, die Elektrovalenz z und die Faradaysche Konstante $F = \sqrt{4\pi N e_0}$ enthalten, wenn N die Avogadro'sche Zahl, e_0 die Ladung des Elektrons in rationellen Einheiten ($e = z e_0$) ist. Aus (18) folgt

$$C^2 = D(c_{12} - c_{44}),$$

$$D - \frac{C^2}{B} = D \frac{c_{44}}{c_{12}},$$

daher erhalten wir aus (21)

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{e^2 c_{12}}{V^2 D c_{44}}$$

und aus (20)

$$e_{14}^2 = \frac{e^2 (c_{12} - c_{44})}{V^2 D}.$$

Eliminiert man hieraus D , so kommt:

$$\frac{e_{14}^2}{\varepsilon - \varepsilon_0} = (c_{12} - c_{44}) \frac{c_{44}}{c_{12}}. \quad (23)$$

Das ist die eine der gesuchten Relationen, die von allen molekularen Größen völlig frei ist. Die andere kann man in zwei Formen schreiben, je nachdem man D aus der einen oder andern Gleichung entnimmt und in (22) einsetzt:

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= e \sqrt{\frac{c_{12}}{c_{44}} \cdot \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_0} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \cdot \frac{1}{V}} \\ &= \frac{e}{e_{14}} \sqrt{(c_{12} - c_{44}) \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \cdot \frac{1}{V}}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Führt man hier die Wellenlänge $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}$ ein, so erhält man nach leichter Rechnung:

$$\left. \begin{aligned} z \lambda_0 &= \frac{c \sqrt{\pi}}{F} \sqrt{\frac{c_{44}}{c_{12}} (\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{\mu_1 \mu_2}{\rho}} \\ &= \frac{c \sqrt{\pi}}{F} e_{14} \sqrt{\frac{1}{c_{12} - c_{44}} \cdot \frac{\mu_1 \mu_2}{\rho}}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Die erste Form für $z \lambda_0$ stimmt mit dem früher von mir abgeleiteten Gesetz überein, wenn man $c_{12} = c_{44}$ setzt; damit kommt man auch im wesentlichen auf das Ergebnis von Dehlinger zurück.

Wir können jetzt die Tragweite unserer ursprünglichen Ansätze überblicken.

Es kommt vor allem auf die Konstante C an. Verschwindet diese, so folgt aus (20), daß $e_{14} = 0$ ist, und zugleich aus (18), daß die Cauchy'sche Relation $c_{12} = c_{44}$ erfüllt ist.

Nun zeigt aber der Ausdruck (8) für die potentielle Energie Φ , daß für Kristalle mit Symmetriezentrum $C=0$ ist. Daß diese nicht piezoelektrisch sein können ($e_{14}=0$), ergibt auch die phänomenologische Theorie. Darüber hinaus verlangt aber unser Ansatz, daß für alle zweiatomigen, regulären Kristalle mit Symmetriezentrum $c_{12}=c_{44}$ sein muß. Die Erfahrung lehrt, daß das nicht der Fall ist; W. Voigt¹⁾ hat die folgenden Elastizitätskonstanten gemessen:

	$c_{11} \cdot 10^{-11}$	$c_{12} \cdot 10^{-11}$	$c_{44} \cdot 10^{-11}$
Flußspat	16,4	4,49	3,38
Steinsalz	4,69	1,30	1,27
Sylvin	3,68	0,194	0,642
Natriumchlorat	6,50	-2,10	1,20
Pyrit.	36,1	-4,74	10,55

Von diesen Kristallen haben Flußspat, Steinsalz und Pyrit ein Zentrum der Symmetrie; gleichwohl ist die Beziehung $c_{12}=c_{44}$ nur bei Steinsalz angenähert erfüllt. Bei Pyrit haben c_{12} und c_{44} sogar entgegengesetzte Vorzeichen.

Dies zeigt, daß die unseren Betrachtungen zugrunde gelegten Annahmen nicht richtig sind; die Atome verhalten sich tatsächlich nicht wie Massenpunkte. Wir werden im nächsten Paragraphen andeuten, in welchem Sinne die Theorie zu erweitern ist, um von diesen Abweichungen Rechenschaft zu geben.

Wir können daher auch gar nicht erwarten, daß die Formeln (23) und (25) genau stimmen. Die beste Aussicht hat noch die erste Form der Formel (25), in der man dann konsequenterweise $c_{12}=c_{44}$ setzen wird, weil unsere Theorie die Ursachen für den Unterschied von c_{12} und c_{44} nicht hinreichend erfaßt. In der Tat habe ich in der eingangs zitierten Arbeit angenäherte Übereinstimmung für Steinsalz, Sylvin, Bromkalium, Jodkalium gefunden (Abweichungen etwa 16 Proz.), etwas schlechtere für Flußspat (vgl. auch die Tabelle am Schlusse dieser Arbeit). Die Formel (23) und den zweiten Ausdruck von $z\lambda_0$ nach (25) kann man nur als rohe Größenordnungsbeziehungen ansehen. Man könnte diese etwa an Zinkblende (ZnS) prüfen, aber leider sind die Elastizitätskonstanten von dieser Substanz nicht bekannt. Man könnte ferner daran denken, Natriumchlorat heranzuziehen, wo die Konstanten c_{11} , c_{12} , c_{44} , c_{14} bekannt sind; zwar ist dieser Kristall nicht zweiatomig, aber man könnte die Ionen Na^+ und ClO_3^- wie Atome behandeln. Doch sieht man sofort, daß dieser Stoff der Theorie

nicht gehorcht, denn nach obiger Tabelle ist $c_{12}-c_{44}<0$, so daß die Quadratwurzel in dem zweiten Ausdruck (25) für $z\lambda_0$ imaginär wird.

Daß immerhin in (23) und (25) eine richtige Größenordnungsbeziehung steckt, sieht man so: Die Elastizitätskonstanten sind in absoluten Einheiten von der Ordnung 10^{11} , die piezoelektrische Konstante von der Ordnung 10^4 ; der Zahlenfaktor in (25) ist

$$\frac{c\sqrt{\pi}}{F} = 1,8 \cdot 10^{-4}.$$

Daher wird

$$z\lambda_0 \sim 2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^4 \sqrt{\frac{10^{-11} \mu_1 \mu_2}{\rho}},$$

$$z\lambda_0 \sim 2 \cdot 10^{-5} \sqrt{\frac{\mu_1 \mu_2}{10 \rho}},$$

für mittlere Atomgewichte $\mu \sim 50$ und $\rho \sim 1$ ergibt sich daher

$$z\lambda_0 \sim 3 \cdot 10^{-4} \text{ cm},$$

so daß die Wellenlänge tatsächlich in der Gegend der ultraroten Eigenfrequenzen (Reststrahlen) herauskommt.

§3. Der Einfluß der Elektronen auf den Brechungsindex im Ultraroten.

Wir haben gesehen, daß unter der Voraussetzung der Atome als punktförmiger Kraftzentren eine Abweichung von der Cauchyschen Relation bei zweiatomigen regulären Kristallen nur dadurch erklärt werden kann, daß die beiden Gitter ohne Symmetriezentrum ineinander gestellt angenommen werden. Sobald ein Symmetriezentrum da ist, folgt die Cauchysche Relation; und erst recht ist das der Fall bei einatomigen Kristallen, wie die Metalle *Au*, *Ag*, *Pt*, *Al*, *Cu* usw. Die Metalle stellen quasiisotrope Gemenge dar, haben also nur 2 meßbare Elastizitätskonstanten; Voigt¹⁾ hat gezeigt, daß zwischen diesen eine Beziehung gelten müßte, sobald für die einzelnen regulären Kristallindividuen des Gemenges die Cauchysche Relation erfüllt ist, und da in Wirklichkeit jene Beziehung nicht statthat, so ist damit bewiesen, daß die Atome der Metalle nicht als Massenpunkte im Gitterverbande angenommen werden dürfen.

Aus diesem Grunde hat Voigt die Annahme gemacht, daß die Atome als starre Körper anzusehen sind, die außer Verschiebungen auch Drehungen ausführen können, also nicht 3, sondern 6 Freiheitsgrade haben²⁾. In

1) W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik, I. c. Kap. 7, § 372, S. 744. Die Angaben unserer Tabelle sind auf cgs-Einheiten umgerechnet.

1) W. Voigt, Kristallphysik I. c., Anhang II, § 469 ff., S. 954; vgl. insbes. § 472, S. 962.

2) W. Voigt, Kristallphysik, I. c., VII. Kap., II. Abschn., S. 596.

der Tat fallen auf diese Weise alle Schwierigkeiten hinsichtlich der Cauchyschen Relationen fort.

Mir scheint ein etwas allgemeinerer Ansatz vorteilhaft. Nach allen unsern Kenntnissen über das Verhalten der Atome unter der Wirkung von Licht- und Röntgenstrahlen usw. müssen wir schließen, daß das Atom aus einem positiven Kerne besteht, der von einem Schwarm von Elektronen umgeben ist. Somit hat das Atom in Wirklichkeit eine große Anzahl von Freiheitsgraden, die mehr oder minder steif sein werden; sind die Elektronen in ihren Gleichgewichtslagen (bzw. ihren stationären Bahnen nach Bohr) relativ zum Atomkern sehr fest gebunden, so kommt man auf die Voigtsche Hypothese starrer Atome zurück. Die potentielle Energie eines aus Kernen und Elektronen gebildeten regulären Kristalles hat die Form

$$\Phi = \frac{1}{2} A (x_x^2 + y_y^2 + z_z^2) + \frac{1}{2} B \{ 2(y_y z_z + z_z x_x + x_x y_y) + y_y^2 + z_z^2 + x_x^2 \} + \gamma_x \sum_i C_i u_i + \gamma_y \sum_i C_i v_i + \gamma_z \sum_i C_i w_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k} D_{ik} u_i u_k, \quad (26)$$

wobei wegen des Schwerpunktsatzes die Relationen

$$\sum_i C_i = 0, \quad \sum_i D_{ik} = 0, \quad (D_{ik} = D_{ki}) \quad (27)$$

erfüllt sein müssen. Dabei sind u_i, v_i, w_i die Verschiebungskomponenten irgendeines einfachen Gitters, das aus entsprechend liegenden, gleichen Partikeln (Kernen oder Elektronen) aufgebaut ist. In der Tat folgt hieraus nach der in § 2 mitgeteilten Methode, daß die Cauchysche Relation $c_{12} = c_{44}$ nicht erfüllt zu sein braucht, auch bei zentralsymmetrischen Kristallen; denn bei diesen werden die Koeffizienten C_i im allgemeinen nicht verschwinden, weil bei einer Inversion die u_i, v_i, w_i nicht nur ihr Vorzeichen umkehren, sondern zugleich die Indizes $i = 1, 2, \dots$ sich in bestimmter Weise permutieren.

Die Vorstellung der Elektronenwolke scheint mir vor der Voigtschen Hypothese der starren Molekeln den Vorzug zu haben, daß sie die Abweichungen von der ersten Formel (25) leichter verständlich macht. Bei NaCl ist z. B., wie die Tabelle auf S. 545 zeigt, die Relation $c_{12} = c_{44}$ nahezu erfüllt; trotzdem liefert die Berechnung von λ_0 aus $\epsilon - \epsilon_0$ nach (25) einen um 20 Proz. zu großen Wert. Man kann nur schwer verstehen, daß die Drehung der Atome diesen beiden Tatsachen zugleich gerecht werden soll; wenn die Atome überdies zentralsymmetrische Ladungsverteilung haben, ist überhaupt schwer verständlich, wie die Drehung

die Beziehung zwischen $\epsilon - \epsilon_0$ und λ_0 beeinflussen soll. Dagegen ist ohne weiteres klar, daß die Annahme von deformierbaren Elektronenwolken um die Atomkerne einen Einfluß dieser auf $\epsilon - \epsilon_0$ ergibt, wenn man die (elektrischen) Koppelungen zwischen den beiden Elektronenwolken berücksichtigt. Es scheint mir nicht überflüssig, dies durch eine kleine Rechnung näher auszuführen.

Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, daß die Koeffizienten C_i zu vernachlässigen sind; dann braucht man nicht zwischen spannungsfreien (statischen) Zuständen und deformationsfreien (ultravioletten) Schwingungen zu unterscheiden. Die Bewegungsgleichungen unter der Wirkung eines elektrischen Feldes $\mathcal{E}$ werden [analog zu § 2, (11)]

$$m_i \frac{d^2 u_i}{dt^2} + V \sum_k D_{ik} u_k = e_i \mathcal{E}_x, \dots \quad (28)$$

und wir können diese sowohl auf statische Zustände als auch auf Schwingungen anwenden. Wir wollen nun aber die Verrückungskomponenten der beiden Kerne von denen der Elektronen unterscheiden; die ersteren bezeichnen wir mit $U_1, \dots$ und $U_2, \dots$ die letzteren mit $u_1, \dots, u_2, \dots$ usw. Ferner machen wir die Annahme, daß im ultravioletten Frequenzbereiche die Masse der Elektronen gegen die der Kerne zu vernachlässigen ist. Dann können wir die Bewegungsgleichungen folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 U_1}{dt^2} + (A + \sum_i a_i) U_1 - A U_2 - \sum_i a_i u_i &= n_1 e \mathcal{E}_x, \\ m_2 \frac{d^2 U_2}{dt^2} + (A + \sum_i b_i) U_2 - A U_1 - \sum_i b_i u_i &= n_2 e \mathcal{E}_x, \\ -a_k U_1 - b_k U_2 + \sum_i c_{ki} u_i &= -e_i \mathcal{E}_x; \end{aligned} \quad (29)$$

dabei sind für die Koeffizienten VD_{ik} neue Zeichen eingeführt, je nachdem sie sich auf die Koppelung zweier Kerne, zweier Elektronen oder eines Kernes mit einem Elektron beziehen; eine Verteilung der Elektronen auf die beiden Atome ist vorläufig noch nicht vorgenommen. n_1, n_2 sind die Kernladungszahlen. Zugleich sind die Relationen (24) $\sum_i D_{ik} = 0$ für die beiden ersten

Gleichungen erfüllt; für die übrigen muß

$$c_{ki} = c_{ik}, \quad a_k + b_k = \sum_i c_{ki} \quad (30)$$

sein.

Wir betrachten zunächst die freien Schwingungen ($\mathcal{E} = 0$). Die Lösungen der linearen Gleichungen

$$\sum_i c_{ki} u_i = \xi_k$$

seien

$$u_i = \sum_k \gamma_{ik} \xi_k,$$

so daß

$$\sum_k \gamma_{ik} c_{kj} = \delta_{ij} \quad (31)$$

ist, wobei

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j, \\ 1 & \text{für } i = j. \end{cases}$$

Dann folgt aus der dritten Gleichung (29) für $\mathcal{E} = 0$:

$$u_i = U_1 \sum_k \gamma_{ik} a_k + U_2 \sum_k \gamma_{ik} b_k.$$

Setzt man das in die beiden ersten Gleichungen (29) ein, so kommt

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 U_1}{dt^2} + (A + \sum_i a_i - \sum_{i,k} \gamma_{ik} a_i a_k) U_1 \\ - (A + \sum_{i,k} \gamma_{ik} a_i b_k) U_2 = 0, \\ m_2 \frac{d^2 U_2}{dt^2} - (A + \sum_{i,k} \gamma_{ik} b_i a_k) U_1 \\ + (A + \sum_i b_i - \sum_{i,k} \gamma_{ik} b_i b_k) U_2 = 0. \end{aligned}$$

Nun ist aber nach (30) und (31)

$$\begin{aligned} \sum_{i,k} \gamma_{ik} a_i a_k &= - \sum_{i,k} \gamma_{ik} a_i (b_k - \sum_j c_{kj}) \\ &= - \sum_{i,k} \gamma_{ik} a_i b_k + \sum_i a_i; \end{aligned}$$

daher reduzieren sich die 4 Koeffizienten auf den einen Wert

$$A' = A + \sum_{i,k} \gamma_{ik} a_i b_k, \quad (32)$$

und die Schwingungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 U_1}{dt^2} + A' (U_1 - U_2) &= 0, \\ m_2 \frac{d^2 U_2}{dt^2} + A' (U_2 - U_1) &= 0. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Frequenz

$$\omega_0 = \sqrt{A' \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}. \quad (33)$$

Jetzt betrachten wir die Wirkung eines statischen Feldes $\mathcal{E}$, setzen also in (29) die zeitlichen Ableitungen gleich Null. Aus der letzten Gleichung folgt:

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_k \gamma_{ik} (-e \mathcal{E}_x + a_k U_1 + b_k U_2) \\ &= -e \mathcal{E}_x \sum_k \gamma_{ik} + U_1 \sum_k \gamma_{ik} a_k + U_2 \sum_k \gamma_{ik} b_k. \end{aligned}$$

Damit verwandeln sich die beiden ersten Gleichungen in

$$\begin{aligned} A' (U_1 - U_2) &= e \mathcal{E}_x (n_1 - \sum_{i,k} \gamma_{ik} a_i), \\ A' (U_2 - U_1) &= e \mathcal{E}_x (n_2 - \sum_{i,k} \gamma_{ik} b_i) \end{aligned}$$

diese sind miteinander verträglich, weil wegen

(30) und (31) die Summe der rechten Seiten verschwindet. Aus der ersten Gleichung folgt:

$$U_2 = U_1 - \frac{e}{A'} \mathcal{E}_x (n_1 - \sum_{i,k} \gamma_{ik} a_i).$$

Das setzen wir in die dritte Gleichung (29) ein:

$$\begin{aligned} -U_1 (a_k + b_k) + b_k \frac{e}{A'} \mathcal{E}_x (n_1 - \sum_{i,k} \gamma_{ik} a_i) \\ + \sum_i c_{ki} u_i = -e \mathcal{E}_x, \end{aligned}$$

oder nach (30):

$$\begin{aligned} \sum_i c_{ki} (u_i - U_1) &= -b_k \frac{e}{A'} \mathcal{E}_x (n_1 - \sum_{i,k} \gamma_{ik} a_i) \\ &\quad - e \mathcal{E}_x. \end{aligned}$$

Durch Auflösen erhalten wir:

$$\begin{aligned} u_i - U_1 &= -\frac{e}{A'} \mathcal{E}_x (n_1 - \sum_{i,k} \gamma_{ik} a_i) \sum_{i,k} \gamma_{ik} b_k \\ &\quad - e \mathcal{E}_x \sum_k \gamma_{ik}. \end{aligned}$$

Das elektrische Moment der Volumeneinheit ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_x &= \frac{e}{V} (n_1 U_1 + n_2 U_2 - \sum u_i) \\ &= \frac{e}{V} \left\{ n_2 (U_2 - U_1) - \sum_i (u_i - U_1) \right\}. \end{aligned}$$

Setzen wir hier die gefundenen Ausdrücke für $U_2 - U_1$ und $u_i - U_1$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_x &= \frac{e^2}{V} \mathcal{E}_x \left\{ -\frac{n_2}{A'} (n_1 - \sum_{i,k} \gamma_{ik} a_i) + \frac{1}{A'} (n_1 - \sum_{i,k} \gamma_{ik} a_i) \sum_{i,k} \gamma_{ik} b_k + \sum_{i,k} \gamma_{ik} \right\} \\ \mathfrak{P}_x &= \frac{e^2}{V} \mathcal{E}_x \left\{ -\frac{1}{A'} (n_1 - \sum_{i,k} \gamma_{ik} a_i) (n_2 - \sum_{i,k} \gamma_{ik} b_k) + \sum_{i,k} \gamma_{ik} \right\}. \end{aligned}$$

Nun folgt aus (30):

$$\sum_{i,k} \gamma_{ik} (a_i + b_i) = \sum_{i,k} \gamma_{ik} c_{kj} = \sum_i \delta_{ij} = (n_1 + n_2),$$

daher kann man schreiben:

$$\mathfrak{P}_x = \frac{e^2}{V} \mathcal{E}_x \left\{ \frac{1}{A'} (n_1 - \sum_{i,k} \gamma_{ik} a_i)^2 + \sum_{i,k} \gamma_{ik} \right\}.$$

Würden die beiden positiven Kerne festgehalten werden, so ergäbe sich offenbar das Moment

$$\mathfrak{P}_x = \frac{e^2}{V} \mathcal{E}_x \sum_{i,k} \gamma_{ik}.$$

Setzen wir nun

$$\mathfrak{P}_x = (\varepsilon_0 - 1) \mathcal{E}_x,$$

so ist

$$\varepsilon_0 = 1 + \frac{e^2}{V} \sum_{i,k} \gamma_{ik} \quad (34)$$

der (früher auch mit n_1^2 bezeichnete) Wert der optischen Dielektrizitätskonstante in demjenigen ultraroten Teile des Spektrums, wo die Eigenschwingung der Kerne noch nicht merklich ist.

Setzen wir für A' seinen Wert aus (33) ein und benützen die Abkürzung

$$z' = n_1 - \sum_{i,k} \gamma_{ik} a_i, \quad (34)$$

so erhalten wir

$$\mathfrak{P}_x = (\varepsilon - 1) \mathfrak{E}_x,$$

wo

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{e^2 z'^2}{V \omega_0^2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right), \quad (36)$$

oder

$$z' \lambda_0 = \frac{c \sqrt{\pi}}{F} \sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{\mu_1 \mu_2}{Q}}. \quad (37)$$

Wir gelangen also zur Gleichung (25) des § 2 zurück, wobei nur $c_{12} = c_{44}$ gesetzt ist und statt der Elektrovalenz z die durch (35) definierte Größe z' steht, die von den Koppelungen der Elektronen abhängt.

Wenn die Elektronen des einen Atoms mit denen des andern nicht gekoppelt sind, hat das Schema der a_i , b_i und c_{ik} die Form

$$\begin{array}{c|cccccccc} a_1 & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & & & \\ a_{p_1} & 0 & c_{p_1 1} & c_{p_1 2} & \dots & c_{p_1 p_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & \dots & \bar{c}_{1p_1} \\ \dots & & & & & & & & & \\ 0 & b_{p_2} & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{c}_{p_2 1} & \bar{c}_{p_2 2} & \dots & \bar{c}_{p_2 p_2} \end{array}$$

wo p_1 und p_2 die Elektronenzahlen der beiden Atome sind, also $p_1 + p_2 = n_1 + n_2$; dann folgt aus (30):

$$\sum_{i,k} \gamma_{ik} a_i = \sum_{i,k,j} \gamma_{ik} c_{kj},$$

wo die Summationen nur bis p_1 erstreckt zu werden brauchen; wegen (31) hat diese Summe den Wert p_1 . Daher wird nach (35)

$$z' = n_1 - p_1 = z;$$

denn z ist der Überschuß der Kernladungszahl des ersten Atoms über seine Elektronenzahl. Wenn aber Koppelungen zwischen den Elektronen der beiden Atome vorhanden sind, wird z' von z verschieden. Eine genaue Berechnung von z' ließe sich nur durchführen, wenn die Konstitution der Atome genau bekannt wäre, wobei dann wohl auch unser quasilastischer Ansatz im Sinne der Bohrschen Modelle abgeändert werden müßte.

Man kann für die Kristalle der Verbindungen eines Alkalimetalls mit einem Halogen

einen empirischen Wert von z' angeben, nämlich

$$z' = 1,237.$$

Damit ergibt sich folgende Tabelle¹⁾:

Substanz	Formel	$z' \lambda_0$ (ber.)	λ_0	Reststrahl
Steinsalz	NaCl	66,7	54,0	52,0
Sylvin	KCl	78,0	63,2	63,4
Bromkalium	KBr	94,0	76,1	82,6
Jodkalium	KJ	115,0	93,0	94,1

Diese Übereinstimmung scheint die Annahme²⁾ zu bestätigen, daß der Aufbau der äußeren, locker gebundenen Elektronen bei den Atomen dieser Kristalle nahezu identisch ist.

1) Die Werte von $z' \lambda_0$ sind meiner zit. Arbeit, Tab. I, entnommen.

2) Nach W. Kossel (Ann. d. Phys. (4) 49, 229, 1916) würden sowohl die Alkali- als die Halogen-Atome nach Austausch eines Elektrons den äußeren Charakter des dazwischen liegenden Edelgases haben.

(Eingegangen 6. September 1918.)

Zur Theorie des Glimmstroms. VII.

Eine Übersicht.

Von Ragnar Holm.

§ 1. Einleitung.

In den letzten Jahren habe ich in dieser Zeitschrift eine Reihe Arbeiten „Zur Theorie des Glimmstroms“ veröffentlicht. Wie in der ersten hervorgehoben wurde, waren meine Arbeitsbedingungen ungünstig. Daher kam es, daß viele Beobachtungen nur provisorischen Charakter bekamen und daß auch einige theoretische Abschnitte unklar bzw. fehlerhaft wurden. Immerhin dürfte ich wohl mit meiner, die Theorien von J. J. Thomson, J. Stark usw. ergänzenden Theorie das angestrebte Ziel erreichen können, nämlich einheitliche Behandlung vieler vorher ungeklärter Fragen und die Anregung zur Weiterarbeit auf diesem Gebiete. Besonders wegen der Mängel der ersten Veröffentlichungen scheint es mir zweckmäßig, eine mit berichtenden bzw. ergänzenden Bemerkungen versehene Übersicht meiner Theorie als eine Art Abschluß zu geben. Eine solche soll hier im Zusammenhang mit einer kleinen experimentellen Arbeit zum selben Thema gebracht werden. Auf meine erwähnten früheren Arbeiten¹⁾, die mit römischen Zahlen I, II,

1) R. Holm, Zur Theorie des Glimmstroms, diese Zeitschrift: I mit §§ 1, 2, 3 in 15, 241–248, 1914; II mit

III, IV, V, VI numeriert und in Paragraphen aufgeteilt wurden, verweise ich, indem ich einfach die betr. Abhandlungs- (römisch) und Paragraphen- (arabisch) Nummern angebe. Die folgenden Paragraphen sind je einer Haupthypothese bzw. Abteilung meiner Theorie gewidmet.

§ 2. Ähnlichkeitsbetrachtungen.

Ganz besonders haben sich die auf Grund von Ähnlichkeitsbetrachtungen hergeleiteten Gesetze A bis F in II § 4 bewährt. Diese Betrachtungen sind sehr allgemein gehalten und gelten für alle Teile des Glimmstroms. Sie sind in II § 4 schon in möglichst kurzer Weise ausgedrückt und hergeleitet.

Es ist hervorzuheben, wie auf Grund der Gesetze A bis F Beziehungen zwischen Stromdichte vor der Kathode, Gasdichte und Kathodenfall hergeleitet werden können; siehe IV § 8 und besonders VI¹⁾, wo die betr. Beweisführung besser dargestellt ist.

Wie in VI erwähnt, ist meine Theorie des Kathodenfalles mit einer später als meine Abhandlung IV von Skinner²⁾ veröffentlichten Theorie verwandt und wird von Skinners Beobachtungen bestätigt.

In II § 4 habe ich die Gesetze A bis F hauptsächlich durch vorgefundene Beobachtungen an der positiven Säule zu stützen gesucht. Diese, wie auch die angeführten eigenen, sind aber weniger zu dem betr. Zwecke geeignet, weil sie nicht mit Gasfüllungen von übereinstimmendem Reinheitsgrad ausgeführt wurden. Einige spätere, den Zusammenhang zwischen Rohrdurchmesser, Druck und Stromstärke in der positiven Säule betreffende Beobachtungen von mir haben eine bedeutend genauere Bestätigung der Theorie gegeben.

§ 3. Wiedervereinigung in zwei Stufen.

Aus gewissen Eigenschaften der positiven Säule konnte ich wichtige Gesetze herleiten. Es sei zunächst an die Theorie der Wiedervereinigung freier Elektronen und Ionen erinnert. In I § 2 wurde nämlich wahrscheinlich gemacht, daß die Wiedervereinigung in

zwei Stufen vonstatten geht. Die erste Stufe besteht darin, daß freie Elektronen durch „Kleben“ an Moleküle lose gebunden werden. Die zweite Stufe besteht darin, daß so gebremste Elektronen im starken, ein positives Ion umgebenden Feld aus ihrer losen Verbindung mit dem Molekül gerissen werden, auf das Ion auffliegen und von ihm fest gebunden werden (die eigentliche Wiedervereinigung).

Wenn ein Kleben nicht auftritt, wie gerade in reinen Edelgasen, so kann Wiedervereinigung nur so zustande kommen, daß im Felde frei bewegliche Elektronen von Ionen aufgefangen werden. Die geschieht aber äußerst spärlich, weil die im Felde zur Geschwindigkeit gelangten Elektronen Kometenbahnen um die Ionen herum beschreiben und diese nicht treffen.

Beobachtungen an reinen Edelgasen bestätigen die Theorie, indem auf der Wiedervereinigung beruhende, weiter unten zu besprechende Phänomene in ihnen wegfallen, vgl. § 9, hier unten.

Gleichzeitig mit mir hat Child¹⁾ darauf hingewiesen, daß der Wiedervereinigung ein Auffangen der Elektronen durch neutrale Moleküle vorangehen muß.

Dank der genannten Wiedervereinigungstheorie wird es möglich, die eigentümliche Beziehung zwischen dem Gradienten und der Stromstärke in der positiven Säule zu erklären, siehe § 4. Ein anderer wesentlicher Erfolg der betr. Theorie ist die erste theoretisch einwandfreie Erklärung des ersten Kathodendunkelraumes, siehe unten §§ 8 und 9.

§ 4. Der Gradient der positiven Säule²⁾.

In I § 2 wird bewiesen, daß in der positiven Säule Ionisation stattfindet und stattfinden muß, um den Elektronenverlust infolge Wiedervereinigung zu ersetzen. Dabei holen sich die Elektronen ihre Ionisationsgeschwindigkeit meistens erst auf mehreren freien Weglängen. Es ist also nicht notwendig, daß die Ionisationsspannung schon auf eine freie Weglänge fällt. Es wird weiter für den besonderen, selten verwirklichten Fall paralleler Stromlinien bewiesen, daß der Potentialfall pro mittlere freie Weglänge in der positiven Säule ein ganz bestimmter, eine Materialkonstante werden muß.

Die Unabhängigkeit des Potentialfalles pro

§§ 4, 5 in 15, 289–293, 1914; III mit § 6 in 15, 782–785, 1914; IV mit §§ 7, 8, 9 in 16, 20–30, 1915; V mit §§ 10, 11, 12, 13 in 16, 70–81, 1915; VI in 17, 402–405, 1916.

1) Leider kommt hier unter der Formel (11) Seite 404 ein störender Druckfehler vor, indem es steht „Stromdichte . . . angenähert umgekehrt prop. dem Druck“, wo „umgekehrt“ gestrichen werden muß.

2) C. A. Skinner, Phys. Rev. 5, 483 und 6, 158, 1915; vgl. W. L. Cherry, Phys. Rev. 7, 241, 1916 und W. Neuswanger, Phys. Rev. 7, 253, 1916.

1) C. D. Child, Phil. Mag. 27, 277, 1914.

2) Vgl. das Referat, Handb. d. Radiologie, Bd. III, S. 91 u. 92.

freie Weglänge von Strom und Druck tritt allerdings bei den üblichen Versuchen zunächst nicht zutage, sondern der Gradient ist bei kleinem Strom recht groß und nähert sich erst bei großen Stromstärken einem konstanten Endwert, wobei die ursprüngliche Abweichung von diesem größer ausfällt, je enger das betr. Rohr ist.

Die Abweichung der Beobachtungen von der für parallele Stromlinien geltenden Theorie suchte ich zuerst durch eine nicht gut getroffene Hypothese E in I § 2 zu erklären. In III § 6 ersetzte ich die Hypothese E durch eine andere E', welche näherliegend ist und vermutlich gut der Wirklichkeit entspricht. Die Hypothese E', etwas verbessert, besagt in Kürze:

Erstens: Ein wichtiger Elektronenverlust der positiven Säule beruht auf einer Elektronendiffusion, aus der das Rohr nie ganz ausfüllenden eigentlichen Strombahn in umgebende, wenig stromfördernde Gebiete¹⁾, wo die Wiedervereinigung überwiegt. Um die vergrößerte Wiedervereinigung wettzumachen, muß die Ionisation in der Strombahn mittels erhöhtem Gradienten verstärkt werden²⁾.

Zweitens: Die vom Stromvorgang aufrecht erhaltenen Ladungen bedingen bei kleiner Stromstärke nur in der Mitte des Rohres parallele, für reiche Ionisation und für die Stromführung günstige Stromlinien. Nach außen gerichtete Stromlinien sind natürlich ungünstig für die Ionisation, weil sie nur aus dem spärlich ionisierten Wandgebiet Elektronen herholen.

Die Hypothese E' enthält nun auch drittens die Behauptung, daß größere Stromstärken günstiger geformte Ladungen aufrecht erhalten können, wodurch in einem größeren Teil des Rohrquerschnitts parallele Stromlinien hervorgerufen werden. Das Ionisationsgebiet wird

1) Eine Behauptung des Herrn H. Salinger, Ann. d. Phys. 54, 317, 1917, daß der ganze Rohrquerschnitt gleich strombefördernd ist, basiert auf Leitfähigkeitsmessungen, deren Zeugnis man wohl als irreführend bezeichnen darf, besonders jetzt, nachdem Davis und Goucher, Phys. Rev. 10, 101, 1917 den starken lichtelektrischen Effekt des Glimmlichtes auf eintauchendes Metall entdeckt haben. Eine andere Bemerkung des Herrn Salinger betrifft die eigenartige dunkle Entladung in O_2 . Wenn diese, wie Herr Salinger im Widerspruch mit früheren Beobachtern behauptet, nicht durch große Gradienten charakterisiert ist, so wird meine in IV, Ende § 9 dargestellte, recht komplizierte Arbeitshypothese hinfällig. Die Entladung in O_2 verdient weitere besondere Beachtung.

2) In III § 6 habe ich die elektronenbremsende Wirkung der Wände zu sehr hervorgehoben; wie sich die Wiedervereinigungsvergrößerung auf Wände und die ihnen nächstliegenden Gebiete des Gases verteilt, mag vorläufig dahingestellt bleiben. — Eine Diskussion des Elektronenverlustes an den Wänden hat auch R. Seeliger, diese Zeitschr. 15, 777, 1914, veröffentlicht.

somit ergiebiger, während gleichzeitig das Randgebiet der überwiegenden Wiedervereinigung verkleinert wird.

Durch diese Hypothese erklärt sich (vgl. V, § 13):

1. Das Anwachsen des Gradienten der positiven Säule mit abnehmendem Rohrdurchmesser. vgl. III, § 6.

2. Die Abnahme des Gradienten mit wachsender Stromstärke, vgl. I § 2 und III § 6.

3. Das Vorhandensein einer unteren Grenze des Gradienten, welcher sich der Gradient bei wachsender Stromstärke asymptotisch nähert.

Diese Tatsache 3 wird folgendermaßen erklärt:

Die günstigsten Ladungen, die natürlich am leichtesten von großen Stromstärken unterhalten werden, können, wie gesagt, die Strombahn breit machen, so daß in ihr eine reichliche Ionisation vor sich gehen kann, wodurch die Bedeutung des Elektronenverlustes in den gleichzeitig eingeschränkten Randgebieten herabgesetzt wird. Möglicherweise können die betr. Ladungen auch der Elektronendiffusion nach den Randgebieten entgegenwirken. Der innerhalb der eigentlichen Strombahn durch Wiedervereinigung zustandekommende Elektronenverlust bleibt aber immer bestehen, verlangt zu seiner Kompensation eine gewisse Ionisation und bedingt somit die untere Grenze des Gradienten. Diese Grenze ist offenbar gleich dem oben erwähnten Gradienten im Falle paralleler Stromlinien.

Diese untere Grenze ist schwer festzustellen, weil dabei die von der erhöhten Temperatur bedingte Verdünnung des Gases berücksichtigt werden muß, was die bisherigen Beobachter versäumt haben. In Edelgasen, wo die Wiedervereinigung in der Säule infolge Wegfalls des Klebens fast verschwindet, braucht die untere Gradientengrenze nur zum Überwinden einer äußerst schwachen Reibung auszureichen. Man hat deshalb in Edelgasen eine fast nullwertige untere Gradientengrenze zu erwarten. Experimente von Claude¹⁾, welche er selber nicht deuten konnte, bestätigen diese Forderung der Theorie, wodurch diese eine gute Stütze erhält.

§ 5. Die Ladungen in der positiven Säule.

Die im vorigen Paragraphen erwähnten Raumladungen in der positiven Säule sollen hier etwas näher besprochen werden. Um die Vorstellung von jenen Raumladungen etwas zu klären, habe ich, siehe III § 6, einige Berech-

1) G. Claude, C. R. 158, 479, 1914; vgl. III § 6.

nungen ausgeführt. Der Einfachheit halber dachte ich mir ein Rohr in einem äußerst schwachen äußeren Felde und an einem Ort, wo das Potential des äußeren Feldes etwa mit dem Potential des mittleren Glimmlichtes zusammenfällt. Weiter dachte ich mir die Raumladungen zunächst gleichmäßig innerhalb des einzelnen Rohrquerschnitts verteilt. Die Fig. 2 in III zeigt für ein Beispiel die Größe der betr. Raumladungen, die in der ungeschichteten positiven Säule positiv und mit der Entfernung von der Anode abnehmend sind. Zu der betr. Anordnung der Raumladungen gehört ein Bild der Äquipotentialflächen, etwa wie das der Fig. 3 in III. Nur sollten die Kurven noch größere Krümmung in ihren vordersten Punkten haben.

Zu den Fig. 2 und 3 ist zunächst zu bemerken, daß sie die von J. Stark u. a. schon längst hervorgehobene charakteristische Grenz-ionisation an der Anode nicht berücksichtigen. Es ist ja klar, daß positive Raumladungen vor der Anode nur dann aufrechtgehalten werden können, wenn aus der Oberflächenschicht der Anode positive Ionen geliefert werden. Es scheint, daß die die Ionen liefernde Schicht nicht zu der Anode selbst gehört, sondern eine der Anode unmittelbar vorangelagerte Gasschicht ist. Um aus dieser die nötigen Ionen zu befreien, scheint nun der sonst für die positive Säule ausreichende Elektronenstrom nicht zu genügen, sondern in dem ankommenden Elektronenstrom müssen mehr Elektronen als sonst, bezüglicherweise alle auf Ionisierungsgeschwindigkeit, bisweilen sogar auf eine noch größere, leistungsfähigere Geschwindigkeit als gerade die kleinste Ionisierungsgeschwindigkeit gebracht werden. Dies geschieht, indem sich vor der Anode ein Anodenfall ausbildet. Es entsteht nämlich vor der Anode eine negative Ladungsschicht, und die Anode selber nimmt eine etwas größere positive Ladung als nach Fig. 2 in III an. Diese beiden Ladungen bedingen den Anodenfall. Nach dieser Erklärung des Anodenfalles¹⁾ wird es wahrscheinlich, daß der Anodenfall meistens gleich oder etwas größer als die kleinste Ionisierungsspannung des Füllgases wird. Beobachtungen bestätigen die Theorie²⁾. Gerade weil die Beobachtungen

einen nahen Zusammenhang zwischen dem Anodenfall und der Ionisationsspannung des Füllgases zeigen, muß man, wie oben getan, annehmen, daß die ionenliefernde Schicht dem Füllgase gehört.

Enthält das leitende Gas infolge Klebrigkeit nicht Elektronen, sondern negative Ionen, so wird der Anodenfall groß und sogenannte Anodenstrahlen kommen zum Vorschein¹⁾.

Durch die Berücksichtigung des gewöhnlichen Anodenfalles wird die Fig. 2 in III, abgesehen von der nächsten Nähe der Anode, nur unwesentlich verändert.

In III § 6 wird geschildert, weshalb die Ladungen eine andere Verteilung im einzelnen Rohrquerschnitt, als bei der Berechnung zunächst vorausgesetzt wurde, erhalten. Die positiven Ladungen werden infolge gegenseitiger elektrostatischer Repulsion der Ionen mehr oder weniger nach den Rohrwänden gedrängt. Vor den Schichten der positiven Säule können sogar kleine Gebiete mit negativen Ladungen (Umkehrungen, siehe eine Arbeit von Salinger²⁾) vorkommen. Die inneren Oberflächen der Wände dürften auch von den dorthin diffundierenden, nicht sofort wiedervereinigten Elektronen bisweilen eine negative Flächenladung bekommen.

Das Resultat der genannten Umgestaltung der Ladungen ist, daß die Äquipotentiallinien sich von der in Fig. 3 dargestellten Form entfernen und etwa der in Fig. 4 angegebenen annähern³⁾. Dies gelingt vollständiger, je leichter die betr. Ladungen aufrechtgehalten werden können, d. h. je größer die Stromstärke ist. Nun ergibt, wie schon beschrieben, der in Fig. 4 dargestellte Zustand offenbar einen leistungsfähigeren, einen kleineren Gradienten fordernden Stromzustand als derjenige der Fig. 3. Wir haben hiermit den Inhalt der Hypothese E' etwas näher auseinandergesetzt.

Durch genügende Beachtung der Raumladungsbedingungen konnte ich auch die Schichtung der positiven Säule erklären; siehe den hier folgenden Paragraphen. Die Vorderflächen der Schichten schließen sich vermutlich recht eng an die Äquipotentialflächen an.

pelten kleinsten Ionisierungsspannung auftrat. Herr P. machte mich anlässlich dieser Messungen freundlichst auf den offenbar sehr nahen Zusammenhang zwischen dem Anodenfall und der Ionisierungsspannung aufmerksam.

1) Vgl. E. Gehrcke, Handbuch der Radiologie, III, S. 29.

2) H. Salinger, Ann. d. Phys. 54, 296, 1917, besonders Fig. 12, S. 311.

3) Es sei bemerkt, daß der Verlauf der Äquipotentiallinien der Fig. 4 in III an der Rohrwand unter der Voraussetzung einer starken Wandladung gezeichnet wurde. Treten solche Ladungen nicht auf, so entsteht die umstehende Fig. 1.

1) Ich vermute, daß eine sogenannte zweifache Grenz-ionisierung vor der Anode meistens keine wesentliche Rolle spielt.

2) Nach älteren Messungen schätzt J. Stark, Jahrb. d. Rad. u. El. 13, 421, 1916, den gewöhnlichen Anodenfall auf etwa das 1,5fache der kleinsten Ionisierungsspannung. Neuere noch nicht veröffentlichte Messungen von A. Partzsch ergaben in Edelgasen und Hg-Dampf den Anodenfall etwa gleich der Ionisierungsspannung, während er im N_2 und H_2 etwa in der Größe der dop-

Bei kleineren Stromstärken sind jene ebenso wie nach der Theorie diese stärker gekrümmt.

Die jetzt besprochene Theorie der Ladungen der positiven Säule kann vorläufig durch Messungen oder Berechnungen nur wenig quantitativ gestützt werden. Sie dürfte aber als Arbeitshypothese guten Dienst leisten können.

Unter den hierher gehörigen Messungen erwähne ich noch einmal die von Herrn Sallinger veröffentlichten (l. c.) Sondenmessungen zur Bestimmung der Äquipotentialflächen. Diese bestätigen gut die Theorie. Kleine Verschiedenheiten gegen die nächstliegenden theoretischen Schlüsse, wie z. B. ev. Unterschiede in der Krümmung der Äquipotentialflächen und der Oberflächen der Schichten lassen sich wohl erklären oder sind durch die unvermeidliche Unsicherheit der Sondenmessungen bedingt.

§ 6. Die Schichten der positiven Säule.

Man vgl. diesen Paragraphen mit I § 3, II Ende § 4 und III Ende § 6.

Die Schichtung verlangt natürlich schroffe örtliche Veränderung der Ladung, und zwar um so schroffer, je enger die Schichtung ist. Nur wenn die Stromstärke über gewisse Grenzen steigt, und wenn durch Kleben langsame, zur Raumladungsbildung geeignete negative Ionen entstehen, können die engbegrenzten Raumladungsschichten und also auch die sichtbaren Schichten sich ausbilden. In ganz reinen Edelgasen, sogar in reinem Stickstoff, wo das Kleben fehlt, bzw. sehr spärlich vorkommt, entstehen keine Schichten.

Es ist klar, daß die Schichten instabil werden und zerfallen müssen, wenn das Verhältnis $\frac{\text{Schichtdurchmesser}}{\text{Schichtlänge}}$ sehr groß wird.

Damit hängt zusammen, daß man in engeren Röhren kleinere Schichtlängen erhalten kann als in weiten Röhren. Je enger die Schichtung, desto größer sind die Anforderungen an die schichtbildenden Umstände. Deshalb befördert die Verunreinigung durch „klebrige“ Gase die Ausbildung von Schich-

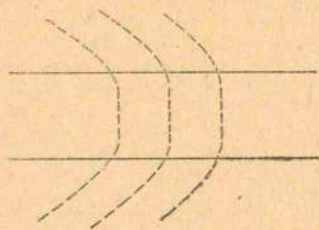


Fig. 1.

ten¹⁾ und wird z. B. zur Bedingung für die enge blaue Schichtung im Wasserstoff. Wasserstoff scheint auch im reinen Zustand genügend klebrig zu sein, um eine geschichtete positive Säule bekommen zu können, aber das wird dann, wie aus dem eben Gesagten zu erwarten ist, eine weite Schichtung, die Neubertsche²⁾ „weite rote Schichtung“. Eine direkte Folge der großen Schichtlänge ist eine große Schichtspannung, welche, weil die Schichtlänge bei wachsendem Druck nur langsam heruntergeht, mit dem Druck in die Höhe steigt. Man vergleiche hiermit das Ende von I § 3.

Über den Ionisationsvorgang in den Schichten und über die Theorie der Schichtpaare siehe I § 3 sowie das Referat im Handbuch der Radiologie, Band III, besonders S. 161 und 162.

§ 7. Die zweifache Grenzionisierung vor der Kathode.

In IV § 7 wird die Grenzionisation vor der Kathode etwa folgendermaßen beschrieben: Positive Ionen, die hauptsächlich aus der Umgebung des Glimmsaumes stammen, befreien durch Stoß an (bzw. aus) der Kathodenoberfläche „primäre Elektronen“ (Kathodenstrahlen). Diese erreichen dank des starken Feldes unmittelbar vor der Kathode (ev. Kathodensprung) schon innerhalb eines Bruchteils der Dunkelraumlänge Ionisationsgeschwindigkeit. Im Dunkelraum und auch ein Stück in das negative Glimmlicht hinein kann man die von ihnen unmittelbar hervorgerufene Ionisation als gleichmäßig betrachten. Über diese Ionisation lagert sich diejenige der „sekundären Elektronen“. In den von der Kathode entfernteren Teilen des negativen Glimmlichts ionisieren fast nur noch primäre Elektronen, indem die sekundären im dortigen schwachen Feld zu kleine Geschwindigkeiten erhalten. Die Reichweite der primären Elektronen kann man etwa an der Länge des negativen Glimmlichts beurteilen.

Die primären Elektronen behalten mit einer gewissen Trägheit gegen die Kathodenoberfläche senkrechte Bahnen (Trägheitserscheinungen der das Glimmlicht erzeugenden Kathodenstrahlen, siehe V § 10). In beträchtlichen Mengen werden sie immerhin so allmählich zerstreut, an den Wänden gebremst und neutralisiert, wodurch sich (V § 10) der Einfluß der Wände auf die Länge des negativen

1) Vgl. P. Neubert, diese Zeitschr. 15, 430, 1914.

2) P. Neubert, Dissertation Leipzig 1913; Ann. d. Phys. 42, 1454, 1913 und diese Zeitschr. 15, 430, 1914, drei Arbeiten, die wohl das bisher beste Beobachtungsmaterial über die geschichtete Säule enthalten.

Glimmlichts erklärt¹⁾. Die verlangsamten primären Elektronen werden auch im Gase absorbiert. Eine Folge des geschilderten Abgangs an Primärelektronen ist, daß schließlich an einer gewissen Stelle der Strombahn die Leitfähigkeit schwächer werden würde als diejenige, welche die positive Säule hätte aufrecht halten können. Dort setzt die positive Säule ein.

Die wichtigsten beobachteten Eigenschaften des zweiten Dunkelraumes (vor der positiven Säule) werden in IV, Ende des § 7, aus der Theorie hergeleitet.

Ein gewisses Gebiet, die Kanalstrahlenquelle, liefert die Hauptmenge der an der Kathodenoberfläche ionisierenden positiven Ionen. Eine im Verhältnis zur Zahl der primären Elektronen und in Abhängigkeit vom Kathodenfall bestimmte Anzahl positiver Ionen muß nach der Kathode eilen, um Ersatz für die vorherigen primären Elektronen zu erzeugen. Genügt der Ersatz nicht, so nimmt der Strom äußerst schnell ab und erlischt. Dieses Erlöschen kann bekanntlich hervorgerufen werden, indem in einem Rohre, dessen Querschnitt die Elektroden vollständig ausfüllen, letztere so gegeneinander verschoben werden (siehe IV Anfang § 8), daß nicht mehr genügend Platz für die Kanalstrahlenquelle übrig bleibt. Aber auch, wenn Platz genug da ist, erlischt die Entladung, wenn die primären Elektronen nicht mehr die nötige Geschwindigkeit erhalten, um eine genügend tiefe und demgemäß ergiebige Kanalstrahlenquelle zu erzeugen, d. h. wenn sie ihre Geschwindigkeit von einem zu kleinen Kathodenfall bekommen. Deshalb gibt es einen kleinsten Kathodenfall (den sog. normalen).

Bei höherem Kathodenfall kommen geschwindere, leistungsfähigere positive Ionen an die Kathode an. Dann kann ihre Anzahl relativ klein sein und die Kanalstrahlenquelle eingeschränkt werden. Gegen ihre räumliche Einschränkung wirken allerdings zwei Umstände, erstens die Tatsache, daß die geschwinderen primären Elektronen auf einem bestimmten Weg seltener ionisieren, zweitens die mit dem Kathodenfall zunehmende Verdünnung des Gases infolge der Temperaturerhöhung vor der Kathode. Immerhin drängt sich die Kanalstrahlenquelle bei hoch steigendem Kathodenfall immer mehr gegen die Kathode zusammen, was man durch Nachschub der Anode verfolgen

kann¹⁾. Ob die Kanalstrahlenquelle dabei eine untere asymptotische Grenze hat und welche, ist aus den bisherigen Beobachtungen, welche sämtlich die wichtige Temperaturerhöhung unberücksichtigt lassen, nicht zu ermitteln.

Bemerkung. Über die Ausdehnung der Kanalstrahlenquelle in Abhängigkeit vom Kathodenfall habe ich leider in IV § 7 und 8 nicht zutreffende Theorien aufgestellt. Besonders ist das dortige Theorem 4 unrichtig. Dieses Theorem wurde mit besonderer Rücksicht auf gewisse Beobachtungen über den normalen Kathodenfall im Magnetfeld²⁾ aufgestellt. Die betr. Beobachtungen ließen ev. interessante Schlüsse auf die räumliche Verminderung der Kanalstrahlenquelle infolge des Magnetfeldes zu. Ich will vorläufig hierauf nicht näher eingehen, nur darauf hinweisen, daß eine Wiederholung der betr. Beobachtungen mit genaueren Mitteln sehr wünschenswert wäre.

Über die Herleitung des Gesetzes, daß der Kathodenfall langsamer steigt als proportional der ersten Potenz der Stromdichte, siehe IV § 8 S. 27.

§ 8. Der Glimmlichtsaum bisher unerklärlich.

Die früher von einigen Forschern vertretene Auffassung der Dunkelraumlänge als eine Art freier Weglänge positiver oder negativer Partikelchen läßt sich mit den Begriffen der kinetischen Gastheorie nicht vereinigen. Vgl. vor. Hypothese 5 in IV § 7.

Theoretisch einwandfreier ist der Versuch, den Dunkelraum und den Glimmlichtsaum dadurch zu erklären, daß die Ionisation im Dunkelraum klein wäre und am Orte des Saumes infolge des Ionisierens seitens der sekundären Elektronen plötzlich sehr stark in die Höhe ginge. Daß immerhin auch diese Vorstellung falsch ist, läßt sich quantitativ mit Hilfe gewisser Messungen aus der letzten Zeit beweisen. Wir werden rechnerisch feststellen, daß weder die Ionenzahl, noch die Geschwindigkeit der ionisierenden Elektronen im Saume eine so plötzliche Veränderung durchmachen kann, daß sich dadurch die Schärfe des Saumes erklären könnte.

Ich erinnere an die durch vielerlei Messungen bestätigte Auffassung, daß das Feld in der Nähe der Kathode besonders stark ist, und daß der Glimmlichtsaum sich nicht durch Unstetigkeit in der Feldstärke auszeichnet. Im Glimmlichtsaum hat das Feld etwa die Stärke

¹⁾ Versuche von der Art der in V § 10 beschriebenen, aber mit verbesserten Methoden, wurden angefangen, mußten aber infolge des Kriegszustandes vorläufig unterbrochen werden.

¹⁾ Vgl. Fußnote in IV § 8, Spalte 1, Seite 25.

²⁾ Siehe IV § 8, Seite 25 und 26.

50 bis 100 Volt/cm. Weiter weg von der Kathode, im negativen Glimmlicht, hat das Feld seine geringste Stärke. Ich gehe im folgenden davon aus, daß diese Auffassung richtig ist.

Eine Folge des starken Feldes vor der Kathode (ev. Kathodensprung) ist, daß die primären Kathodenstrahlen meistens innerhalb eines kleinen Bruchteils der Dunkelraumlänge etwa 100 voltige (oder mehr) Geschwindigkeit bekommen. Demnach kann man damit rechnen, daß die primären Elektronen im Dunkelraum und ein Stück ins negative Glimmlicht hinein gleichmäßig ionisieren, und zwar laut Ionisierungsmessungen von W. Kossel¹⁾ und F. Meyer²⁾ im Mittel ungefähr einmal auf 4 freie Elektronenweglängen λ . Nun hat der Dunkelraum etwa die Länge 4λ ; der Einfachheit halber rechnen wir gerade mit 4λ . Wir teilen den Dunkelraum in vier Schichten von der Dicke λ . Die Ionisation denken wir uns in die Mittelebenen (1), (2) ... dieser Schichten verlegt. Die Ebene (5) fällt dabei schon ins negative Glimmlicht hinein.

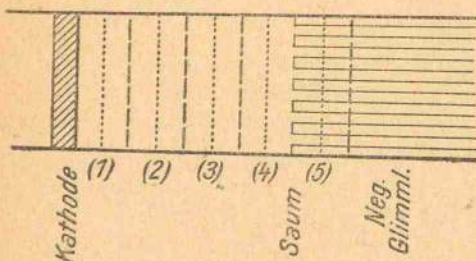


Fig. 2.

Die sekundliche Anzahl primärer Elektronen sei n . In (1) finden dann sekundlich $n/4$ Ionisierungen statt. Von den sekundären Elektronen nehmen wir an, daß sie bei m -Stößen αm mal ionisieren. Dann finden in (2) pro Sekunde $n/4 + \alpha n/4$ Ionisierungen statt.

Die zur Ionenmenge relative Anzahl der Wiedervereinigungen muß in den stärkeren Feldern kleiner als in den schwächeren sein, jedenfalls nicht umgekehrt. Die Wiedervereinigung kann demnach nicht dazu beitragen, die relative Ionisierung in der Gegend des Saumes, wo das Feld schwächer als im Dunkelraum ist, zu erhöhen. Wir rechnen also zugunsten der zu bekämpfenden Theorie, wenn wir die Wiedervereinigung vernachlässigen. Sie dürfte übrigens in Wirklichkeit im Dunkelraum äußerst schwach sein.

Es ist nun eine einfache Sache, die Anzahl der Ionisierungen auch in den Mittelebenen

(2), (3) usw. zu bestimmen. Das Resultat dieser Bestimmungen ist hier tabellarisch zusammengestellt:

In der Mittelebene Nr.	Anzahl der Ionisierungen ¹⁾ pro Sekunde	d. h.	für
		$\alpha = \frac{1}{3}$	$\alpha = 1$
(1)	$n/4$	$n/4 \cdot 1$	$n/4 \cdot 1$
(2)	$n/4 (1 + \alpha)$	$n/4 \cdot 1,33$	$n/4 \cdot 2$
(3)	$n/4 (1 + 2\alpha + \alpha^2) =$ $= n/4 (1 + \alpha)^2$	$n/4 \cdot 1,77$	$n/4 \cdot 4$
(4)	$n/4 (1 + \alpha)^3$	$n/4 \cdot 2,37$	$n/4 \cdot 8$
(5)	$n/4 (1 + \alpha)^4$	$n/4 \cdot 3,16$	$n/4 \cdot 16$

Nach Messungen von W. Kossel²⁾ und Fr. Meyer³⁾ zu urteilen, ist α höchstens etwa gleich $1/3$. Wir sehen aus der Tabelle, daß dieses α einen ganz sanften Anstieg der Ionisierung zwischen (4) und (5) ergibt. Aber auch das größte denkbare α , nämlich $\alpha = 1$, gibt um den Saum herum bloß eine Verdopplung der Ionisierung auf der Strecke λ . Wenn nun beachtet wird, daß die sichtbare und auch photographisch untersuchte Lichtausstrahlung am Saum innerhalb $0,2\lambda$ um das 10- bis 20fache wachsen kann, so ist es klar, daß dies nicht auf die Ionisierung zurückgeführt werden kann.

Eine neue Geschwindigkeitsstufe der sekundären Elektronen kann im Saume auch nicht die plötzliche Lichtverstärkung erklären. Es sollte dies eine für den Saum charakteristische niedrigere mittlere Geschwindigkeit der sekundären Elektronen sein. Es dürfte genügen, den Beweis in folgender Weise anzudeuten. Die in der Nähe des Saumes erzeugten Elektronen müssen über eine längere Strecke laufen, um zur Ionisationsgeschwindigkeit zu gelangen, als die näher an der Kathode im stärkeren Feld entstandenen. Nun sind aber nach der kinetischen Gastheorie freie Weglängen von einem kleineren Betrag häufiger als solche von einem willkürlich größeren Betrag. Der Prozentgehalt der mitten im Dunkelraum erzeugten Elektronen an solchen, die beim Stoßen eine gewisse kleine Geschwindigkeit (z. B. die kleinste Ionisationsgeschwindigkeit) besitzen, ist demnach größer als der entsprechende Prozentgehalt der nahe vor dem Glimmlichtsaum erzeugten Elektronen. Die Anzahl gerade mit dieser Geschwindigkeit stoßenden Elektronen nimmt also um den Glimmsaum herum noch langsamer zu als die Anzahl Ioni-

1) Vgl. IV, Anfang § 8.

2) F. Meyer, Ann. d. Phys. 45, I, 1914.

1) Man beachte die Verwandtschaft unserer Formel $n/4(1+\alpha)^n$ mit der Townsendschen $n \cdot e^{\alpha x}$, siehe J. Townsend, The theory of Ionisation of Gases by collision. London 1910, S. 3 u. 4.

2) W. Kossel, Ann. d. Phys. 37, 407, 1912.

3) F. Meyer, Ann. d. Phys. 45, I, 1914.

sierungen überhaupt. Hiermit ist der anzudeutende Beweis beendet.

Es leuchtet wohl jedem mit diesem Gebiete Vertrauten ein, daß durch die vereinfachende Annahme der Ionisierung in Schichten, so wie sie hier benutzt wurde, kein gegen die zu bekämpfende Theorie ungünstiges Moment eingeführt wurde. Es ist also bewiesen, daß die bisherigen eben erwähnten Theorien bei der vorausgesetzten Feldform das schroffe Einsetzen des Glimmlichtsaumes nicht erklären können.

§ 9. Erklärung der optischen Unterschiede zwischen dem ersten (Hittorfschen) Dunkelraum und dem Glimmlichtsaum.

In IV § 7, Hypothese 5 bis 7 und in IV § 9 habe ich eine leistungsfähige Theorie des Glimmlichtsaumes gegeben. Ich stellte dort die Hypothese auf, daß dasjenige Licht, wodurch sich der Glimmlichtsaum so stark vom Dunkelraum abhebt, hauptsächlich bei Wiedervereinigung vorher ganz getrennter Elektronen und Ionen entsandt wird.

Die betreffende Wiedervereinigung kann nach dem obigen § 4 nur dort vorkommen, wo ein Klebenbleiben der Elektronen an neutralen Molekülen stattfindet. Nun ist das Gebilde: Molekül mit dem daran klebenden Elektron, kein sehr festes. Darum werden solche Gebilde in stärkeren Feldern (Größenordnung über 50 bis 100 Volt/cm) zerrissen bzw. an ihrem Entstehen verhindert. Der Dunkelraum ist ein Gebiet, wo das Kleben durch starke Felder verhindert wird. Das negative Glimmlicht ist ein schwachfeldiges Gebiet mit reichlicher Wiedervereinigung.

Der Glimmlichtsaum bezeichnet eine Äquigradientfläche, nämlich die Grenze zwischen den genannten Gebieten mit und ohne Wiedervereinigung ganz getrennter Ionen.

Diese Theorie erklärt:

1. die vorher unbegreifliche Schärfe des Glimmlichtsaumes;
2. das Vorkommen zweifachen Glimmlichtsaumes in Gasgemischen (siehe unter Hypothese 7 in IV § 7);
3. das Fehlen des Saumes in ganz reinem Helium (vgl. IV § 7, S. 23 unten).

Das Wiedervereinigungsleuchten¹⁾, wodurch sich der Glimmlichtsaum vom Dunkelraum abhebt, besteht in H_2 aus dem Viellinienspektrum und wohl auch aus einem kontinuierlichen Spektrum; in N_2 aus den sog. positiven Banden. Es ist dasselbe Leuchten, welches für die positive Säule charakteristisch ist.

Auch im starken Felde des Dunkelraumes kommt allerdings das Viellinienspektrum des H_2 vor. Dies widerspricht nicht der obigen Theorie, denn man kann sich gut denken (vgl. IV § 7, vor dem Theorem 8), daß Wiedervereinigungsleuchten von der betr. Art auch von einem bloß gelockerten Molekül entsandt wird, während sich dieses mit seinem nicht ganz frei gewesenen Elektron wieder fester verbindet. Solche gelockerte Gebilde kann man sich im Dunkelraum gut denken.

Ich vermute, daß das kräftige Leuchten unmittelbar vor der Kathode (erste Kathodenschicht) von durch Kanalstrahlenstöße gelockerten Gebilden herrührt (vgl. die spätere Abhandl. § 3).

Beachtenswert ist, daß das Wiedervereinigungsleuchten im ganzen negativen Glimmlicht denselben Charakter hat. Dies bedeutet nämlich, weil die Ionisation im Innern des negativen Glimmlichts fast ausschließlich von schnellen primären Elektronen besorgt werden muß, daß die von so schnellen Elektronen erzeugten Ionen bei der Wiedervereinigung mit demselben Licht leuchten wie die von langsamen Elektronen erzeugten Ionen.

Zur Stütze der obigen Theorie habe ich „künstliche“ Dunkelräume experimentell hervorgebracht, siehe IV § 9 und besonders die in der folgenden Nummer dieser Zeitschrift erscheinende Arbeit von Fräulein T. Krüger und mir.

Das Feldminimum befindet sich wohl etwa an dem von der Kathode entfernteren Ende der Kanalstrahlenquelle. Vor diesem Minimum muß natürlich der Glimmlichtsaum auftreten. Ein gewisser Zusammenhang zwischen der Dunkelraumlänge und der Tiefe der Kanalstrahlenquelle besteht natürlich. Sie sind aber unter sich nicht genau proportional. Vgl. einige Bemerkungen in IV § 8.

Schließlich ist zu bemerken, daß die Hypothese des Leuchtens bei der Wiedervereinigung schon alt ist, vgl. eine Fußnote V § 13. Weiter habe ich gefunden, daß Aston¹⁾ schon 1907 sich das Entstehen des Glimmsaumes so gedacht hat: Nicht vollständig wiedervereinigte Gebilde sollten im Dunkelraum zerfallen, aber im schwachfeldigen negativen Glimmlicht bestehen können. Diese Gebilde sollten das neue Licht des Saumes und des negativen Glimmlichts erzeugen. Sein Gedankengang hat Ähnlichkeit mit dem meinigen.

§ 10. Schluß.

Die obige Zusammenstellung umfaßt nicht alle Teile meiner bezüglichen Theorie nebst

1) Vgl. die für das nächste Heft vorgesehene Arbeit.

1) F. W. Aston, Proc. Roy. Soc. London 72, 91, 1907.

dazu gehörigen Messungen. So wurde dort nicht erwähnt: Die Bestimmung der kleinsten noch zur Leuchterregung ausreichenden Elektronengeschwindigkeiten II § 5¹⁾ und die Erklärung der sog. Righischen magnetischen Strahlen in V § 12. Versuche von Ives²⁾ geben eine weitgehende Auskunft über die Natur der magnetischen Strahlen. Soweit da meine Theorie in Frage kommt, wird sie bestätigt. Ives erwähnt meine Theorie, aber nicht deren Bestätigung.

Die vielen nachträglichen Bestätigungen meiner Theorie befestigen meine Hoffnung, daß ich recht gut das Richtige getroffen habe, und daß meine Theorie ein gutes heuristisches Mittel sein könnte. Es dürfte beim planmäßigen Vorgehen viel Interessantes aus Beobachtungen am Glimmstrom zu holen sein, trotzdem die Ionisationsvorgänge immer noch nur recht oberflächlich bekannt sind.

1) Vgl. die in der nächsten Nummer erscheinende Tafel I, wo allerdings an den angegebenen, direkt gemessenen Spannungen keine Korrekturen angebracht wurden.

2) James E. Ives, Phys. Rev. 9, 349, 1917.

(Eingegangen 13. September 1918.)

Berichtigung.

Der Seite 506, Zeile 16 angegebene Bereich von n hat richtig zu lauten: $n = 2, 3, 4 \dots (1)$.
A. Szarvassi.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Erlangen Dr. W. Dilthey für Chemie, an der böhmischen Technischen Hochschule in Prag Dr. V. Vojtěch für Photochemie und Photographie.

Verliehen: Dem Privatdozent für Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Heinrich Faßbender der Titel Professor.

Gestorben: Der ord. Professor der Mathematik und mathematischen Physik an der Universität Freiburg (Schweiz) Dr. Franz Daniels.

Gesuche.

Absolvierter Physiker

(Dr. phil. Universitätsassistent), praktisch begabt, guter Zeichner, sucht nach Kriegsende Anstellung in größerem techn. Betrieb. Anträge mit Bedingungen unter **G. H.** an den Verlag S. Hirzel, Leipzig, Königstr. 2.

Physiker,

absolviert, mit Doktorat aus Mathematik, militärfrei, Laboratoriumspraxis, sucht Anstellung. Angebote unter **S. H. 531** an den Verlag der Physik. Zeitschrift (S. Hirzel), Leipzig, Königstr. 2.

Physiker (promoviert),

bisher auf akustischem und ballistischem Gebiet gearbeitet, sucht Stellung an größerem industriellen oder wissenschaftlichen Institut. Angebote unter **S. H. 533** mit Gehaltsangabe an den Verlag der Physik. Zeitschrift (S. Hirzel), Leipzig, Königstraße 2.

Promov. Physiker,

zurzeit in ungekündigter Stellung eines kriegswichtigen Betriebes mit reicher praktischer Erfahrung und konstruktiven Fähigkeiten auf dem Gebiet der Hochfrequenz-, Schwachstrom- und Hochspannungstechnik, sowie Gasentladung, sucht anderweitige Betätigung für Friedenswirtschaft auf obigen oder verwandten Gebieten der Elektrotechnik in gehobener Stellung. Zuschriften unter **S. H. 535** an die Exped. d. Physik. Zeitschrift (S. Hirzel), Leipzig, Königstraße 2.

Angebote.

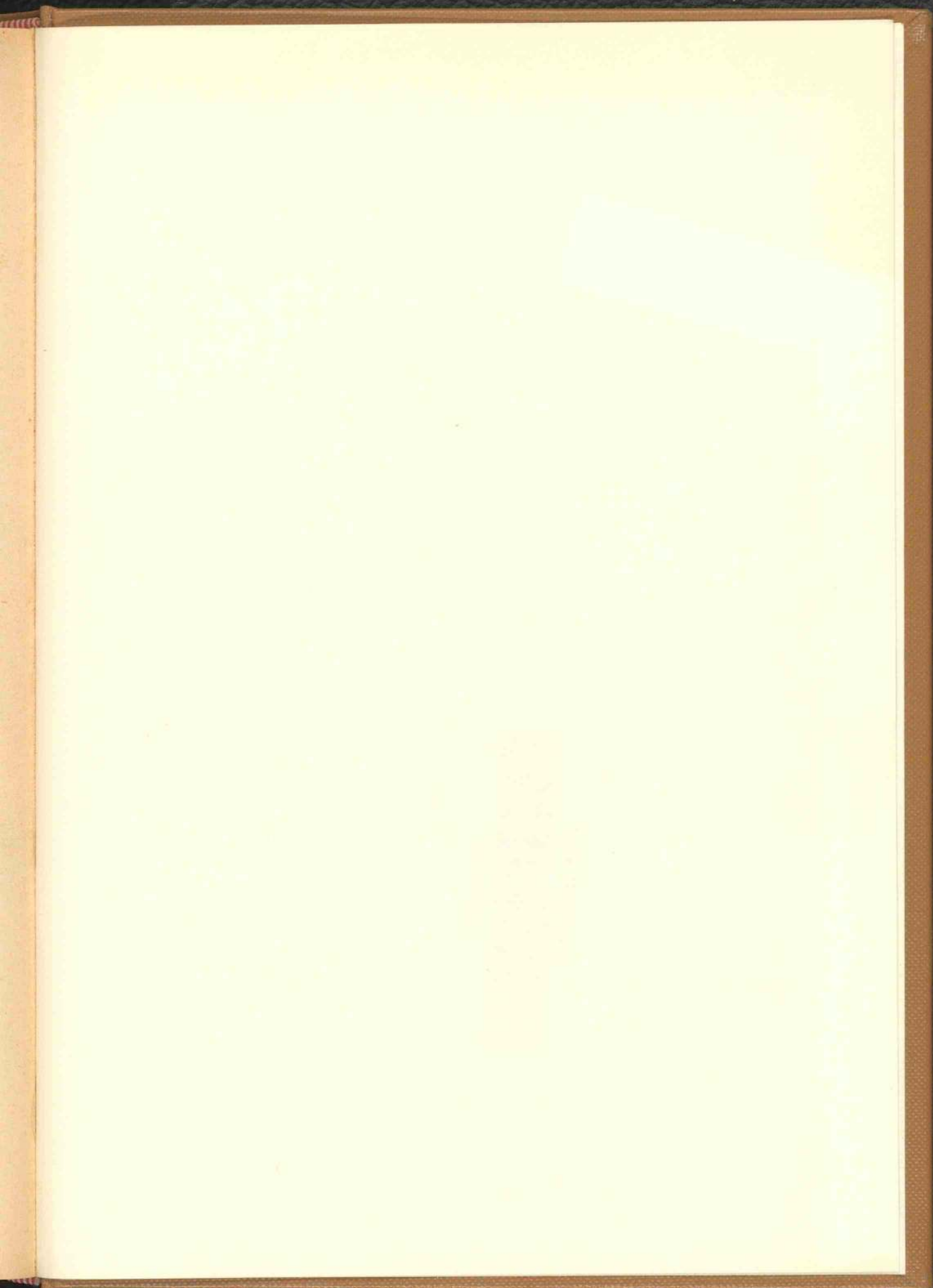
Für die wissenschaftliche und technische Bearbeitung von Fragen aus dem Gebiete der Schwachstromkabeltechnik

1–2 Physiker

oder

diplom. Ingenieure

sofort gesucht. Angebote mit Angabe der Gehaltsansprüche, der bisherigen Tätigkeit und des Militärverhältnisses erbeten unter **S. H. 530** an den Verlag dieser Zeitschr. S. Hirzel, Leipzig, Königstraße 2.





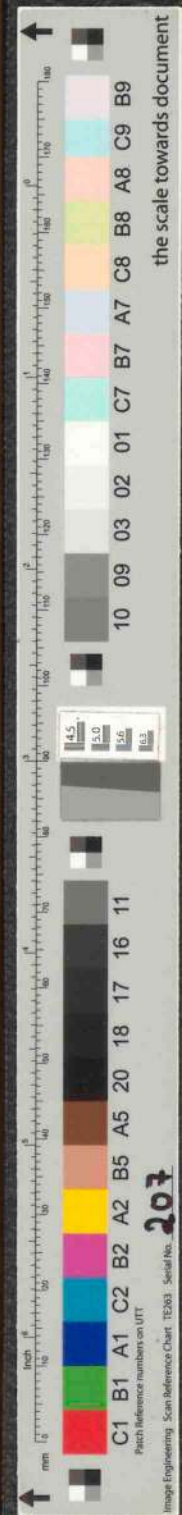
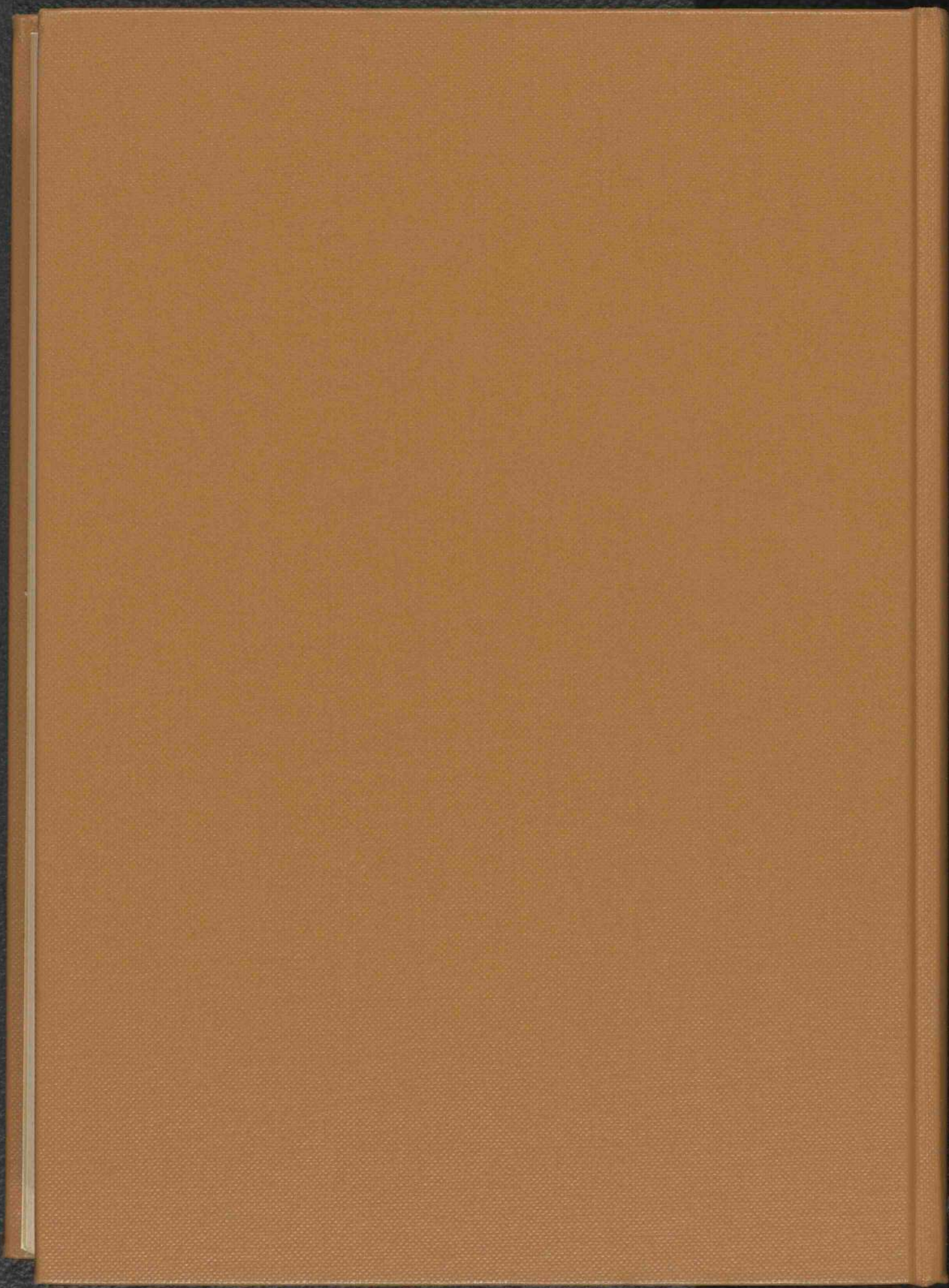
RAL-RG 495
Buchbinderei
PETER CLAUSEN

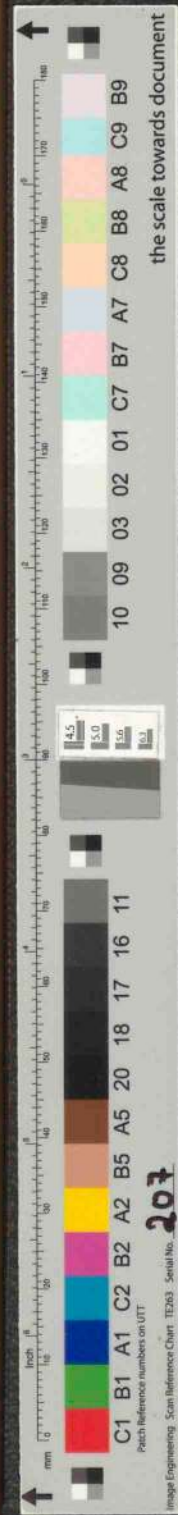
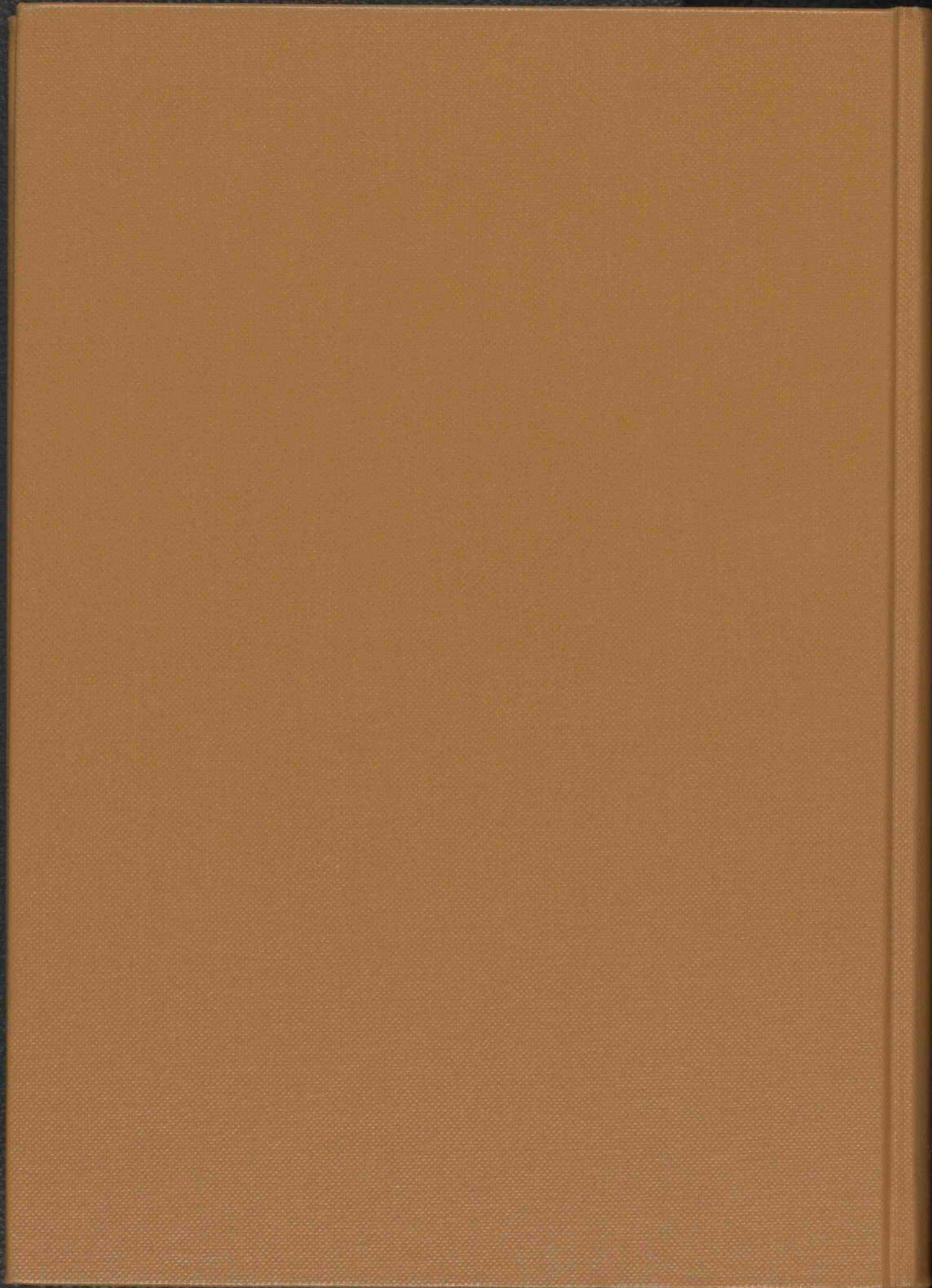
895c

N12<907585196 018

SUB Hamburg
947407704







Y
684

19

1918